Зміст

4 Дослідження граничних задач математичної фізики та методів побудови їх розв'язків

4.1 Поняття узагальнених функцій та дії над ними

Поняття узагальнених функцій виникло як результат природного розширення класичного поняття функції. Так, виконання деяких дій над класичними функціями виводить за межі таких. Вперше узагальнену функцію в математичні дослідження у 1947 році ввів англійський фізик Поль Дірак у своїх квантово-механічних дослідженнях. Така функція отримала назву δ-функція Дірака. Ця функція дозволяє записати просторову щільність фізичної величини (маси, величини заряду, інтенсивності джерела тепла, сили тощо) зосередженої або прикладеної в одній точці.

Розглянемо приклад, який дає уявлення про δ-функцію.

Приклад 4.1.0.1

Нехай ε-окіл точки x прямої є джерелом тепла одиничної інтенсивності. Будемо припускати також, що джерело рівномірно розподілене по довжині ε-околу. Враховуючи припущення, джерело тепла може бути описане наступною функцією

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < -\varepsilon, \\ 1/2\varepsilon, & -\varepsilon \le x < \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon \le x. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Зауваження 4.1.0.1 — При цьому важливо, що сумарна кількість тепла, що виділяється ε-околом дорівнює одиниці, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.1.2}$$

Припустимо, що фізичний розмір джерела такий малий, що його розмірами можна нехтувати, тобто будемо вважати що джерело є точковим.

В цьому випадку природно визначити функцію

$$f_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Легко бачити, що інтеграл Лебега функції $f_0(x)$ існує і дорівнює нулю:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.1.4}$$

Тобто користуючись звичайним граничним переходом (поточковою границею) ми отримуємо функцію, яка не моделює одиничне точкове джерело тепла.

Для коректного визначення граничної функції будемо розглядати замість сильної (поточкової) границі, слабку границю.

Введемо набір пробних функцій $D(\mathbb{R}^n) = C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$ — множину нескінченно диференційовних в $\mathbb{R}^n$ функцій з компактним носієм.

Зауваження 4.1.0.2 — Нагадаємо, що функція має компактний носій якщо існує куля $U_A(0)$ радіусу A, за межами якої функція обертається в тотожній нуль разом з усіма своїми похідними.

Твердження 4.1.0.1

Виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \tag{4.1.5}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$.

Доведення. Справді:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \varphi(0)\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,\mathrm{d}x\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,\mathrm{d}x = \tag{4.1.6}$$

$$= \frac{\eta(\varepsilon)}{2\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}x = \eta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Це означає, що слабка границя дорівнює $\varphi(0)$ для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$. $\square$

Зауваження 4.1.0.3 — Тут ми винесли середнє значення підінтегралньої функції $g(x) = |\varphi(x) - \varphi(0)|$ з-під інтегралу, тобто $\eta(\varepsilon) = g(\xi) = |\varphi(\xi) - \varphi(0)|$, де $\xi = \xi(\varepsilon)$ — якась середня точка, $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Далі, $|\varphi(\xi) - \varphi(0)| \to 0$ при $\xi \to 0$, а $\xi \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ бо $|\xi| < |\varepsilon|$.

Нарешті, $\eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ адже φ — неперервна, тобто $|\varphi(\xi) - \varphi(0)| \to 0$ при $\xi \to 0$, і знову-ж-таки $\xi \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ бо $|\xi| < |\varepsilon|$.

Таким чином δ-функцію Дірака можна визначити, як слабку границю послідовності функції f_ε на множині $D(\mathbb{R}^1)$, що збігається до числа $\varphi(0)$ при $\varepsilon \to 0$.

Можна записати

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.7}$$

Останню рівність будемо розглядати як лінійний неперервний функціонал, який будь-якій функції φ ставить у відповідність число $\varphi(0)$.

Визначення 4.1.0.1 (узагальненої функції). *Узагальненою функцією f будемо називати будь-який лінійний неперервний функціонал заданий на множині основних (пробних) функцій $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.*

Зауваження 4.1.0.4 — Лінійність і неперервність розуміємо в традиційному сенсі:

$$\langle f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2\rangle = a_1 \langle f, \varphi_1\rangle + a_2 \langle f, \varphi_2\rangle\,, \tag{4.1.8}$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \langle f, \varphi_k\rangle = 0, \tag{4.1.9}$$

для довільної $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такої, що $D^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varphi_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ для довільних $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Серед усіх узагальнених функцій виділяють клас регулярних узагальнених функцій.

Визначення 4.1.0.2 (регулярної функції)**.** *Регулярними* називаються функції, які можуть бути представлені у вигляді

$$\varphi \mapsto \langle f, \varphi\rangle = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.1.10}$$

з функцією $f(x) \in L^1_{\text{loc}}$ — тобто абсолютно інтегровною функцією на будь-якому компакті, що належить $\mathbb{R}^n$.

Зауваження 4.1.0.5 — Кожна локально інтегрована функція визначає *єдину* регулярну узагальнену функцію і навпаки, кожна регулярна узагальнена функція визначає *єдину* локально інтегровану функцію.

Зауваження 4.1.0.6 — *Єдиність* означає, що дві локально інтегровані функції співпадають якщо вони відрізняються між собою на множині нульової міри.

Визначення 4.1.0.3 (сингулярної функції)**.** Усі інші лінійні неперервні функціонали визначають *сингулярні* узагальнені функції.

Приклад 4.1.0.2 (сингулярної функції)

δ-функція Дірака.

Зауваження 4.1.0.7 — Дуже часто узагальнені функції називають також *розподілами*.

Хоча сингулярні узагальнені функції є частинним випадком узагальнених функцій, але для їх представлення найчастіше використовується позначення скалярного добутку таке саме як і для регулярних узагальнених функцій.

Справа в тому, що

Твердження 4.1.0.2

Для будь-якої сингулярної узагальненої функції $f : \varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle$ можна побудувати послідовність регулярних узагальнених функцій, яка слабко збігається до неї, тобто $\exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ така, що

$$\lim_{k\to\infty} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle f, \varphi \rangle \tag{4.1.11}$$

Зауваження 4.1.0.8 — Ця послідовність не єдина.

Зауваження 4.1.0.9 — δ-функцію ми побудували як границю $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon$, яку можна було назвати *δ-образною* послідовністю.

Можна навести і інші

Приклади 4.1.0.3 (δ-образних послідовностей)

δ-образними послідовностями також є:

- $f_m(x) = \dfrac{m}{\pi(1 + m^2x^2)}$;
- $f_m(x) = \dfrac{\sin mx}{\pi x}$;
- $f_m(x) = \dfrac{m}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{m^2x^2}{2}\right\}$.

Зауваження 4.1.0.10 — Константи у знаменниках тут для того, щоби

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.1.12}$$

4.1.1 Узагальнені функції та фізичні розподіли

Узагальнені функції (часто їх називають розподілами) можна інтерпретувати як розподіл електричних, магнітних зарядів або розподіл мас, тощо. Так наприклад функцію Дірака можна трактувати як щільність з якою розподілена маса, що дорівнює одиниці в точці $x = 0$.

Визначення 4.1.1.1 (зсунутої δ-функції)**.** Аналогічним чином можна ввести і зсунуту функцію Дірака.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a). \tag{4.1.13}$$

Зауваження 4.1.1.1 — Використовуючи цю формулу можна зобразити щільність розподілу зосереджених мас або іншої фізичної величини в точках прямої.

Приклад 4.1.1.1

Так, якщо в точках x_i розташовані зосереджені маси m_i, $i \in I$, то щільність такого розподілу мас можна зобразити у вигляді

$$\rho(x) = \sum_{i\in I} m_i \cdot \delta(x - x_i). \tag{4.1.14}$$

Зауваження 4.1.1.2 — При цьому повну масу, яка зосереджена на прямій можна порахувати за формулою

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i\in I} m_i. \tag{4.1.15}$$

Визначення 4.1.1.2 (δ-функції в $\mathbb{R}^n$). Аналогічно δ-функції, введеній на прямій, можна ввести δ-функцію для n-вимірного евклідового простору:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a). \tag{4.1.16}$$

Зауваження 4.1.1.3 — Тоді щільність розподілу точкових мас у просторі можна також записати у вигляді

$$\rho(x) = \sum_{i \in I} m_i \cdot \delta_3(x - x_i). \tag{4.1.17}$$

Нагадаємо

Твердження 4.1.1.1

Точковий одиничний електричний заряд розташований в точці x_0 створює потенціал рівний

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(y-x_0)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x-y|} = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} \tag{4.1.18}$$

в точці $x \in \mathbb{R}^3$.

Зауваження 4.1.1.4 — В цьому випадку $\delta(y-x_0)$ можна сприймати як щільність одиничного точкового заряду.

Приклад 4.1.1.2

Якщо щільність зарядів $f(y)$ представляє собою локально інтегровану функцію, то маємо для потенціалу електростатичного поля відому формулу електростатики:

$$P(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x-y|}. \tag{4.1.19}$$

Визначення 4.1.1.3 (поверхневої функції Дірака)**.** Узагальненням точкової функції Дірака є так звана *поверхнева функція Дірака* δ_S, яку можна визначити як лінійний неперервний функціонал:

$$\varphi \mapsto \langle \delta_S, \varphi \rangle = \iint\limits_S \varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.20}$$

Зауваження 4.1.1.5 — Ця узагальнена функція може бути інтерпретована як щільність розподілу зарядів на поверхні S.

Приклад 4.1.1.3

Потенціал електростатичного поля можна записати у вигляді

$$W(x) = \left\langle \mu(y)\delta_S(y), \frac{1}{4\pi|x-y|} \right\rangle = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(y)\delta_S(y)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x-y|} = \iint\limits_S \frac{\mu(y)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x-y|}. \tag{4.1.21}$$

Визначення 4.1.1.4 (потенціалу простого шару)**.** Легко бачити, що $W(x)$ представляє собою потенціал електростатичного поля, утворений зарядженою поверхнею S і називається *потенціалом простого шару*.

4.1.2 Дії над узагальненими функціями

Головною перевагою узагальнених функцій є те, що будь-яка узагальнена функція має похідні будь-якого порядку.

Для визначення похідної узагальненої функції розглянемо звичайну неперервно диференційовну функцію $f(x)$ і згадаємо, що виконується наступна

Формула 4.1.2.1 (інтегрування за частинами)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha_1\ldots\alpha_n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) D^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.1.22}$$

де $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, яка є істинною для будь-якої функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Права частина цієї рівності має зміст для будь-якої локально-інтегровної функції f.

Таким чином можемо дати

Визначення 4.1.2.1 (похідної локально-інтегровної функції)**.** *Похідною* $D^{\alpha_1\dots\alpha_n}$ будь-якої локально-інтегровної функції f будемо називати лінійний неперервний функціонал

$$\langle D^{\alpha_1\dots\alpha_n} f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) D^{\alpha_1\dots\alpha_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.23}$$

Аналогічним чином вводиться похідна і для сингулярних узагальнених функцій.

Визначення 4.1.2.2 (похідної сингулярних функцій)**.** $D^{\alpha_1\dots\alpha_n} f$ визначається як лінійний неперервний функціонал

$$\langle D^{\alpha_1\dots\alpha_n} f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^{\alpha_1\dots\alpha_n}\varphi\rangle. \tag{4.1.24}$$

Розглянемо приклади обчислення похідних деяких узагальнених функцій:

Приклад 4.1.2.1

Знайти θ', де

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & 0 < x \end{cases} \tag{4.1.25}$$

— функція Хевісайда.

Розв'язок. Розглянемо наступні рівності:

$$\langle \theta', \varphi\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \\ = -(\varphi(\infty) - \varphi(0)) = \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0) - 0 = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle. \tag{4.1.26}$$

Таким чином можна записати $\theta' = \delta$.

Приклад 4.1.2.2

Знайти $\delta^{(2)}$.

Розв'язок.

$$\left\langle \delta^{(2)}, \varphi \right\rangle = \left\langle \delta, \varphi^{(2)} \right\rangle = \varphi^{(2)}(0). \tag{4.1.27}$$

Приклад 4.1.2.3

f — кусково неперервно-диференційовна функція, яка має в деякій точці x_0 розрив першого роду.

Розв'язок.

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= -\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= -f(x_0 - 0) + \varphi(x_0) + f(x_0 + 0)\varphi(x_0) + \\
&\quad + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \varphi(x_0)[f(x_0)] + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \varphi(x_0)[f(x_0)] + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)'\,\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big([f(x_0)] \cdot \delta(x - x_0) + \{f(x)'\}\Big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

де $[f(x_0)] = f(x_0+0) - f(x_0-0)$, $\{f'(x)\}$ — локально інтегрована функція, яка співпадає з звичайною похідною функції f в усіх точках де вона існує.

Зауваження 4.1.2.1 — Таким чином для функції, яка має скінченну кількість точок розриву першого роду має місце така формула обчислення похідної:

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \sum_i [f(x_i)]\delta(x - x_i). \tag{4.1.29}$$

Приклад 4.1.2.4

Нехай функція $f(x)$ задана в просторі $\mathbb{R}^3$ кусково неперервно-диференційовна і має розрив першого роду на кусково–гладкій поверхні S. Будемо припускати, що поверхня розділяє простір $\mathbb{R}^3$ на два півпростори $\mathbb{R}^3_+$ та $\mathbb{R}^3_-$.

Розв'язок. Зафіксуємо на S напрям нормалі, яка направлена всередину $\mathbb{R}^3_+$.

Визначимо похідну від $f(x)$:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= -\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \\ &= -\iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_-} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \\ &= \iint\limits_{S} f(x+0)\varphi(x)\cos(n, x_i)\,\mathrm{d}S - \\ &\quad - \iint\limits_{S} f(x-0)\varphi(x)\cos(n, x_i)\,\mathrm{d}S + \\ &\quad + \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+} \varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_-} \varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \\ &= \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S(x)\cos(n, x_i) \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

де $\{\partial f(x)/\partial x_i\}$ — класична похідна функції $f(x)$ в усіх точках, де вона існує, $[f(x)]_S = (f(x+0) - f(x-0))|_{x\in S}$ — стрибок функції $f(x)$ на поверхні S.

Таким чином можна записати, що

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S(x)\cos(n, x_i)\delta_S(x). \tag{4.1.31}$$

4.1.3 Носій та порядок узагальнених функцій

Вводячи поняття узагальнених функцій ми використовували множину основних (пробних) функцій $D(\mathbb{R}^n) = C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$. Взагалі кажучи, простір пробних функцій (а таким чином і розподілів) можна узагальнити, ввівши простір основних функцій як $D(\Omega) = C_{\infty}^{0}(\Omega)$, тобто клас пробних функцій складається з функцій, які нескінченно-диференційовні в Ω і на границі $\partial\Omega$ перетворюються в нуль разом з усіма своїми похідними.

Для побудови функцій такого класу використовуються ε-шапочки.

Визначення 4.1.3.1 (ε-шапочки)**.** ε-шапочкою називається функція

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right\}, & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases} \tag{4.1.32}$$

Зауваження 4.1.3.1 — Сталу C_ε обираємо так, щоби

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.1.33}$$

Легко бачити, що

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \varphi(x). \tag{4.1.34}$$

Це означає, що ε-шапочки слабко збігаються до $\delta(x)$ при $\varepsilon \to +0$.

Введемо функцію

$$\eta(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y, \tag{4.1.35}$$

де $\chi(x)$ – характеристична функція множини $\Omega_{2\varepsilon}$, тобто

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{2\varepsilon}, \\ 0, & x \notin \Omega_{2\varepsilon}, \end{cases} \tag{4.1.36}$$

а множина $\Omega_{2\varepsilon}$ утворилася з множини Ω шляхом відступу всередину Ω від границі на полосу ширини 2ε.

Тоді будь-яка функція $\varphi(x) = \eta(x)f(x) \in D(\Omega)$ якщо $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Таким чином можна утворити достатньо широкий клас пробних функцій.

Зауваження 4.1.3.2 — Узагальнені функції взагалі кажучи не мають значень в окремих точках.

В той же час можна говорити про обертання узагальненої функції на нуль у деякій області.

Визначення 4.1.3.2 (обертання узагальненої функції на нуль)**.** Будемо говорити, що узагальнена функція f *обертається на нуль* у області Ω, якщо $\langle f, \varphi \rangle = 0$, $\forall \varphi \in D(\Omega)$.

Визначення 4.1.3.3 (нульової множини узагальненої функції)**.** *Нульовою множиною* O_f узагальненої функції f будемо називати об'єднання усіх областей у яких узагальнена функція f обертається на нуль.

Визначення 4.1.3.4 (носія узагальненої функції)**.** *Носієм* $\operatorname{supp} f$ узагальненої функції f називають множину $\mathbb{R}^n \setminus O_f$.

Визначення 4.1.3.5 (порядку узагальненої функції)**.** Будемо говорити, що узагальнена функція f має *порядок сингулярності* (або просто порядок) $\le j$, якщо

$$f = \sum_{|\alpha| \le j} D^\alpha g_\alpha, \tag{4.1.37}$$

де $g_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Якщо число j у цій формулі неможливо зменшити, то кажуть що порядок узагальненої функції f *дорівнює* j.

Нехай f — узагальнена функція порядку j, а φ — довільна пробна функція. За визначенням

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \le j} \langle D^\alpha g_\alpha, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \le j} (-1)^{|\alpha|} \iiint\limits_{\Omega} g_\alpha D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \tag{4.1.38}$$

Неважко бачити, що права частина цієї формули зберігає зміст не тільки для функцій з класу $D(\Omega)$, але і для функцій ширшого класу $D^j(\Omega)$.

Зауваження 4.1.3.3 — Узагальнені функції порядку j можна визначати як лінійні неперервні функціонали на класі основних функцій $D^j(\Omega)$.

4.1.4 Згортка та регуляризація узагальнених функцій

Нехай $f(x), g(x)$ — дві локально-інтегровні функції в $\mathbb{R}^n$. При цьому функція

$$h(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y) f(x-y)| \,\mathrm{d}y \tag{4.1.39}$$

теж буде локально-інтегровна в $\mathbb{R}^n$.

Визначення 4.1.4.1 (згортки). *Згорткою* $f * g$ цих функцій будемо називати функцію

$$(f*g)(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) \,\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y) \,\mathrm{d}y = (g*f)(x). \tag{4.1.40}$$

Таким чином згортка є локально-інтегровною функцію і тим самим визначає регулярну узагальнену функцію, яка діє на основні функції за правилом

$$\varphi \mapsto \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} (f*g)(\xi)\varphi(\xi) \,\mathrm{d}\xi. \tag{4.1.41}$$

Розглянемо випадок згортки двох функцій f та ψ, де f — узагальнена, а ψ — основна (пробна) функція. Оскільки ψ — фінітна функція, то згортка $f * \psi$ існує, а враховуючи нескінчену гладкість пробної функції, $(f * \psi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Визначення 4.1.4.2. *Регуляризацією* узагальненої функції f будемо називати функцію $f_\varepsilon = f * \omega_\varepsilon$.

Зрозуміло, що $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а враховуючи властивості ε-шапочки ω_ε легко бачити, що

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{w.}} f, \tag{4.1.42}$$

тобто довели

Твердження 4.1.4.1

Будь-яка узагальнена функція є слабка границя своїх регуляризацій.

Приклад 4.1.4.1

Розглянемо узагальнену функцію

$$P\frac{1}{x-a}, \tag{4.1.43}$$

яка співпадає на усій числовій прямій з функцією $\frac{1}{x-a}$ за винятком точки a і визначає лінійний неперервний функціонал, який діє за правилом

$$\begin{aligned}\left\langle P\frac{1}{x-a},\psi\right\rangle &= \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\psi(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned} \tag{4.1.44}$$

Розглянемо узагальнену функцію

$$P\frac{1}{(x-a)^2}, \tag{4.1.45}$$

яка співпадає на усій числовій прямій з функцією $\frac{1}{(x-a)^2}$ за винятком точки a і визначає лінійний неперервний функціонал, який діє за правилом

$$\begin{aligned}\left\langle P\frac{1}{(x-a)^2},\psi\right\rangle &= \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned} \tag{4.1.46}$$

Покажемо, що

$$\left(P\frac{1}{x-a}\right)' = P\frac{1}{(x-a)^2} \tag{4.1.47}$$

з точки зору узагальнених функцій.

Доведення. Справді,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \left(P\frac{1}{x-a} \right)', \psi \right\rangle &= -\left\langle P\frac{1}{x-a}, \psi' \right\rangle = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\psi'(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi'(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x \right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}(\psi(x)-\psi(a))}{x-a} + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{d}(\psi(x)-\psi(a))}{x-a} \right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\left. \frac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a} \right|_{-\infty}^{a-\varepsilon} + \left. \frac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a} \right|_{a+\varepsilon}^{\infty} + \right. \\
&\qquad \left. + \int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x \right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x \right) - \\
&\qquad - \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{\psi(a-\varepsilon)-\psi(a)}{-\varepsilon} - \frac{\psi(a+\varepsilon)-\psi(a)}{\varepsilon} \right) = \\
&= -\mathrm{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = -\left\langle P\frac{1}{(x-a)^2}, \psi \right\rangle .
\end{aligned}
\tag{4.1.48}
$$

□