Лекція 7

Глава 2 Побудова математичних моделей базових фізичних процесів

§ 1. Математичні моделі розповсюдження тепла та дифузії речовини

[6, стор. 8 - 11]

Для запису математичної моделі введемо величини:

 - об’єм тіла,  *–* час;

 – температура в точці у момент часу  **;**

** –** теплоємність (кількість тепла, яка необхідна, для підняти температуру одиниці маси тіла на один градус);

*** –*** теплопровідність речовини (здатність проводити тепло);

 – щільність речовини;

 - інтенсивність джерел теплової енергії в точці  в момент часу 

Закон збереження теплової енергії

Складемо баланс теплової енергії для довільного об’єму тіла  за довільний інтервал часу . Для цього обчислимо кількість тепла, яка міститься в нескінченно малому об’ємі :   
 (1.1)   
та в об’ємі  в момент часу   (1.2). Припустимо, що з часом температура змінилася від значення  до значення . Обчислимо кількість тепла, витрачену на зміну температури:

 (1.3).

Температура в об’ємі  може змінюватись за рахунок таких факторів:

1) нерівномірності нагрівання тіла, викликає потік тепла через поверхню , яка обмежує уявне тіло об’єму ;

2) зміна кількості тепла за рахунок внутрішніх теплових джерел.

Нехай –зовнішнянормаль до поверхні . Обчислимо кількість тепла, яка поступає всередину об’єму  через елементарну поверхню  в одиницю часу:   
 (1.4). Формула (1.4) є математичним виразом фізичного закону Фур’є.

Кількість тепла, яка проходить через всю поверхню  за час від  до  обчислюється за формулою ****** (1.5).

Кількість тепла за рахунок теплових джерел в об’ємі  можна обчислити у вигляді: ****** (1.6).

Таким чином можна записати закон збереження теплової енергії:

, або після підстановки усіх величин маємо інтегральний закон збереження теплової енергії:

 (1.7).

Для перетворення першого інтегралу лівої частини (1.7) застосуємо формулу Остроградського Гауса, , де  векторне поле. В результаті отримаємо:

 (1.8),

де .

Враховуючи, що рівність (1.8) отримана для довільного об’єму  та довільних моментів часу , можна зробити висновок, що рівність (1.8) має місце тоді і лише тоді, коли має місце рівність підінтегральних виразів:

, ,(1.9).

Рівняння (1.9) повинно виконуватись для кожної точки  реального фізичного об’єму тіла (збережемо для нього позначення , а для його поверхні позначення ), та для кожного моменту часу .

Для виділення єдиного розв’язку рівняння (1.9) окрім диференціального рівняння (1.9) необхідно задавати додаткові умови на границі просторово – часової області. Будемо використовувати фізичні міркування для задавання таких умов.

а)Якщо на границі області відома температура тіла, тоді на границі тіла задають умову: ****(1.10).Умову (1.10) називають граничною умовою першого роду, або умовою Дірихле.

б*)*Якщо на границі області відомий тепловий потік в одиницю часу, який поступає всередину тіла через одиничну площадку, тоді на границі задають граничну умову: ******  (1.11).

Умову (1.11) називають граничною умовою другого роду, або умовою Неймана.

в) Якщо на границі тіла відбувається конвективний теплообмін з оточуючим середовищем відомої температури згідно до закону Ньютона, тоді на границі задають граничну умову: (1.12).

Умову (1.12) називають граничною умовою третьогороду або умовою Ньютона.  - коефіцієнт теплообміну,  - температура оточуючого середовища.

г) В початковий момент часу задають температура усіх внутрішніх точок тіла.

****** (1.13),Умову (1.13) називають початковою умовою, а  - початковою температурою тіла.

Частинні випадки рівняння теплопровідності

У випадку, коли коефіцієнт теплопровідності та інтенсивність теплових джерел залежить не лише від точки простору і часу, а і від самої температури , , лінійне рівняння (1.9) стає квазілінійним, тобто лінійним відносно старших похідних.

Окрім загального вигляду рівняння теплопровідності, у практичних випадках часто використовуються частинні випадки рівняння.

Зокрема, можна розглядати розповсюдження тепла в одновимірних та двовимірних тілах:

(пластина)  (1.14),

(стрижень)  (1.15).

Для однорідних тіл усі коефіцієнти рівняння можна вважати константами, зокрема , ,  В результаті рівняння (1.9) буде мати вигляд  (1.16),

де  , – **оператор Лапласа**.

Зокрема одновимірне рівняння теплопровідності має вигляд:

 (1.17).

Рівняння дифузії речовини

Процес дифузії речовини це процес вирівнювання концентрації речовини у розчинах, розплавах або в сумішах. Фізика вирівнювання температури в тілах та концентрації у розчинах чи розплавах має багато схожих рис і з цього приводу навіть процес розповсюдження тепла називають дифузією тепла.

Для отримання моделі дифузії речовини використаємо наступну таблицю аналогії.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Дифузія | Теплопровідність | Пояснення |
|  |  | Концентрація речовини в розчині, або у розплаві |
|  |  | Коефіцієнт пористості, відображає відношення об’єму пор до загального об’єму тіла і вказує на кількість речовини необхідну для зміни концентрації на одну одиницю в одиниці об’єму. |
|  |  | Закон Нерста, описує кількість речовини, яка поступає всередину тіла через його поверхню в одиницю часу за рахунок нерівномірності концентрації. |
|  |  | Інтенсивність джерела речовини в середині об’єму. |
|  |  | Кількість речовини, яка поступає через поверхню S тіла за законом, аналогічним закону Ньютона,  ν– відома концентрація речовини в тому чи іншому середовищі;  α-коефіцієнт проникності поверхні. |

Побудови математичної моделі процесу дифузії відбувається за аналогією згідно до попередньої таблиці.

Кількість речовини, яка витрачена для зміни концентрації від ,  < має вигляд:

 (1.3’).

Кількість речовини, яка проходить через всю поверхню  за час від : ****** (1.5’).

Кількість речовини, яка поступає за рахунок джерел речовини в об’ємі  за час від  до : ******  (1.6’).

Отже, закон збереження маси має вигляд: .

Інтегральний закон збереження маси:

 (1.7’).

Після застосування формули Остроградського – Гауса та прирівнювання підінтегральних виразів отримаємо рівняння дифузії речовини у вигляді:

**,** ∈G, (1.17).

Додаткові умови на границі області задають аналогічно умовам для рівняння теплопровідності  (1.18), відома концентрація речовини на поверхні.

**** (1.19),  
на границі відомий потік речовини.

 (1.20),  
на границі відбувається обмін речовиною з оточуючим середовищем через напівпроникливу мембрану за законом аналогічним закону Ньютона.

 (1.21),  
в початковий момент часу відома концентрація речовини.

У випадку, коли коефіцієнти рівняння та граничних умов не залежать від часу , розв’язок рівняння не залежить від часу в результаті отримаємо стаціонарне рівняння теплопровідності та дифузії:

 (1.22)

 (1.22’)

Задача Стефана  
(задача про остигання та затвердіння розплавленого металу)

Вертикальний циліндричний посуд заповнений розплавленим металом, який знаходиться при заданій температурі . Починаючи з моменту часу  вільна поверхня розплавленого металу підтримується при постійній температурі . Поставимо задачу про остудження та затвердіння металу, якщо дно і бокова поверхня посуду теплоізольовані. Термічними деформаціями об’єму будемо нехтувати тобто процес розповсюдження тепла відбувається лише вздовж вісі циліндру.

x x

L



*x*

Введемо позначення:

- щільність твердої та рідкої фази металу;

 - теплоємність твердої та рідкої фази металу;

 - теплопровідність твердої та рідкої фази металу;

 - положення границі розділу твердої та рідкої фаз;

 - висота циліндру, - площа основи циліндру;

 - питома теплота плавлення;

- температура в момент часу в точці .

Отримаємо рівняння теплового балансу для нескінченно малого об’єму розплавленого металу, який знаходиться між перерізами та  за проміжок часу від до .

Обчислимо кількість тепла, яка необхідна для зміни температури у виділеному елементарному об’ємі від значення  до значення . Кількість тепла, що міститься в виділеному об’ємі в момент часу  можна обчислити за формулою . Аналогічно для моменту часу  кількість тепла дорівнює . При цьому нехтуємо, зміною температури по просторовій змінній у середині елементарного об’єму. Тоді кількість тепла, необхідна для зміни температури всередині об’єму дорівнює: .

Ця зміна може відбуватися за рахунок теплових потоків, через перерізи  та . Підрахуємо кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз за час 



Напрям нормалі в цьому перерізі співпадає з напрямом вісі .

Кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз за час можна записати у вигляді:



Таким чином можна скласти рівняння теплового балансу:



Або після підстановки відповідних значень поділених на  отримаємо:



Після граничного переходу коли та прямують до нуля, отримаємо диференціальне рівняння:

 (1.23).

Аналогічні міркування дозволяють отримати рівняння для твердої фази:

 (1.24).

Отримаємо співвідношення на границі розділу фаз.

В першу чергу відмітимо, що температура при переході через границю розділу фаз повинна змінюватись неперервно і співпадати з температурою плавлення металу, тобто повинно виконуватись співвідношення :  (1.25).

Отримаємо рівняння теплового балансу для елементарного об’єму обмеженого перерізами  та 

За час  затвердіє об’єм металу рівний . При цьому буде виділено кількість тепла рівна .

Кількість тепла, яка надійде всередину об’єму за рахунок теплових потоків через відповідні перерізи за час  може бути записана у вигляді:



Оскільки фазовий перехід відбувається при постійній температурі, то в околі границі розділу фаз  зміною температури по змінній  можна нехтувати, в зв’язку з чим можна не враховувати кількість тепла, яка витрачається на зміну температури у виділеному елементарному об’ємі.

Рівняння теплового балансу для елементарного об’єму обмеженого перерізами  та  можна записати у вигляді:

 (1.26).

Поділивши обидві частини на , скоротивши на  і спрямувавши до нуля отримаємо співвідношення:

  (1.27).

Умови (1.25), (1.27) називають внутрішніми граничними умовами, або умовами спряження.

Запишемо початкові умови та умови на верхній та нижній основі циліндру:

В початковий момент часу задана температура розплавленого металу:

 (1.28).

На верхній основі задана температура:

 (1.29).

Нижня основа теплоізольована, тобто тепловий потік, який поступає всередину тіла дорівнює нулю:

 (1.30).

В початковий момент часу положення границі фазового переходу співпадає з верхньою основою циліндру:

 (1.31).

Таким чином до моменту часу, коли весь метал затвердіє постановка задачі Стефана включає в себе рівняння (1.23) та (1.24), умови спряження (1.25) та (1.27), початкові умови (1.28) та (1.31) та граничні умови (1.29) та (1.30).

Після повного затвердіння металу, тобто коли , процес буде описуватись рівнянням (2) для  з граничними умовами (1.29), (1.30) та початковою температурою .