

Зміст

3 Побудова математичних моделей базових фізичних процесів	3
3.0 Оператор ∇ (лікбез математичної теорії поля)	3
3.0.1 Властивості оператора ∇	3
3.0.2 Оператори другого порядку	5
3.0.3 Приклади	5
3.1 Математичні моделі розповсюдження тепла та дифузії речовини	6
3.1.1 Закон збереження теплової енергії	6
3.1.2 Частинні випадки рівняння теплопровідності	10
3.1.3 Рівняння дифузії речовини	11
3.1.4 Задача Стефана (задача про остигання та затвердіння розплавленого металу)	14
3.2 Математичні моделі теорії пружності	18
3.2.1 Закони рівноваги елемента поверхні	21
3.2.2 Закон рівноваги елемента об'єму	22
3.2.3 Тензор напружень, головні вісі тензора напружень	24
3.2.4 Тензор деформацій і закони його перетворення	27
3.2.5 Перетворення тензора деформацій до нових прямокутних координат	30
3.2.6 Закон Гука. Зв'язок між тензором деформації та тензором напружень	33
3.2.7 Початкові та граничні умови для рівнянь теорії пружності	37
3.2.8 Спрощення системи рівнянь теорії пружності	39
3.2.9 Математична модель поздовжніх коливань стрижня	40
3.2.10 Математична модель поперечних коливань струни	41
3.3 Математичні моделі руху ідеальної рідини	44
3.3.1 Закон збереження маси	45
3.3.2 Закон збереження імпульсу	46
3.3.3 Закон збереження енергії	48
3.3.4 Інші термодинамічні функції та закон збереження ентропії	50
3.3.5 Додаткові умови математичної моделі руху ідеальної рідини	51
3.3.6 Задача обтікання тіл	51
3.3.7 Задача про поршень	52
3.3.8 Задача про вільну поверхню	53
3.3.9 Задача руху рідини в каналах	53

3.3.10	Ізоентропічні течії (течії з постійною ентропією)	55
3.3.11	Потенціальні течії	58
3.3.12	Модель акустичного руху рідини	62
3.3.13	Потенційне обтікання тонких тіл	65
3.4	Моделі руху в'язкої рідини	66
3.4.1	Закон збереження імпульсу	67
3.4.2	Закон збереження енергії	69
3.4.3	Додаткові умови	71
3.4.4	Умови на поверхні розділу двох середовищ	71
3.4.5	Граничні умови на вільній поверхні	72
3.5	Математичні моделі електростатики	73
3.5.1	Електричне поле. Напруженість електричного поля	74
3.5.2	Суперпозиція полів	75
3.5.3	Потік векторного поля. Теорема Гауса	75
3.5.4	Робота сил електростатичного поля. Потенціал електростатичного поля	77
3.5.5	Електростатичне поле диполя	79
3.5.6	Електричне поле в діелектриках	81
3.5.7	Постановка основних граничних задач електростатики	83
3.6	Математичні моделі магнітостатики	84
3.6.1	Закон Біо-Савара	86
3.6.2	Циркуляція вектора напруженості магнітного поля	88
3.6.3	Магнітне поле в середовищі	90
3.6.4	Граничні умови для магнітного поля	92
3.6.5	Векторний потенціал	94
3.7	Класифікація рівнянь в частинних похідних	95
3.7.1	Класифікація рівнянь з двома незалежними змінними	95
3.7.2	Класифікація рівнянь другого порядку з багатьма незалежними змінними	99
3.7.3	Загальні принципи класифікації рівнянь довільного порядку і систем диференціальних рівнянь	104
3.8	Постановка основних граничних задач для лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку, коректність, класичні та узагальнені розв'язки	109
3.8.1	Гранична задача для еліптичного рівняння	110
3.8.2	Постановка змішаних задач для рівняння гіперболічного типу. Задача Коші для гіперболічного рівняння	111
3.8.3	Задача Коші	112
3.8.4	Постановка змішаних задач для рівняння параболічного типу	113

3.8.5	Коректність задач математичної фізики	113
3.8.6	Приклад Адамара	115
3.8.7	Класичний і узагальнений розв’язки	116
3.8.8	Формально спряжені оператори. Друга формула Грі- на	117
3.9	Загальна постановка задачі Коші для хвильового рівняння. Плоскі хвилі	120
3.9.1	Характеристичні поверхні	120
3.9.2	Узагальнена задача Коші для рівняння коливання струни	122
3.9.3	Узагальнена задача Коші для n -вимірного хвильо- вого рівняння	125
3.9.4	Плоскі хвилі. Дисперсія хвиль	127

3 Побудова математичних моделей базових фізичних процесів

3.0 Оператор ∇ (лікбез математичної теорії поля)

Визначення 3.0.0.1 (оператора ∇ в $\mathbb{R}^2$). Для двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ у прямокутній декартовій системі координат *оператор набли* визначається наступним чином:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \quad (3.0.1)$$

де $\vec{i}, \vec{j}$ — одиничні вектори по вісям x і y відповідно.

Визначення 3.0.0.2 (оператора ∇ в $\mathbb{R}^3$).

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (3.0.2)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні вектори по вісям x, y і z відповідно.

3.0.1 Властивості оператора ∇

Визначення 3.0.1.1 (градієнту через оператор ∇). Якщо “скалярно по-

множити” вектор ∇ на скалярну функцію $f = f(x, y, z)$, то вийде вектор:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \text{grad } f, \quad (3.0.3)$$

який є нічим іншим як *градієнтом* $\text{grad } f$ функції f .

Визначення 3.0.1.2 (дивергенції через оператор ∇). Якщо “скалярно помножити” вектор ∇ на вектор-функцію

$$\vec{F} = (f, g, h) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)), \quad (3.0.4)$$

то вийде скаляр:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \text{div } \vec{F}, \quad (3.0.5)$$

який є нічим іншим як *дивергенцією* $\text{div } \vec{F}$ функції $\vec{F}$.

Визначення 3.0.1.3 (ротора через оператор ∇). Якщо “векторно помножити” вектор ∇ на вектор-функцію

$$\vec{F} = (f, g, h) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)), \quad (3.0.6)$$

то вийде вектор:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot } \vec{F}. \end{aligned} \quad (3.0.7)$$

який є нічим іншим як *ротором* $\text{rot } \vec{F}$ функції $\vec{F}$.

Визначення 3.0.1.4 (оператора Лапласа через оператор ∇). Скалярний добуток $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ є ніщо янше як оператор Лапласа, який також позначається Δ .

У декартових координатах оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.0.8)$$

3.0.2 Оператори другого порядку

Оскільки існують різні способи множення векторів і скалярів, з допомогою оператору набла можна записати різні види “диференціювання”. так, комбінування скалярних і векторних добутків дає 7 різних варіантів “похідних” другого порядку:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) \quad (3.0.9)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) \quad (3.0.10)$$

$$\Delta f = \nabla^2 f \quad (3.0.11)$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) \quad (3.0.12)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \quad (3.0.13)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) \quad (3.0.14)$$

$$\Delta \vec{F} = \nabla^2 \vec{F} \quad (3.0.15)$$

Для достатньо гладких полів (двічі неперервно диференційовних) ці оператори не незалежні. Два з них тотожно дорівнюють нулю:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla)f = 0 \quad (3.0.16)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \vec{F} = 0. \quad (3.0.17)$$

Два завжди рівні:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) = (\nabla \cdot \nabla)f = \nabla^2 f = \Delta f. \quad (3.0.18)$$

А решта три пов’язані співвідношенням:

$$\nabla \times (\nabla \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}. \quad (3.0.19)$$

І ще один може бути виражене через тензорний добуток векторів:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \otimes \vec{F}) \quad (3.0.20)$$

3.0.3 Приклади

Приклад 3.0.3.1

Нехай $z = z(x, y) = xy$, тоді

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = y \vec{i} + x \vec{j}. \quad (3.0.21)$$

Приклад 3.0.3.2

Нехай $z = z(x, y) = 30yx^3$, тоді

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = 90yx^2 \vec{i} + 30x^3 \vec{j}. \quad (3.0.22)$$

3.1 Математичні моделі розповсюдження тепла та дифузії речовини

Для запису математичної моделі введемо величини:

- $x = (x_1, x_2, x_3) \in G \subset \mathbb{R}^3$ об'єм тіла, t — час;
- $u(x, t)$ — температура в точці x у момент часу t ;
- $c(x)$ — теплоємність (кількість тепла, яка необхідна, для підняти температуру одиниці маси тіла на один градус);
- $k(x)$ — теплопровідність речовини (здатність проводити тепло);
- $\rho(x)$ — щільність речовини;
- $f(x, t)$ — інтенсивність джерел теплової енергії в точці x в момент часу t .

3.1.1 Закон збереження теплової енергії

Складемо баланс теплової енергії для довільного об'єму тіла G за довільний інтервал часу $t_1 < t < t_2$. Для цього обчислимо кількість тепла, яка міститься в нескінченно малому об'ємі dG :

$$\rho(x) \cdot dG \cdot c(x) \cdot u(x, t) \quad (3.1.1)$$

та в об'ємі G в момент часу t :

$$Q_1(t) = \iiint_G c(x) \rho(x) u(x, t) dG. \quad (3.1.2)$$

Припустимо, що з часом температура змінилася від значення $u(x, t_1)$ до значення $u(x, t_2)$. Обчислимо кількість тепла, витрачену на зміну температури:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_1(t_2) - Q_1(t_1) = \iiint_G c(x) \rho(x) (u(x, t_2) - u(x, t_1)) dG. \quad (3.1.3)$$

Температура в об'ємі G може змінюватись за рахунок таких факторів:

1. нерівномірності нагрівання тіла, викликає потік тепла через поверхню S , яка обмежує уявне тіло об'єму G ;
2. зміна кількості тепла за рахунок внутрішніх теплових джерел.

Нехай $\vec{n}$ — зовнішня нормаль до поверхні S . Обчислимо кількість тепла, яка поступає всередину об'єму G через елементарну поверхню dS в одиницю часу:

$$dQ(x, t) = k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \cdot dS \quad (3.1.4)$$

Ця формула є математичним виразом фізичного закону Фур'є.

Кількість тепла, яка проходить через всю поверхню S за час від t_1 до t_2 обчислюється за формулою

$$Q_2(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left(k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \right) dS dt. \quad (3.1.5)$$

Кількість тепла за рахунок теплових джерел в об'ємі G можна обчислити у вигляді:

$$Q_3(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \quad (3.1.6)$$

Таким чином можна записати

Закон (збереження теплової енергії)

Виконується співвідношення:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_2(t_1, t_2) + Q_3(t_1, t_2), \quad (3.1.7)$$

або після підстановки усіх величин маємо

Закон (збереження теплової енергії в інтегральному вигляді)

Виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} \iiint_G c(x)\rho(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1)) dG = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left(k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \right) dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Для перетворення першого інтегралу правої частини останньої рівності застосуємо формулу Остроградського Гауса,

$$\iint_S \langle A, \vec{n} \rangle dS = \iiint_G (\nabla \cdot \vec{A}) dG, \quad (3.1.9)$$

де $\vec{A}$ — векторне поле,

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}. \quad (3.1.10)$$

В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G \left(c(x)\rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right) dG dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G (\nabla \cdot (k(x)\nabla u)) dG dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Враховуючи, що остання рівність отримана для довільного об'єму G та довільних моментів часу, можна зробити висновок, що вона має місце тоді і лише тоді, коли має місце рівність підінтегральних виразів:

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (k(x)\nabla u) + f(x, t), \quad (3.1.12)$$

де $x \in G, t > 0$.

Це рівняння повинно виконуватись для кожної точки x реального фізичного об'єму тіла (збережемо для нього позначення G , а для його поверхні позначення S), та для кожного моменту часу t .

Для виділення єдиного розв'язку цього рівняння окрім самого диференціального рівняння необхідно задавати додаткові умови на границі просторово-часової області. Будемо використовувати фізичні міркування для задавання таких умов.

1. Якщо на границі області відома температура тіла, тоді на границі тіла задають умову Діріхле.

Визначення 3.1.1.1 (умови Діріхле). Крайовою умовою першого роду, або *умовою Діріхле* називають співвідношення

$$u(x, t)|_{x \in S} = v(x, t). \quad (3.1.13)$$

2. Якщо на границі області відомий тепловий потік в одиницю часу, який поступає всередину тіла через одиничну площу, тоді на границі задають граничну умову Неймана.

Визначення 3.1.1.2 (умови Неймана). Крайовою умовою другого роду, або *умовою Неймана* називають співвідношення

$$k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = q(x, t). \quad (3.1.14)$$

3. Якщо на границі тіла відбувається конвективний теплообмін з оточуючим середовищем відомої температури згідно до закону Ньютона, тоді на границі задають крайову умову Ньютона

Визначення 3.1.1.3 (умови Ньютона). Крайовою умовою третього роду, або *умовою Ньютона* називають співвідношення

$$k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = \alpha(x, t)(v(x, t) - u(x, t))|_{x \in S}, \quad (3.1.15)$$

де $\alpha(x, t) > 0$ — коефіцієнт теплообміну, $v(x, t)$ — температура оточуючого середовища.

4. В початковий момент часу задають температура усіх внутрішніх точок тіла:

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x). \quad (3.1.16)$$

Визначення 3.1.1.4 (початкової умови). *Початковою умовою* називається співвідношення

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad (3.1.17)$$

при цьому $u_0(x)$ називається *початковою температурою*.

3.1.2 Частинні випадки рівняння теплопровідності

Зауваження 3.1.2.1 — У випадку, коли коефіцієнт теплопровідності та інтенсивність теплових джерел залежить не лише від точки простору і часу, а і від самої температури, тобто $k = k(u, x, t)$, $f = f(u, x, t)$, лінійне диференціальне рівняння (3.1.12) стає квазілінійним, тобто лінійним відносно старших похідних.

Окрім загального вигляду рівняння теплопровідності, у практичних випадках часто використовуються частинні випадки рівняння.

Зокрема, можна розглядати розповсюдження тепла в одновимірних та двовимірних тілах:

- У пластині:

$$\nabla \cdot (k(x) \nabla u(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_2} \right). \quad (3.1.18)$$

- У стрижні:

$$\nabla \cdot (k(x) \nabla u(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right). \quad (3.1.19)$$

Для однорідних тіл усі коефіцієнти рівняння можна вважати константами, зокрема $c = c_0$, $\rho = \rho_0$, $k = k_0$. В результаті вищезгадане диференціальне рівняння буде мати вигляд

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u + \frac{1}{c_0 \rho_0} \cdot f(x, t), \quad (3.1.20)$$

де

$$a^2 = \frac{k_0}{c_0 \rho_0} > 0, \quad (3.1.21)$$

і було введено

Визначення 3.1.2.1 (оператор Лапласа). *Оператором Лапласа* називається диференціальний оператор Δ що діє на функцію $u(x, t)$ по векторній змінній x наступним чином:

$$\Delta u(x, t) = \nabla \cdot (\nabla u(x, t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2}. \quad (3.1.22)$$

Зауваження 3.1.2.2 — Зокрема одновимірне рівняння теплопровідності має вигляд:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c_0 \rho_0} f(x, t). \quad (3.1.23)$$

3.1.3 Рівняння дифузії речовини

Процес дифузії речовини це процес вирівнювання концентрації речовини у розчинах, розплавах або в сумішах. Фізика вирівнювання температури в тілах та концентрації у розчинах чи розплавах має багато схожих рис і з цього приводу навіть процес розповсюдження тепла називають дифузією тепла.

Для отримання моделі дифузії речовини використаємо наступну таблицю аналогії.

Дифузія	Теплопровідність	Пояснення
$u(x, t)$	$u(x, t)$	Концентрація речовини в розчині, або у розплаві
$c(x)$	$c(x)\rho(x)$	Коефіцієнт пористості, відображає відношення об'єму пор до загального об'єму тіла і вказує на кількість речовини необхідну для зміни концентрації на одну одиницю в одиниці об'єму.

Дифузія	Теплопровідність	Пояснення
$D \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS$	$k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS$	Закон Фур'є, описує кількість речовини, яка поступає всередину тіла через його поверхню в одиницю часу за рахунок нерівномірності концентрації.
$f(x, t)$	$f(x, t)$	Інтенсивність джерела речовини в середині об'єму.
$D \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \alpha (v - u) _S$	$k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \alpha (v - u) _S$	Кількість речовини, яка поступає через поверхню S тіла за законом, аналогічним закону Ньютона, v — відома концентрація речовини в тому чи іншому середовищі; α — коефіцієнт проникності поверхні.

Побудови математичної моделі процесу дифузії відбувається за аналогією згідно до попередньої таблиці.

Кількість речовини, яка витрачена для зміни концентрації від $u(x, t_1) \rightarrow u(x, t_2)$, $t_1 < t_2$ має вигляд:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_1(t_2) - Q_1(t_1) = \iiint_G c(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1)) dG. \quad (3.1.24)$$

Кількість речовини, яка проходить через всю поверхню S за час від $t_1 \rightarrow t_2$:

$$Q_2(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left(D(x, t) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS dt. \quad (3.1.25)$$

Кількість речовини, яка поступає за рахунок джерел речовини в об'ємі G за час від t_1 до t_2 :

$$Q_3(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \quad (3.1.26)$$

Отже, отримали

Закон (збереження маси)

Віконується співвідношення:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_2(t_1, t_2) + Q_3(t_1, t_2). \quad (3.1.27)$$

а також

Закон (збереження маси в інтегральному вигляді)

Віконується співвідношення:

$$\begin{aligned} \iiint_G c(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1)) dG = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left(D(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \right) dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Після застосування формули Остроградського-Гауса та прирівнювання підінтегральних виразів отримаємо рівняння дифузії речовини у вигляді:

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D(x, t) \nabla u) + f(x, t), \quad (3.1.29)$$

де $x \in G, t > 0$.

Додаткові умови на границі області задають аналогічно умовам для рівняння теплопровідності:

1. Якщо відома концентрація речовини на поверхні:

$$u(x, t)|_{x \in S} = v(x, t); \quad (3.1.30)$$

2. Якщо на границі відомий потік речовини:

$$D \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = g(x, t); \quad (3.1.31)$$

3. Якщо на границі відбувається обмін речовиною з оточуючим середовищем через напівпроникливу мембрану за законом аналогічним закону Ньютона:

$$D(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = \alpha(x, t) (v(x, t) - u(x, t))|_{x \in S}; \quad (3.1.32)$$

4. Якщо в початковий момент часу відома концентрація речовини:

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.1.33)$$

Зауваження 3.1.3.1 — У випадку, коли коефіцієнти рівняння та граничних умов не залежать від часу t , розв'язок рівняння не залежить від часу в результаті отримаємо стаціонарне рівняння теплопровідності та дифузії:

$$\nabla \cdot (k(x) \nabla u(x)) = -f(x), \quad (3.1.34)$$

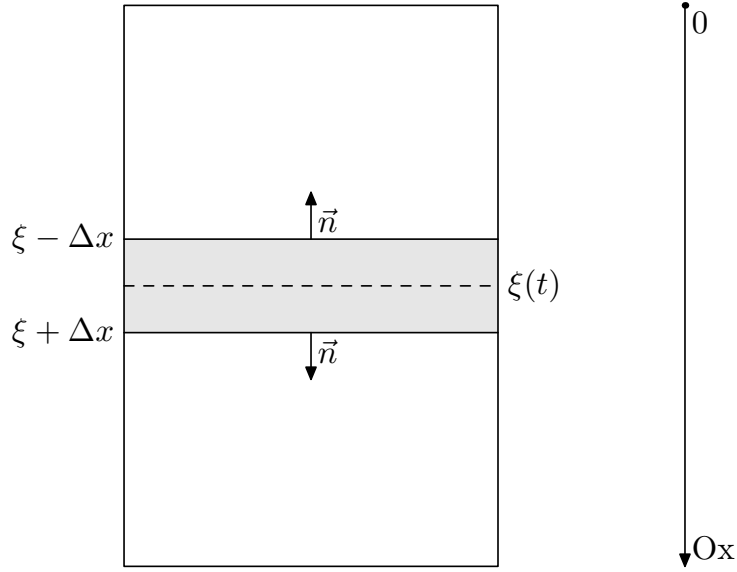
$$\nabla \cdot (D(x) \nabla u(x)) = -f(x). \quad (3.1.35)$$

3.1.4 Задача Стефана (задача про остигання та затвердіння розплавленого металу)

Вертикальний циліндричний посуд заповнений розплавленим металом, який знаходиться при заданій температурі $U_0 > U_{melt}$ - температура плавлення металу. Починаючи з моменту часу t_0 вільна поверхня розплавленого металу підтримується при постійній температурі $U_1 < U_{melt}$. Поставимо задачу про остудження та затвердіння металу, якщо дно і бокова поверхня посуду теплоізовані. Термічними деформаціями об'єму будемо нехтувати тобто процес розповсюдження тепла відбувається лише вздовж вісі циліндру. Введемо позначення:

- ρ_s, ρ_l — щільність твердої (eng. *solid*) та рідкої (eng. *liquid*) фази металу;
- c_s, c_l — теплоємність твердої та рідкої фази металу;
- k_s, k_l — теплопровідність твердої та рідкої фази металу;
- $\xi(t)$ — положення границі розділу твердої та рідкої фаз;
- L — висота циліндру, S — площа основи циліндру;
- λ — питома теплота плавлення;
- $u(x, t)$ — температура в момент часу t в точці x .

Деякі з введених позначень краще видно на наступній ілюстрації:



Отримаємо рівняння теплового балансу для нескінченно малого об'єму розплавленого металу, який знаходиться між перерізами x та $x + \Delta x$ за проміжок часу від t до $t + \Delta t$.

Обчислимо кількість тепла, яка необхідна для зміни температури у виділеному елементарному об'ємі від значення $u(x, t)$ до значення $u(x, t + \Delta t)$. Кількість тепла, що міститься в виділеному об'ємі в момент часу t можна обчислити за формулою

$$dQ(t) = c_l \cdot \rho_l \cdot S \cdot \Delta x \cdot u(x, t). \quad (3.1.36)$$

Аналогічно для моменту часу $t + \Delta t$ кількість тепла дорівнює

$$dQ(t + \Delta t) = c_l \cdot \rho_l \cdot S \cdot \Delta x \cdot u(x, t + \Delta t). \quad (3.1.37)$$

При цьому нехтуємо, зміною температури по просторовій змінній у середині елементарного об'єму. Тоді кількість тепла, необхідна для зміни температури всередині об'єму дорівнює:

$$\Delta Q(t, t + \Delta t) = c_l \cdot \rho_l \cdot S \cdot \Delta x \cdot (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)). \quad (3.1.38)$$

Ця зміна може відбуватися за рахунок теплових потоків, через перерізи x та $x + \Delta x$. Підрахуємо кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз $x + \Delta x$ за час Δt :

$$dQ(x + \Delta x) = k_l \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial \vec{n}} S \Delta t = k_l \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} S \Delta t \quad (3.1.39)$$

Напрямок нормалі $\vec{n}$ в цьому перерізі співпадає з напрямком вісі Ox .

Кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз x за час Δt можна записати у вигляді:

$$dQ(x) = k_l \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} S \Delta t = -k_l \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S \Delta t \quad (3.1.40)$$

Таким чином можна скласти рівняння теплового балансу:

$$dQ(t, t + \Delta t) = dQ(x + \Delta x) + dQ(x). \quad (3.1.41)$$

Або після підстановки відповідних значень поділених на $\Delta x \cdot \Delta t \cdot S$ отримаємо:

$$\frac{c_l \rho_l (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))}{\Delta t} = k_l \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \frac{1}{\Delta x}. \quad (3.1.42)$$

Після граничного переходу коли Δx та Δt прямують до нуля, отримаємо диференціальне рівняння:

$$c_l \rho_l \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k_l \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.1.43)$$

де $\xi(t) < x < L$, $t > t_0$.

Аналогічні міркування дозволяють отримати рівняння для твердої фази:

$$c_s \rho_s \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.1.44)$$

де $0 < x < \xi(t)$, $t > t_0$.

Визначення 3.1.4.1 (співвідношення на границі розділу фаз). Температура при переході через границю розділу фаз повинна змінюватись неперервно і співпадати з температурою плавлення металу, тобто повинно виконуватись наступне співвідношення:

$$u(\xi(t) - 0, t) = u(\xi(t) + 0, t) = U_{melt}, \quad (3.1.45)$$

яке називається *співвідношенням на границі розділу фаз*.

Отримаємо рівняння теплового балансу для елементарного об'єму обмеженого перерізами $\xi(t) - \Delta x$ та $\xi(t) + \Delta x$.

За час Δt затвердіє об'єм металу рівний

$$(\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) \cdot S. \quad (3.1.46)$$

При цьому буде виділено кількість тепла рівна

$$dQ_{melt} = (\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) \cdot S \cdot \lambda \cdot \rho_s. \quad (3.1.47)$$

Кількість тепла, яка надійде всередину об'єму за рахунок теплових потоків через відповідні перерізи за час Δt може бути записана у вигляді:

$$\Delta t \cdot S \cdot \left(k_l \cdot \frac{\partial u(\xi(t) + \Delta x, t)}{\partial x} - k_s \cdot \frac{\partial u(\xi(t) - \Delta x, t)}{\partial x} \right). \quad (3.1.48)$$

Оскільки фазовий перехід відбувається при постійній температурі, то в околі границі розділу фаз $\xi(t)$ зміною температури по змінній t можна нехтувати, в зв'язку з чим можна не враховувати кількість тепла, яка витрачається на зміну температури у виділеному елементарному об'ємі.

Рівняння теплового балансу для елементарного об'єму обмеженого перерізами $\xi(t) - \Delta x$ та $\xi(t) + \Delta x$ можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} (\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) S \lambda \rho_s = \\ = \Delta t S \left(k_l \frac{\partial u(\xi(t) + \Delta x, t)}{\partial x} - k_s \frac{\partial u(\xi(t) - \Delta x, t)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

Поділивши обидві частини на Δt , скоротивши на S і спрямувавши Δx , Δt до нуля отримаємо співвідношення:

$$\lambda \rho_s \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} = k_l \frac{\partial u(\xi(t) + 0, t)}{\partial x} - k_s \frac{\partial u(\xi(t) - 0, t)}{\partial x}. \quad (3.1.50)$$

Визначення 3.1.4.2 (внутрішніх граничних умов (умов спряження)).
Останню умову

$$\lambda \rho_s \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} = k_l \frac{\partial u(\xi(t) + 0, t)}{\partial x} - k_s \frac{\partial u(\xi(t) - 0, t)}{\partial x}. \quad (3.1.51)$$

разом із співвідношенням (3.1.45) на границі розділу фаз називають *внутрішніми граничними умовами*, або *умовами спряження*.

Запишемо початкові умови та умови на верхній та нижній основі циліндру:

- В початковий момент часу задана температура розплавленого металу:

$$u(x, t_0) = U_0, \quad 0 < x < L. \quad (3.1.52)$$

- На верхній основі задана температура:

$$u(0, t) = U_1, \quad t > t_0. \quad (3.1.53)$$

- Нижня основа теплоізолювана, тобто тепловий потік, який поступає всередину тіла дорівнює нулю:

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, \quad t > t_0. \quad (3.1.54)$$

- В початковий момент часу положення границі фазового переходу співпадає з верхньою основою циліндру:

$$\xi(t_0) = 0. \quad (3.1.55)$$

Таким чином, до моменту часу, коли весь метал затвердіє постановка задачі Стефана включає в себе диференційні рівняння (3.1.43), (3.1.44), співвідношення на границі розділу фаз (3.1.45), умови спряження (3.1.51), початкові умови (3.1.52), (3.1.55) та граничні умови (3.1.53), (3.1.54).

Зауваження 3.1.4.1 — Після повного затвердіння металу, тобто коли $\xi(t_1) = L$, процес буде описуватись звичайним рівнянням теплообміну для $t > t_1$ з граничними умовами

$$u(0, t) = U_1, \quad (3.1.56)$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (3.1.57)$$

та початковою температурою $u(x, t_1)$.

3.2 Математичні моделі теорії пружності

Відомо, що в природі існують пружні тіла, які можуть змінювати свою форму під дією прикладеної сили, а після припинення дії зовнішньої сили приймати початкову форму. Зовнішня сила викликає в пружних тілах:

- деформації;
- напруження.

Визначення 3.2.0.1 (деформації). *Деформацією* називають зміну положення одних точок тіла відносно інших.

Визначення 3.2.0.2 (напружень). *Напруженнями* називають внутрішні сили, які прагнуть повернути тіло в положення рівноваги.

Визначення 3.2.0.3 (математичної моделі теорії пружності). *Математична модель теорії пружності* — це система диференціальних рівнянь, які описують кількісний зв'язок між зміною форми тіла (деформаціями) і внутрішніми зусиллями (напруженнями).

Введемо позначення:

- x, y, z — координати точки у просторі;
- $U(x, y, z, t), V(x, y, z, t), W(x, y, z, t)$ — координати вектора зміщень в напрямку вісей Ox, Oy, Oz відповідно.

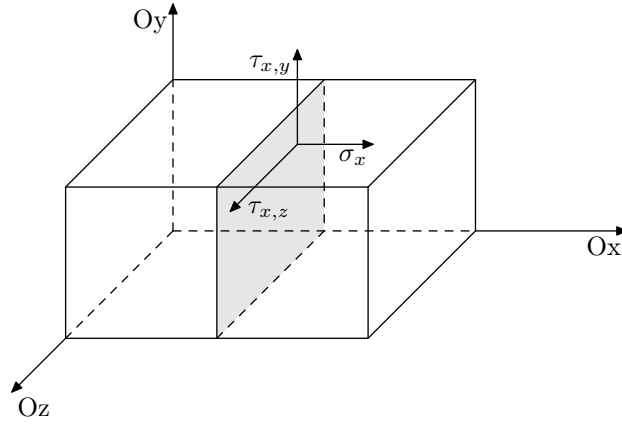
Зауваження 3.2.0.1 — Вектор зміщень показує зміщення точки тіла з координатами x, y, z в напрямку однієї з координатних вісей в момент часу t від положення рівноваги.

- $F_x(x, y, z, t), F_y(x, y, z, t), F_z(x, y, z, t)$ — компоненти вектора поверхневих сил в напрямку вісей Ox, Oy, Oz відповідно.

Зауваження 3.2.0.2 — Вектор поверхневих сил показує які сили діють на поверхню тіла.

- $X(x, y, z, t), Y(x, y, z, t), Z(x, y, z, t)$ — вектори об'ємних сил;
- dG — елемент об'єму; dS — елемент поверхні.

Розглянемо просту фізичну модель взаємодії між собою двох частин пружного тіла. Нехай прямокутний паралелепіпед з нескінченно малим поперечним перерізом $dy \times dz$ витягнутий вздовж вісі x та умовно розділений на дві частини площиною ортогональною вісі x :



Охарактеризуємо силу з якою правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед через переріз $dy \times dz$ в площині yOz (на рис. площина взаємодії виділена сірим кольором).

Нехай $\mathbf{t}^{(x)} = (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$ — вектор сили.

Визначення 3.2.0.4 (вектора сили). Вектор сили показує, з якою силою (на одиницю поверхні) правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед.

Зауваження 3.2.0.3 — При цьому σ_x — компонента, що може стиснути, або розтягувати лівий паралелепіпед, τ_{xy}, τ_{xz} — компоненти, що зрізають (точне визначення цього поняття буде надано далі) паралелепіпед в напрямках вісей Oy та Oz відповідно.

Аналогічно, для паралелепіпедів витягнутих вздовж вісей Oy та Oz можна розглянути сили, які діють в двох інших площинах xOz та xOy на одиницю площі цих перерізів та охарактеризувати їх векторами:

$$\mathbf{t}^{(y)} = (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}), \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{t}^{(z)} = (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z). \quad (3.2.2)$$

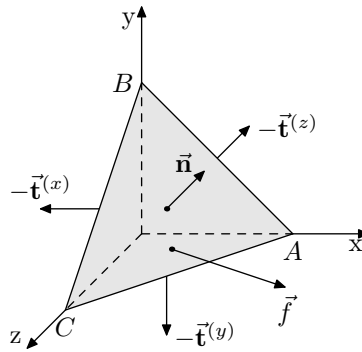
Для будь-якого паралелепіпеда з довжиною ребер dx, dy, dz а тим самим точки простору напружений стан тіла можна охарактеризувати матрицею

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

Зауваження 3.2.0.4 — При розгляді моделі взаємодії правого паралелепіпеда та лівого паралелепіпеда через спільний переріз має місце принцип рівнодії та протидії, тобто сила, з якою правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед рівна за величиною та протилежна за напрямком силі з якою лівий паралелепіпед діє на правий паралелепіпед. Сили, що діють на тіло обираються зі знаком плюс, якщо вони діють на переріз, який обмежує тіло з боку зростаючих значень координатних вісей і зі знаком мінус, якщо вони діють на поверхню, що обмежує тіло з боку спадаючих значень координатних вісей.

3.2.1 Закони рівноваги елемента поверхні

Розглянемо елементарну модель пружної взаємодії. Нехай всередині пружного тіла ми виділили нескінченно малий тетраедр $OABC$, $\vec{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до грані ABC , а S — площа цієї грані:



Нехай $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ — вектор поверхневої сили, що діє на одиницю площі грані ABC .

Вектор нормалі

$$\vec{n} = (\cos(\vec{n}, x), \cos(\vec{n}, y), \cos(\vec{n}, z)), \quad (3.2.4)$$

а

$$S \cdot \cos(\vec{n}, x), \quad S \cdot \cos(\vec{n}, y), \quad S \cdot \cos(\vec{n}, z) \quad (3.2.5)$$

— площі граней тетраедра, ортогональних вісям Ox , Oy , Oz .

Якщо тетраедр знаходиться в стані спокою, або рівномірного прямолінійного руху, то рівнодіюча сил, що діють на всі чотири грані дорівнює нулю, тобто:

$$\vec{f} \cdot S - \mathbf{t}^{(x)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, x) - \mathbf{t}^{(y)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, y) - \mathbf{t}^{(z)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, z) = 0. \quad (3.2.6)$$

Після скорочення на S отримаємо

Закон (рівноваги елемента поверхні у векторній формі)

Виконується співвідношення:

$$\vec{f} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\vec{n}, z). \quad (3.2.7)$$

Запишемо закон рівноваги елемента поверхні в скалярному вигляді:

$$\sigma_x \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{xz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_x, \quad (3.2.8)$$

$$\tau_{yx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \sigma_y \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{yz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_y, \quad (3.2.9)$$

$$\tau_{zx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{zy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \sigma_z \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_z. \quad (3.2.10)$$

У випадку, коли елементарний трикутник ABC є частиною реальної зовнішньої поверхні тіла, то закон рівноваги елемента поверхні приймає вигляд:

$$\sigma_x \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{xz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_x, \quad (3.2.11)$$

$$\tau_{yx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \sigma_y \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{yz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_y, \quad (3.2.12)$$

$$\tau_{zx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{zy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \sigma_z \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_z, \quad (3.2.13)$$

де (F_x, F_y, F_z) — вектор поверхневих сил.

3.2.2 Закон рівноваги елемента об'єму

Розглянемо будь-який об'єм G обмежений поверхнею S та його елементарний об'єм dG .

Об'ємні сили, що діють на тіло об'єму G можна обчислити у вигляді

$$\iiint_G \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dG. \quad (3.2.14)$$

Через будь-яку елементарну поверхню тіла діє поверхнева сила $\vec{f} \cdot dS$, а результуюча поверхнева сила, яка діє на тіло через усю поверхню S має вигляд

$$\iint_S \vec{f} dS, \quad (3.2.15)$$

або, в скалярному вигляді:

$$\iint_S (\mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\vec{n}, z)) dS. \quad (3.2.16)$$

Закон (рівноваги елементу об'єму у векторній формі)

Для того щоб тіло знаходилося в стані спокою або рухалось рівномірно і прямолінійно, рівнодіюча об'ємної та поверхневої сил повинна дорівнювати нулю:

$$\iint_S (\mathbf{t}^{(x)} \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cos(\vec{n}, z)) dS + \iiint_G \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dG = 0. \quad (3.2.17)$$

Закон (рівноваги елементу об'єму у скалярній формі)

$$\begin{cases} \iint_S (\sigma_x \cos(\vec{n}, x) + \tau_{yx} \cos(\vec{n}, y) + \tau_{zx} \cos(\vec{n}, z)) dS + \iiint_G X dG = 0, \\ \iint_S (\tau_{xy} \cos(\vec{n}, x) + \sigma_y \cos(\vec{n}, y) + \tau_{zy} \cos(\vec{n}, z)) dS + \iiint_G Y dG = 0, \\ \iint_S (\tau_{xz} \cos(\vec{n}, x) + \tau_{yz} \cos(\vec{n}, y) + \sigma_z \cos(\vec{n}, z)) dS + \iiint_G Z dG = 0. \end{cases} \quad (3.2.18)$$

Зауваження 3.2.2.1 — Додатковою умовою рівноважного положення тіла окрім закону рівноваги елементу об'єму є виконання закону збереження моментів сил з якого випливає симетричність матриці (3.2.3):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (3.2.19)$$

Враховуючи факт симетрії, останній закон можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \iint_S (\mathbf{t}^{(x)}, \vec{n}) dS + \iiint_G X dG = 0, \\ \iint_S (\mathbf{t}^{(y)}, \vec{n}) dS + \iiint_G Y dG = 0, \\ \iint_S (\mathbf{t}^{(z)}, \vec{n}) dS + \iiint_G Z dG = 0. \end{cases} \quad (3.2.20)$$

де

$$\vec{n} = (\cos(\vec{n}, x), \cos(\vec{n}, y), \cos(\vec{n}, z)) \quad (3.2.21)$$

— вектор зовнішньої нормалі до поверхні.

Враховуючи формулу Остроградського-Гауса, кожен поверхневий інтеграл перетворимо в об'ємний, в результаті отримаємо

Закон (рівноваги елементу об'єму у диференціальній формі)

Виконуються співвідношення:

$$\begin{cases} \iiint_G (\nabla \cdot \mathbf{t}^{(x)} + X) dG = 0, \\ \iiint_G (\nabla \cdot \mathbf{t}^{(y)} + Y) dG = 0, \\ \iiint_G (\nabla \cdot \mathbf{t}^{(z)} + Z) dG = 0. \end{cases} \quad (3.2.22)$$

Визначення 3.2.2.1 (тензора напружень). В подальшому симетричну матрицю (3.2.3) будемо називати *тензором напружень*.

3.2.3 Тензор напружень, головні вісі тензора напружень

Позначимо через $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ орти прямокутної система координат з координатними осями Ox , Oy , Oz .

Введемо нову систему координат з ортами $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ та осями $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

З'ясуємо, яким чином пов'язані вектори $\mathbf{t}^{(x)}$, $\mathbf{t}^{(y)}$, $\mathbf{t}^{(z)}$ які складають рядки (стовпці) тензору напружень у системі координат x, y, z , з векторами $\mathbf{t}^{(\xi)}$, $\mathbf{t}^{(\eta)}$, $\mathbf{t}^{(\zeta)}$ які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у новій системі координат ξ, η, ζ .

Згідно до загальних формул переходу від одного ортогонального базису до іншого, можна записати:

$$\begin{cases} \mathbf{t}^{(\xi)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\xi, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\xi, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\xi, z), \\ \mathbf{t}^{(\eta)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\eta, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\eta, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\eta, z), \\ \mathbf{t}^{(\zeta)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\zeta, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\zeta, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\zeta, z). \end{cases} \quad (3.2.23)$$

Координати ортів нової системи координат мають значення:

$$\mathbf{e}_\xi = (\cos(\xi, x), \cos(\xi, y), \cos(\xi, z)), \quad (3.2.24)$$

$$\mathbf{e}_\eta = (\cos(\eta, x), \cos(\eta, y), \cos(\eta, z)), \quad (3.2.25)$$

$$\mathbf{e}_\zeta = (\cos(\zeta, x), \cos(\zeta, y), \cos(\zeta, z)). \quad (3.2.26)$$

Для знаходження будь-якої компоненти тензора напружень $\tau_{\alpha\beta}$, необхідно обчислити скалярний добуток

$$\tau_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{t}^{(\alpha)}, \mathbf{e}_\beta \rangle. \quad (3.2.27)$$

Так, наприклад,

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= (\sigma_x \cos(\eta, x) + \tau_{xy} \cos(\eta, y) + \tau_{xz} \cos(\eta, z)) \cdot \cos(\xi, x) + \\ &+ (\tau_{yx} \cos(\eta, x) + \sigma_y \cos(\eta, y) + \tau_{yz} \cos(\eta, z)) \cdot \cos(\xi, y) + \\ &+ (\tau_{zx} \cos(\eta, x) + \tau_{zy} \cos(\eta, y) + \sigma_z \cos(\eta, z)) \cdot \cos(\xi, z) = \\ &= \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} \tau_{ab} \cos(\xi, a) \cos(\eta, b). \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Отже, для довільної компоненти тензора напружень має місце

Формула (переходу до нової системи координат)

Виконуються співвідношення вигляду

$$\tau_{\alpha\beta} = \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} \tau_{ab} \cos(\alpha, a) \cos(\beta, b). \quad (3.2.29)$$

Зауваження 3.2.3.1 — Тут використані позначення $\tau_{\alpha\alpha} = \sigma_\alpha$, $\tau_{aa} = \sigma_a$.

Таким чином, тензор напружень — це симетрична матриця

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (3.2.30)$$

компоненти якої перетворюються за формулою вище при переході до нової прямокутної системи координат.

Поставимо задачу вибору нової прямокутної системи координат, для якої тензор напружень має діагональну форму. Нехай $\mathbf{e}_{v_i}$, $i = 1, 2, 3$ — орти нової прямокутної системи координат. Для того, щоб тензор T мав діагональну форму запису, кожен вектор $\mathbf{t}^{(v_i)}$, $i = 1, 2, 3$ в новій системі координат повинен бути колінеарним відповідному орту $\mathbf{e}_{v_i}$, $i = 1, 2, 3$ тобто $\mathbf{t}^{(v_i)} = \sigma_i \vec{v}_i$.

Скористаємось формулою переходу від однієї до іншої системи координат та запишемо співвідношення для пошуку ортів:

$$\mathbf{t}^{(v)} = \sigma \mathbf{e}_v = \sigma (\cos(v, x), \cos(v, y), \cos(v, z)). \quad (3.2.31)$$

Запишемо останнє співвідношення в координатному вигляді:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(v, x) + \tau_{xy} \cos(v, y) + \tau_{xz} \cos(v, z) = \sigma \cos(v, x), \\ \tau_{yx} \cos(v, x) + \sigma_y \cos(v, y) + \tau_{yz} \cos(v, z) = \sigma \cos(v, y), \\ \tau_{zx} \cos(v, x) + \tau_{zy} \cos(v, y) + \sigma_z \cos(v, z) = \sigma \cos(v, z). \end{cases} \quad (3.2.32)$$

Для ортонормованого базису

$$\cos^2(v, x) + \cos^2(v, y) + \cos^2(v, z) = 1. \quad (3.2.33)$$

Тому в матрично-векторній формі попередні співвідношення мають вигляд

$$T \mathbf{e}_v = \sigma \mathbf{e}_v. \quad (3.2.34)$$

Ця задача на власні значення з симетричною матрицею має три дійсних власних числа, позначимо їх $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ тобто

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.35)$$

і три ортонормовані власні вектори

$$\mathbf{e}_{v_i} = (\cos(v_i, x), \cos(v_i, y), \cos(v_i, z)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2.36)$$

Визначення 3.2.3.1 (головних вісей тензора напружень). Координатні вісі, для яких тензор напружень має діагональний вигляд, називаються *головними вісями тензора напружень*.

Визначення 3.2.3.2 (головних компонент тензора напружень). Відповідні діагональні компоненти тензора напружень σ_i , $i = 1, 2, 3$ називаються *головними компонентами тензора напружень*.

Використовуючи формулу переходу між системами координат, запишемо зв'язок між компонентами тензора напружень в декартових координатах x , y , z і головними компонентами тензора напружень:

$$\tau_{ab} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos(v_i, a) \cos(v_i, b), \quad (3.2.37)$$

$$\sigma_a = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos^2(v_i, a), \quad (3.2.38)$$

де $x, b \in \{x, y, z\}$.

3.2.4 Тензор деформацій і закони його перетворення

Раніше були введені характеристики:

$$U(x, y, z, t), \quad V(x, y, z, t), \quad W(x, y, z, t) \quad (3.2.39)$$

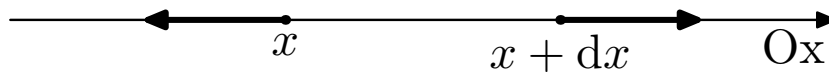
— зміщення точки з координатами (x, y, z) від положення рівноваги в напрямку відповідної вісі.

Розглянемо можливі види деформації.

1. Нормальні деформації.

Визначення 3.2.4.1 (нормальних деформацій). *Нормальні деформації* — зміна довжини в напрямку координатної вісі — характеризуються відносною зміною довжини відрізків.

Приклавши силу в напрямку вісі Ox , точка x змістилася і зайняла положення $x + U(x, \cdot, \cdot)$; точка $x + dx$ теж змістилася і зайняла положення $(x + dx) + U(x + dx, \cdot, \cdot)$:



Порахуємо відносне подовження відрізка dx після прикладення до нього напруження:

$$\begin{aligned} \frac{(x + dx) + U(x + dx, \cdot, \cdot) - x - U(x, \cdot, \cdot) - dx}{dx} = \\ = \frac{U(x + dx, \cdot, \cdot) - U(x, \cdot, \cdot)}{dx} \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Аналогічно, можна ввести характеристику відносного подовження в напрямку двох інших вісей.

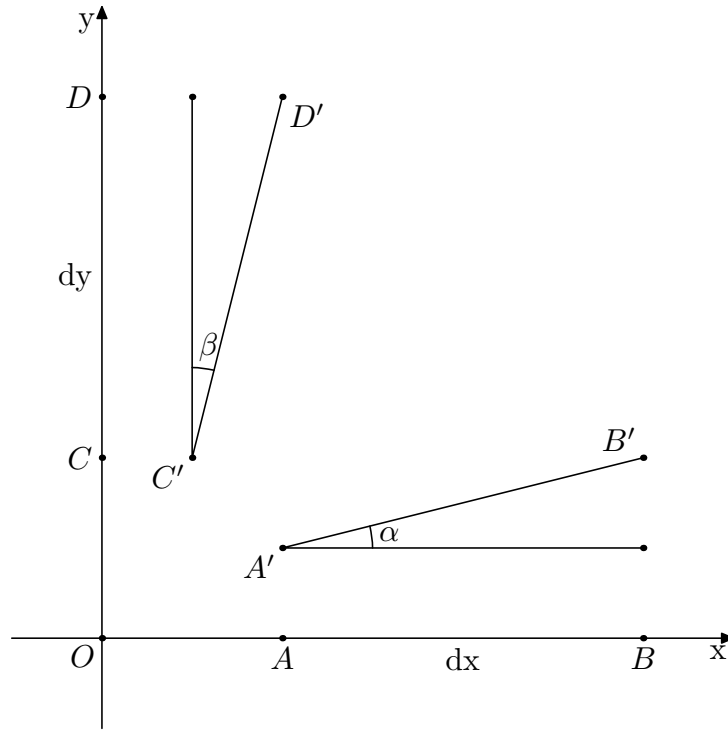
Отже, нормальні деформації характеризуються частинними похідними

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.2.41)$$

2. Зрізаючі (дотичні) деформації.

Визначення 3.2.4.2 (зрізаючих (дотичних) деформацій). *Зрізаючі (дотичні) деформації* будемо характеризувати абсолютною зміною кутів між відрізками в кожній з трьох координатних площин, які до початку дії напружень були ортогональними.

Розглянемо фізичну модель зрізуючих деформацій. Нехай відрізки AB та CD довжини dx та dy відповідно після дії прикладених сил зайняли положення $A'B'$ та $C'D'$ відповідно:



Точка A змістилася на відстань $V(x, \cdot, \cdot)$, а точка B змістилася на відстань $V(x + dx, \cdot, \cdot)$.

Тоді

$$\frac{V(x + dx, \cdot, \cdot) - V(x, \cdot, \cdot)}{dx} = \tan \alpha \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (3.2.42)$$

тому

$$\alpha \approx \tan \alpha = \partial V / \partial x. \quad (3.2.43)$$

Аналогічно $\beta \approx \partial U / \partial y$.

Сумарна зміна кута

$$\alpha + \beta \approx \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (3.2.44)$$

Позначимо

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \gamma_{yx}. \quad (3.2.45)$$

Провівши аналогічні міркування щодо інших координатних площин отримаємо:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma_{zx}, \quad (3.2.46)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma_{zy}. \quad (3.2.47)$$

Позначимо також

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (3.2.48)$$

і $\gamma_{aa} = 2\varepsilon_a$.

В результаті повну деформацію у будь-якій точці простору можна охарактеризувати

Визначення 3.2.4.3 (тензора деформацій). Симетрична матриця

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (3.2.49)$$

називається симетричним *тензором деформацій*.

3.2.5 Перетворення тензора деформацій до нових прямокутних координат

Вивчимо перетворення симетричного тензору деформацій при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої. Нехай $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ — вісі нової системи координат (замість Ox , Oy , Oz), а функції U' , V' , W' — зміщення в напрямку нових вісей.

Враховуючи формули переходу від одного ортогонального базису до іншого можемо записати:

$$\begin{cases} U' = U \cos(\xi, x) + V \cos(\xi, y) + W \cos(\xi, z), \\ V' = U \cos(\eta, x) + V \cos(\eta, y) + W \cos(\eta, z), \\ W' = U \cos(\zeta, x) + V \cos(\zeta, y) + W \cos(\zeta, z), \end{cases} \quad (3.2.50)$$

а також

$$\begin{cases} x = \xi \cos(\xi, x) + \eta \cos(\eta, x) + \zeta \cos(\zeta, x), \\ y = \xi \cos(\xi, y) + \eta \cos(\eta, y) + \zeta \cos(\zeta, y), \\ z = \xi \cos(\xi, z) + \eta \cos(\eta, z) + \zeta \cos(\zeta, z), \end{cases} \quad (3.2.51)$$

i

$$\begin{cases} \xi = x \cos(\xi, x) + y \cos(\xi, y) + z \cos(\xi, z), \\ \eta = x \cos(\eta, x) + y \cos(\eta, y) + z \cos(\eta, z), \\ \zeta = x \cos(\zeta, x) + y \cos(\zeta, y) + z \cos(\zeta, z). \end{cases} \quad (3.2.52)$$

У цих формулах

$$(\cos(\alpha, x), \cos(\alpha, y), \cos(\alpha, z)) = \mathbf{e}_\alpha, \quad \alpha \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (3.2.53)$$

— координати ортів нового базису.

Знайдемо вирази для компонентів тензору у новій системі координатах: $\varepsilon_\alpha, \gamma_{\alpha, \beta}$ при $\alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}$.

Зокрема для ε_ξ отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{\partial U'}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \cos(\xi, x) + \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \cos(\xi, y) + \\ &+ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \cos(\xi, z) = \\ &= \cos(\xi, x) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cos(\xi, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(\xi, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(\xi, z) \right) + \\ &+ \cos(\xi, y) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos(\xi, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(\xi, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(\xi, z) \right) + \\ &+ \cos(\xi, z) \left(\frac{\partial W}{\partial x} \cos(\xi, x) + \frac{\partial W}{\partial y} \cos(\xi, y) + \frac{\partial W}{\partial z} \cos(\xi, z) \right). \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

Розкриваючи дужки і використовуючи відповідні позначення отримаємо наступну формулу:

$$\gamma_{\xi\xi} = 2\varepsilon_\xi = \sum_{a, b \in \{x, y, z\}} \gamma_{ab} \cos(\xi, a) \cos(\xi, b). \quad (3.2.55)$$

Отже у загальному вигляді доведена

Формула (перетворення тензора деформацій)

Виконуються співвідношення вигляду:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{a, b \in \{x, y, z\}} \gamma_{ab} \cos(\alpha, a) \cos(\beta, b), \quad (3.2.56)$$

де $\alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}$.

Порівнюючи формули переходу до нових координат для обох тензорів, бачимо їх ідентичність, тобто перетворення тензора напружень та тензору деформацій відбувається за однаковими формулами. Таким чином існує система координат h_1, h_2, h_3 , для якої тензор деформації має діагональний вигляд:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.57)$$

Визначення 3.2.5.1 (головних компонент тензора деформацій). $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ називаються *головними компонентами* тензора деформацій.

Визначення 3.2.5.2 (головних вісей тензора деформацій). h_1, h_2, h_3 називаються *головними вісями* тензора деформацій.

З формули переходу можна отримати зв'язок між компонентами тензору деформацій у прямокутній системі координат x, y, z та головними компонентами тензора деформацій:

$$\gamma_{ab} = \sum_{i=1}^3 2\varepsilon_i \cos(h_i, a) \cos(h_i, b), \quad (3.2.58)$$

$$\varepsilon_a = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \cos^2(h_i, a), \quad (3.2.59)$$

де $a, b \in \{x, y, z\}$.

Без доведення приймемо до уваги

Твердження 3.2.5.1

Для ізотропних тіл (тіл властивості яких в усіх напрямках однакові) головні вісі тензора деформації та тензора напружень співпадають:

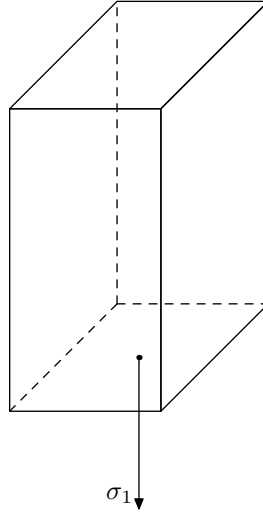
$$\tau_{ab} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos(h_i, a) \cos(h_i, b), \quad (3.2.60)$$

$$\sigma_a = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos^2(h_i, a), \quad (3.2.61)$$

де $a, b \in \{x, y, z\}$.

3.2.6 Закон Гука. Зв'язок між тензором деформації та тензором напружень

Розглянемо пружний паралелепіпед до нижньої грані якого прикладене напруження σ_1 у напрямку першої головної координатної вісі h_1 :



Згідно до спрощеного трактування закону Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad (3.2.62)$$

де E — модуль Юнга.

При подовженні паралелепіпеду у напрямку першої координатної вісі h_1 , відбувається стиснення паралелепіпеду у напрямках двох інших головних вісей і це стиснення пропорційне прикладеному напруженню σ_1 .

Прикладаючи напруження в напрямку двох інших головних координатних вісей σ_2 та σ_3 , відповідно будемо мати стиснення в напрямку h_1 . Це від'ємне подовження (стиснення) в напрямку першої координатної вісі, за рахунок напруження σ_2 дорівнює σ_2/mE , а за рахунок напруження σ_3 дорівнює σ_3/mE .

Отже, маємо загальний закон Гука:

Повна величина подовження в напрямку першої головної координатної вісі дорівнює

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \right) = \frac{m+1}{Em} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{m+1} \right) \quad (3.2.63)$$

Позначимо $S = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ і запишемо

Закон (Гука для головних компонентів тензора напружень та деформацій)

Зв'язок між головними компонентами тензора напружень та тензора деформації:

$$\varepsilon_i = \frac{m+1}{Em} \left(\sigma_i - \frac{S}{m+1} \right), \quad (3.2.64)$$

для $i = 1, 2, 3$.

Використовуючи формули переходу до нової системи координат отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_{i=1}^3 \frac{m+1}{Em} \left(\sigma_i - \frac{S}{m+1} \right) \cos^2(h_i, x) = \\ &= \frac{m+1}{Em} \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos^2(h_i, x) - \frac{S}{m+1} \sum_{i=1}^3 \cos^2(h_i, x) \right) = \\ &= \frac{m+1}{Em} \left(\sigma_x - \frac{S}{m+1} \right). \end{aligned} \quad (3.2.65)$$

Неважко перевірити, що

$$S = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (3.2.66)$$

тобто S — інваріант для різних прямокутних систем координат.

Для поза діагональних елементів, зв'язок між компонентами тензора деформацій і тензора напружень має вигляд:

$$\gamma_{xy} = \frac{2(m+1)}{Em} \sum_{i=1}^3 \left(\sigma_i - \frac{S}{m+1} \right) \cos(h_i, x) \cos(h_i, y) = \frac{2(m+1)}{Em} \cdot \tau_{xy}. \quad (3.2.67)$$

Позначимо $G = Em/2(m+1)$ та запишемо

Закон 3.2.6.1 (Гука для будь-якої прямокутної системи координат)

Залежність між тензором деформацій та тензором напружень у довільній прямокутній системі координат:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2G} \left(\sigma_a - \frac{S}{m+1} \right), \quad (3.2.68)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G}, \quad (3.2.69)$$

де $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$.

Запишемо обернену залежність тензора напружень від тензора деформації, нехай

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left(S - \frac{3S}{m+1} \right) = \frac{1}{2G} \left(\frac{(m-2)S}{m+1} \right), \quad (3.2.70)$$

тоді

$$S = \frac{2\theta(m+1)G}{m-2}. \quad (3.2.71)$$

Таким чином можна записати

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \frac{S}{m+1} = 2G\varepsilon_x + \frac{2G\theta}{m-2} = 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\theta}{m-2} \right). \quad (3.2.72)$$

В результаті маємо

Закон 3.2.6.2 (Гука, еквівалентна форма)

Для довільної прямокутної системи координат:

$$\sigma_\alpha = 2G \left(\varepsilon_\alpha + \frac{\theta}{m-2} \right), \quad (3.2.73)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = G\gamma_{\alpha\beta}, \quad (3.2.74)$$

де $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$.

Запишемо замкнену систему диференціальних рівнянь, яка складається

з рівнянь (3.2.73), (3.2.74), закону рівноваги елементу об'єму

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (3.2.75)$$

і виразів які зв'язують компоненти тензору деформацій та вектор переміщень:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \gamma_{yx}, \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma_{zx}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma_{zy}, \\ \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.2.76)$$

Всі ці співвідношення складають систему п'ятнадцяти лінійних диференціальних рівнянь з п'ятнадцятьма невідомими функціями.

Найчастіше цю систему перетворюють до вигляду трьох рівнянь з трьома невідомими відносно вектора переміщень. Для здійснення перетворень з першої і третьої груп рівнянь виключимо тензор деформацій, та підставимо отриманий вираз для напружень через переміщення у другу групу рівнянь, отримаємо статичну систему теорії пружності.

Рівняння 3.2.6.1 (статичні рівняння теорії пружності)

Напружено-деформований стан тіла, при умові що воно знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, описується системою

$$G \left(\Delta \vec{U} + \frac{m}{m-2} \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) \right) + \vec{X} = 0, \quad (3.2.77)$$

де $(x, y, z) \in \Omega$.

У випадку, коли одні частини тіла рухаються відносно інших, замість статичних рівнянь теорії пружності мають місце

Рівняння 3.2.6.2 (динамічні рівняння теорії пружності)

Напружено-деформований стан тіла, коли одні частини тіла рухаються відносно інших, описується системою

$$G \left(\Delta \vec{U} + \frac{m}{m-2} \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) \right) + \vec{X} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}, \quad (3.2.78)$$

де $(x, y, z) \in \Omega$ і $t > 0$.

Зауваження 3.2.6.1 — Остання система рівнянь може бути отримана, якщо використати більш загальний вигляд закону рівноваги елементу об'єму в якому рівнодіюча поверхневих та об'ємних сил дорівнюють силі інерції (другий закон Ньютона):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = \rho \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (3.2.79)$$

де права частина формули представляє силу інерції.

3.2.7 Початкові та граничні умови для рівнянь теорії пружності

Для нестационарної системи теорії пружності в початковий момент часу необхідно задавати вектор переміщень

$$\vec{U}(x, y, z, 0) = \vec{U}_0(x, y, z) \quad (3.2.80)$$

та вектор початкових швидкостей

$$\frac{\partial \vec{U}(x, y, z, 0)}{\partial t} = \vec{U}_1(x, y, z). \quad (3.2.81)$$

Перейдемо тепер до крайових (граничних) умов:

- Якщо на границі області $(x, y, z) \in S = \partial\Omega$ відомий вектор зміщень, то задають граничні умови Діріхле.

Визначення 3.2.7.1 (умов Діріхле). *Умовами Діріхле* називають співвідношення

$$\vec{U}(x, y, z, t) \Big|_{(x, y, z) \in S} = \vec{W}(x, y, z, t). \quad (3.2.82)$$

- Якщо на поверхні тіла відомий (заданий) вектор поверхневих сил, то в точках границі згідно закону рівноваги елемента поверхні задають умови для напрямку x :

$$\sum_{a \in \{x, y, z\}} \tau_{xa} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x, y, z) \in S} = F_x(x, y, z, t). \quad (3.2.83)$$

Аналогічно для напрямків y, z . Тобто маємо умови Неймана.

Визначення 3.2.7.2 (умов Неймана). *Умовами Неймана* називають співвідношення

$$\sum_{a \in \{x, y, z\}} \tau_{ba} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x, y, z) \in S} = F_b(x, y, z, t), \quad (3.2.84)$$

де $b \in \{x, y, z\}$.

- Якщо точки границі закріплені пружно, наприклад за допомогою пружини, то у цьому випадку на границю діє поверхнева сила пропорційна зміщенню точок тіла і направлена в бік протилежний зміщенню. Таким чином задаються граничні умови Ньютона.

Визначення 3.2.7.3 (умов Ньютона). *Умовами Ньютона* називають співвідношення

$$\sum_{a \in \{x, y, z\}} \tau_{ba} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x, y, z) \in S} = -K_b \cdot U_b(x, y, z, t) \Big|_{(x, y, z) \in S}, \quad (3.2.85)$$

де $b \in \{x, y, z\}$.

Зауваження 3.2.7.1 — Тут K_b — коефіцієнт пропорційності (пружного закріплення).

- Якщо на тіло закріплено пружно одночасно дії зовнішня сила, то маємо неоднорідну граничну умову третього роду, яка запишеться у вигляді:

$$\sum_{a \in \{x, y, z\}} \tau_{ba} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x, y, z) \in S} = -K_b \cdot (U_b(x, y, z, t) + F_b(x, y, z, t))|_{(x, y, z) \in S}, \quad (3.2.86)$$

де $b \in \{x, y, z\}$.

3.2.8 Спрощення системи рівнянь теорії пружності

Відомо, що за теоремою Гельмгольца, векторне поле $\vec{U}$ завжди можна представити у вигляді суми потенціального та соліноїдального векторних полів.

Тобто існують така скалярна функція φ та векторна функція $\vec{\Phi}$, які називають скалярним та векторним потенціалами відповідно що

$$\vec{U} = \nabla \varphi + \nabla \times \vec{\Phi}. \quad (3.2.87)$$

Для вектору масових сил $\vec{X}$ теж застосуємо представлення у вигляді потенціальної та соліноїдальної складових:

$$\vec{X} = \nabla f + \nabla \times \vec{F}. \quad (3.2.88)$$

Підставимо ці представлення у динамічні рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} \nabla \left(\left(\frac{2G(m-1)}{(m-2)} \cdot \Delta \varphi + f - \rho \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \right) + \\ + \nabla \times \left(G \Delta \vec{\Phi} + \vec{F} - \rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.89)$$

В результаті маємо скалярне та векторне хвильове рівняння:

Рівняння 3.2.8.1 (скалярне хвильове рівняння)

Виконується співвідношення для скалярного потенціалу:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(\frac{2G(m-1)}{(m-2)} \right) \Delta \varphi + f. \quad (3.2.90)$$

Рівняння 3.2.8.2 (векторне хвильове рівняння)

Виконується співвідношення для векторного потенціалу:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2} = G \Delta \vec{\Phi} + \vec{F}. \quad (3.2.91)$$

3.2.9 Математична модель поздовжніх коливань стрижня

Нехай маємо пружний стрижень, який витягнутий вздовж вісі Ox і має довжину L . Відносно стрижня будемо припускати, що переміщення, деформації та напруження, які можуть виникати в стрижні направлені лише вздовж вісі Ox і не залежать від інших просторових координат.

Зрозуміло, що в цьому випадку для компонентів тензора напружень можна записати:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \sigma_x = \sigma_x(x, t). \quad (3.2.92)$$

Будемо нехтувати також змінами поперечного перерізу при деформаціях вздовж вісі Ox . В цьому випадку закон Гука має вигляд: $\varepsilon_x = \sigma_x / E$.

Спрощений вигляд закону рівноваги елементу об'єму з можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + F_x(x, t) = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (3.2.93)$$

Або враховуючи зв'язок тензора деформацій і вектору переміщень, будемо мати

Рівняння 3.2.9.1 (поздовжніх коливань стрижня)

Виконується рівняння

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F_x(x, t), \quad (3.2.94)$$

де $0 < x < L$ і $t > 0$.

В початковий момент часу необхідно задавати початкові зміщення та початкові швидкості в напрямку вісі Ox :

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad (3.2.95)$$

$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = U_1(x). \quad (3.2.96)$$

Розглянемо можливі граничні умови на правому кінці стрижня:

- На правому кінці заданий закон його руху (зміщення):

$$U(L, t) = \varphi_2(t). \quad (3.2.97)$$

- На правий кінець діє задана сила. Враховуючи, що $\vec{n} = (1, 0, 0)$, можна записати $\sigma_x(L, t) = \psi_2(t)$, або, враховуючи спрощений закон Гука:

$$E \cdot \frac{\partial U(L, t)}{\partial x} = \psi_2(t). \quad (3.2.98)$$

- Правий кінець закріплений пружно. Можемо записати $\sigma_x(L, t) + K_x \cdot U(L, t) = 0$, або враховуючи закон Гука:

$$E \cdot \frac{\partial U(L, t)}{\partial x} + K_x \cdot U(L, t) = 0. \quad (3.2.99)$$

3.2.10 Математична модель поперечних коливання струни

Струною будемо називати абсолютно гнучку нитку, нескінченно малого поперечного перерізу, яка не протидіє згинанню.

Нехай струна має довжину L і в положенні рівноваги співпадає з відрізком вісі Ox , лівий кінець співпадає з початком координат.

Будемо вважати, що струна рівномірно натягнута з силою $T_0 = \text{const}$, і може здійснювати коливання лише в одній площині.

Будемо розглядати лише малі коливання, тобто такі, коли відхилення точок струни від положення рівноваги є величинами першого порядку малості, при цьому величинами більш високого порядку малості будемо нехтувати.

Припущення про абсолютну гнучкість струни означає, що при відхиленні точок струни від положення рівноваги сила натягу весь час направлена по дотичній до миттєвого профілю струни.

Введемо позначення:

- ρ — лінійна щільність точок струни (const);
- $u(x, t)$ — відхилення точок струни від положення рівноваги в точці (x, t) ;
- $f(x, t)$ — інтенсивність зовнішніх сил.

Запишемо рівняння руху для елементарної частини струни $(x, x + \Delta x)$ в проекції на вісь u . Підрахуємо наскільки змінилася довжина частини струни, між перерізами x і $x + \Delta x$. Згідно до відомої формули математичного аналізу можемо записати, що довжина дуги обчислюється

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx dx. \quad (3.2.100)$$

Таким чином зміною довжини дуги струни з точністю до членів другого порядку малості можна нехтувати.

Це в свою чергу означає, що за законом Гука сила натягу залишається постійною в кожному перерізі струни, тобто $T(x, t) = T_0$.

Виділимо сили, які діють на елементарну частину струни.

Проекція сили натягу в перерізі $x + \Delta x$ на вісь вздовж якої відбувається рух точок струни (вісь u) дорівнює $T_0 \sin \alpha(x + \Delta x, t)$, а в перерізі x дорівнює $-T_0 \sin \alpha(x, t)$, де $\sin \alpha(x, t)$ — синус кута між дотичною і додатнім напрямом вісі x . Для малих кутів $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \partial u / \partial x$.

Таким чином рівнодіючу сил натягу можна записати у вигляді

$$T_0(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)). \quad (3.2.101)$$

Зовнішня сила яка діє на виділений елемент струни дорівнює $f(\xi, t)\Delta x$.

Згідно до другого закону Ньютона рівнодіюча зовнішніх сил повинна дорівнювати силі інерції $F = ma$.

Сила інерції елементарного відрізка струни має вигляд:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2}, \quad (3.2.102)$$

де ξ — якась середня точка, тобто $\xi \in (x, x + \Delta x)$.

Таким чином згідно до закону Ньютона можна записати рівняння руху:

$$\rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = T_0(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)) + f(\xi, t)\Delta x. \quad (3.2.103)$$

Поділивши це рівняння на Δx і спрямувавши його до нуля отримаємо

Рівняння 3.2.10.1 (коливання струни)

Виконується рівняння

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (3.2.104)$$

де $0 < x < L$, і $t > 0$.

Додаткові умови для рівняння коливання струни полягають в необхідності задавати початкове відхилення точок струни і початкові швидкості точок струни:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.2.105)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_0(x), \quad (3.2.106)$$

для $0 < x < L$.

Окрім початкових умов необхідно задавати умови на кінцях струни. Найбільш поширеними умовами є:

- Кінець струни рухаються за заданим законом;
- На кінець струни діє задана сила;
- Кінець струни закріплений пружно.

Запишемо відповідні граничні умови для випадку лівого кінця.

- Якщо лівий кінець рухається за заданим законом, то

$$u(0, t) = \varphi_1(t). \quad (3.2.107)$$

- У випадку, коли на лівому кінці діє задана сила, то для отримання граничної умови можна записати рівняння руху для елементарного відрізка $[0, \Delta x]$ яке матиме вигляд:

$$\rho \Delta x t \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = T_0 u_x(\Delta x, t) - \psi_1(t) + f(\xi, t), \quad (3.2.108)$$

де ξ — якась середня точка, тобто $\xi \in (0, \Delta x)$.

Спрямувавши $\Delta x \rightarrow 0$ отримаємо граничну умову

$$u_x(0, t) = \frac{\psi_1(t)}{T_0}. \quad (3.2.109)$$

- Для випадку пружного закріплення замість заданої сили $\psi_1(t)$ необхідно розглядати силу реакції пружини, яка пропорційна зміщенню і діє в напрямку протилежному зміщенню. Таким чином рівняння руху буде мати вигляд:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = T_0 u_x(\Delta x, t) + k u(0, t) + f(\xi, t), \quad (3.2.110)$$

де ξ — якась середня точка, тобто $\xi \in (0, \Delta x)$.

Після граничного переходу отримаємо

$$u_x(0, t) + \frac{K}{T_0} u(0, t) = 0, \quad (3.2.111)$$

де k — коефіцієнт жорсткості пружини.

3.3 Математичні моделі руху ідеальної рідини

Будемо розглядати ідеальну рідину, тобто таку рідину для якої можна нехтувати властивостями в'язкості і теплопровідності.

Введемо позначення:

- $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка простору;
- t — час (скалярна величина);
- $\rho(x, t)$ — щільність ідеальної рідини (або газу);
- $\vec{V}(x, t)$ — швидкість в напрямку кожної з трьох вісей;
- $p(x, t)$ — тиск
- $\varepsilon(x, t)$ — питома внутрішня (теплова) енергія.

Вектор швидкості віднесемо до динамічних величин, а щільність, тиск та питому внутрішню енергію — до термодинамічних величин.

Для запису математичної моделі руху ідеальної рідини можна використовувати також інші термодинамічні величини, але будь яку третю термодинамічну величину можна записати як функцію двох інших. При цьому лише дві з них будуть незалежними.

3.3.1 Закон збереження маси

Візьмемо довільний уявний об'єм G і порахуємо кількість рідини, що міститься в ньому, якщо ρdG — кількість рідини в елементарному об'ємі dG , то в об'ємі G міститься маса рідини

$$\iiint_G \rho(x, t) dG. \quad (3.3.1)$$

Зміна маси в об'ємі G за проміжок часу від t_1 до t_2 дорівнює

$$\iiint_G \rho(x, t)|_{t_1}^{t_2} dG. \quad (3.3.2)$$

Через поверхню S вільно циркулює рідина, підрахуємо кількість рідини, що втікає в об'єм G (потік векторного поля через поверхню). Вважаємо, що $\vec{n}$ — напрям зовнішньої нормалі. Тоді кількість рідини, що проходить за час dt через елемент поверхні dS всередину тіла буде $-\rho \mathbf{V}_n dS dt$, де $\mathbf{V}_n$ — нормальна складова вектора швидкості ($\mathbf{V}_n = \langle \mathbf{V}, \vec{n} \rangle$). Тоді кількість рідини, що втікає в об'єм G за проміжок часу від t_1 до t_2 через усю поверхню дорівнює

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \rho(x, t) \mathbf{V}_n(x, t) dS dt. \quad (3.3.3)$$

Таким чином ми отримали

Закон 3.3.1.1 (збереження маси)

Зміна маси в об'ємі G за час від t_1 до t_2 дорівнює кількості рідини, що втікає (витікає) через поверхню тіла за обраний інтервал часу і має вигляд:

$$\iiint_G \rho(x, t)|_{t_1}^{t_2} dG + \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \rho(x, t) \mathbf{V}_n(x, t) dS dt = 0. \quad (3.3.4)$$

З формули Остроградського-Гауса для другого інтегралу:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_G \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dG dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G (\nabla \cdot (\rho(x, t) \mathbf{V}(x, t))) dG dt = 0. \quad (3.3.5)$$

Ця рівність виконується для будь-якого об'єму G і для будь-якого проміжку часу, таким чином вона вірна тоді і лише тоді, коли рівний нулю відповідний підінтегральний вираз.

Таким чином ми отримали

Рівняння 3.3.1.1 (нерозривності)

Диференціальна форма закону збереження маси:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0. \quad (3.3.6)$$

3.3.2 Закон збереження імпульсу

Імпульс — векторна величина. Імпульс для елемента об'єму dG в напрямку вісі Ox_i дорівнює $\rho V_i dG$, тоді в об'ємі G кількість руху (складова вектору імпульсу) обчислюється як:

$$\iiint_G \rho(x, t) V_i(x, t) dG. \quad (3.3.7)$$

Зміна імпульсу за час від t_1 до t_2 має вигляд:

$$\iiint_G \rho(x, t) V_i(x, t) \Big|_{t_1}^{t_2} dG. \quad (3.3.8)$$

Імпульс в об'ємі G змінюється за рахунок імпульсу рідини, яка поступає через поверхню dS за час dt :

$$- \rho(x, t) V_n(x, t) V_i(x, t) dS dt \quad (3.3.9)$$

За проміжок часу від t_1 до t_2 через всю поверхню:

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \rho(x, t) V_n(x, t) V_i(x, t) dS dt \quad (3.3.10)$$

Імпульс змінюється також за рахунок поверхневої сили, яка діє на уявний об'єм з боку оточуючої рідини, в нашому випадку це є сила тиску, яка завжди діє ортогонально до поверхні тіла тому її напрям протилежний вектору зовнішньої нормалі:

$$d\vec{F}(x, t) = -p(x, t) \cdot \vec{n}(x, t) \cdot dS. \quad (3.3.11)$$

Зміна імпульсу за рахунок сили тиску через елементарну поверхню за елементарний проміжок часу в напрямку вісі Ox_i можна записати у вигляді:

$$- p(x, t) \cdot \vec{n}_i(x, t) dS dt, \quad (3.3.12)$$

де $\vec{n}_i$ — i -та складова вектора нормалі. Тоді повна зміна імпульсу в напрямку вісі Ox_i через поверхню S за час від t_1 до t_2 за рахунок сили тиску можна обчислити:

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iint_S (p(x, t) \cdot \vec{n}_i(x, t)) dS dt \quad (3.3.13)$$

Таким чином ми отримали

Закон 3.3.2.1 (збереження імпульсу)

Зміна імпульсу всередині уявного об'єму відбувається за рахунок сили тиску і втікання рідини через поверхню тіла і має вигляд:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \rho(x, t) V_n(x, t) V_i(x, t) dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_S (p(x, t) \cdot \vec{n}_i(x, t)) dS dt + \\ + \iiint_G \rho(x, t) V_i(x, t) |_{t_1}^{t_2} dG = 0. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

За формулою Остроградського-Гауса:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_G (\nabla \cdot (\rho V V_i) + \nabla_i p) dG dt + \iiint_G \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} dG dt = 0. \quad (3.3.15)$$

Оскільки ця рівність виконується для будь-якого об'єму G і для будь-якого проміжку часу, то нулю рівний і відповідний підінтегральний вираз:

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V V_i) + \nabla_i p = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.3.16)$$

У векторному вигляді це співвідношення набуває наступного вигляду:

$$\nabla \cdot (\rho V \otimes V) + \nabla p + \frac{\partial \rho V}{\partial t} = 0, \quad (3.3.17)$$

де $\otimes$ позначає тензорний добуток:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix} \quad (3.3.18)$$

3.3.3 Закон збереження енергії

Кількість енергії в елементі об'єму dG можна обчислити як:

$$\rho \frac{|V|^2}{2} dG + \rho \varepsilon dG = \rho \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) dG, \quad (3.3.19)$$

де $\rho |V|^2/2 dG$ — кількість кінетичної, $\rho \varepsilon dG$ — кількість внутрішньої (теплової) енергії.

Її зміна за проміжок часу від t_1 до t_2 в довільному об'ємі G обчислюється за формулою:

$$\iiint_G \rho \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) \Big|_{t_1}^{t_2} dG. \quad (3.3.20)$$

Кількість енергії, що потрапила в середину об'єму G через елементарну поверхню dS за час dt :

$$- \rho V_n \left(\frac{|\vec{V}|^2}{2} + \varepsilon \right) dS dt, \quad (3.3.21)$$

і відповідно за проміжок часу від t_1 до t_2 , через усю поверхню S :

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \rho V_n \left(\frac{|\vec{V}|^2}{2} + \varepsilon \right) dS dt. \quad (3.3.22)$$

Енергія в об'ємі G змінюється також за рахунок роботи сил тиску. Величина цієї роботи за елементарний відрізок часу dt обчислюється за відомою формулою фізики:

$$d\vec{A} = \langle \vec{F}, \vec{V} \rangle dt, \quad (3.3.23)$$

де $\vec{F}$ — вектор сили, а $\vec{V}$ — вектор швидкості руху. У випадку сили тиску будемо мати:

$$- \langle p \cdot dS \cdot \vec{n}, \vec{V} \rangle dt \quad (3.3.24)$$

Робота сил тиску через поверхню S за час від t_1 до t_2 обчислюється за формулою

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iint_S p V_n \, dS \, dt \quad (3.3.25)$$

Таким чином ми отримали

Закон 3.3.3.1 (збереження повної енергії)

Зміна повної енергії в довільному об'ємі відбувається за рахунок її проникнення з масою рідини через поверхню тіла та за рахунок роботи сил тиску:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left(\rho(x, t) V_n(x, t) \left(\frac{|V(x, t)|^2}{2} + \varepsilon(x, t) \right) + p(x, t) V_n(x, t) \right) dS \, dt + \\ + \iiint_G \rho(x, t) \left(\frac{|V(x, t)|^2}{2} + \varepsilon(x, t) \right) \Big|_{t_1}^{t_2} dG = 0 \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Застосування теореми Остроградського-Гауса до поверхневого інтегралу приводить до інтегральної рівності:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G \left(\nabla \cdot \left(\rho \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right) \right) dG \, dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) dG \, dt = 0. \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

з якої можна отримати диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) + \nabla \cdot \left(\rho \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right) = 0. \quad (3.3.28)$$

Воно є диференціальною формою запису закону збереження повної енергії.

Сукупність 3.3.1.1, 3.3.3.1, 3.3.2.1 трьох отриманих законів у диференціальному вигляді будемо розглядати як систему з 5 рівнянь із 6-ма невідомими функціями. Ця система описує загальні закономірності руху ідеальної рідини. Для замикання системи диференціальних рівнянь її треба

доповнити рівнянням стану, яке враховує індивідуальні властивості середовища і зв'язує між собою три термодинамічні параметри наприклад це рівняння може мати вигляд:

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \quad (3.3.29)$$

Конкретний вигляд цієї функції залежить від індивідуальних властивостей ідеальної рідини.

3.3.4 Інші термодинамічні функції та закон збереження ентропії

Серед інших термодинамічних функцій найбільш важливими є ентропія S , абсолютна температура T , та повний тепловміст (ентальпія) W . Згідно другого закону термодинаміки зміна ентропії в елементарному об'ємі при ізотермічному процесі дається диференціальним співвідношенням:

$$dS = \frac{1}{T} \left(d\varepsilon + \frac{dp}{\rho} \right) \quad (3.3.30)$$

а зміна ентальпії співвідношенням:

$$dW = d \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} \right), \quad (3.3.31)$$

або з врахуванням попереднього:

$$dW = T ds + \frac{dp}{\rho} \quad (3.3.32)$$

Для певних режимів руху рідини (малі швидкості, відсутність великих градієнтів параметрів) з системи законів з використанням щойно наведених рівностей можна отримати ще один закон збереження для ідеальної рідини, який називається закон збереження ентропії:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho V S) = 0. \quad (3.3.33)$$

Це рівняння у цьому випадку можна використовувати замість закону збереження енергії, а рівняння стану доцільно розглядати у вигляді

$$S = S(p, \rho). \quad (3.3.34)$$

3.3.5 Додаткові умови математичної моделі руху ідеальної рідини

Як правило систему рівнянь руху ідеальної рідини розглядають в області G , яка обмежена деякою поверхнею S та на деякому проміжку часу $t > t_0$. Для виділення єдиного розв'язку системи рівнянь необхідно задати додаткові умови.

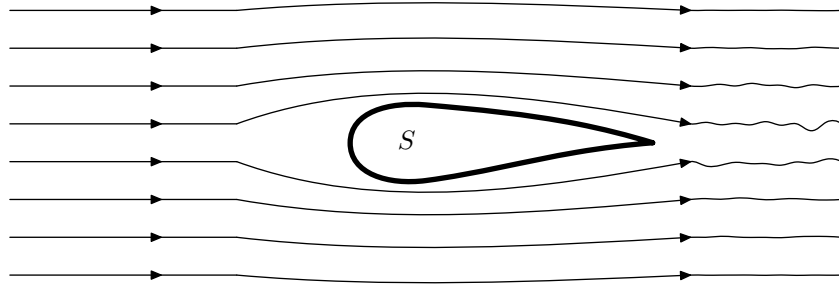
Початкові умови задають значення усіх невідомих параметрів в початковий момент часу, нехай $t_0 = 0$:

- $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ — початкова щільність;
- $V(x, 0) = V_0(x)$ — початкова вектор-функція швидкості;
- $p(x, 0) = p_0(x)$ — початкова функція тиску.

На границі області S необхідно задавати граничні умови, вигляд яких залежить від фізичного змісту задачі.

3.3.6 Задача обтікання тіла

Рис. 1: До контакту з поверхнею ∂S тіла S був потік ідеальної рідини з паралельними лініями, а після контакту утворився збурений потік:



Через поверхню тіла потік ідеальної рідини не протікає це означає, що нормальна складова вектора швидкості дорівнює нормальній складовій вектору швидкості поверхні тіла U_n :

$$V_n(x, t)|_{x \in S} = U_n(x, t). \quad (3.3.35)$$

Якщо тіло нерухоме, а потік набігає на тіло, то умова непротікання приймає вигляд

$$V_n(x, t)|_{x \in S} = 0. \quad (3.3.36)$$

3.3.7 Задача про поршень

Визначення 3.3.7.1 (поршня). *Поршень* — непрониклива для рідини поверхня, яка рухається в просторі, і при цьому може змінювати свою форму.

Задача про поршень узагальнює задачу обтікання тіла. Рівняння поверхні поршня запишемо у вигляді:

$$h(x, t) = 0. \quad (3.3.37)$$

На поверхні поршня повинна виконуватись умова непротікання. Запишемо її з використанням рівняння поверхні поршня:

$$dh = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot dx_i + \frac{\partial h}{\partial t} \cdot dt = 0. \quad (3.3.38)$$

Позначимо $U_i = dx_i/dt$ — складові вектора швидкості поверхні в напрямку вісі Ox_i . Вектор нормалі до поверхні поршня можна записати у вигляді

$$\vec{n} = \frac{\nabla h}{\|\nabla h\|} \quad (3.3.39)$$

Тоді легко отримати нормальну складову вектору швидкості поверхні:

$$\left(\sum_{i=1}^3 h_{x_i} U_i \right) \cdot \frac{1}{\|\nabla h\|} = U_n = -\frac{h'_t}{\|\nabla h\|}. \quad (3.3.40)$$

Нормальна складова вектора швидкості рідини дорівнює:

$$V_n = \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle = \sum_{i=1}^3 \frac{V_i h_{x_i}}{\|\nabla h\|}. \quad (3.3.41)$$

Прирівнюючи нормальну складову вектору швидкості поверхні і вектору швидкості рідини отримуємо граничну умову на поршні

$$-\frac{h'_t}{\|\nabla h\|} = \sum_{i=1}^3 \frac{V_i h_{x_i}}{\|\nabla h\|}. \quad (3.3.42)$$

Або після скорочення

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot V_i \Big|_{x \in S} = 0 \quad (3.3.43)$$

— гранична умова на поверхні S поршня.

3.3.8 Задача про вільну поверхню

Визначення 3.3.8.1 (вільної поверхні). *Вільна поверхня* — поверхня, яка розділяє дві ідеальні рідини, і форма цієї поверхні знаходиться в процесі розв’язку задачі, нехай $h(x, t)$ — невідома функція, яка описує форму поверхні.

Оскільки через вільну поверхню рідина не протікає то на цій поверхні виконується умова як і на поверхні поршня з невідомою функцією $h(x, t)$:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot V_i \right|_{x \in S} = 0 \quad (3.3.44)$$

Це додаткове рівняння для знаходження функції h .

Для знаходження додаткової невідомої функції h на поверхні розділу середовищ задається розподіл тиску:

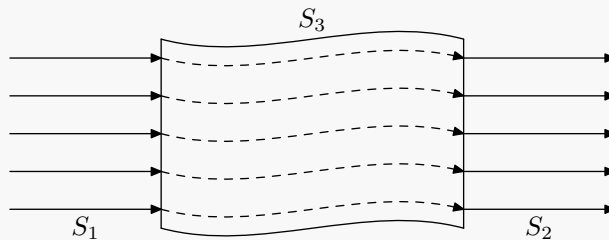
$$p(x, t)|_{x \in S} = P_a(x, t). \quad (3.3.45)$$

Для випадку поршня і для випадку вільної поверхні початковий стан поверхні задається у вигляді:

$$h(x, 0) = h_0(x). \quad (3.3.46)$$

3.3.9 Задача руху рідини в каналах

Визначення 3.3.9.1 (каналу). *Канал* — просторова область, яку можна утворити якщо переміщувати вздовж деякого незамкненого контуру в просторі нанизаний на нього замкнений контур змінної форми. В результаті утвориться область обмежена непроникливою для рідини поверхнею S_3 , і проникливими для рідини поверхнями S_1 , S_2 через які рідина може втікати або витікати:



Як правило канали використовують для перетворення потоків.

Постановка граничних умов для течій в каналах має специфіку, яка визначається властивостями рівнянь руху ідеальної рідини (газової динаміки). Граничні умови на непроникливій поверхні S_3 є класичні умови непротікання. Вигляд граничних умов на поверхнях S_1 та S_2 залежить від швидкості рідини на цих границях, а також від того втікає або витікає рідина з каналу.

Рухи рідини можна розділити на два режими:

- $V_n > c$ — надзвуковий режим руху (швидкий рух);
- $V_n < c$ — дозвуковий режим руху (повільний рух).

Зауваження 3.3.9.1 — Тут c — термодинамічна скалярна величина, яка характеризує швидкість розповсюдження малих збурень (акустичних коливань) в рідині. Для визначення швидкості звуку використовується співвідношення

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S=\text{const}} > 0. \quad (3.3.47)$$

При цьому рівняння стану зручно вибирати у вигляді $S = S(p, \rho)$.

1. Розглянемо дозвукове втікання на поверхні S_1 : $V_n < c$.

В цьому випадку необхідно задавати одну динамічну умову, наприклад потік маси через поверхню:

$$(\rho V_n)(x, t) = K (p(x, t) - p_a)|_{x \in S_1} \quad (3.3.48)$$

Зауваження 3.3.9.2 — Тут $p(x, t)$ — тиск на поверхні S_1 , p_a — атмосферний тиск, $(\rho V_n)(x, t)$ — потік маси.

Зауваження 3.3.9.3 — Оскільки рідина втікає, то $p_a > p(x, t)$.

Друга гранична умова при дозвуковому втіканні потребує завдання однієї термодинамічної функції, наприклад ентропії:

$$S(x, t)|_{x \in S_1} = S_i, \quad (3.3.49)$$

або питомої внутрішньої енергії

$$\varepsilon(x, t)|_{x \in S_1} = \varepsilon_i, \quad (3.3.50)$$

2. Розглянемо дозвукове витікання на поверхні S_2 : $V_n < c$.

В цьому випадку достатньо задати лише одну граничну умову:

$$(\rho V_n)(x, t) = K (p(x, t) - p_a)|_{x \in S_2} \quad (3.3.51)$$

Зауваження 3.3.9.4 — Оскільки рідина витікає, то $p_a < p(x, t)$.

3. Розглянемо надзвукове втікання на поверхні S_1 : $V_n > 1$,

При надзвуковому втіканні рідини на границі S_1 необхідно задавати усі п'ять функцій:

$$\vec{V}|_{x \in S_1} = \vec{V}_{in}, \quad \rho|_{x \in S_1} = \rho_{in}, \quad p|_{x \in S_1} = p_{in}. \quad (3.3.52)$$

4. Розглянемо надзвукове витікання через поверхню S_2 : $V_n > c$.

В цьому випадку ніяких граничних умов на відповідній границі ставити не треба, рідина, яка **дуже швидко** витікає через S_2 ніяк не впливає на внутрішню течію в каналі.

3.3.10 Ізоентропічні течії (течії з постійною ентропією)

Отримаємо спрощену математичну модель руху ідеальної рідини в припущенні, що ентропія ідеальної рідини є величиною постійною в будь-який момент часу і в довільній точці області.

Виходячи з закону збереження ентропії, за відомою формулою

$$\nabla \cdot (f \vec{A}) = \langle \vec{A}, \nabla f \rangle + f (\nabla \cdot \vec{A}), \quad (3.3.53)$$

отримаємо:

$$\rho \cdot \frac{\partial S}{\partial t} + S \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \langle V, \nabla S \rangle + S \cdot (\nabla \cdot (\rho V)) = 0, \quad (3.3.54)$$

або враховуючи рівняння нерозривності маємо не дивергентну форму закону збереження ентропії:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \langle V, \nabla S \rangle = 0. \quad (3.3.55)$$

Знайдемо повну похідну деякого параметра f вздовж траєкторії руху $x = x(t)$ частинки рідини:

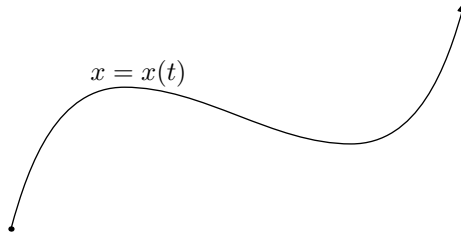


Рис. 2: траєкторія руху частинки рідини

тобто похідну по часу t вздовж контуру $x = x(t)$:

$$\frac{df(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle V, \nabla f \rangle. \quad (3.3.56)$$

Будемо називати цей вираз похідною по часу вздовж траєкторії руху частинки.

З не дивергентної форми закону збереження ентропії бачимо, що повна зміна ентропії вздовж траєкторії руху частинки дорівнює нулю, тобто

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (3.3.57)$$

Припустимо що в початковий момент часу $t = 0$ ідеальна рідина займає деяку область $\Omega(0)$, а ентропія $S(x, 0) = S_0 = \text{const}, \forall x \in \Omega(0)$:

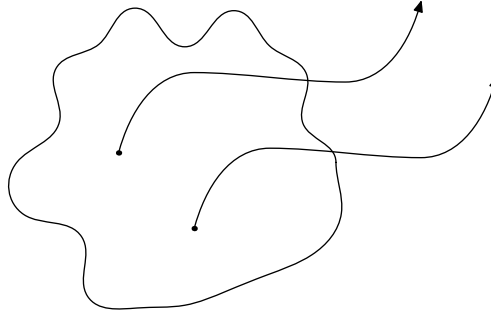


Рис. 3: Дві частинки рідини рухаються “паралельно”

Тоді згідно $dS/dt = 0$ в будь-який момент часу $t > 0$ ентропія буде залишатися постійною в довільній точці області, яка утворилася при переміщенні усіх її частинок вздовж траєкторій руху частинок, тобто області $\Omega(t)$. Таким чином можливе існування течій з постійним значення ентропії. Використовуючи введену термодинамічну функцію ентальпію, за формулою

$$dW = T dS + \frac{dp}{\rho} \quad (3.3.58)$$

при постійному значенні ентропії $S = \text{const}$ отримаємо співвідношення

$$dW = \frac{dp}{\rho}. \quad (3.3.59)$$

Перетворимо закон збереження імпульсу, продиференціюємо відповідні добутки та отримаємо:

$$V_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \nabla \cdot (\rho V) + \rho \langle V, \nabla V_i \rangle + \nabla_i p = 0. \quad (3.3.60)$$

Після скорочення отримаємо закон збереження імпульсу в не дивергентній формі:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \langle V, \nabla V_i \rangle + \frac{\nabla_i p}{\rho} = 0. \quad (3.3.61)$$

Векторна форма якого для ізоентропічних течій має вигляд:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \langle \vec{V}, \nabla \vec{V} \rangle + \nabla W = 0, \quad (3.3.62)$$

або

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \nabla W = 0 \quad (3.3.63)$$

Скористаємось відомою формулою векторного аналізу

$$\frac{\nabla |\vec{V}|^2}{2} = \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) + \langle \vec{V}, \nabla \vec{V} \rangle, \quad (3.3.64)$$

де

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}_1 \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) - \vec{i}_2 \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) + \vec{i}_3 \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (3.3.65)$$

Отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\nabla |\vec{V}|^2}{2} - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) + \nabla W = 0 \quad (3.3.66)$$

Подіємо на нього $\nabla \times$, і врахуємо, що для будь-якої скалярної функції f вионується $\nabla \times \nabla f = 0$, в результаті отримаємо систему рівнянь відносно вектору швидкості.

Рівняння 3.3.10.1 (система рівнянь руху ідеальної рідини для ізоентропічного випадку)

Виконуються співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{V}) - \nabla \times (\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})) = 0. \quad (3.3.67)$$

3.3.11 Потенціальні течії

Потенційні течії є частинним випадком ізоентропічних течій. Покажемо можливість існування потенційних течій.

Розглянемо інтеграл

$$\Gamma(t) = \oint_{c(t)} \vec{V}(t) \cdot d\vec{l} \quad (3.3.68)$$

який називається циркуляцією вектора швидкості вздовж контуру (під знаком інтегралу записано скалярний добуток векторів швидкості $\vec{V}(t)$ та вектору нескінченно малого зміщення вздовж контуру $d\vec{l}$); $c(t)$ — контур, утворений частинами ідеальної рідини, що рухаються вздовж своїх траєкторій.

Теорема 3.3.11.1 (Томсона, про збереження циркуляції векторного поля швидкості)

Для ізоентропічних течій ($S = \text{const}$)

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad (3.3.69)$$

тобто циркуляція векторного поля вздовж рухомого рідкого контуру є величина постійна.

Доведення.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{c(t)} \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} + \vec{V} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \right) = \quad (3.3.70)$$

$$= \oint_{c(t)} \left(-\nabla W \cdot d\vec{l} + \vec{V} \cdot d\vec{V} \right) = \quad (3.3.71)$$

$$= \oint_{c(t)} d \left(-W + \frac{|V|^2}{2} \right) = 0. \quad (3.3.72)$$

□

Використаємо теорему Стокса для будь-якої поверхні σ , що спирається на контур $c(t)$:

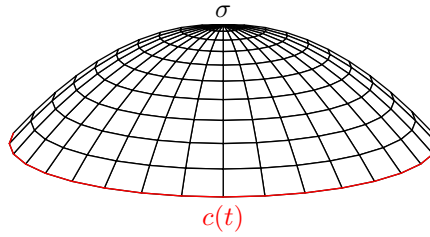


Рис. 4: Поверхня σ спирається на червоний контур $c(t)$

Тобто

$$\Gamma(t) = \oint_{c(t)} \vec{V}(t) \cdot d\vec{l} = \iint_{\sigma(t)} (\nabla \times V)_n d\sigma = \text{const}. \quad (3.3.73)$$

Розглянемо деяку траєкторію руху $c(t)$ однієї частинки ідеальної рідини і нескінченно малий контур $c_\varepsilon(t)$, який нанизаний на траєкторію руху:

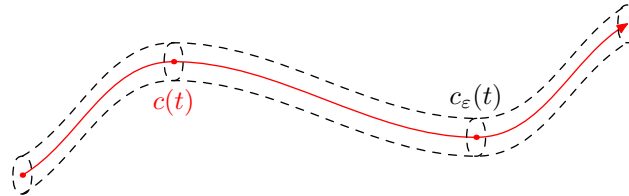


Рис. 5: Контур $c_\varepsilon(t)$ нанизаний на червону траєкторію $c(t)$

Припускаючи, що при $t = 0$ маємо $\nabla \times V = 0$, а таким чином $(\nabla \times V)_n = 0$, то згідно теореми Томсона $(\nabla \times V) = 0$, для $t > 0$.

Якщо розглянути область Ω для якої циркуляція відсутня при $t = 0$ тобто $\nabla \times V = 0$ то вздовж будь-якої траєкторії яка починається в області Ω в будь-який момент часу поле залишається безвихровим, тобто $\nabla \times \vec{V} = 0$:

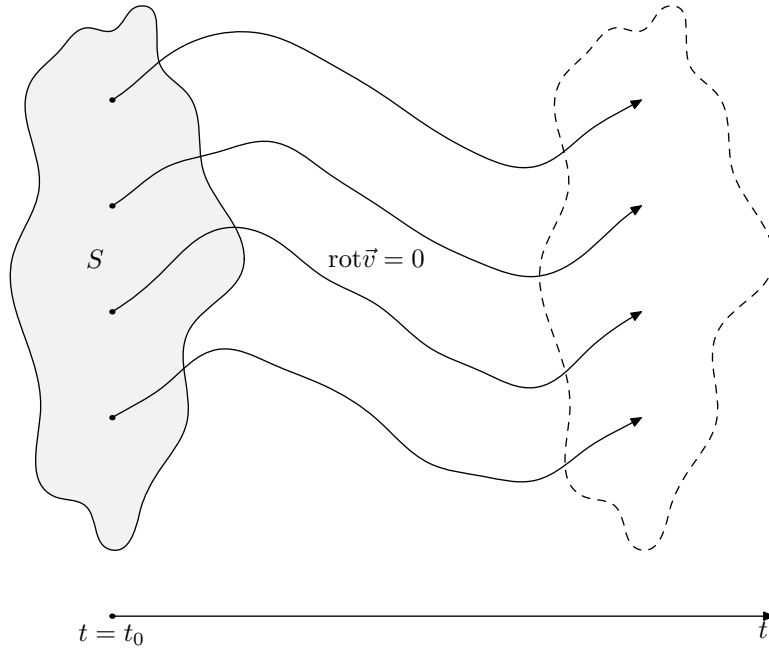


Рис. 6: Безвихрове поле: локально рух не паралельний але глобально спрямований паралельно

Це свідчить про існування безвихрових або потенційних течій.

Визначення 3.3.11.1 (потенціальної течії). Отже *потенціальною* називається течія, для якої

$$\forall t \geq t_0, \quad \forall x \in \Omega : \quad \nabla \times \vec{V}(x, t) = 0. \quad (3.3.74)$$

Звідси випливає, що існує потенціал векторного поля швидкості φ , градієнт якого рівний $\vec{V}$, тобто $\nabla \varphi = \vec{V}$. Використовуючи формулу (3.3.66), де W — тепловміст, закон збереження імпульсу буде мати вигляд:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nabla \left(\frac{|V|^2}{2} + W \right) = 0 \quad (3.3.75)$$

Закон збереження маси запишемо в не дивергентному вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot V) + \langle V, \nabla \rho \rangle = 0. \quad (3.3.76)$$

Проінтегруємо друге рівняння, та врахуємо, що $V = \nabla \varphi$, будемо мати:

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + W \right) = 0 \quad (3.3.77)$$

Звідси

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + W = \Psi(t), \quad (3.3.78)$$

де Ψ — довільна функція змінної часу. Враховуючи, що потенціал вектору швидкості визначається з точністю до адитивної функції часу, покладемо $\Psi(t) \equiv 0$. Отже, отримали

Рівняння 3.3.11.1 (інтеграл Коші-Лагранжа)

Виконується співвідношення:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + W = 0. \quad (3.3.79)$$

Визначення 3.3.11.2 (інтеграла Бернуллі). Для стаціонарних течій, що не залежать від часу, цей інтеграл називається *інтегралом Бернуллі*:

$$\frac{|V|^2}{2} + W = \text{const}. \quad (3.3.80)$$

З $dW = dp/\rho$ випливає, що

$$dW = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho = \frac{1}{\rho} c^2 d\rho, \quad (3.3.81)$$

але $c^2 = dp/d\rho$, звідки

$$c^2 \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{dW}{dt}. \quad (3.3.82)$$

Враховуючи недивергентну форму рівняння нерозривності отримаємо:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \Delta \varphi = 0. \quad (3.3.83)$$

Система рівнянь з інтегралу Коші-Лагранжа та останнього співвідношення є системою двох нелінійних рівнянь з двома змінними і описує потенціальний рух ідеальної рідини.

З інтегралу Коші-Лагранжа та останнього співвідношення маємо

$$\frac{1}{c^2} \frac{dW}{dt} + \Delta \varphi = 0. \quad (3.3.84)$$

Диференціюючи інтеграл Коші-Лагранжа по t :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} \right) + \frac{dW}{dt} = 0. \quad (3.3.85)$$

з урахуванням попереднього рівняння отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} \right) - c^2 \Delta \varphi = 0. \quad (3.3.86)$$

Це рівняння використовується для дослідження потенціальних течій. Розкриємо це рівняння у тривимірному випадку:

$$\varphi_{tt} + 2 \sum_{i=1}^3 V_i \varphi_{x_i t} + \sum_{i,k=1}^3 V_{x_i} V_{x_k} \varphi_{x_i x_k} = c^2 \sum_{i=1}^3 \varphi_{x_i x_i}. \quad (3.3.87)$$

Для стаціонарних течій у три- та дво-вимірному випадках маємо:

$$(c^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} + (c^2 - \varphi_y^2) \varphi_{yy} + (c^2 - \varphi_z^2) \varphi_{zz} - 2(\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_z \varphi_y \varphi_{zy} + \varphi_x \varphi_z \varphi_{xz}) = 0, \quad (3.3.88)$$

і

$$(c^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} + (c^2 - \varphi_y^2) \varphi_{yy} + 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} = 0. \quad (3.3.89)$$

відповідно.

Швидкості звуку у першому з цих рівнянь можна обчислити виходячи з формули Бернуллі

$$W + \frac{|V|^2}{2} = W_0 + \frac{|V_0|^2}{2}. \quad (3.3.90)$$

Зокрема, для широкого спектру ідеальних газів, з рівнянням стану $\varepsilon = p/\rho(\gamma - 1)$ можна отримати

$$c^2 = c_0^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot |V_0|^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \cdot |V|^2. \quad (3.3.91)$$

3.3.12 Модель акустичного руху рідини

Акустичними рухами ідеальної рідини будемо називати такі її рухи для яких фізичні характеристики рідини мало відрізняються від деяких постійних значень.

Розглянемо систему

Рівняння 3.3.12.1 (система рівнянь ізоентропічного руху ідеальної рідини)

Виконуються співвідношення

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot V) + \langle V, \nabla \rho \rangle = 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + \langle V, \nabla V_i \rangle + \frac{\nabla_i p}{\rho} = 0, \\ S(p, \rho) = S(p_0, \rho_0). \end{cases} \quad (3.3.92)$$

Відносно параметрів руху будемо припускати, що

$$\begin{cases} p = p_0 + \tilde{p}, & \rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, & V = V_0 + \tilde{V}, \\ p_0 = \text{const}, & \rho_0 = \text{const}, & V_0 = \text{const} = 0, \\ \tilde{\rho} \ll \rho_0, & \tilde{p} \ll p_0, & \tilde{V} \ll 1. \end{cases} \quad (3.3.93)$$

Проведемо лінеаризацію системи рівнянь зберігаючи лише величини першого порядку малості.

Для першого рівняння системи отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \tilde{\rho}) + (\rho_0 + \tilde{\rho})(\nabla \cdot \tilde{V}) + \langle \tilde{V}, \nabla(\rho_0 + \tilde{\rho}) \rangle = 0. \quad (3.3.94)$$

Зберігаючи члени першого порядку малості отримаємо

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0(\nabla \cdot \tilde{V}) = 0. \quad (3.3.95)$$

Для другого рівняння системи маємо

$$(\rho_0 + \tilde{\rho}) \left(\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \langle \tilde{V}, \nabla \tilde{V}_i \rangle \right) + \nabla_i(p_0 + \tilde{p}) = 0. \quad (3.3.96)$$

Розкриваючи дужки та нехтуючи членами другого порядку малості отримаємо

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \nabla_i \tilde{p} = 0. \quad (3.3.97)$$

Для лінеаризації третього співвідношення системи, ліву частину співвідношення розкладемо за формулою Тейлора зберігаючи лише члени першого порядку малості

$$S(p_0 + \tilde{p}, \rho_0 + \tilde{\rho}) = S(p_0, \rho_0) + \frac{\partial S(p_0, \rho_0)}{\partial p} \cdot \tilde{p} + \frac{\partial S(p_0, \rho_0)}{\partial \rho} \cdot \tilde{\rho} = S(p_0, \rho_0). \quad (3.3.98)$$

Таким чином можна записати:

$$\tilde{p} = -\frac{S'_\rho(p_0, \rho_0)}{S'_p(p_0, \rho_0)} \cdot \tilde{\rho}, \quad (3.3.99)$$

або

$$\tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}. \quad (3.3.100)$$

Таким чином маємо

Рівняння 3.3.12.2 (система рівнянь акустики (звукових коливань))

Виконуються співвідношення:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \tilde{V}) = 0, \\ \rho_0 \cdot \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \nabla_i \tilde{p} = 0, \\ \tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}. \end{cases} \quad (3.3.101)$$

З системи рівнянь можна отримати одне рівняння для тиску, або щільності.

Для цього перше рівняння продиференціюємо по часу, а на друге векторне рівняння подіємо операцією дивергенція, в результаті будемо мати:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \rho_0 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.3.102)$$

$$\rho_0 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \nabla \tilde{p} = 0. \quad (3.3.103)$$

Віднімаючи від першого рівняння друге і використовуючи третє рівняння отримаємо

Рівняння 3.3.12.3 (хвильове)

Виконується співвідношення:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \tilde{\rho}. \quad (3.3.104)$$

Враховуючи потенціальний характер акустичних рухів, вектор швидкості $\tilde{V}$ можна представити у вигляді градієнту потенціалу і отримати хвильове рівняння відносно потенціалу вектора швидкості.

3.3.13 Потенційне обтікання тонких тіл

Розглянемо тонке нерухоме тіло розташоване під малим кутом до плоско паралельного потоку газу, який набігає на це тіло. При певних умовах взаємодії, потік газу навколо тіла можна вважати потенційним, а швидкість газу в околі тіла буде мало відрізняється від вектора швидкості $\vec{V}_0$ потоку, що набігає з нескінченності. Таким чином вектор швидкості збуреного потоку $\vec{V}$ можна представити як суму $\vec{V} = \vec{V}_0 + \tilde{V}$. Де $|\tilde{V}| \ll |\vec{V}_0|$, тобто збурення внесені тонким тілом є малі по відношенню до набігаючого потоку.

Виберемо систему координат таким чином, щоби координатна вісь Ox співпадала з напрямом вектора швидкості потоку, що набігає, тобто $\vec{V}_0 = (\vec{V}_0^x, 0, 0)$.

Замість потенціалу φ повної швидкості V введемо потенціал $\tilde{\varphi}$ швидкості $\tilde{V}$, тобто $\tilde{V} = \nabla \tilde{\varphi}$. Зрозуміло, що

$$\varphi = \tilde{\varphi} + xV_0^x. \quad (3.3.105)$$

Візьмемо за основу нелінійне рівняння для стаціонарної течії у тривимірному просторі і підставимо в нього останнє рівняння, проведемо лінеаризацію рівняння, зберігаючи величини лише першого порядку малості.

В результаті отримаємо співвідношення

$$(1 - M_0^2) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} = 0, \quad (3.3.106)$$

де $(x, y, z) \in \Omega'$, а $M_0 = V_0^x/c_0$ — число Маха потоку що набігає.

Це рівняння має певну область застосування, зокрема рівняння становиться неприйнятним якщо число M_0 близьке до одиниці (біля звукова течія). В цьому випадку коефіцієнт при першому члені є малим, що вимагає збереження членів більш високого порядку малості. На поверхні тіла задається умова непротікання, яку з використанням процесу лінеаризації можна записати у вигляді:

$$\left(V_0^x + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right) n_x + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \cdot n_y + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \cdot n_z = 0, \quad (3.3.107)$$

або

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} \right|_S = -V_0^x n_x. \quad (3.3.108)$$

В нескінченно віддаленій точці збурений потік співпадає з потоком, що набігає, тому має місце співвідношення:

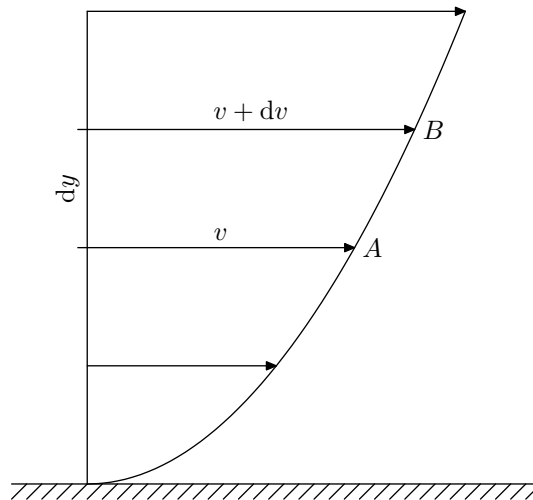
$$\tilde{\varphi} \xrightarrow{x,y,z \rightarrow \infty} 0. \quad (3.3.109)$$

3.4 Моделі руху в'язкої рідини

Визначення 3.4.0.1 (в'язкості рідини). *В'язкість рідини* — це властивість чинити опір пересуванню її часток, яка характеризує ступінь її плинності та рухливості.

Як видно з визначення, в'язкість є властивістю рідини, що рухається, і в стані спокою не виявляється. Наявність сил внутрішнього тертя рідини, що рухається, уперше встановив Ньютон, згодом російський вчений В. Н. Петров у 1888 р. привів математичний вираз для сили тертя.

Нехай шар рідини A рухається зі швидкістю v , а шар рідини B зі швидкістю $v + dv$, відстань між шарами dy :



У введених позначеннях сила тертя T між двома шарами рідини задається формулою

$$T = -\mu F \frac{dv}{dy}, \quad (3.4.1)$$

де μ — динамічний коефіцієнт в'язкості, F — площа стикання двох шарів рідини. Знак мінус вказує на те, що тертя діє в напрямку протилежному рухові.

Закони, що описують процеси руху в'язкої рідини, залишаються тими що і для ідеальної рідини, але при цьому з'являється додатковий механізм передачі імпульсу та енергії.

Закон 3.4.0.1 (збереження маси у вигляді рівняння нерозривності)

Залишається незмінним:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0. \quad (3.4.2)$$

3.4.1 Закон збереження імпульсу

Нагадаємо вигляд потоку імпульсу для ідеальної рідини, що проходить через елементарну поверхню dS в одиницю часу:

$$d\vec{I} = (\rho V_n \vec{V} + p \vec{n}) dS. \quad (3.4.3)$$

Зауваження 3.4.1.1 — Нагадаємо, що V_n — нормальна складова векторного поля $\vec{V}$, тобто

$$V_n = \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle. \quad (3.4.4)$$

Дамо

Визначення 3.4.1.1 (щільності потоку імпульсу). Введемо тензорну величину *щільності потоку імпульсу*:

$$\Pi = \rho \begin{pmatrix} V_1 V_1 & V_1 V_2 & V_1 V_3 \\ V_2 V_1 & V_2 V_2 & V_2 V_3 \\ V_3 V_1 & V_3 V_2 & V_3 V_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} p. \quad (3.4.5)$$

Тоді потік імпульсу (3.4.3) можна записати у вигляді:

$$d\vec{I} = \langle \Pi, \vec{n} \rangle dS. \quad (3.4.6)$$

Закон 3.4.1.1 (збереження імпульсу ідеальної рідини)

З використанням тензору щільності потоку імпульсу $\mathbf{\Pi}$ матиме вигляд:

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = 0. \quad (3.4.7)$$

Для в'язкої рідини, у випадку тривимірних рухів додатковий механізм переносу потоку імпульсу має тензорну природу і задається через симетричний тензор в'язких напружень.

Визначення 3.4.1.2 (симетричного тензору в'язких напружень). *Симетричним тензором в'язких напружень* називається тензор, компоненти якого визначаються наступними рівняннями:

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial V_l}{\partial x_l} \right) + \xi \delta_{ik} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial V_l}{\partial x_l}, \quad (3.4.8)$$

де $\xi, \eta > 0$ — коефіцієнти першої та другої в'язкості, δ_{ik} — символ Кронекера, а

$$\sum_{l=1}^3 \frac{\partial V_l}{\partial x_l} = \nabla \cdot \vec{V}. \quad (3.4.9)$$

Зауваження 3.4.1.2 — Рідина *ідеальна*, коли $\xi = \eta = 0$.

Таким чином для в'язкої рідини симетричний тензор щільності потоку імпульсу приймає вигляд:

$$\Pi_{ik} = \rho V_i V_k + p \delta_{ik} - \sigma_{ik}. \quad (3.4.10)$$

Використовуючи загальний вигляд тензору потоку імпульсу для в'язкої рідини, маємо

Закон 3.4.1.2 (збереження імпульсу)

Також можна записати у розгорнутому вигляді:

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}^\top) + \nabla p = \eta \Delta \vec{V} + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{V}). \quad (3.4.11)$$

Зауваження 3.4.1.3 — Тут ми вважаємо, що $\vec{V}$ — вектор-стовпчик, відповідно $\vec{V}^\top$ — вектор-рядок.

Зауваження 3.4.1.4 — Закон збереження імпульсу для в'язкої рідини у випадку нестисливої рідини, тобто коли $\rho \equiv \text{const}$ має простіший вигляд.

Рівняння нерозривності приймає вигляд $\nabla \cdot \vec{V} = 0$.

Отже, поле швидкості є соленоїдальним, тобто

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}^\top) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{V}, \quad (3.4.12)$$

або

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}^\top) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{V}. \quad (3.4.13)$$

3.4.2 Закон збереження енергії

Запишемо потік енергії для ідеальної рідини:

$$d\vec{E} = \left(\rho \vec{V} \frac{|V|^2}{2} + \rho \varepsilon \vec{V} + p \vec{V} \right) \vec{n} dS, \quad (3.4.14)$$

або

$$d\vec{E} = \rho V_n \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) dS. \quad (3.4.15)$$

Зауваження 3.4.2.1 — Тут і надалі ми писатимемо $|V|$ замість $|\vec{V}|$ для заощадження часу, місця, і концентрації уваги на тих використаннях векторного поля у яких важливий саме напрямок.

Замість скалярної величини тиску p для ідеальної рідини введемо тензор напружень для в'язкої рідини $\dot{\mathbf{P}}_{ik} = p\delta_{ik} - \sigma_{ik}$.

Тоді матимемо

$$d\vec{E} = \rho \left\langle \left(\left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) I + \frac{\dot{\mathbf{P}}}{\rho} \right) \vec{V}, \vec{n} \right\rangle, \quad (3.4.16)$$

де I — одинична матриця.

Можна записати

Закон 3.4.2.1 (інтегральний закон збереження повної енергії)

$$\iiint_G \rho \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) \bigg|_{t_1}^{t_2} dG + \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left\langle \left(\rho \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) I + \frac{\dot{\mathbf{P}}}{\rho} \right), \vec{n} \right\rangle dS dt = 0. \quad (3.4.17)$$

Звідси,

Закон 3.4.2.2 (збереження повної енергії для в'язкої рідини)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) + \nabla \cdot \left(\left(\rho \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) I + \dot{\mathbf{P}} \right) \vec{V} \right) = 0. \quad (3.4.18)$$

Якщо рідина не тільки в'язка, а й теплопровідна, то з'являється ще один механізм передачі енергії — теплопровідність, тоді другий доданок матиме вигляд:

$$\nabla \cdot \left(\left(\rho \left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) I + \dot{\mathbf{P}} \right) \vec{V} + \vec{\mathbf{Q}} \right) \quad (3.4.19)$$

де $\vec{\mathbf{Q}}$ — потік тепла,

$$\vec{\mathbf{Q}} = -k \nabla \varepsilon, \quad (3.4.20)$$

а k — коефіцієнт теплопровідності.

Отже, отримали

Рівняння 3.4.2.1 (які описують рух в'язкої рідини)

Ця система складається з рівняння нерозривності (3.4.2) (закону збереження маси 3.4.0.1), закону збереження імпульсу 3.4.1.2, і закону збереження повної енергії 3.4.2.2, та замикається рівнянням стану

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \quad (3.4.21)$$

Зауваження 3.4.2.2 — При переході від моделі ідеальної до моделі в'язкої рідини збільшується порядок рівнянь з першого на другий.

3.4.3 Додаткові умови

Початкові умови:

$$p, \rho, \varepsilon, V|_{t=0} = p_0, \rho_0, \varepsilon_0, V_0, \quad (3.4.22)$$

тобто у початковий момент часу задаються усі невідомі параметри.

Граничні умови на поверхні тіла:

1. Якщо нерухоме тіло обтікається в'язкою рідиною, то за рахунок молекулярних сил, в'язка рідина прилипає до поверхні тіла, тобто виконується умова:

$$\vec{V}(x, t)|_{x \in S} = 0 \quad (3.4.23)$$

2. Якщо поверхня тіла рухається зі швидкістю $\vec{U}_S(x, t)$ то на його поверхні для в'язкої рідини виконується умова

$$\vec{V}(x, t)|_{x \in S} = \vec{U}_S(x, t). \quad (3.4.24)$$

Визначення 3.4.3.1 (умов приліпання). Ці дві умови називаються *умовами приліпання*.

3.4.4 Умови на поверхні розділу двох середовищ

У випадку, коли два середовища розділені рухомою поверхнею, (дві рідини, що не змішуються) то на границі розділу двох середовищ, задають дві умови:

1. динамічна:

$$\vec{V}_1|_S = \vec{V}_2|_S = \vec{V}_p \quad (3.4.25)$$

Зауваження 3.4.4.1 — Динамічна умова вказує на те, що вектор швидкості на поверхні розділу двох середовищ є неперервним, а сама поверхня рухається з місцевою швидкістю середовища .

2. статична:

$$\dot{\mathbf{P}}_1 \vec{n}_1 + \dot{\mathbf{P}}_2 \vec{n}_2 = 0, \quad (3.4.26)$$

або

$$\dot{\mathbf{P}}_1 \vec{n}_1 = \dot{\mathbf{P}}_2 \vec{n}_1. \quad (3.4.27)$$

Зауваження 3.4.4.2 — Статична умова вказує на те, що рівнодіюча сил на поверхні розділу середовищ дорівнює нулю, тут $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ — вектори зовнішньої нормалі, $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$.

3.4.5 Граничні умови на вільній поверхні

Визначення 3.4.5.1 (вільної поверхні). *Вільною поверхнею* будемо називати поверхню утворену частинками в'язкої рідини на яку діє деяка зовнішня сила.

Нехай $h(x, t) = 0$ — рівняння вільної поверхні, де $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — невідома функція, тоді виконується

Умова 3.4.5.1 (на вільній поверхні)

Співвідношення

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + \left\langle \nabla_x h(x, t), \vec{V}(x, t) \right\rangle \Big|_{x \in S} = 0 \quad (3.4.28)$$

виражає умову непротікання рідини через поверхню S .

Зауваження 3.4.5.1 — Тобто через вільну поверхню рідина не протікає, а сама вільна поверхня переміщується з місцевою швидкістю руху рідини.

На вільну поверхню також діє зовнішня сила, яка задається тензорним співвідношенням:

$$\dot{\mathbf{P}}(x, t) \vec{n} \Big|_{x \in S} = \vec{\mathbf{F}}(x, t). \quad (3.4.29)$$

Скалярна форма цього рівняння має вигляді

$$\sum_{k=1}^3 p(x, t) \delta_{ik} n_k - \sigma_{ik}(x, t) n_k \Big|_{x \in S} = F_i(x, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.4.30)$$

де F_i — компоненти вектора зовнішніх сил, що діють на поверхні S .

3.5 Математичні моделі електростатики

З курсу фізики відомо, що при певних умовах окремі тіла (діелектрики) можуть отримувати додаткові електричні заряди (відбувається електризація). Наявність електричних зарядів проявляється у взаємодії заряджених тіл між собою (тіла притягуються або відштовхуються).

Відомо, що існують два види електричних зарядів, які умовно поділяються на додатні та від'ємні. Будь-який електричний заряд утворюється як сукупність елементарних неподільних за величиною зарядів. Носієм такого елементарного від'ємного заряду є електрон, носієм елементарного позитивного заряду може бути протон. Величину елементарного заряду традиційно позначають e .

Будь-який електричний заряд утворюється як сукупність елементарних зарядів $q = \pm Ne$.

Якщо заряджені частинки в тілі можуть більш менш вільно пересуватися в межах тіла, то кажуть, що тіло здатне проводити електричний струм. Носіями зарядів можуть бути не тільки електрони, але йони (атоми, що приєднали до себе або згубили один чи декілька електронів).

Будемо розглядати точкові заряди. Тобто заряджені тіла, геометричними розмірами яких можна нехтувати, вважаючи їх точкою. Взаємодія точкових електричних зарядів полягає в виникненні сили тяжіння або відштовхування. Величина цієї сили експериментально встановлена Кулоном у вигляді фізичного закону

Закон 3.5.0.1 (Кулона)

Виконується співвідношення

$$f = k \frac{q_1 q_2}{|r|^2}, \quad (3.5.1)$$

де k — коефіцієнт пропорційності, який залежить від середовища в якому відбувається взаємодії, q_1, q_2 — величини зарядів, r — відстань між зарядами.

Враховуючи векторний характер сили, закон Кулона можна записати в векторному вигляді

$$\vec{f} = k \frac{q_1 q_2}{|r|^3} \vec{r} \quad (3.5.2)$$

Якщо характеризувати силу, з якою заряд q_1 діє на заряд q_2 , то радіус вектор $\vec{r}$ направлений від q_1 до q_2 . При цьому сила з якою заряд q_2 діє на

заряд q_1 рівна за величиною та протилежна за напрямом. Закон Кулона в вакуумі має вигляд:

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r|^3} \vec{r}. \quad (3.5.3)$$

Визначення 3.5.0.1 (електричної сталої). ϵ_0 — *електрична стала*.

3.5.1 Електричне поле. Напруженість електричного поля

Взаємодія між електричними зарядами відбувається через електричне поле. Будь-який заряд змінює властивості оточуючого середовища створюючи в ньому електричне поле. Це поле проявляє себе у тому, що розташований в цьому полі заряд буде знаходитись під дією сили.

Для дослідження поля використовують пробний заряд, який обирають невеликим за величиною і розмірами (точковий заряд). Згідно до закону Кулона сила $\vec{f}$, що діє на пробний заряд q' полем точкового заряду величини q записується у вигляді

$$\vec{f} = q' \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|r|^3} \vec{r} \right) \quad (3.5.4)$$

З цієї формули видно, що сила $\vec{f}$ залежить від q' .

Визначення 3.5.1.1 (напруженості електричного поля). Характеристикою електричного поля, яка не залежить від величини пробного заряду є

$$E = \frac{\vec{f}}{q'}, \quad (3.5.5)$$

яку називають *напруженістю електричного поля*.

Зауваження 3.5.1.1 — Її також можна визначити як силу, що діє на одиничний пробний заряд.

Таким чином, напруженість електричного поля точкового заряду q визначається за формулою:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|r|^3} \vec{r}, \quad (3.5.6)$$

де вектор $\vec{r}$ направлений від точки розташування заряду q до точки знаходження пробного заряду.

3.5.2 Суперпозиція полів

Дослідним шляхом встановлено, що у випадку, коли поле утворюється декількома точковими зарядами, то сумарна сила, яка діє на пробний заряд дорівнює векторній сумі від дії кожної окремої сили.

Тобто виконується

Принцип 3.5.2.1 (суперпозиції електричних полів)

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad (3.5.7)$$

Нехай в точках P_i простору розташовані заряди величиною q_i , $i \in I$, тоді згідно до принципу суперпозиції електричних полів, можна записати:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \in I} \frac{q_i}{|r_i|^3} \vec{r}_i, \quad (3.5.8)$$

де $\vec{r}_i = \overrightarrow{P_i P}$, $|r_i|$ — довжина цього вектора.

У випадку, коли в області Ω трьохвимірного простору заряди розташовані щільно і щільність їх розташування задана деякою функцією $q(P)$, то напруженість електричного поля визначається у вигляді інтегралу:

$$\vec{E}(P_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{q(P)}{|r|^3} \vec{r} dP, \quad (3.5.9)$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{P_0 - P}$.

3.5.3 Потік векторного поля. Теорема Гауса

Визначення 3.5.3.1 (потіку векторного поля). *Потоком векторного поля $\vec{E}$ через поверхню S будемо називати величину*

$$\iint_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle dS = \Phi \quad (3.5.10)$$

Розглянемо замкнену поверхню S всередині якої знаходиться точковий заряд q , тоді потік векторного поля цього заряду можна розрахувати

за визначенням, або враховуючи інтегральний вигляд напруженості електричного поля маємо:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle}{|r|^3} dS, \quad (3.5.11)$$

де $\vec{r}$ — вектор направлений від точки розташування заряду до змінної точки поверхні S .

Неважко перевірити, що

$$\frac{\vec{r}}{|r|^3} = -\nabla \frac{1}{|r|} \quad (3.5.12)$$

тоді

$$\frac{q \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle}{4\pi\epsilon_0 |r|^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|r|}, \quad (3.5.13)$$

і, як наслідок,

$$\Phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|r|} dS. \quad (3.5.14)$$

В наступних лекціях, при вивченні гармонічних функцій ми покажемо, що цей вираз з урахуванням значення інтеграл дорівнює q/ϵ_0 .

Таким чином потік напруженості векторного поля одного точкового заряду дорівнює величині цього заряду поділеному на електричну постійну.

Враховуючи принцип суперпозиції електричного поля можна сформулювати наступну

Теорема 3.5.3.1 (Гауса про значення потоку електричного поля через замкнену поверхню)

Потік напруженості векторного поля через замкнену поверхню S тіла дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, що знаходяться всередині цієї поверхні поділений на діелектричну сталу:

$$\oint_S \vec{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (3.5.15)$$

Якщо заряд розподілений всередині замкнутого об'єму, обмеженого поверхнею S з об'ємною густиною ρ , то теорема Гауса буде мати вигляд

$$\oint_S \vec{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega \quad (3.5.16)$$

Визначення 3.5.3.2 (електричного зміщення). Поряд з напруженістю векторного поля $\vec{E}$, для опису електричного поля вводять величину $\vec{D}$, яка називається *електричним зміщенням*. Для вакууму вона визначається

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (3.5.17)$$

Формула Гауса приймає вид:

$$\oint_S \vec{D}_n dS = \iiint_{\Omega} \rho d\Omega. \quad (3.5.18)$$

3.5.4 Робота сил електростатичного поля. Потенціал електростатичного поля

Відомо, що робота в силовому полі, виконана вздовж деякого контуру C силою $\vec{F}$ обчислюється у вигляді криволінійного інтегралу другого роду за формулою

$$A = \int_C \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle. \quad (3.5.19)$$

Визначення 3.5.4.1 (циркуляції векторного поля). Відповідно, для електричного поля ця робота може бути записана у вигляді інтеграла

$$A = \int_C \langle \vec{E}, d\vec{l} \rangle, \quad (3.5.20)$$

який будемо називати *циркуляцією векторного поля* вздовж контуру C .

Визначення 3.5.4.2 (потенціалу електростатичного поля). Введемо величину

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|}, \quad \vec{r} = (x_1, x_2, x_3). \quad (3.5.21)$$

і назвемо її потенціалом електростатичного поля одиничного точкового заряду, розташованого в точці початку координат.

Враховуючи

$$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r}|}, \quad (3.5.22)$$

легко бачити, що напруженість поля одиничного точкового заряду можна записати

$$-\nabla u = \vec{E}, \quad (3.5.23)$$

тобто векторне поле одиничного точкового заряду є потенціальним. Аналогічна властивість має місце і для поля розподілених в об'ємі зарядів.

Легко перевірити, що формула для напруженості електричного поля через інтеграл може бути переписана у вигляді

$$\vec{E}(P_0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_{P_0} \iiint_{\Omega} \frac{q(P)}{|P - P_0|} dP. \quad (3.5.24)$$

Враховуючи потенційність векторного поля, роботу в такому полі можна обчислити

$$A = \int_{ab} \langle -\nabla u, d\vec{l} \rangle = - \int_{ab} du = u(a) - u(b), \quad (3.5.25)$$

причому $u(\infty) = 0$.

Зауваження 3.5.4.1 — Зрозуміло, що циркуляція електростатичного поля вздовж довільного замкненого контуру дорівнює нулю тобто

$$\oint_C \langle \vec{E}, d\vec{l} \rangle = 0. \quad (3.5.26)$$

Виходячи з формули для роботи можна визначити фізичний зміст потенціалу електростатичного поля в заданій точці.

Визначення 3.5.4.3 (потенціалу електростатичного поля). *Потенціал електростатичного поля* — це робота яку необхідно здійснити, щоб перемістити одиничний точковий заряд з нескінченно віддаленої точки простору у задану точку.

Зауваження 3.5.4.2 — Ця робота не залежить від шляху переміщення, а залежить лише від положення точки.

Електричне поле утворене сукупністю точкових зарядів, або розподілених у просторі з деякою щільністю також залишається потенціальним, а значить допускає існування скалярної функції u , такої, що

$$-\nabla\Phi = \vec{E}. \quad (3.5.27)$$

Враховуючи теорему Гауса та формулу Остроградського-Гауса отримаємо рівняння

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.5.28)$$

або, враховуючи $-\nabla\Phi = \vec{E}$, отримаємо рівняння:

$$\nabla \cdot (\nabla\Phi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.5.29)$$

або

Рівняння 3.5.4.1 (основне рівняння електростатики для вакууму)

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.5.30)$$

Зауваження 3.5.4.3 — Крім теореми Гауса при постановці граничних задач електростатики необхідно враховувати різні граничні режими електростатичного поля.

Приклад 3.5.4.1

Всередині провідника електричне поле $\vec{E}$ завжди дорівнює нулю, таким чином потенціал $u = \text{const}$. Ця константа має одне і те ж саме значення у системі з'єднаних між собою провідними зв'язками провідників. Якщо провідники відокремлені один від одного, то const для кожного провідника має своє окреме значення.

3.5.5 Електростатичне поле диполя

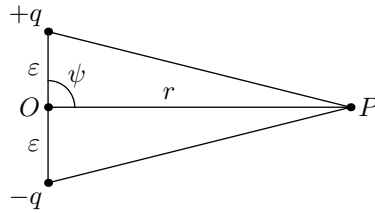
Визначення 3.5.5.1 (диполя). В тривимірному просторі розглянемо пару точкових зарядів розташованих на малій відстані, які мають заряди різних знаків і однакову абсолютну величину q . Таку пару зарядів будемо називати *диполем*.

Для конкретності, нехай точки розташування від'ємного і додатного зарядів знаходяться на відстані 2ε .

Визначення 3.5.5.2 (вісь диполя). Відрізок прямої, який з'єднує вказані точки будемо називати віссю диполя.

Визначення 3.5.5.3 (моменту диполя). Величину $2\varepsilon q = p$ будемо називати *моментом диполя*.

Підрахуємо потенціал електростатичного поля від такої пари зарядів. Позначимо r відстань від центру диполя (середина відрізка, що з'єднує заряди) до точки вимірювання потенціалу $r = |OP|$. При цьому будемо припускати, що величинами більш високого порядку малості ніж ε/r можна нехтувати:



З геометричних міркувань знаходимо

$$u(P) = \frac{-q}{4\pi r \varepsilon_0 \sqrt{1 - 2\frac{\varepsilon}{r} \cos \psi + \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2}} + \frac{q}{4\pi r \varepsilon_0 \sqrt{1 + 2\frac{\varepsilon}{r} \cos \psi + \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2}}. \quad (3.5.31)$$

Застосовуючи формулу Тейлора і нехтуючи членами другого порядку малості отримаємо

$$\begin{aligned} u(P) &= -\frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r} \cos \psi\right) + \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r} \left(1 - \frac{\varepsilon}{r} \cos \psi\right) = \\ &= -\frac{2\varepsilon q \cos \psi}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = -\frac{p \cos \psi}{4\pi \varepsilon_0 r^2}. \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

Припустимо, що ми маємо поверхню S на якій розташовані диполі. Нехай $\mu(M) : S \rightarrow \mathbb{R}$ — щільність моментів цих диполів. Тоді для кожної елементарної частини поверхні dS момент диполів dp дорівнює $dp = \mu dS$.

Враховуючи принцип суперпозиції потенціал електростатичного поля від такої зарядженої поверхні можна обчислити

$$u(P) = - \iint_S \frac{\cos \psi}{4\pi \varepsilon_0 r^2} dp = - \iint_S \mu(M) \frac{\cos \psi}{4\pi \varepsilon_0 |MP|^2} dS_M. \quad (3.5.33)$$

Де $|MP|$ — відстань між точками M і P .

Визначення 3.5.5.4 (потенціалу подвійного шару). Оскільки на поверхні тіла орієнтація вісі диполя направлена по нормалі n до поверхні, то потенціал електростатичного поля диполів поверхні буде мати вигляд інтегралу

$$u(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \mu(M) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|MP|} dS_M, \quad (3.5.34)$$

який називається *потенціалом подвійного шару*.

3.5.6 Електричне поле в діелектриках

Якщо діелектрик внести в електричне поле, то це поле і сам діелектрик змінює свої властивості. Ці зміни відбуваються за рахунок поляризації диполів, які заповнюють діелектрик, тобто під дією електричного поля орієнтуються в певному напрямку (до внесення поля їх розташування було хаотичне) і тим самим вносять зміни в зовнішнє електричне поле.

Визначення 3.5.6.1 (електричної індукції). *Електрична індукція* поля в діелектрику визначається формулою

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (3.5.35)$$

де $\vec{P}$ називають вектором *поляризації діелектриків* та для широкого класу діелектриків вектор $\vec{P}$ можна записати у вигляді

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (3.5.36)$$

χ — діелектрична сприйнятливість діелектрика.

Таким чином електричну індукцію в діелектрику можна обчислити за формулою

$$\vec{E} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (3.5.37)$$

де

$$\epsilon_a = \epsilon_0(1 + \chi). \quad (3.5.38)$$

Теорема Гауса для вектора електричної індукції записується у вигляді

$$\oiint_S D_n dS = \iiint_\Omega \rho d\Omega. \quad (3.5.39)$$

Враховуючи $\vec{E} = \epsilon_a \vec{E}$ та потенціальність вектора напруженості електричного поля будемо мати

Рівняння 3.5.6.1 (електростатики для діелектрика)

$$\nabla \cdot (\varepsilon_a \nabla u) = -\rho. \quad (3.5.40)$$

Розглянемо деякі наслідки теореми Гауса для граничних режимів:

- Якщо двостороння поверхня S діелектрика заряджена поверхневою щільністю σ , а в кожній точці поверхні заданий вектор нормалі $\vec{n}$, то з теореми Гауса випливає наслідок

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{S^+} - \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{S^-} = -E_n|_{S^+} + E_n|_{S^-} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (3.5.41)$$

де знаком “+” позначені граничні значення нормальної похідної потенціалу зі сторони додатного значення нормалі, знаком “-” — граничні значення потенціалу з протилежного боку.

Таким чином нормальна похідна потенціалу електростатичного поля, або нормальна складова напруженості електростатичного поля має розрив при переході через заряджену поверхню діелектрика.

- Якщо діелектрик з щільністю поверхневих зарядів примикає до провідника, то в провіднику електричне поле відсутнє, тобто потенціал дорівнює константі таким чином з попереднього наслідку потенціал на поверхні діелектрика задовольняє співвідношення

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{S^+} = -E_n|_{S^+} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_+}. \quad (3.5.42)$$

- Якщо вздовж деякої поверхні S межують два однорідних діелектрика з діелектричними сталими ε_+ , ε_- відповідно, то згідно моделі Фарадея, поверхня контакту є провідною у продовжному напрямку. З кожного боку на поверхні діелектриків має місце певна щільність зарядів σ_+ , σ_- відповідно, але сумарне значення цих щільностей дорівнює нулю, тобто

$$-\varepsilon_+ E_{n^+} + \varepsilon_- E_{n^-} = \varepsilon_+ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{S^+} - \varepsilon_- \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{S^-} = 0. \quad (3.5.43)$$

3.5.7 Постановка основних граничних задач електростатики

Нехай у просторі задана деяка система провідників у вигляді заряджених поверхонь

$$S = \bigsqcup_{i=1}^N S_i \quad (3.5.44)$$

розміщених в деякому діелектрику. На кожному провіднику (поверхні) заданий потенціал $U|_{S_i} = U_i = \text{const}$. Необхідно визначити потенціал електростатичного поля в усіх точках простору.

У випадку, якщо у просторі відсутні додаткові заряди окрім заряджених поверхонь, то шуканий потенціал електростатичного поля задовольняє рівнянню Лапласа. Таким чином гранична задача приймає вигляд:

$$\begin{cases} \Delta U = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \\ U|_{S_i} = U_i, & i = \overline{1, N}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} U = 0. \end{cases} \quad (3.5.45)$$

У випадку, якщо провідники розташовані у неоднорідному діелектрику у якому з щільністю ρ розподілені вільні заряди, то гранична задача буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\varepsilon_a(x) \nabla U) = -\rho(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \\ U|_{S_i} = U_i, & i = \overline{1, N}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} U = 0. \end{cases} \quad (3.5.46)$$

Визначення 3.5.7.1 (першої граничної задачі електростатики). Граничні задачі (3.5.45) і (3.5.46) називають *першими граничними задачами електростатики*.

В електростатиці розглядається і другий тип граничної задачі, коли на поверхні провідника задаються умови другого роду:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{S_i} = -\frac{\sigma_i}{\varepsilon_0}. \quad (3.5.47)$$

Фізично це означає, що на поверхні S_i задається щільність поверхневих зарядів σ_i .

Гранична умова другого роду не є природною для задач електростатики, оскільки поверхнева щільність важко вимірюється.

Більш природна постановка є такою:

Приклад 3.5.7.1

Нехай у просторі заповненому діелектриком з діелектричною сталою ε_s задана деяка система провідників у вигляді заряджених поверхонь

$$S = \bigsqcup_{i=1}^N S_i. \quad (3.5.48)$$

На кожному провіднику (поверхні) відомий повний заряд провідника e_i . Необхідно визначити потенціал електростатичного поля в усіх точках простору.

З основного рівняння електростатики запишемо:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_a \nabla U) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad (3.5.49)$$

на кожному провіднику задамо $U|_{S_i} = U_i = \text{const}$, де U_i — невідомі величини. Умову повного заряду провідника запишемо у вигляді:

$$\oint_{S_i} \varepsilon_a \frac{\partial U}{\partial n} dS = -e_i, \quad (3.5.50)$$

де інтегрування ведеться по довільній замкненій поверхні S_i , яка охоплює провідник. Завершує постановку умови згасання потенціалу на нескінченості

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} U = 0. \quad (3.5.51)$$

Визначення 3.5.7.2 (другої граничної задачі електростатики). Гранична задача (3.5.49)–(3.5.51) називається *другою граничною задачею електростатики*.

3.6 Математичні моделі магнітостатики

Відомо що взаємодіють між собою не тільки електричні заряди але і електричні струми. Так наприклад два паралельних провідники, по яким протікають постійні електричні струми притягуються між собою, якщо струми мають однаковий напрям і відштовхуються, якщо струми мають протилежний напрям. Зокрема Ампером було встановлено, що сила взаємодії провідників розрахована на одиницю довжини провідника пропорційна величинам струмів в них I_1 та I_2 і обернено пропорційна відстані

між паралельними провідниками r та дорівнює

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r}, \quad (3.6.1)$$

де μ_0 — коефіцієнт магнітної проникливості.

Взаємодія струмів відбувається через поле яке називається магнітним, така назва поля виникла у зв'язку з тим, що як винайшов у 1820 році Ерстед, поле провідника постійного струму впливає на орієнтацію магнітної стрілки.

Таким чином можна зробити висновок, що заряди, які рухаються змінюють властивості оточуючого їх простору — створюючи в ньому магнітне поле. Це поле проявляється в тому, що воно впливає на заряди, що рухаються в цьому полі (струми).

Подібно тому, як пробний точковий заряд використовувався нами для дослідження електричного поля, так для дослідження магнітного поля можна використовувати пробний струм, який циркулює в площинному замкненому контурі дуже малих розмірів.

Орієнтацію контуру в просторі будемо характеризувати за допомогою вектору нормалі до площини контуру, який обирається за правилом правого гвинта. (Якщо обходити контур, так, що область знаходиться ліворуч спостерігача, то нормаль орієнтована від ніг до голови спостерігача). Таку орієнтацію нормалі називають додатною.

Вносячи пробний контур у магнітне поле, ми спостерігаємо, що поле здійснює на контур орієнтуючу дію, встановлюючи її додатню нормаль у певному напрямі. Прийmemo цей напрям за напрям поля у цій точці. Якщо повернути контур так, що напрям додатньої нормалі і напрям поля не співпадали, то виникає обертальний момент, який прагне повернути контур в рівноважне положення. Величина моменту у точці залежить від кута α між нормаллю і напрямом поля. І досягає найбільшого значення $M_{\max}$ при $\alpha = \pi/2$, при $\alpha = 0$ момент дорівнює нулю. Обертальний момент залежить як від властивостей поля в заданій точці так і від властивостей контуру. Так вносячи різноманітні пробні контури можна побачити, що $M_{\max}$ пропорційний силі струму, що циркулює в контурі, і площі, яку охоплює контур і зовсім не залежить від форми контуру.

Визначення 3.6.0.1 (магнітного моменту контуру). Таким чином дія магнітного поля на площинний контур визначається величиною $P_M = IS$, яку називають абсолютним значенням *магнітного моменту контуру*.

Окрім сили току I та площі S пробний контур характеризується орієнтацією у просторі, тому магнітний момент слід розглядати, як вектор, напрям якого співпадає з напрямом одиничної нормалі, тому

$$\vec{p}_M = IS\vec{n}. \quad (3.6.2)$$

На пробні контури з різним значенням p_M в даній точці поля діють різні обертальні моменти $M_{\max}$. В той же час відношення $M_{\max}/p$ для усіх контурів буде одне і теж саме і може бути прийняте за кількісну характеристику магнітного поля.

Визначення 3.6.0.2 (індукції). Фізичну величину B , яка пропорційна цьому відношенню називають магнітною індукцією:

$$B \simeq \frac{M_{\max}}{p_M}. \quad (3.6.3)$$

Магнітна індукція — векторна величина, напрям якої визначається рівноважним положенням нормалі пробного контуру, а рівняння вище визначає модуль вектору $\vec{B}$.

Визначення 3.6.0.3 (напруженості магнітного поля). Поряд з вектором магнітної індукції $\vec{B}$ розглядається також векторна величина $\vec{H}$, яку називають *напруженістю магнітного поля*. Для вакууму та інших ізотропних середовищ, які не мають магнітних властивостей зв'язок між вектором магнітної індукції та вектором напруженості магнітного поля має вигляд.

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad (3.6.4)$$

тобто ці вектори колінеарні. Де $\mu = \text{const}$ — *магнітна проникливість* середовища, через μ_0 будемо позначати магнітну проникливість вакууму.

3.6.1 Закон Біо-Савара

Біо та Савар у 1820 році провели дослідження магнітних полів струмів різної форми та з'ясували, що напруженість магнітного поля в усіх випадках пропорційна силі струму, який створює магнітне поле, і доволі складним чином залежить від відстані до цієї точки. Експериментальні дані Біо Савара проаналізував Лаплас і встановив, що для елемента струму, який направлений вздовж вектора нескінченно малого зміщення $d\vec{l}$ і має величину I величина напруженості магнітного поля $d\vec{H}$ визна-

чається за формулою:

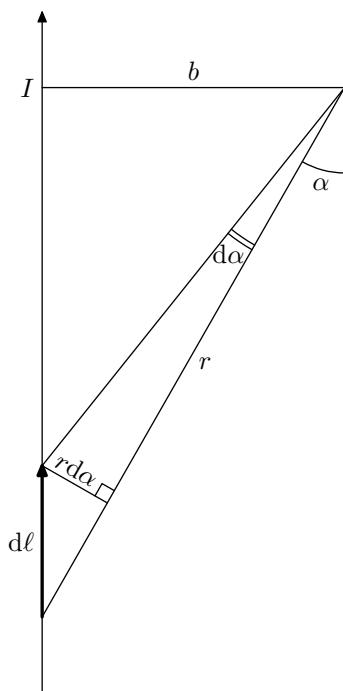
$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I (d\vec{l} \times \vec{r})}{|r|^3}, \quad (3.6.5)$$

де $\vec{r}$ — вектор, направлений від елементу струму до точки у якій обчислюється напруженість магнітного поля, $\vec{a} \times \vec{b}$ — векторний добуток двох векторів.

Виходячи з цієї формули легко обчислити поле прямого струму

$$\begin{aligned} |\vec{H}| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{H} \right| = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I \cdot |dl| \cdot |r| \cdot \sin \alpha}{|r|^3} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{I \cdot |r| \cdot \sin \alpha}{|r|^2 \cdot \sin \alpha} d\alpha = \frac{I}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{|r|} = \\ &= \frac{I}{4\pi b} \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha = \frac{I}{2\pi b}, \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

де всі величини зображені на наступному рисунку:



При цьому вектор $\vec{H}$ має напрям по дотичній до концентричних кіл з центром у точці проходження струму і орієнтований за правилом правого гвинта.

3.6.2 Циркуляція вектора напруженості магнітного поля

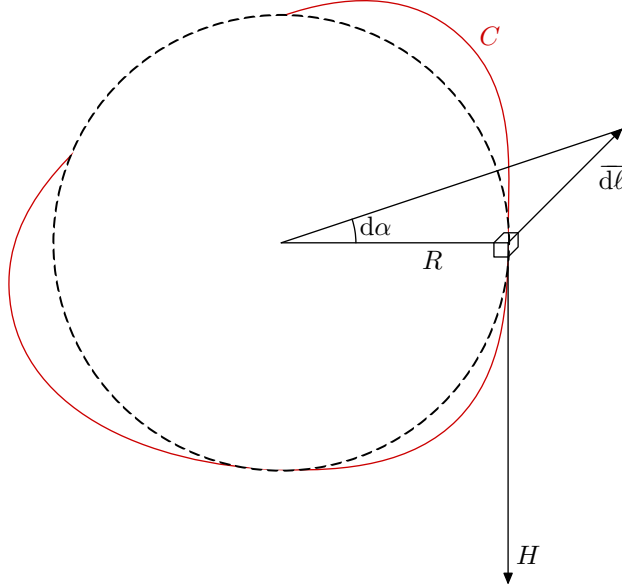
Нехай ми маємо магнітне поле з вектором магнітної напруженості $\vec{H}$, який є функцією точки простору.

Визначення 3.6.2.1 (циркуляції векторного поля). *Циркуляцією* векторного поля $\vec{H}$ будемо називати величину

$$\oint_C \langle \vec{H}, d\vec{l} \rangle \quad (3.6.7)$$

де C — замкнений контур в просторі.

Обчислимо циркуляцію вектора магнітної напруженості вздовж будь-якого замкнутого плоского контуру, що охоплює деякий прямий струм, ортогональний до площини контуру:



Враховуючи, формулу $|\vec{H}| = I/2\pi b$, можна записати, що

$$\langle \vec{H}, d\vec{l} \rangle = \frac{I}{2\pi R} R d\alpha. \quad (3.6.8)$$

Таким чином циркуляція

$$\oint_C \langle \vec{\mathbf{H}}, d\vec{\mathbf{l}} \rangle = \frac{I}{2\pi} \oint_C d\alpha = I. \quad (3.6.9)$$

У випадку, коли контур охоплює декілька струмів, то ця формула узагальнюється:

$$\oint_C \langle \vec{\mathbf{H}}, d\vec{\mathbf{l}} \rangle = \sum I. \quad (3.6.10)$$

У випадку, коли струми розподілені у просторі з деякою щільністю $\vec{j}$, то величина струму, що протікає через довільну поверхню S може бути записаний у вигляді

$$I = \int_S \vec{j}_n dS. \quad (3.6.11)$$

Таким чином маємо

Закон 3.6.2.1 (циркуляції магнітного поля)

$$\oint_C \langle \vec{\mathbf{H}}, d\vec{\mathbf{l}} \rangle = \iint_S \vec{j}_n dS \quad (3.6.12)$$

У цій формулі C — довільний контур у просторі, S — довільна поверхня, яка спирається на контур C .

Використовуючи формулу Стокса, отримаємо

$$\iint_S (\nabla \times \vec{\mathbf{H}})_n = \iint_S \vec{j}_n dS. \quad (3.6.13)$$

Враховуючи, що поверхня S обрана довільним чином можемо записати

Рівняння 3.6.2.1 (магнітостатики)

Воно є частинним випадком третього рівняння поля:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{j}. \quad (3.6.14)$$

Порівнюючи закон циркуляції магнітного поля у вакуумі та формулу

$$\oint_C \langle \vec{E}, d\vec{l} \rangle = 0 \quad (3.6.15)$$

для електричного поля, бачимо між цими полями суттєву різницю. Так циркуляція по замкненому контуру електричного поля дорівнює нулю, а значить це поле потенціальне, магнітне поле не є потенціальним, його називають вихровим.

Другою особливістю магнітного поля полягає в тому, що лінії магнітної індукції, а значить і лінії напруженості магнітного поля у вакуумі завжди замкнені, що свідчить про відсутність у природі магнітних зарядів. Замкненість ліній магнітної індукції та ліній напруженості магнітного поля означають, що потік векторного поля магнітної індукції через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю. Тобто

$$\oiint_S \vec{B}_n dS = 0. \quad (3.6.16)$$

З формули Остроградського Гауса отримаємо ще одне рівняння магнітостатики, яке є частинним випадком другого рівняння теорії поля:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.6.17)$$

або, враховуючи $\vec{B} = \mu \vec{H}$,

$$\nabla \cdot (\mu_0 \vec{H}) = 0. \quad (3.6.18)$$

Таким чином рівняння магнітостатики для вакууму представляють собою систему з другого і третього рівнянь поля.

3.6.3 Магнітне поле в середовищі

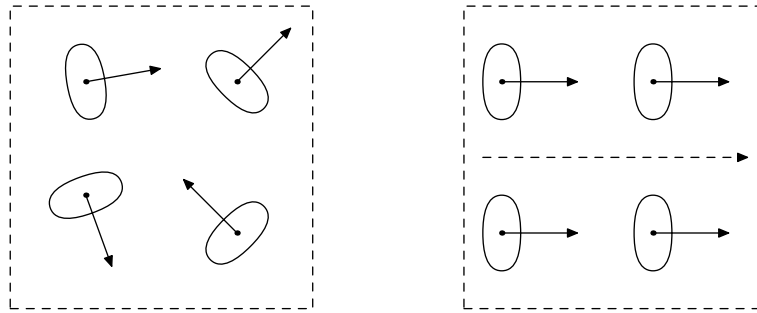
Деякі речовини мають здатність до намагнічування: тобто під дією прикладеного до них магнітного поля можуть отримувати магнітний момент. Одні речовини намагнічуються сильніше, інші слабкіше, такі речовини називаються магнетиками.

Для магнетиків розміщених у зовнішньому магнітному полі утворюється додаткове магнітне поле і сумарне магнітне поле визначається як

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}', \quad (3.6.19)$$

де $\vec{B}_i$ — зовнішнє магнітне поле обумовлене електричним струмом чи іншим чинником, $\vec{B}'$ — додаткове магнітне поле середовища здатного до намагнічування.

Для пояснення явища намагнічування середовищ Ампер припустив, що в молекулах тіла циркулюють кругові струми. Кожний струм має магнітний момент і створює в оточуючому просторі магнітне поле. Якщо зовнішнє магнітне поле відсутнє, то молекули розташовані хаотично і результуюче поле дорівнює нулю. В результаті хаотичної орієнтації магнітних моментів, сумарний магнітний момент тіла також рівний нулю. Під дією зовнішнього поля моменти молекул сприймають переважну орієнтацію в одному напрямку, за рахунок чого магнетик намагнічується і його сумарний магнітний момент становиться відмінним від нуля. Магнітні поля окремих молекулярних струмів вже не компенсують одне одного, а утворюють додаткове магнітне поле $\vec{B}'$:



Визначення 3.6.3.1 (вектору намагнічування). Намагнічування магнетика природно характеризувати магнітним моментом одиниці об'єму. Цю величину називають *вектором намагнічування* і позначають $\vec{J}$.

Дослідним шляхом встановлено, що вектор намагнічування $\vec{J}$ зв'язаний з напруженістю зовнішнього поля у точці співвідношенням

$$\vec{J} = \chi \vec{H}. \quad (3.6.20)$$

Визначення 3.6.3.2 (магнітної сприйнятливості речовини). Тут χ — безрозмірна величина, яку називають *магнітною сприйнятливістю речовини*.

В залежності від знаку і величини магнітної сприйнятливості χ усі магнетики поділяються на класи:

- Діамагнетики — для яких χ — мала за абсолютною величиною і від’ємна.
- Парамагнетики — для яких χ — мала за величиною і додатна.
- Феромагнетики — для яких χ — додатна і досягає дуже великих значень.

Таким чином враховуючи $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}'$ та $\vec{J} = \chi \vec{H}$, можемо записати, що зв’язок між вектором магнітної індукції та вектором напруженості магнітного поля для магнетиків матиме вигляд $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{J}$, або $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \chi \vec{H}$, звідки маємо

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi)} = \frac{\vec{B}}{\mu_\alpha}, \quad (3.6.21)$$

де $\mu_\alpha = \mu_0(1 + \chi)$.

Таким чином для магнетиків рівняння магнітостатики приймають вигляд другого і третього рівняння поля (3.6.18), (3.6.14), де вектор магнітної індукції і напруженість магнітного поля зв’язані між собою останнім співвідношенням.

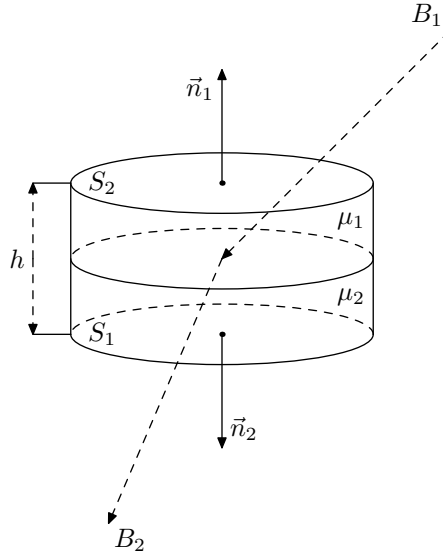
3.6.4 Граничні умови для магнітного поля

При переході через границю розділу двох магнетиків з різними магнітними проникливостями μ_1 і μ_2 силові лінії магнітного поля відчують переломлення. Для з’ясування, яким чином відбувається переломлення ліній поля необхідно встановити яким чином переломлюються нормальні та тангенціальні складові на границі. Отримання граничних умов здійснюються за допомогою теореми Гауса для магнітного поля і теореми про циркуляції магнітного поля.

Для нормальних складових вектора магнітної індукції $\vec{B}$, теорема Гауса дає

$$\langle \vec{B}_2, \vec{n}_2 \rangle S_2 + \langle \vec{B}_1, \vec{n}_1 \rangle S_1 = 0, \quad (3.6.22)$$

де $S_1 = S_2$:



Потік магнітної індукції $\vec{B}$ через бокову поверхню циліндру при $h \rightarrow 0$ стає нескінченно малим і їм можна нехтувати. Таким чином

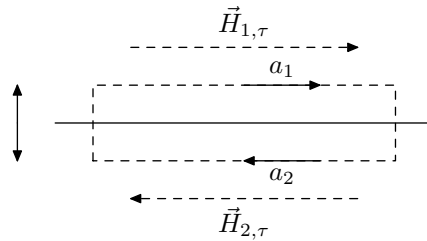
$$\langle \vec{B}_1, \vec{n}_1 \rangle \Big|_S = \langle \vec{B}_2, \vec{n}_1 \rangle \Big|_S. \quad (3.6.23)$$

Тобто на границі розділу двох магнетиків виконується умова неперервності нормальної складової вектора магнітної індукції $\vec{B}_n$.

Припустимо, що на границі, що розділяє два магнетики не тече поверхневий електричний струм, тоді згідно до теореми про циркуляцію напруженості магнітного поля, будемо мати

$$\langle \vec{H}_1, \tau \rangle a_1 - \langle \vec{H}_2, \tau \rangle a_2 = 0, \quad (3.6.24)$$

де $a_1 = a_2$ — горизонтальні елементи контуру інтегрування:



Інтеграл по вертикальним складовим контуру при $h \rightarrow 0$ прямує до нуля.

Таким чином дотичні (тангенціальні) складові напруженості магнітного поля неперервні при переході через границю двох магнетиків, а відповідна гранична умова приймає вигляд:

$$\vec{H}_{1\tau}|_S = \vec{H}_{2\tau}|_S \quad (3.6.25)$$

Якщо врахувати зв'язок між векторами магнітної індукції і вектором напруженості магнітного поля, то можна записати

$$\mu_2 \vec{B}_{1\tau}|_S = \mu_1 \vec{B}_{2\tau}|_S, \quad (3.6.26)$$

$$\mu_1 \vec{H}_{1n}|_S = \mu_2 \vec{H}_{2n}|_S. \quad (3.6.27)$$

Якщо на поверхні, що розділяє два магнетики протікає електричний струм з лінійною щільністю $\vec{i}$, то тоді замкнений контур охоплює поверхневий струм і поверхневий інтеграл обчислюється з використанням третього рівняння поля. В результаті будемо мати умову:

$$\vec{H}_{1\tau}|_S - \vec{H}_{2\tau}|_S = \langle \vec{i}, \vec{N} \rangle \quad (3.6.28)$$

де $\vec{N} = \tau \times \vec{n}$ — векторний добуток дотичного вектора τ та вектора нормалі $\vec{n}$, до поверхні S , що розділяє два магнетики.

3.6.5 Векторний потенціал

Нагадаємо систему рівнянь магнітостатики для магнетиків.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}, \\ \vec{B} = \mu_a \vec{H}. \end{cases} \quad (3.6.29)$$

З другого рівняння випливає, що $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, оскільки $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$.

Умова соленоїдальності векторного поля $\vec{B}$ (перше рівняння) виконано коли

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (3.6.30)$$

де $\vec{A}$ — векторний потенціал, що залежить від координат точок простору. Оскільки $\nabla \times (\nabla \psi) = 0$, то векторне поле магнітної індукції не зміниться, якщо замість вектора A узяти $A_1 = A + \nabla \psi$, де ψ — довільна скалярна функція. Таким чином векторний потенціал для поля магнітної індукції $\vec{B}$ не визначається однозначно. У зв'язку з чим векторний потенціал $\vec{A}$ можна підпорядкувати додатковій умові

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (3.6.31)$$

Зауваження 3.6.5.1 — Виконання цієї умови завжди можна забезпечити вибором функції ψ .

Використаємо представлення $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, тоді з другого та третього рівняння отримаємо

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \vec{j} \mu_a. \quad (3.6.32)$$

Врахуємо, що

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_a \vec{j}. \quad (3.6.33)$$

Використовуючи умову $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, отримаємо рівняння для векторного потенціалу

$$\Delta \vec{A} = -\mu_a \vec{j}. \quad (3.6.34)$$

Таким чином система рівнянь магнітостатики зводиться до векторного рівняння Пуассона для векторного потенціалу.

3.7 Класифікація рівнянь в частинних похідних

3.7.1 Класифікація рівнянь з двома незалежними змінними

Будемо розглядати загальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними, лінійне відносно старших похідних.

Визначення 3.7.1.1 (головної частини рівняння). Частину рівняння, яка містить похідні старшого порядку називають *головною* частиною рівняння:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (3.7.1)$$

Поставимо задачу спростити вигляд головної частини рівняння. Для чого введемо заміну змінних:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \quad (3.7.2)$$

Для скорочення запису скористаємося позначеннями $\partial u / \partial x = u_x$.

Обчислимо вирази для похідних в нових змінних ξ, η :

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad (3.7.3)$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \quad (3.7.4)$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \quad (3.7.5)$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}, \quad (3.7.6)$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_{\xi}\xi_{xy} + u_{\eta}\eta_{xy}. \quad (3.7.7)$$

Підставимо обчислені похідні в рівняння:

$$\begin{aligned} & A(u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2) + \\ & + 2B(u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x \cdot \eta_y) + \\ & + C(u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2) + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0. \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

Перегрупуємо доданки і отримаємо рівняння у вигляді:

$$\overline{A}u_{\xi\xi} + 2\overline{B}u_{\xi\eta} + \overline{C}u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0, \quad (3.7.9)$$

де

$$\overline{A} = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \quad (3.7.10)$$

$$\overline{B} = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y \quad (3.7.11)$$

$$\overline{C} = A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \quad (3.7.12)$$

Зробимо нульовими коефіцієнти при $u_{\xi\xi}$ та $u_{\eta\eta}$ за рахунок вибору нових змінних:

$$A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0, \quad (3.7.13)$$

$$A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0, \quad (3.7.14)$$

Розв'язком цих рівнянь будуть функції $\xi(x, y)$ і $\eta(x, y)$ відповідно.

Для знаходження функцій $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, зведемо рівняння в частинних похідних до звичайного диференціального рівняння.

Розглянемо перше з цих рівнянь і розділимо його на ξ_y^2 :

$$A \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + 2B \frac{\xi_x}{\xi_y} + C = 0. \quad (3.7.15)$$

Аналогічне рівняння можна отримати і для функції $\eta(x, y)$.

Розглянемо неявно задану функцію $y = y(x)$ у вигляді $\xi(x, y) = \text{const}$, легко бачити

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0 \quad (3.7.16)$$

або

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = -\frac{dy}{dx}. \quad (3.7.17)$$

Тобто рівняння в частинних похідних зводиться до звичайного диференціального характеристичного рівняння:

Визначення 3.7.1.2 (характеристичного рівняння). *Характеристичним* називається рівняння

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0. \quad (3.7.18)$$

Визначення 3.7.1.3 (характеристик). Його розв'язки називаються *характеристиками*.

Квадратне рівняння відносно похідної розпадається на два лінійних рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (3.7.19)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (3.7.20)$$

Знак підкореневого виразу визначає тип рівняння і спосіб вибору нових змінних. Розглянемо можливі випадки:

1. рівняння гіперболічного типу $B^2 - AC > 0$.

Кожне з характеристичних рівнянь має по одній дійсній характеристиці. Нехай $\varphi(x, y) = \text{const}$ та $\psi(x, y) = \text{const}$ — загальні інтеграли першого та другого характеристичного рівняння, тоді нові змінні вибираються у вигляді

$$\xi = \varphi(x, y), \quad (3.7.21)$$

$$\eta = \psi(x, y). \quad (3.7.22)$$

Після застосування вказаної заміни змінних отримаємо першу канонічну форму запису рівняння гіперболічного типу

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (3.7.23)$$

Зауваження 3.7.1.1 — Якщо використати змінні

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad (3.7.24)$$

$$\beta = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad (3.7.25)$$

то можна отримати другу канонічну форму запису рівняння

гіперболічного типу

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \quad (3.7.26)$$

2. рівняння еліптичного типу $B^2 - AC < 0$.

В цьому випадку розв'язки характеристичних рівнянь (характеристики) — комплексно спряжені і можуть бути записані у вигляді: $\omega(x, y) = \varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = \text{const}$.

Тоді для змінних

$$\xi = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (3.7.27)$$

$$\eta = \varphi(x, y) - i\psi(x, y) \quad (3.7.28)$$

отримаємо вигляд аналогічний першій канонічній формі гіперболічного рівняння але з комплексними незалежними змінними.

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (3.7.29)$$

Для того щоб позбутися комплексних змінних виберемо нові дійсні змінні

$$\alpha = \varphi(x, y) = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad (3.7.30)$$

$$\beta = \psi(x, y) = \frac{\xi - \eta}{2i}. \quad (3.7.31)$$

Тоді отримаємо канонічну форму запису рівняння еліптичного типу у вигляді:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \quad (3.7.32)$$

3. рівняння параболічного типу $B^2 - AC = 0$.

Характеристики в цьому випадку співпадають і нові змінні обирають у вигляді:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad (3.7.33)$$

$$\eta = \nu(x, y), \quad (3.7.34)$$

де $\nu(x, y)$ — будь-яка функція незалежна від $\varphi(x, y)$.

Зауваження 3.7.1.2 — Необхідно, щоб визначник Вронського для нових змінних $W[\cdot] \neq 0$, тобто, щоб заміна змінних була не виродженою.

У випадку параболічного рівняння маємо $AC = B^2$ і таким чином

$$\begin{aligned}\bar{A} &= (A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2) = \\ &= \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)^2 = 0.\end{aligned}\quad (3.7.35)$$

і

$$\begin{aligned}\bar{B} &= A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y = \\ &= \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right) \left(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y\right) = 0.\end{aligned}\quad (3.7.36)$$

При цьому $\bar{C} \neq 0$. Таким чином після ділення на $\bar{C}$ отримаємо канонічну форму запису рівняння гіперболічного типу.

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (3.7.37)$$

3.7.2 Класифікація рівнянь другого порядку з багатьма незалежними змінними

Розглянемо лінійне рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i u_{x_i} + C u + F = 0, \quad (3.7.38)$$

де $A_{i,j} = A_{j,i}$, $A_{i,j}$, B_i , C , F є функціями від $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Введемо нові змінні

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = \overline{1, n}. \quad (3.7.39)$$

Обчислимо похідні, що входять в рівняння

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} \alpha_{i,k}, \quad (3.7.40)$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_{\xi_k \xi_l} \alpha_{i,k} \alpha_{j,l} + \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j}, \quad (3.7.41)$$

де $\alpha_{i,k} = \partial \xi_k / \partial x_i$.

Підставляючи вираз для похідних в вихідне рівняння отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{A}_{k,l} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^n \bar{B}_k u_{\xi_k} + \bar{C}u + \bar{F} = 0, \quad (3.7.42)$$

де

$$\bar{A}_{k,l} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} \alpha_{i,k} \alpha_{j,l}, \quad (3.7.43)$$

$$\bar{B}_k = \sum_{i=1}^n B_i \alpha_{i,k} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} (\xi_k)_{x_i x_j}. \quad (3.7.44)$$

Поставимо у відповідність головній частині диференціального рівнянню квадратичну форму

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^0 y_i y_j, \quad (3.7.45)$$

де $A_{i,j}^0 = A_{i,j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$, тобто коефіцієнти квадратичної форми співпадають з коефіцієнтами рівняння в деякій точці області.

Здійснимо над змінними y лінійне перетворення

$$y_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} \eta_k. \quad (3.7.46)$$

Будемо мати для квадратичної форми новий вираз:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^0 y_i y_j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{A}_{k,l}^0 \eta_k \eta_l, \quad (3.7.47)$$

де

$$\bar{A}_{k,l}^0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{A}_{i,j}^0 \alpha_{i,k} \alpha_{j,l}. \quad (3.7.48)$$

Таким чином можна бачити, що коефіцієнти головної частини рівняння (3.7.48) перетворюються аналогічно коефіцієнтам квадратичної форми при описаному лінійному перетворенні (3.7.43), (3.7.44). Відомо, що використовуючи лінійне перетворення можна привести матрицю $[A_{i,j}^0]_{i,j=\overline{1,n}}$ квадратичної форми до діагонального вигляду, в якому $\bar{A}_{i,j}^0 = l_i \delta_{i,j}$, де $l_i \in \{-1, 0, 1\}$.

Згідно до закону інерції квадратичних форм, кількість додатних, від'ємних та нульових діагональних елементів інваріантне відносно лінійного перетворення.

Визначення 3.7.2.1 (еліптичного рівняння). Будемо називати рівняння в точці $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ *еліптичним*, якщо всі $\bar{A}_{i,i}^0$, $i = \overline{1, n}$ мають один і той же знак та жодний діагональний елемент не дорівнює нулю.

Визначення 3.7.2.2 (гіперболічного рівняння). Будемо називати рівняння в точці $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ *гіперболічним*, якщо $m < n$ елементів матриці мають один знак, а $n - m$ коефіцієнтів мають протилежний знак та жодний діагональний елемент не дорівнює нулю.

Визначення 3.7.2.3 (параболічного рівняння). Будемо називати рівняння в точці $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ *параболічним*, якщо хоча б один з діагональних елементів матриці $\bar{A}_{i,i}^0$ дорівнює нулю.

Обираючи нові незалежні змінні ξ_i таким чином що б у точці $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ виконувалось рівність $\alpha_{i,k} = \partial \xi_k / \partial x_i = \alpha_{i,k}^0$, де $\alpha_{i,k}^0$ — коефіцієнти перетворення, яке приводить квадратичну форму до канонічної форми запису. Зокрема, покладаючи

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k}^0 x_i, \quad (3.7.49)$$

отримаємо у точці $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ канонічну форму запису рівняння в залежності від його типу.

Рівняння 3.7.2.1 (канонічна форма еліптичного рівняння)

$$\sum_{i=1}^n u_{\xi_i \xi_i} + \Phi = 0 \quad (3.7.50)$$

Рівняння 3.7.2.2 (канонічна форма гіперболічного рівняння)

$$\sum_{i=1}^m u_{\xi_i \xi_i} - \sum_{i=m+1}^n u_{\xi_i \xi_i} + \Phi = 0 \quad (3.7.51)$$

Рівняння 3.7.2.3 (канонічна форма параболічного рівняння)

$$\sum_{i=1}^m \pm u_{\xi_i \xi_i} + \Phi = 0, \quad (3.7.52)$$

де $\Phi = \Phi(\nabla_{\xi} u, u, \xi)$

Приклад 3.7.2.1

Визначити тип рівняння і привести його до канонічної форми запису

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0.$$

Розв'язок. Складемо характеристичне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + (xy)^2}}{y^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{y}.$$

Оскільки обидві характеристики є дійсними, то рівняння має гіперболічний тип. Останнє рівняння можна записати у вигляді:

$$y \, dy = \pm x \, dx.$$

Загальні інтеграли цього рівняння мають вигляд:

$$y^2 \pm x^2 = \text{const}.$$

Для отримання першої канонічної форми запису необхідно обрати нові змінні

$$\begin{aligned} \xi &= x^2 + y^2, \\ \eta &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Для отримання другої канонічної форми запису оберемо змінні

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi + \eta}{2} = x^2, \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{2} = y^2, \end{aligned}$$

обчислимо похідні

$$u_x = u_{\alpha} \cdot 2x + u_{\beta} \cdot 0,$$

$$\begin{aligned}
u_y &= u_\alpha \cdot 0 + u_\beta \cdot 2y, \\
u_{xx} &= u_{\alpha\alpha} \cdot 4x^2 + 2u_{\alpha\beta} \cdot 0 + u_{\beta\beta} \cdot 0 + u_\alpha \cdot 2 + u_\beta \cdot 0, \\
u_{yy} &= u_{\alpha\alpha} \cdot 0 + 2u_{\alpha\beta} \cdot 0 + u_{\beta\beta} \cdot 4y^2 + u_\alpha \cdot 0 + u_\beta \cdot 2.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені похідні в рівняння:

$$y^2(4x^2u_{\alpha\alpha} + 2u_\alpha) - x^2(4y^2u_{\beta\beta} + 2u_\beta) = 0,$$

або

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{u_\alpha - u_\beta}{2x^2y^2} = 0,$$

і остаточно маємо:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{u_\alpha - u_\beta}{2\alpha\beta} = 0.$$

Приклад 3.7.2.2

Визначити тип рівняння і привести його до канонічної форми запису

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$$

Розв'язок. Поставимо у відповідність головній частині рівняння квадратичну форму:

$$\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2^2 + 6\lambda_3^2.$$

Методом виділення повних квадратів приведемо квадратичну форму до канонічної форми запису

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2^2 + 6\lambda_3^2 &= \\
&= (\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3) + \lambda_2^2 + 2\lambda_2\lambda_3 + 5\lambda_3^2 = \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2^2 + 2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^2) + 4\lambda_3^2 = \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)^2 + (2\lambda_3)^2.
\end{aligned}$$

Вводимо нові незалежні змінні:

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, \\ \mu_2 = \lambda_2 + \lambda_3, \\ \mu_3 = 2\lambda_3. \end{cases}$$

Отримаємо канонічну форму запису для квадратичної форми:

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2. \quad (3.7.53)$$

Оскільки при квадраті кожної змінної коефіцієнт дорівнює 1, то квадратична форма та рівняння мають еліптичний тип.

Запишемо тепер заміну змінних, яка приведе рівняння до канонічної форми запису. Обчислимо матрицю оберненого лінійного перетворення:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3, \\ \lambda_2 = \mu_2 - \mu_3/2, \\ \lambda_3 = \mu_3/2. \end{cases}$$

Тобто

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = B\mu.$$

Обчислимо транспоновану матрицю

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Для диференціального рівняння маємо нові змінні: $\vec{\xi} = B^T \vec{x}$. Або в координатній формі:

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = y - x, \\ \zeta = x - y/2 + z/2. \end{cases}$$

У новій системі координат головна частина диференціального рівняння буде мати канонічну форму запису еліптичного рівняння

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0.$$

3.7.3 Загальні принципи класифікації рівнянь довільного порядку і систем диференціальних рівнянь

Розглянемо диференціальне рівняння m -го порядку відносно скалярної функції $u(x)$ змінної $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вигляду:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u + f(D^\beta u, x) = 0. \quad (3.7.54)$$

Коефіцієнти a_α залежать лише від x , функція f — від x , u та похідних $D^\beta u$, $|\beta| < m$.

Зауваження 3.7.3.1 — Позначення D^α треба розуміти як

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (3.7.55)$$

тобто змішану похідну.

Перший доданок містить лише старші похідні рівняння і за аналогією з рівняннями другого порядку можемо дати

Визначення 3.7.3.1 (головної частини рівняння). Частину диференціального рівняння, яка містить похідні старшого порядку

$$A_0(x, D)u = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u \quad (3.7.56)$$

будемо називати *головною* частиною рівняння.

З головною частиною зв'яжемо характеристичну форму (однорідний поліном):

$$A_0(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha, \quad (3.7.57)$$

де $\xi^\alpha = (\xi_1^{\alpha_1}, \xi_2^{\alpha_2}, \dots, \xi_n^{\alpha_n})$.

Класифікація рівняння в частинних похідних дуже тісно зв'язана з властивостями характеристичної форми. Зрозуміло, що властивості форми залежать від точки x і тому рівняння можна класифікувати по різному у різних точках x .

Визначення 3.7.3.2 (параболічного рівняння). Рівняння будемо називати параболічним в точці x , якщо існує таке афінне перетворення змінних $\xi_i = \xi_i(\eta_1, \dots, \eta_n)$, $i = \overline{1, n}$, що в результаті застосування перетворення до характеристичної форми, вона буде містити лише $l < n$ нових змінних.

Визначення 3.7.3.3 (еліптичного рівняння). Рівняння будемо називати еліптичним у точці x , якщо форма $A_0(x, \xi)$ знаковизначена, як функція змінної ξ , тобто приймає значення одного знаку для будь-яких дійсних значень $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \neq 0$, або якщо алгебраїчне рівняння $A_0(x, \xi) = 0$ не має дійсних коренів окрім $\xi = 0$.

Визначення 3.7.3.4. Рівняння будемо називати гіперболічним в точці x , якщо можна знайти таке афінне перетворення змінних $\xi_i = \xi_i(\eta_1, \dots, \eta_n)$, $i = \overline{1, n}$, що у просторі нових змінних $\eta_1, \dots, \eta_n$ існує такий напрям (нехай це змінна η_1), що алгебраїчне рівняння $A_0(x, \xi(\eta)) = 0$ записане відносно цієї змінної η_1 має рівно m дійсних коренів (простих або кратних) при довільному виборі останніх змінних $\eta_2, \dots, \eta_n$.

Розглянемо систему рівнянь в частинних похідних відносно n невідомих функцій $u_1, u_2, \dots, u_n$ та запишемо її у матричному вигляді:

$$A(x, D)y = f, \quad (3.7.58)$$

де $A(x, D)$ — $n \times n$ матриця з елементами $A_{i,j}(x, D)$, які представляють собою диференціальні вирази деякого порядку $\mu_{i,j}$.

В матриці $A(x, D)$ можна виділити головну частину, яка містить диференціальні оператори лише старшого порядку m , тоді головній частині буде відповідати матриця

$$[A_0(x, D)]_{i,j=1}^n = \sum_{|\alpha|=m} a_{i,j,\alpha}(x) D^\alpha \quad (3.7.59)$$

Будемо розглядати характеристичний детермінант

$$\det \left(\sum_{|\alpha|=m} a_{i,j,\alpha}(x) \xi^\alpha \right) \quad (3.7.60)$$

який представляє собою форму порядку $n \times m$ відносно параметрів $\xi_1, \dots, \xi_m$.

Подальша класифікація систем відбувається на основі аналізу характеристичної форми (однорідного поліному (3.7.60)).

Приклад 3.7.3.1

Розглянемо систему стаціонарних рівнянь теорії пружності:

$$\left(\Delta \vec{U} + \frac{m}{m-2} \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) \right) = -\frac{\vec{X}}{G}. \quad (3.7.61)$$

Розв'язок. Старший порядок похідних цієї системи дорівнює двом, тоді матриця яка відповідає головній частині системи має вигляд

$$A_0(D) = \begin{pmatrix} \Delta + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \lambda \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \lambda \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \lambda \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \Delta + \lambda \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \lambda \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \lambda \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \lambda \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \Delta + \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (3.7.62)$$

де $\lambda = m/(m - 2)$.

Тоді характеристична форма, що відповідає цій матриці матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} |\xi|^2 + \lambda \xi_1^2 & \lambda \xi_1 \xi_2 & \lambda \xi_1 \xi_3 \\ \lambda \xi_2 \xi_1 & |\xi|^2 + \lambda \xi_2^2 & \lambda \xi_2 \xi_3 \\ \lambda \xi_3 \xi_1 & \lambda \xi_3 \xi_2 & |\xi|^2 + \lambda \xi_3^2 \end{vmatrix} = |\xi|^6 (1 + \lambda). \quad (3.7.63)$$

Зрозуміло, що цей вираз є додатнім, що гарантує еліптичність системи статичних рівнянь теорії пружності.

Приклад 3.7.3.2

Розглянемо систему рівнянь гідродинаміки у випадку ізоентропічної течії

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \langle \vec{V}, \nabla \rangle \vec{V} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0, \\ p = p(\rho). \end{cases} \quad (3.7.64)$$

Розв'язок. Порядок системи дорівнює одиниці, тому матриця системи

має вигляд:

$$A_0(D) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{\mathbf{V}}, \nabla \rangle & \rho \frac{\partial}{\partial x_1} & \rho \frac{\partial}{\partial x_2} & \rho \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{\mathbf{V}}, \nabla \rangle & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{\mathbf{V}}, \nabla \rangle & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{\mathbf{V}}, \nabla \rangle \end{pmatrix} \quad (3.7.65)$$

Відповідна характеристична форма матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} \tau + \langle \vec{\mathbf{V}}, \xi \rangle & \rho \xi_1 & \rho \xi_2 & \rho \xi_3 \\ \frac{c^2}{\rho} \xi_1 & \tau + \langle \vec{\mathbf{V}}, \xi \rangle & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \xi_2 & 0 & \tau + \langle \vec{\mathbf{V}}, \xi \rangle & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \xi_3 & 0 & 0 & \tau + \langle \vec{\mathbf{V}}, \xi \rangle \end{vmatrix} = 0, \quad (3.7.66)$$

де

$$\langle \vec{\mathbf{V}}, \xi \rangle = \sum_{i=1}^3 V_i \xi_i, \quad (3.7.67)$$

а $c^2 = dp/d\rho$ — квадрат швидкості звуку. Розкриваючи визначник отримаємо співвідношення

$$\left(\tau + \langle \vec{\mathbf{V}}, \xi \rangle \right)^2 \left(\left(\tau + \langle \vec{\mathbf{V}}, \xi \rangle \right)^2 - c^2 |\xi|^2 \right) = 0. \quad (3.7.68)$$

Розглядаючи цей вираз як поліном відносно змінної τ , яка відповідає змінній часу t у системі рівнянь, отримаємо для довільних дійсних значень вектора ξ чотири дійсних кореня, а саме

$$\tau_{1,2} = - \langle \vec{\mathbf{V}}, \xi \rangle, \quad (3.7.69)$$

$$\tau_{3,4} = - \langle \vec{\mathbf{V}}, \xi \rangle \pm c |\xi|, \quad (3.7.70)$$

Зауваження 3.7.3.2 — Тут $\tau_{1,2}$ позначає кратний корінь.

Таким чином система рівнянь гідродинаміки має гіперболічний тип.

Приклад 3.7.3.3

Розглянемо систему рівнянь Нав'є-Стокса для нестисливої рідини

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{V}. \quad (3.7.71)$$

Розв'язок. Матриця головної частини системи має вигляд:

$$A_0(x, D) = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \quad (3.7.72)$$

Характеристична форма запишеться у вигляді:

$$\begin{vmatrix} |\xi|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |\xi|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\xi|^2 \end{vmatrix} = |\xi|^6 = 0, \quad (3.7.73)$$

де $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Враховуючи, що характеристична форма містить лише три змінних, а рівняння містить чотири, можемо зробити висновок, що система є параболічною.

3.8 Постановка основних граничних задач для лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку, коректність, класичні та узагальнені розв'язки

Серед множини математичних моделей, які були розглянуті в попередніх параграфах можна виділити найтипівіші математичні моделі, які концентрують в собі головні особливості усіх розглянутих вище. Ці моделі представляють собою граничні задачі для рівнянь трьох типів: еліптичних, параболічних та гіперболічних лінійних рівнянь другого порядку.

Розглянемо основний диференціальний оператор другого порядку:

$$Lu = \nabla \cdot (p(x) \nabla u) - q(x)u. \quad (3.8.1)$$

Запишемо основні диференціальні рівняння:

- Еліптичне рівняння:

$$Lu = -F(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (3.8.2)$$

- Параболічне рівняння:

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + F(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > t_0. \quad (3.8.3)$$

- Гіперболічне рівняння:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + F(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > t_0. \quad (3.8.4)$$

3.8.1 Гранична задача для еліптичного рівняння

Будемо розділяти внутрішні і зовнішні задачі для еліптичного рівняння.

Визначення 3.8.1.1 (внутрішньої і зовнішньої задач). Якщо $x \in \Omega$, то таку задачу будемо називати *внутрішньою*, якщо $x \in \Omega'$ — *зовнішньою*.

Зауваження 3.8.1.1 — В подальшому ми будемо розглядати класичні розв'язки граничних задач. Це означає, що рівняння і усі граничні умови виконуються в кожній точці області або границі.

Введемо обмеження на коефіцієнти рівняння p і q та вільний член F . Зокрема будемо припускати, що $p > 0$, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $F(x) \in C(\overline{\Omega})$.

Позначимо $\partial\Omega = S$ — поверхню на якій задаються граничні умови загального вигляду:

$$\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x) u \Big|_S = V(x), \quad (3.8.5)$$

де $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha, \beta, V \in C(S)$. З умови (3.8.5) можна отримати умови 1, 2, 3 роду:

1. Діріхле:

$$u|_S = \frac{V(x)}{\beta(x)}. \quad (3.8.6)$$

2. Неймана:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = \frac{V(x)}{\alpha(x)}. \quad (3.8.7)$$

3. Ньютона:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\beta}{\alpha} u \Big|_S = \frac{V}{\alpha}. \quad (3.8.8)$$

Таким чином гранична задача для еліптичного рівняння може бути сформульована наступним чином:

Постановка задачі (граничної для еліптичного рівняння)

Знайти функцію $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, яка в кожній внутрішній точці області Ω (для внутрішньої задачі) або Ω' (для зовнішньої задачі) задовольняє рівняння (3.8.2), а кожній точці границі S виконується одна з граничних умов (3.8.6), (3.8.7) або (3.8.8).

Визначення 3.8.1.2. У випадку зовнішньої граничної задачі в нескінченно віддаленій точці області слід задавати додаткові умови поведінки розв'язку. Такі умови називають умовами *регулярності на нескінченності*.

Зауваження 3.8.1.2 — Як правило вони полягають в завданні характеру спадання розв'язку і мають вигляд

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right), \quad (3.8.9)$$

при $|x| \rightarrow \infty$, де α — деякий заданий параметр задачі.

3.8.2 Постановка змішаних задач для рівняння гіперболічного типу. Задача Коші для гіперболічного рівняння

Для постановки граничних задач рівняння гіперболічного типу (3.8.4) введемо просторово-часовий циліндр, як область зміни незалежних змінних x, t :

$$Z(\Omega, T) = \Omega \times (0, T]. \quad (3.8.10)$$

Для отримання єдиного розв'язку гіперболічного рівняння, на нижній основі просторово-часового циліндру $Z_0(\Omega, T) = \Omega \times \{t = 0\}$ треба задати початкові умови:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.8.11)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.8.12)$$

На боковій поверхні просторово-часового циліндру $Z_S(\Omega, T) = S \times (0, T]$ треба задати граничні умови одного з трьох основних типів:

1. Діріхле:

$$u|_S = \varphi(x, t). \quad (3.8.13)$$

2. Неймана:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \varphi(x, t). \quad (3.8.14)$$

3. Ньютона:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x, t)u \right|_S = \varphi(x, t). \quad (3.8.15)$$

Таким чином постановка граничної задачі для гіперболічного рівняння має вигляд:

Постановка задачі (граничної для гіперболічного рівняння)

Знайти функцію $u(x, t) \in C^{(2,2)}(Z(\Omega, T)) \cap C^{(1,1)}(\overline{Z(\Omega, T)})$, яка задовольняє рівнянню (3.8.4) для $(x, t) \in Z(\Omega, T)$, початковим умовам (3.8.11), (3.8.12) для $(x, t) \in Z_0(\Omega, T)$, і в кожній точці $(x, t) \in Z_S(\Omega, T)$ одній з граничних умов (3.8.13)–(3.8.15).

Зауваження 3.8.2.1 — При цьому відносно вхідних даних будемо робити наступні припущення

$$p > 0, \quad p \in C^1(\overline{\Omega}), \quad q \geq 0, \quad q \in C(\overline{\Omega}), \quad F(x, t) \in C(\overline{Z(\Omega, T)}), \quad (3.8.16)$$

$$u_0, v_0 \in C(\overline{Z_0(\Omega, T)}), \quad \alpha, \varphi \in C(\overline{Z_S(\Omega, T)}), \quad \alpha \geq 0. \quad (3.8.17)$$

3.8.3 Задача Коші

У випадку, коли область Ω має великі розміри і впливом граничних умов можна знехтувати, область Ω ототожнюється з усім евклідовим простором, тобто $\Omega = \mathbb{R}^n$.

У зв'язку з відсутністю границі, граничні умови не задаються. В цьому випадку гранична задача трансформується в задачу Коші для гіперболічного рівняння яка ставиться наступним чином:

Постановка задачі (Коші для гіперболічного рівняння)

Знайти функцію $u(x, t) \in C^{(2,2)}\left(Z(\mathbb{R}^n, T)\right) \cap C^{(1,1)}\left(\overline{Z(\mathbb{R}^n, T)}\right)$, яка задовольняє рівнянню (3.8.4) для $(x, t) \in Z(\mathbb{R}^n, T)$, початковим умовам (3.8.11), (3.8.12) для $x \in \mathbb{R}^n$.

3.8.4 Постановка змішаних задач для рівняння параболічного типу

При постановці граничної задачі і задачі Коші для рівняння параболічного типу треба враховувати, що по часовій змінній рівняння має перший порядок, що і обумовлює деякі відмінності в постановці граничних задач.

Постановка граничної задачі для рівняння параболічного типу (3.8.3) має вигляд:

Постановка задачі (граничної для параболічного рівняння)

Знайти функцію $u(x, t) \in C^{(2,1)}\left(Z(\Omega, T)\right) \cap C^{(1,0)}\left(\overline{Z(\Omega, T)}\right)$, яка задовольняє рівняння (3.8.3) для $(x, t) \in Z(\Omega, T)$, початковим умовам (3.8.11) для $(x, t) \in Z_0(\Omega, T)$ і в кожній точці $(x, t) \in Z_S(\Omega, T)$ одній з граничних умов (3.8.13)–(3.8.15).

Аналогічні зміни необхідно запровадити і при постановці задачі Коші для рівняння параболічного типу.

Вправа 3.8.4.1. Записати самостійно постановку задачі Коші для параболічного рівняння (3.8.3).

3.8.5 Коректність задач математичної фізики

Зважаючи на фізичну природу задач математичної фізики, до них застосовуються наступні природні вимоги.

1. Існування розв'язку: задача повинна мати розв'язок (задача яка не має розв'язку не представляє інтересу як математична модель).
2. Єдиність розв'язку: не повинно існувати декілька розв'язків задачі.
3. Неперервна залежність від вхідних даних: розв'язок задачі повинен мало змінюватись при малій зміні вхідних даних.

Розглянемо математичну модель у вигляді наступної граничної задачі:

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega, \\ \ell u = \varphi, & x \in S = \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.8.18)$$

Формулювання диференціального рівняння і граничних умов ще недостатньо, щоб гранична задача була сформульована однозначно. Необхідно додатково вказати які аналітичні властивості вимагаються від розв'язку, в якому розумінні задовольняється рівняння і граничні умови.

При аналізі граничної задачі виникають наступні питання:

- Чи може існувати розв'язок з відповідними властивостями?
- Які аналітичні властивості треба вимагати від вхідних даних f , φ , коефіцієнтів диференціального оператора і граничних умов?
- Чи існують серед умов задачі такі, що протирічать одне одному?
- Які умови треба накладати на гладкість границі S ?
- Чи достатньо сформульованих умов для однозначного знаходження розв'язку?
- Чи можна гарантувати, що малі зміни f , φ приведуть до малих змін розв'язку?

Перелічені проблеми зручно розв'язувати звівши граничну задачу до операторного рівняння. Застосувавши загальні методи теорії операторів та операторних рівнянь.

В першу чергу виберемо два банахових простора E та F .

Шуканий розв'язок розглядається як елемент E , а сукупність правих частин як елемент F .

Визначимо оператор A , як відображення $u \mapsto \{Lu, \varphi\}$, тоді гранична задача (3.8.18) зводиться до операторного рівняння

$$Au = g, \quad g = \{f, \varphi\}. \quad (3.8.19)$$

Позначимо $R(A)$ та $D(A)$ — область значень та область визначення оператора A . Коректність операторного рівняння визначають для пари просторів E та F .

Твердження 3.8.5.1

В термінах операторного рівняння (3.8.19) існування розв'язку означає, що область значень оператора $R(A)$ є не порожня підмножина F .

Твердження 3.8.5.2

Єдиність розв'язку означає, що відображення $A : D(A) \rightarrow R(A)$ ін'єктивне і на $R(A)$ визначений обернений оператор A^{-1} .

Визначення 3.8.5.1 (ін'єктивного відображення). Відображення $A : D(A) \rightarrow R(A)$ називається *ін'єктивним*, якщо різні елементи множини $D(A)$ переводяться в різні елементи множини $R(A)$.

Твердження 3.8.5.3

Вимога неперервної залежності розв'язку від правої частини або стійкості граничної задачі зводиться до неперервності або обмеженості оператора A^{-1} .

3.8.6 Приклад Адамара

Приклад 3.8.6.1 (Адамара, некоректно поставленої задачі)

Розглянемо рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi. \quad (3.8.20)$$

Додаткові умови

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\sin(kx)}{k}. \quad (3.8.21)$$

Твердження 3.8.6.1

Для прикладу Адамара порушена умова непевної залежності розв'язку від вхідних даних.

Доведення. Розв’язок

$$u_k(x, t) = \frac{\sinh(kt) \sin(kx)}{k^2}, \quad (3.8.22)$$

причому $\forall x \in (0, \pi)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(kx)}{k} = 0, \quad (3.8.23)$$

але $\forall t > 0, \forall x \in (0, \pi)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sinh(kt) \sin(kx)}{k^2} = \infty. \quad (3.8.24)$$

□

3.8.7 Класичний і узагальнений розв’язки

Визначення 3.8.7.1 (класичного розв’язку). Класичний розв’язок — це розв’язок, який задовольняє рівнянню, початковим і граничним умовам в кожній точці, області, або границі.

Це означає, що класичний розв’язок повинен мати певну гладкість, яка визначається порядком похідних рівняння і порядком похідних граничних і початкових умов.

Розглянемо рівняння

$$\nabla \cdot (p(x) \nabla u) - q(x)u = -F(x), \quad x \in \Omega \quad (3.8.25)$$

та однорідні умови

$$u|_S = 0. \quad (3.8.26)$$

Отримаємо для нього відповідне інтегральне співвідношення.

Розглянемо функцію $v(x)$, таку, що $v|_S = 0$, помножимо рівняння на v та проінтегруємо по Ω :

$$\iiint_{\Omega} v (\nabla \cdot (p(x) \nabla u) - u) d\Omega = - \iiint_{\Omega} Fv d\Omega. \quad (3.8.27)$$

Після інтегрування за частинами отримаємо:

$$\iiint_{\Omega} (p \langle \nabla u, \nabla v \rangle) - quv d\Omega + \iint_S pv \frac{\partial u}{\partial n} dS = - \iiint_{\Omega} Fv d\Omega. \quad (3.8.28)$$

Остаточно, після врахування граничних умов маємо:

$$\iiint_{\Omega} (p \langle \nabla u, \nabla v \rangle) + quv \, d\Omega = \iiint_{\Omega} Fv \, d\Omega. \quad (3.8.29)$$

Інтегральна тотожність має зміст для більш широкого класу функцій ніж той якому належить класичний розв'язок граничної задачі і коефіцієнти рівняння.

Якщо $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $p \in C^1(\Omega)$, $q \in C(\Omega)$ то з тотожності (3.8.29), обернений ланцюжок перетворень дозволяє отримати граничну задачу (3.8.25), (3.8.26). Але (3.8.29) має зміст для функцій більш широкого класу, а саме $F, u, v, \nabla u, \nabla v \in L_2(\Omega)$, p, q — обмежені. Це дозволяє використовувати інтегральну тотожність (3.8.26) для визначення узагальненого розв'язку граничної задачі (3.8.25), (3.8.26).

Для цього введемо множину $N_2 = \{u | u, \nabla u \in L_2(\Omega), u|_S = 0\}$.

Визначення 3.8.7.2 (узагальненого розв'язку). Узагальненим розв'язком граничної задачі (3.8.25), (3.8.26) будемо називати довільну функцію $u \in N_2$, таку, що $\forall v \in N_2$ має місце інтегральна тотожність (3.8.29).

3.8.8 Формально спряжені оператори. Друга формула Гріна

Будемо розглядати лінійний диференціальний оператор

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{k=1}^N B_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + C(x)u. \quad (3.8.30)$$

Будемо припускати, що $A_{i,j} = A_{j,i} \in C^1(\overline{\Omega})$, $B_k \in C(\overline{\Omega})$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Розглянемо інтеграл:

$$\iiint_{\Omega} vLu \, dx = \iiint_{\Omega} v \left(\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{k=1}^N B_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + C(x)u \right) dx. \quad (3.8.31)$$

Для перетворення першої і другої суми застосуємо формулу інтегрування за частинами:

$$\iiint_{\Omega} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \, dx = \iint_S v(x)u(x) \cos(n, x_i) \, dx - \iiint_{\Omega} u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \, dx. \quad (3.8.32)$$

Після однократного застосування формули інтегрування за частинами отримаємо:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} vLu \, dx = & \\ = \iiint_{\Omega} \left(- \sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (B_k(x)v)u + C(x)uv \right) dx + & \\ + \oint_S \left(\sum_{i,j=1}^N A_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j) + \sum_{k=1}^N B_k(x)uv \cos(n, x_k) \right) dS. & \end{aligned} \quad (3.8.33)$$

Продовжимо інтегрування за частинами до першого інтегралу по області Ω , перекидаючи похідну з функції u :

$$\begin{aligned} \Psi = \iiint_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N u \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{i,j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (B_k(x)v)u + C(x)uv \right) dx + & \\ + \oint_S \left(\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v - \frac{\partial v}{\partial x_i} u \right) \cos(n, x_j) + \sum_{k=1}^N B_k(x)uv \cos(n, x_k) \right) dS. & \end{aligned} \quad (3.8.34)$$

Введемо наступний оператор:

$$Mu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} (B_k(x)u) + C(x)u. \quad (3.8.35)$$

Визначення 3.8.8.1 (формально спряженого оператора). Оператор M називається *формально спряженим* до оператора L .

Враховуючи це позначення, останню формулу можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (VLu - uMv) \, dx = & \\ = \oint_S \left(\sum_{i,j=1}^N A_{i,j}(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v - \frac{\partial v}{\partial x_i} u \right) \cos(n, x_j) + \right. & \\ \left. + \sum_{k=1}^n B_k(x)uv \cos(n, x_k) \right) dS. & \end{aligned} \quad (3.8.36)$$

Визначення 3.8.8.2 (другої формули Гріна). Ця формула називається другою формулою Гріна.

Розглянемо основні оператори математичної фізики другого порядку з постійними коефіцієнтами:

1. Гельмгольца: $A_1 u = (\Delta + k^2)u$.
2. Теплопровідності: $A_2 u = (a^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial t}) u$.
3. Хвильовий: $A_3 u = (a^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}) u$.

Оскільки оператори A_1 , A_3 містять лише похідні другого порядку, то ці оператори є формально самоспряженими. Для оператора A_2 , згідно до визначення спряженим буде оператор $A_2^* u = (a^2 \Delta + \frac{\partial}{\partial t}) u$.

Запишемо другу формулу Гріна для кожного з основних операторів:

1. для Гельмгольца:

$$\iiint_{\Omega} (v(\Delta u + k^2 u) - u(\Delta v + k^2 v)) dx = \iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS; \quad (3.8.37)$$

2. для теплопровідності:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \iiint_{\Omega} \left(v \left(a^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - u \left(a^2 v + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right) dx dt = \\ = \int_{t_0}^T \iint_S a^2 \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS dt - \iiint_{\Omega} uv|_{t_0}^T dx. \end{aligned} \quad (3.8.38)$$

3. для хвильового:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \iiint_{\Omega} \left(v \left(a^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - u \left(a^2 v - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \right) dx dt = \\ = \int_{t_0}^T \iint_S a^2 \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS dt - \iiint_{\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) \Big|_{t_0}^T dx. \end{aligned} \quad (3.8.39)$$

3.9 Загальна постановка задачі Коші для хвильового рівняння. Плоскі хвилі

3.9.1 Характеристичні поверхні

В лекції 14 розглядалися питання класифікації диференціальних рівнянь другого порядку з $n > 2$ незалежними змінними. Важливу роль при визначенні типу рівняння і вибору нової системи координат відіграють характеристичні поверхні, які є аналогами характеристичних кривих (характеристик) для випадку рівнянь з двома незалежними змінними.

Нехай функція $\omega(x) \in C^1$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$ є такою що на поверхні $\omega(x) = 0$, $\nabla\omega(x) \neq 0$ та

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j} = 0. \quad (3.9.1)$$

Визначення 3.9.1.1 (характеристичної поверхні). Тоді поверхню $\omega(x) = 0$ називають *характеристичною поверхнею* або *характеристикою* квазі-лінійного рівняння

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0. \quad (3.9.2)$$

Визначення 3.9.1.2 (характеристичної лінії). При $n = 2$ характеристична поверхня називається *характеристичною лінією*.

Оскільки $\nabla\omega(x) \neq 0$, то сімейство характеристик $\omega(x) = \text{const}$ заповнює область таким чином, що через кожну точку області проходить одна характеристична поверхня.

Враховуючи закон перетворення коефіцієнтів рівняння

$$\overline{a_{k,l}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \quad (3.9.3)$$

при виборі заміни змінних $\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = 1, \dots, n$, знання однієї чи декількох характеристичних поверхонь дозволяє спростити рівняння, зокрема, якщо $\xi_1 = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$$\overline{a_{1,1}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0. \quad (3.9.4)$$

Для хвильового рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad (3.9.5)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, характеристичне рівняння має вигляд

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \quad (3.9.6)$$

Одним з розв'язків цього диференціального рівняння першого порядку є поверхня

$$\omega(x, t) = a^2(t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i})^2 = 0. \quad (3.9.7)$$

Визначення 3.9.1.3 (характеристичного конуса). Поверхня

$$a^2(t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i})^2 = 0. \quad (3.9.8)$$

називається *характеристичним конусом* з вершиною в точці (x_0, t_0) і є характеристичною поверхнею (характеристикою) хвильного рівняння.

Зауваження 3.9.1.1 — Характеристичний конус є границею конусів

$$\Gamma^+(x_0, t_0) = a(t - t_0) > \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i})^2}, \quad (3.9.9)$$

$$\Gamma^-(x_0, t_0) = -a(t - t_0) > \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i})^2}, \quad (3.9.10)$$

які називають *конусами майбутнього* та *минулого* відповідно.

Хвильове рівняння має також інше сімейство характеристичних поверхонь

$$a(t - t_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i})e_i = 0, \quad (3.9.11)$$

де $\{e_i\}_{i=1}^n$ — довільні числа такі, що $|\vec{e}| = 1$.

3.9.2 Узагальнена задача Коші для рівняння коливання струни

Довільне квазілінійне рівняння гіперболічного типу з двома незалежними змінними

$$a_{1,1}(\xi, \eta)U_{\xi,\xi}(\xi, \eta) + 2a_{1,2}U_{\xi\eta}(\xi, \eta) + a_{2,2}(\xi, \eta)U_{\eta,\eta}(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \quad (3.9.12)$$

може бути зведене до одного із рівнянь:

$$u_{xt}(t, x) = f(x, y, u, u_t, u_x), \quad (3.9.13)$$

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, y, u, u_t, u_x). \quad (3.9.14)$$

Зауваження 3.9.2.1 — Коефіцієнти $a_{i,j}(\xi, \eta)$ ($i, j = 1, 2$) і права частина $f(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$ вважаються неперервно диференційовними функціями у відповідних областях.

При постановці задачі Коші для рівняння (3.9.14) до тепер ми вважали, що носієм початкових умов є пряма $t = 0$.

На прикладі рівняння вільних коливань однорідної струни

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) \quad (3.9.15)$$

покажемо, що носієм початкових умов може бути крива L , яка є відмінною від прямої $t = 0$, причому встановимо, яким умовам повинна задовольняти крива L і який вигляд повинні мати самі початкові умови, щоб одержана задача Коші була поставлена коректно.

Для цього позначимо через D обмежену область фазової площини xOt з кусково-гладкою жордановою межею S . Нехай $u(t, x) \in C^2(D)$ — розв'язок рівняння (3.9.15), який має неперервні частинні похідні 1-го порядку в області $\bar{D} = D \cup S$.

Інтегруючи тотожність (3.9.15) по області D і використовуючи формулу Гріна

$$\iint_D (Q_x(x, t) - P_t(x, t)) \, dx \, dt = \int_S P \, dx + Q \, dt, \quad (3.9.16)$$

де криволінійний інтеграл в правій частині береться по контуру в напрямі проти годинникової стрілки, одержуємо

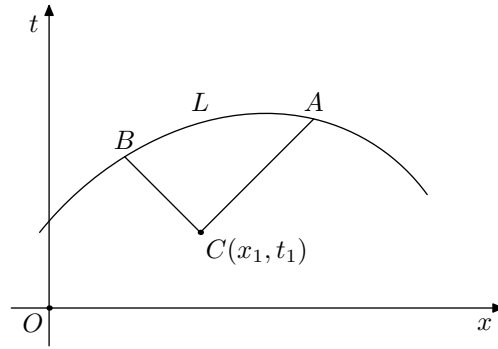
$$\iint_D (u_{xx} - u_{tt}) \, dx \, dt = \int_S u_x \, dt + u_t \, dx = \iint_S f(x, t) \, dx \, dt \quad (3.9.17)$$

Нехай L — розімкнута крива Жордана з неперервною кривизною, яка задовольняє умовам:

- кожна пряма із двох сімей характеристик $x+t = \text{const}$, $x-t = \text{const}$ рівняння (3.9.15) перетинає криву L не більше, ніж в одній точці;
- напрям дотичної до кривої L в жодній точці не збігається з напрямом характеристик рівняння (3.9.15).

Зауваження 3.9.2.2 — Іноді таку криву L називають “вільною”.

Припустимо, що характеристики $x - x_1 = t - t_1$ і $x - x_1 = t_1 - t$, які виходять із точки C , перетинаються із кривою L в точках A і B :



Застосовуючи формулу (3.9.14) в області, яка обмежена дугою AB кривої L і відрізками характеристик $[CA]$ і $[CB]$, одержуємо:

$$\int_{AB+[BC]+[CA]} u_x dt + u_t dx = \iint_D f(x, t) dx dt. \quad (3.9.18)$$

Оскільки вздовж $[BC]$ і $[AC]$ маємо $dx = -dt$, $dx = dt$ відповідно, то (3.9.15) запишеться у вигляді:

$$\int_{AB} u_x dt + u_t dx - 2u(C) + u(A) + u(B) = \iint_D f(x, t) dx dt, \quad (3.9.19)$$

звідки знаходимо

$$u(C) = \frac{u(A) + u(B)}{2} + \frac{1}{2} \int_{AB} u_x dt + u_t dx - \frac{1}{2} \iint_D f(x, t) dx dt. \quad (3.9.20)$$

Якщо розв'язок рівняння (3.9.13) задовольняє умовам:

$$u|_L = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \ell} \right|_L = \psi(x), \quad (3.9.21)$$

де φ і ψ — задані дійсні відповідно два рази і один раз неперервно диференційовні функції, а ℓ — заданий на L достатньо гладкий вектор, що ніде не збігається з дотичною до кривої L . Визначимо u_x і u_t із рівностей:

$$u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad u_x \ell_x + u_t \ell_t = \psi, \quad (3.9.22)$$

де s — довжина дуги L , і підставляючи відомі значення u , u_x , u_t в праву частину (3.9.20), одержуємо розв'язок задачі Коші (3.9.15), (3.9.21).

Із наведених міркувань випливає, що постановка задачі Коші (3.9.14), (3.9.18) є коректною, тобто вона має в розглядуваній області тільки єдиний розв'язок, і він є стійким.

Аналогічно ставиться задача Коші і у випадку рівняння (3.9.13).

Для рівняння (3.9.13) характеристиками будуть прямі, паралельні осям координат ($x = \text{const}$, $t = \text{const}$). Отже, в цьому випадку всяка гладка крива L , яка перетинається не більш, ніж в одній точці з прямими, паралельними осям координат, буде “вільною”. Нехай рівняння цієї кривої буде $t = g(x)$ (або $x = h(t)$). Вважаємо, що існують похідні $g'(x)$, $h'(t)$, відмінні від нуля. Тоді задача Коші може бути поставлена наступним чином: в області

$$D = \{(t, x) | x_0 < x < x_0 + \alpha, g(x) < t < t_0 + \beta\}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (3.9.23)$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (3.9.1), який на кривій L задовольняє умови

$$u|_{t=g(x)} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=g(x)} = \psi(x). \quad (3.9.24)$$

Дані Коші (3.9.20) дозволяють на кривій $t = g(x)$ знайти значення похідної u_x . Дійсно, диференціюючи по x першу із умов (3.9.24), одержуємо

$$u_x|_{t=g(x)} + u_t|_{t=g(x)}, \quad g'(x) = \varphi'(x), \quad (3.9.25)$$

або

$$u_x|_{t=g(x)} = \varphi'(x) - \psi(x)\varphi'(x). \quad (3.9.26)$$

3.9.3 Узагальнена задача Коші для n -вимірної хвильової рівняння

У випадку хвильової рівняння в n -вимірному просторі

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.9.27)$$

носієм початкових умов може бути будь-яка “вільна” поверхня Σ , тобто гіперповерхня $\Psi(x, t) = 0$, яка задовольняє умовам:

- в жодній її точці (x, t) не має місце рівність

$$\sum_{i=1}^n a^2 (\Psi_{x_i})^2 - (\Psi_t)^2 = 0, \quad (3.9.28)$$

тобто поверхня Σ не є характеристичною;

- при $n \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^n a^2 (\Psi_{x_i})^2 - (\Psi_t)^2 < 0. \quad (3.9.29)$$

Задача Коші ставиться наступним чином: знайти два рази неперервно диференційовний розв’язок рівняння (3.9.21), який задовольняє умови

$$u(t, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial n} = \psi(x), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (3.9.30)$$

де n — заданий на Σ одиничний вектор нормалі, а $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — задані на Σ досить гладкі функції. Будемо вважати, що поверхня Σ задана рівнянням $t = \sigma(x)$.

Покажемо, що задачу Коші (3.9.27), (3.9.30) можна звести до задачі Коші з початковими умовами заданими на поверхні $\tau = 0$.

Замість змінної t введемо змінну $\tau = t - \sigma(x)$. Для такої заміни змінних отримаємо хвильове рівняння для функції $\tilde{u}(x, \tau) = u(x, \tau + \sigma(x))$.

Підрахуємо похідні, що входять в хвильове рівняння (3.9.27):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}, \quad (3.9.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i^2} = \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2}. \end{aligned} \quad (3.9.32)$$

Таким чином хвильове рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} = \frac{a^2}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} - \frac{a^2}{a_0} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2} + \frac{f(x, \tau + \sigma(x))}{a_0}, \quad (3.9.33)$$

де

$$a_0 = 1 - a^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right)^2 \neq 0. \quad (3.9.34)$$

Остання нерівність випливає з того, що Σ задана рівнянням $\tau = \sigma(x)$ не є характеристичною поверхнею.

При обраній заміні змінних поверхня Σ переходить в площину $\tau = 0$, а умови (3.9.30) приймають вигляд:

$$\tilde{u}|_{\tau=0} = u|_{\Sigma} = \varphi(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\Sigma}. \quad (3.9.35)$$

Залишається знайти $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\Sigma}$. Для цього диференціюємо першу з умов (3.9.35).

Врахуємо, що

$$u|_{\Sigma} = \varphi(x) = u(x, \sigma(x)), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9.36)$$

Нормаль до поверхні Σ можна записати у вигляді $\vec{n} = \frac{\langle 1, -\nabla \sigma \rangle}{\Delta}$. Диференціюємо $u(x, t)$ по нормалі і використовуємо другу умову (3.9.27):

$$\psi(x) = \frac{\partial u(x, \sigma(x))}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Sigma} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right). \quad (3.9.37)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (3.9.36), (3.9.37) має єдиний розв'язок відносно невідомих величин $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ на будь-якій поверхні Σ , оскільки її визначник

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{1}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} & \dots & \dots & -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \Delta \neq 0. \quad (3.9.38)$$

Таким чином задача Коші з даними на вільній поверхні Σ є коректною. Відзначимо, що умова “вільності” поверхні Σ є принциповою для коректної постановки задачі Коші. Для хвильового рівняння

$$u_{tt}(t, x, y) = u_{xx}(t, x, y) + u_{yy}(t, x, y) \quad (3.9.39)$$

площина $y = 0$ не є вільною (не виконується умова (3.9.29)), ні характеристичною поверхнею. Функція

$$u_m(t, x, y) = \frac{\sinh(my) \sin\left(\frac{m(x+t)}{\sqrt{2}}\right)}{m^2}, \quad (3.9.40)$$

де m — натуральне число, є розв’язком рівняння (3.9.27), який задовольняє умови

$$u_m(t, x, y)|_{y=0} = 0, \quad u_y(t, x, 0) = \frac{\sin\left(\frac{m(x+t)}{\sqrt{2}}\right)}{m}. \quad (3.9.41)$$

Але задача Коші (3.9.30), (3.9.33) поставлена некоректно, тому що

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{m(x+t)}{\sqrt{2}}\right)}{m} = 0, \quad (3.9.42)$$

а сам розв’язок $u_m(t, x, y)$ при $m \rightarrow \infty$ є необмеженим.

3.9.4 Плоскі хвилі. Дисперсія хвиль

Розглянемо однорідне хвильове рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + cu(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.9.43)$$

Покладемо $c = 0$. Розв’язки рівняння (3.9.43) шукатимемо у вигляді

$$u(t, x) = f(bt + \langle \xi, x \rangle), \quad (3.9.44)$$

де $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$,

$$\langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i. \quad (3.9.45)$$

При різних значеннях $t = t_0$ функція $u(t_1, x)$ відрізняється від $u(t_0, x)$ зсувом на вектор $\vec{\xi} b(t_1 - t_0) / |\vec{\xi}|^2$, дійсно:

$$\begin{aligned} u\left(t_0, x + \frac{\vec{\xi} b(t_1 - t_0)}{|\vec{\xi}|^2}\right) &= f\left(bt_0 + \left\langle \xi, x + \frac{\vec{\xi} b(t_1 - t_0)}{|\vec{\xi}|^2} \right\rangle\right) = \\ &= f\left(bt_0 + \langle \xi, x \rangle + \langle \xi, \xi \rangle \frac{b(t_1 - t_0)}{|\vec{\xi}|^2}\right) = \\ &= f(bt_1 + \langle \xi, x \rangle) = u(t_1, x). \end{aligned} \quad (3.9.46)$$

Визначення 3.9.4.1. Розв'язок вигляду (3.9.44) прийнято називати *плоскою хвилею*, яка рухається вздовж напрямку вектора ξ зі швидкістю $v = b / |\vec{\xi}|$.

Визначення 3.9.4.2. Вираз $bt + \langle \xi, x \rangle$ називається *фазою хвилі* (3.9.44), а f — *формою хвилі*.

Визначення 3.9.4.3. Якщо $b = 0$, то хвиля (3.9.44) називається *стоячою*.

Знайдемо умови, яким повинні задовольняти b і вектор $\vec{\xi}$, щоб функція (3.9.44) була розв'язком рівняння (3.9.43) при $c = 0$. Підставимо (3.9.44) в (3.9.43). Отримаємо:

$$f''(by + \langle \xi, x \rangle) b^2 = a^2 f''(bt + \langle \xi, x \rangle) \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \quad (3.9.47)$$

Вважаючи, що $f''(Q) \neq 0$, маємо

$$b^2 = a^2 |\vec{\xi}|^2. \quad (3.9.48)$$

Розв'язками цього рівняння є вектори $\vec{N} = (\xi, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$, які лежать на конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, основою якого є сфера $|\vec{\xi}| = b/a$.

Визначення 3.9.4.4. Вектор $\vec{N} = (\xi, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\vec{N} \neq 0$, який задовольняє рівняння (3.9.48), називається *характеристичною нормаллю* хвильового рівняння (3.9.43).

Визначення 3.9.4.5. Гіперплощина

$$N^\perp = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid bt + \langle \xi, x \rangle = \text{const}\} \quad (3.9.49)$$

називається *характеристичною гіперплощиною* хвильового рівняння (3.9.43).

Ця площина перпендикулярна до характеристичної нормалі $\vec{N}$.

Визначення 3.9.4.6. Гіперповерхня в $\mathbb{R}^{n+1}$ називається *характеристичною*, якщо в кожній точці її дотична гіперплощина є характеристичною.

Характеристичне рівняння (3.9.48) свідчить, що швидкість поширення всіх плоских хвиль, які задовольняють рівняння (3.9.43), дорівнює a :

$$v^2 = \frac{b^2}{|\xi|^2} = a^2. \quad (3.9.50)$$

Справедливе й обернене твердження. Для довільного $\vec{N} \in \mathbb{R}^{n+1}$, який задовольняє (3.9.48), плоска хвиля (3.9.50) є розв'язком рівняння (3.9.43) при довільній функції $f(bt + \langle \xi, x \rangle)$.

В окремому випадку $f(bt + \langle \xi, x \rangle)$ може бути й розривною (або функцією, яка швидко змінюється) в деякій точці, наприклад при $bt + \langle \xi, x \rangle = 2$. Тоді розв'язок (3.9.44) буде мати той самий розрив уздовж всієї гіперплощини в $\mathbb{R}^{n+1}$ ($\xi \neq 0$):

$$bt + \langle \xi, x \rangle = 2. \quad (3.9.51)$$

При фіксованому t цей розрив розміщений на площині в $\mathbb{R}^n$ з рівнянням (3.9.51). Ця площина рухається із зростанням t у напрямі перпендикулярного їй вектора $-\vec{\xi}$, зі швидкістю $v = a = b/|\vec{\xi}|$.

Звідси можна зробити висновок:

1. довільна характеристична гіперплощина може бути поверхнею розриву розв'язку рівняння (3.9.43) при $c = 0$;
2. усі плоскі хвилі й розриви цих хвиль, які задовольняють рівняння (3.9.43) при $c = 0$, поширюються зі швидкістю a у напрямі вектора $-\vec{\xi}$ без спотворення (хвиля без дисперсії).

Зазначимо, що з формулою (3.9.50) пов'язане відкриття електромагнітної природи світла і спеціальної теорії відносності. Так, із рівнянь електродинаміки Максвелл вивів, що потенціали електромагнітного поля задовольняють хвильове рівняння

$$u_{tt}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z), \quad (3.9.52)$$

де $a^2 = 1/(\varepsilon\mu)$, ε і μ — відповідно діелектрична та магнітна проникність вакууму. Останні величини знаходяться експериментально з чисто електромагнітних вимірювань. Після обчислення Максвеллом швидкості поширення електромагнітних хвиль виявилось, що вона з великою точністю збігається із швидкістю світла: $a = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = 299'976$ км/с. Звідси Максвелл зробив висновок, що світло має електромагнітну природу.

Розглянемо диференціальне рівняння (3.9.43), коли $c \neq 0$. Якщо $u(t, x) = f(bt + \langle \xi, x \rangle)$ — плоска хвиля для рівняння (3.9.43), то ми відразу дістаємо для заданих ξ і b рівняння

$$f''(bt + \langle \xi, x \rangle) \left(a^2 |\vec{\xi}|^2 - b^2 \right) + f(bt + \langle \xi, x \rangle) c = 0. \quad (3.9.53)$$

Отже, в цьому разі функція $f(bt + \langle \xi, x \rangle)$ не може бути довільною — вона повинна бути розв'язком рівняння (3.9.53). Очевидно, що для швидкості $v = a$, тобто для $a^2 |\vec{\xi}|^2 = b^2$, уже не існує біжучої плоскої хвилі. Але для інших швидкостей і для довільного напрямку можливі форми хвиль визначаються із рівняння (3.9.53) і є експоненціальними функціями. У зв'язку з цим напрям руху хвилі і її швидкість, яка відповідає рівнянню (3.9.43), можуть задаватися довільним чином (за винятком $v = a$), але при цьому можливі тільки спеціальні форми плоских хвиль. З фізичних міркувань виключаються із розгляду розв'язки, які не є рівномірно обмеженими функціями в просторі. Беручи до уваги, що

$$\begin{aligned} f(bt + \langle \xi, x \rangle) &= f\left(v \left| \vec{\xi} \right| t - \langle e, x \rangle \left| \vec{\xi} \right| \right) = \\ &= f\left((vt - \langle e, x \rangle) \left| \vec{\xi} \right| \right) = \\ &= f(vt - \langle e, x \rangle), \end{aligned} \quad (3.9.54)$$

де $g(z) = f\left(z \left| \vec{\xi} \right| \right)$, $\vec{e} = -\vec{\xi}/|\vec{\xi}|$, $|\vec{e}| = 1$, $z = vt - \langle e, x \rangle$, маємо:

$$g''(z) \left(a^2 |\vec{\xi}|^2 - b^2 \right) + g(z) c = 0. \quad (3.9.55)$$

Рівномірно обмежені розв'язки рівняння (3.9.55) можна записати у вигляді $g(z) = e^{-ikz}$, при виконанні рівності

$$-(kv)^2 = -a^2k^2 + c. \quad (3.9.56)$$

Позначимо $\omega = kv$ — частота хвилі.

Таким чином, хвиля довільної форми, що задовольняє рівняння (3.9.43) при виконанні умови (3.9.56) може бути зображена як суперпозиція гармонічних хвиль вигляду:

$$u_k(t, x) = e^{ik(vt - \langle e, x \rangle)}, \quad (3.9.57)$$

З (3.9.56) маємо

$$-\omega^2 = -a^2k^2 + c, \quad (3.9.58)$$

тобто $k = \pm \frac{\sqrt{c+\omega^2}}{a}$ і гармонічні коливання (3.9.57) матимуть фазову швидкість ω/k , яка залежатиме від частоти ω , що дорівнює $v = \frac{\omega}{k} = \frac{a\omega}{\sqrt{c+\omega^2}}$.

Отже,

$$u_k(t, x) = \exp \left\{ -\frac{i}{a} \sqrt{c + \omega^2} \left(\frac{a\omega}{\sqrt{c + \omega^2}} t - \langle e, x \rangle \right) \right\}. \quad (3.9.59)$$

Оскільки розв'язок рівняння (3.9.43) — це суперпозиція хвиль вигляду (3.9.59), які поширюються в одному й тому самому напрямі, причому всі ці хвилі мають форму, яка задовольняє рівняння (3.9.53), то різні компоненти поширюються з різними швидкостями; отже, форма складової хвилі $u(x, t)$ змінюватиметься з часом t і хвильовий процес при своєму поширенні буде спотворюватися (хвилі з дисперсією). Кажуть, що якщо фазова швидкість гармонічних хвиль залежить від частоти, то рівняння (3.9.43) описує явище дисперсії.

Очевидно, що якщо рівняння (3.9.43) не допускає розв'язків у вигляді хвиль довільної форми, то має місце дисперсія хвиль.

Визначення 3.9.4.7. Доданок $cu(t, x)$ в рівнянні (3.9.43) іноді називають *дисперсійним членом*.

Приклад 3.9.4.1

Розглянемо телеграфне рівняння, яке описує електричні коливання в провідниках

$$u_{xx}(t, x) - LCu_{tt} - (RC + LG)u_t(t, x) - RG u(t, x) = 0, \quad (3.9.60)$$

де C — місткість, R — омичний опір; L — індуктивність; G — втрата ізоляції. Всі ці величини розраховані на одиницю довжини провідника.

Розв'язок. Позначимо $b = RC + LG$, $d = RG$, $a^2 = 1/(LG)$ і введемо нову невідому функцію

$$v(t, x) = u(t, x)e^{a^2bt/2}. \quad (3.9.61)$$

Тоді рівняння (3.9.60) запишеться у вигляді

$$a^2v_{xx}(t, x) - v_{xx}(t, x) + vc(t, x) =, \quad (3.9.62)$$

де

$$c = \frac{a^2}{4}(a^2b^2 - 4d) = \frac{a^4}{4}\left(b^2 - \frac{4d}{a^2}\right) = \frac{a^4}{4}(RC - LG)^2. \quad (3.9.63)$$

Отже, на підставі попередніх міркувань при виконанні умови

$$RC = LG, \quad (3.9.64)$$

тобто $c = 0$ рівняння (3.9.62) буде мати хвилі без дисперсії і в силу (3.9.61), рівняння (3.9.60) має хвилі без дисперсії із згасанням вигляду

$$u(t, x) = e^{-Kt}f(x - at), \quad u(t, x) = e^{-Kt}f(-x - at), \quad (3.9.65)$$

де $K = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)$.

Коли коефіцієнти рівняння (3.9.60), які характеризують провідник, задовольняють умову (3.9.64), то в провіднику хвилі довільної форми поширюються без спотворення і можуть лише затухати. Але це затухання в пункті прийому хвиль-сигналів завжди можна компенсувати за рахунок їх підсилення, тим самим можна точно відновити сигнали, які передаються по провіднику.

Ця обставина має дуже важливе значення в галузі телефонного зв'язку при передаванні сигналів по кабелях на великі віддалі.

Зауважимо нарешті, що рівняння (3.9.43) при $c = 0$ можуть мати, крім плоских хвиль, хвилі інших форм. Наприклад, якщо $n = 3$, характеристиками для рівняння (3.9.43) будуть також поверхні

$$r - at = \text{const}, \quad -r - at = \text{const}, \quad (3.9.66)$$

де

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x_{0,i})^2}, \quad (3.9.67)$$

$x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})$ — фіксована точка, а функції $u = \frac{f(r-at)}{4\pi r}$ — хвилі без дисперсії із затуханням для рівняння (3.9.43) при $n = 3$ і $c = 0$.

Визначення 3.9.4.8. Ці хвилі називаються сферичними.