# Зміст



## 3.9 Загальна постановка задачі Коші для хвильового рівняння. Плоскі хвилі

### 3.9.1 Характеристичні поверхні

В лекції 14 розглядалися питання класифікації диференціальних рівнянь другого порядку з $n > 2$ незалежними змінними. Важливу роль при визначені типу рівняння і вибору нової системи координат відіграють характеристичні поверхні, які є аналогами характеристичних кривих (характеристик) для випадку рівнянь з двома незалежними змінними.

Нехай функція $\omega(x) \in C^1$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$ є такою що на поверхні $\omega(x) = 0$, $\nabla\omega(x) \neq 0$ та

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x) \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j} = 0. \tag{3.9.1}$$

**Визначення 3.9.1.1** (характеристичної поверхні)**.** Тоді поверхню $\omega(x) = 0$ називають *характеристичною поверхнею* або *характеристикою* квазілінійного рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0. \tag{3.9.2}$$

**Визначення 3.9.1.2** (характеристичної лінії)**.** При $n = 2$ характеристична поверхня називається *характеристичною лінією.*

Оскільки $\nabla\omega(x) \neq 0$, то сімейство характеристик $\omega(x) = \mathrm{const}$ заповнює область таким чином, що через кожну точку області проходить одна характеристична поверхня.

Враховуючи закон перетворення коефіцієнтів рівняння

$$\overline{a_{k,l}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j} \tag{3.9.3}$$

при виборі заміни змінних $\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = 1, \ldots, n$, знання однієї чи декількох характеристичних поверхонь дозволяє спростити рівняння, зокрема, якщо $\xi_1 = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

$$\overline{a_{1,1}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j} = 0. \tag{3.9.4}$$

Для хвильового рівняння

$$u_{tt}(t,x) = a^2\Delta u(t,x) + f(t,x), \tag{3.9.5}$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, характеристичне рівняння має вигляд

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \tag{3.9.6}$$

Одним з розв'язків цього диференціального рівняння першого порядку є поверхня

$$\omega(x,t) = a^2(t-t_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})^2 = 0. \tag{3.9.7}$$

**Визначення 3.9.1.3** (характеристичного конуса)**.** Поверхня

$$a^2(t-t_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})^2 = 0. \tag{3.9.8}$$

називається *характеристичним конусом* з вершиною в точці $(x_0, t_0)$ і є характеристичною поверхнею (характеристикою) хвильного рівняння.

**Зауваження 3.9.1.1 —** Характеристичний конус є границею конусів

$$\Gamma^+(x_0,t_0) = a(t-t_0) > \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})^2}, \tag{3.9.9}$$

$$\Gamma^{-}(x_0, t_0) = -a(t - t_0) > \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})^2}, \tag{3.9.10}$$

які називають *конусами майбутнього* та *минулого* відповідно.

Хвильове рівняння має також інше сімейство характеристичних поверхонь

$$a(t - t_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})e_i = 0, \tag{3.9.11}$$

де $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ — довільні числа такі, що $|\vec{e}| = 1$.

### 3.9.2 Узагальнена задача Коші для рівняння коливання струни

Довільне квазілінійне рівняння гіперболічного типу з двома незалежними змінними

$$a_{1,1}(\xi,\eta)U_{\xi,\xi}(\xi,\eta) + 2a_{1,2}U_{\xi\eta}(\xi,\eta) + a_{2,2}(\xi,\eta)U_{\eta,\eta}(\xi,\eta) = F(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta) \tag{3.9.12}$$

може бути зведене до одного із рівнянь:

$$u_{xt}(t,x) = f(x,y,u,u_t,u_x), \tag{3.9.13}$$
$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,y,u,u_t,u_x). \tag{3.9.14}$$

**Зауваження 3.9.2.1** — Коефіцієнти $a_{i,j}(\xi,\eta)$ $(i,j = 1,2)$ і права частина $f(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)$ вважаються неперервно диференційовними функціями у відповідних областях.

При постановці задачі Коші для рівняння (3.9.14) до тепер ми вважали, що носієм початкових умов є пряма $t = 0$.

На прикладі рівняння вільних коливань однорідної струни

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \tag{3.9.15}$$

покажемо, що носієм початкових умов може бути крива $L$, яка є відмінною від прямої $t = 0$, причому встановимо, яким умовам повинна задовольняти крива $L$ і який вигляд повинні мати самі початкові умови, щоб одержана задача Коші була поставлена коректно.

Для цього позначимо через $D$ обмежену область фазової площини $xOt$ з кусково-гладкою жордановою межею $S$. Нехай $u(t,x) \in C^2(D)$ — розв'язок рівняння (3.9.15), який має неперервні частинні похідні 1-го порядку в області $\overline{D} = D \cup S$.

Інтегруючи тотожність (3.9.15) по області $D$ і використовуючи формулу Гріна

$$\iint\limits_D (Q_x(x,t) - P_t(x,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_S P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}t, \tag{3.9.16}$$

де криволінійний інтеграл в правій частині береться по контуру в напрямі проти годинникової стрілки, одержуємо

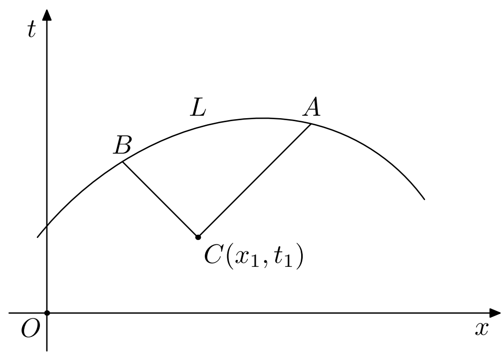
$$\iint\limits_D (u_{xx} - u_{tt})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_S u_x\,\mathrm{d}t + u_t\,\mathrm{d}x = \iint\limits_S f(x,t)\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}t \tag{3.9.17}$$

Нехай $L$ — розімкнута крива Жордана з неперервною кривизною, яка задовольняє умовам:

- кожна пряма із двох сімей характеристик $x+t = \mathrm{const}$, $x-t = \mathrm{const}$ рівняння (3.9.15) перетинає криву $L$ не більше, ніж в одній точці;
- напрям дотичної до кривої $L$ в жодній точці не збігається з напрямом характеристик рівняння (3.9.15).

> **Зауваження 3.9.2.2** — Іноді таку криву $L$ називають *"вільною"*.

Припустимо, що характеристики $x - x_1 = t - t_1$ і $x - x_1 = t_1 - t$, які виходять із точки $C$, перетинаються із кривою $L$ в точках $A$ і $B$:




Застосовуючи формулу (3.9.14) в області, яка обмежена дугою $AB$ кривої $L$ і відрізками характеристик $[CA]$ і $[CB]$, одержуємо:

$$\int\limits_{AB+[BC]+[CA]} u_x\,\mathrm{d}t + u_t\,\mathrm{d}x = \iint\limits_D f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{3.9.18}$$

Оскільки вздовж $[BC]$ і $[AC]$ маємо $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ відповідно, то (3.9.15) запишеться у вигляді:

$$\int\limits_{AB} u_x\,\mathrm{d}t + u_t\,\mathrm{d}x - 2u(C) + u(A) + u(B) = \iint\limits_{D} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \qquad (3.9.19)$$

звідки знаходимо

$$u(C) = \frac{u(A)+u(B)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{AB} u_x\,\mathrm{d}t + u_t\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\iint\limits_{D} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \qquad (3.9.20)$$

Якщо розв'язок рівняння (3.9.13) задовольняє умовам:

$$u|_L = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \ell}\right|_L = \psi(x), \qquad (3.9.21)$$

де $\varphi$ і $\psi$ — задані дійсні відповідно два рази і один раз неперервно диференційовні функції, а $\ell$ — заданий на $L$ достатньо гладкий вектор, що ніде не збігається з дотичною до кривої $L$. Визначимо $u_x$ і $u_t$ із рівностей:

$$u_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + u_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}, \quad u_x\ell_x + u_t\ell_t = \psi, \qquad (3.9.22)$$

де $s$ — довжина дуги $L$, і підставляючи відомі значення $u$, $u_x$, $u_t$ в праву частину (3.9.20), одержуємо розв'язок задачі Коші (3.9.15), (3.9.21).

Із наведених міркувань випливає, що постановка задачі Коші (3.9.14), (3.9.18) є коректною, тобто вона має в розглядуваній області тільки єдиний розв'язок, і він є стійким.

Аналогічно ставиться задача Коші і у випадку рівняння (3.9.13).

Для рівняння (3.9.13) характеристиками будуть прямі, паралельні осям координат ($x = \mathrm{const}$, $t = \mathrm{const}$). Отже, в цьому випадку всяка гладка крива $L$, яка перетинається не більш, ніж в одній точці з прямими, паралельними осям координат, буде "вільною". Нехай рівняння цієї кривої буде $t = g(x)$ (або $x = h(t)$). Вважаємо, що існують похідні $g'(x)$, $h'(t)$, відмінні від нуля. Тоді задача Коші може бути поставлена наступним чином: в області

$$D = \{(t,x)|x_0 < x < x_0+\alpha, g(x) < t < t_0+\beta\}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (3.9.23)$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (3.9.1), який на кривій $L$ задовольняє умови

$$u|_{t=g(x)} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=g(x)} = \psi(x). \qquad (3.9.24)$$

Дані Коші (3.9.20) дозволяють на кривій $t = g(x)$ знайти значення похідної $u_x$. Дійсно, диференціюючи по $x$ першу із умов (3.9.24), одержуємо

$$u_x|_{t=g(x)} + u_t|_{t=g(x)}, \quad g'(x) = \varphi'(x), \tag{3.9.25}$$

або

$$u_x|_{t=g(x)} = \varphi'(x) - \psi(x)\varphi'(x). \tag{3.9.26}$$

### 3.9.3 Узагальнена задача Коші для $n$-вимірного хвильового рівняння

У випадку хвильового рівняння в $n$-вимірному просторі

$$u_{tt}(t,x) = a^2\Delta u(t,x) + f(t,x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{3.9.27}$$

носієм початкових умов може бути будь-яка "вільна" поверхня $\Sigma$, тобто гіперповерхня $\Psi(x,t) = 0$, яка задовольняє умовам:

- в жодній її точці $(x,t)$ не має місце рівність

$$\sum_{i=1}^{n} a^2 \left(\Psi_{x_i}\right)^2 - \left(\Psi_t\right)^2 = 0, \tag{3.9.28}$$

  тобто поверхня $\Sigma$ не є характеристичною;

- при $n \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{n} a^2 \left(\Psi_{x_i}\right)^2 - \left(\Psi_t\right)^2 < 0. \tag{3.9.29}$$

Задача Коші ставиться наступним чином: знайти два рази неперервно диференційовний розв'язок рівняння (3.9.21), який задовольняє умови

$$u(t,x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial n} = \psi(x), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{3.9.30}$$

де $n$ — заданий на $\Sigma$ одиничний вектор нормалі, а $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — задані на $\Sigma$ досить гладкі функції. Будемо вважати, що поверхня $\Sigma$ задана рівнянням $t = \sigma(x)$.

Покажемо, що задачу Коші (3.9.27), (3.9.30) можна звести до задачі Коші з початковими умовами заданими на поверхні $\tau = 0$.

Замість змінної $t$ введемо змінну $\tau = t - \sigma(x)$. Для такої заміни змінних отримаємо хвильове рівняння для функції $\tilde{u}(x,\tau) = u(x, \tau + \sigma(x))$.

Підрахуємо похідні, що входять в хвильове рівняння (3.9.27):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}, \tag{3.9.31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i^2} = \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2}.\end{aligned} \tag{3.9.32}$$

Таким чином хвильове рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} = \frac{a^2}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} - \frac{a^2}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2} + \frac{f(x, \tau + \sigma(x))}{a_0}, \tag{3.9.33}$$

де

$$a_0 = 1 - a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\right)^2 \neq 0. \tag{3.9.34}$$

Остання нерівність випливає з того, що $\Sigma$ задана рівнянням $\tau = \sigma(x)$ не є характеристичною поверхнею.

При обраній заміні змінних поверхня $\Sigma$ переходить в площину $\tau = 0$, а умови (3.9.30) приймають вигляд:

$$\tilde{u}\big|_{\tau=0} = u\big|_{\Sigma} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma}. \tag{3.9.35}$$

Залишається знайти $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{\Sigma}$. Для цього диференціюємо першу з умов (3.9.35).

Врахуємо, що

$$u\big|_{\Sigma} = \varphi(x) = u(x, \sigma(x)), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.9.36}$$

Нормаль до поверхні $\Sigma$ можна записати у вигляді $\vec{n} = \frac{\langle 1, -\nabla\sigma\rangle}{\Delta}$. Диференціюємо $u(x,t)$ по нормалі і використаємо другу умову (3.9.27):

$$\psi(x) = \left.\frac{\partial u(x, \sigma(x))}{\partial \vec{n}}\right|_{\Sigma} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{3.9.37}$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (3.9.36), (3.9.37) має єдиний розв'язок відносно невідомих величин $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ на будь-якій поверхні

$\Sigma$, оскільки її визначник

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\sigma}{\partial x_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{\Delta} & -\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial\sigma}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & -\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial\sigma}{\partial x_n} \end{vmatrix} = (-1)^n\Delta \neq 0. \tag{3.9.38}$$

Таким чином задача Коші з даними на вільній поверхні $\Sigma$ є коректною.

Відзначимо, що умова "вільності" поверхні $\Sigma$ є принциповою для коректної постановки задачі Коші. Для хвильового рівняння

$$u_{tt}(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y) \tag{3.9.39}$$

площина $y = 0$ не є вільною (не виконується умова (3.9.29)), ні характеристичною поверхнею. Функція

$$u_m(t,x,y) = \frac{\sinh(my)\sin\left(\frac{m(x+t)}{\sqrt{2}}\right)}{m^2}, \tag{3.9.40}$$

де $m$ — натуральне число, є розв'язком рівняння (3.9.27), який задовольняє умови

$$u_m(t,x,y)\big|_{y=0} = 0, \quad u_y(t,x,0) = \frac{\sin\left(\frac{m(x+t)}{\sqrt{2}}\right)}{m}. \tag{3.9.41}$$

Але задача Коші (3.9.30), (3.9.33) поставлена некоректно, тому що

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{m(x+t)}{\sqrt{2}}\right)}{m} = 0, \tag{3.9.42}$$

а сам розв'язок $u_m(t,x,y)$ при $m \to \infty$ є необмеженим.

### 3.9.4 Плоскі хвилі. Дисперсія хвиль

Розглянемо однорідне хвильове рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$u_{tt}(t,x) = a^2 \Delta u(t,x) + cu(t,x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{3.9.43}$$

Покладемо $c = 0$. Розв'язки рівняння (3.9.43) шукатимемо у вигляді

$$u(t,x) = f(bt + \langle \xi, x \rangle), \tag{3.9.44}$$

де $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$,

$$\langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i. \tag{3.9.45}$$

При різних значеннях $t = t_0$ функція $u(t_1, x)$ відрізняється від $u(t_0, x)$ зсувом на вектор $\vec{\xi} b(t_1 - t_0) / \left|\vec{\xi}\right|^2$, дійсно:

$$\begin{aligned} u\left(t_0, x + \frac{\vec{\xi} b(t_1 - t_0)}{\left|\vec{\xi}\right|^2}\right) &= f\left(bt_0 + \left\langle \xi, x + \frac{\vec{\xi} b(t_1 - t_0)}{\left|\vec{\xi}\right|^2} \right\rangle\right) = \\ &= f\left(bt_0 + \langle \xi, x \rangle + \langle \xi, \xi \rangle \frac{b(t_1 - t_0)}{\left|\vec{\xi}\right|^2}\right) = \\ &= f(bt_1 + \langle \xi, x \rangle) = u(t_1, x). \end{aligned} \tag{3.9.46}$$

> **Визначення 3.9.4.1.** Розв'язок вигляду (3.9.44) прийнято називати *плоскою хвилею*, яка рухається вздовж напряму вектора $\xi$ зі швидкістю $v = b / \left|\vec{\xi}\right|$.

> **Визначення 3.9.4.2.** Вираз $bt + \langle \xi, x \rangle$ називається *фазою хвилі* (3.9.44), а $f$ — *формою хвилі.*

> **Визначення 3.9.4.3.** Якщо $b = 0$, то хвиля (3.9.44) називається *стоячою.*

Знайдемо умови, яким повинні задовольняти $b$ і вектор $\vec{\xi}$, щоб функція (3.9.44) була розв'язком рівняння (3.9.43) при $c = 0$. Підставимо (3.9.44) в (3.9.43). Отримаємо:

$$f''(by + \langle \xi, x \rangle) b^2 = a^2 f''(bt + \langle \xi, x \rangle) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2. \tag{3.9.47}$$

Вважаючи, що $f''(Q) \not\equiv 0$, маємо

$$b^2 = a^2 \left|\vec{\xi}\right|^2. \tag{3.9.48}$$

Розв'язками цього рівняння є вектори $\vec{N} = (\xi, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$, які лежать на конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, основою якого є сфера $\left|\vec{\xi}\right| = b/a$.

**Визначення 3.9.4.4.** Вектор $\vec{N} = (\xi, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\vec{N} \neq 0$, який задовольняє рівняння (3.9.48), називається *характеристичною нормаллю* хвильового рівняння (3.9.43).

**Визначення 3.9.4.5.** Гіперплощина

$$N^{\perp} = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| bt + \langle \xi, x\rangle = \mathrm{const}\right\} \tag{3.9.49}$$

називається *характеристичною гіперплощиною* хвильового рівняння (3.9.43).

Ця площина перпендикулярна до характеристичної нормалі $\vec{N}$.

**Визначення 3.9.4.6.** Гіперповерхня в $\mathbb{R}^{n+1}$ називається *характеристичною*, якщо в кожній точці її дотична гіперплощина є характеристичною.

Характеристичне рівняння (3.9.48) свідчить, що швидкість поширення всіх плоских хвиль, які задовольняють рівняння (3.9.43), дорівнює $a$:

$$v^2 = \frac{b^2}{|\xi|^2} = a^2. \tag{3.9.50}$$

Справедливе й обернене твердження. Для довільного $\vec{N} \in \mathbb{R}^{n+1}$, який задовольняє (3.9.48), плоска хвиля (3.9.50) є розв'язком рівняння (3.9.43) при довільній функції $f(bt + \langle \xi, x\rangle)$.

В окремому випадку $f(bt+\langle \xi, x\rangle)$ може бути й розривною (або функцією, яка швидко змінюється) в деякій точці, наприклад при $bt+\langle \xi, x\rangle = 2$. Тоді розв'язок (3.9.44) буде мати той самий розрив уздовж всієї гіперплощини в $\mathbb{R}^{n+1}(\xi \neq 0)$:

$$bt + \langle \xi, x\rangle = 2. \tag{3.9.51}$$

При фіксованому $t$ цей розрив розміщений на площині в $\mathbb{R}^n$ з рівнянням (3.9.51). Ця площина рухається із зростанням $t$ у напрямі перпендикулярного їй вектора $-\vec{\xi}$, зі швидкістю $v = a = b/\left|\vec{\xi}\right|$.

Звідси можна зробити висновок:

1. довільна характеристична гіперплощина може бути поверхнею розриву розв'язку рівняння (3.9.43) при $c = 0$;

2. усі плоскі хвилі й розриви цих хвиль, які задовольняють рівняння (3.9.43) при $c = 0$, поширюються зі швидкістю $a$ у напрямі вектора $-\vec{\xi}$ без спотворення (хвиля без дисперсії).

Зазначимо, що з формулою (3.9.50) пов'язане відкриття електромагнітної природи світла і спеціальної теорії відносності. Так, із рівнянь електродинаміки Максвелл вивів, що потенціали електромагнітного поля задовольняють хвильове рівняння

$$u_{tt}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z), \tag{3.9.52}$$

де $a^2 = 1/(\varepsilon\mu)$, $\varepsilon$ і $\mu$ — відповідно діелектрична та магнітна проникність вакууму. Останні величини знаходяться експериментально з чисто електромагнітних вимірювань. Після обчислення Максвеллом швидкості поширення електромагнітних хвиль виявилось, що вона з великою точністю збігається із швидкістю світла: $a = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = 299'976$ км/с. Звідси Максвелл зробив висновок, що світло має електромагнітну природу.

Розглянемо диференціальне рівняння (3.9.43), коли $c \neq 0$. Якщо $u(t, x) = f(bt + \langle \xi, x \rangle)$ — плоска хвиля для рівняння (3.9.43), то ми відразу дістаємо для заданих $\xi$ і $b$ рівняння

$$f''(bt + \langle \xi, x \rangle) \left( a^2 \left| \vec{\xi} \right|^2 - b^2 \right) + f(bt + \langle \xi, x \rangle)c = 0. \tag{3.9.53}$$

Отже, в цьому разі функція $f(bt + \langle \xi, x \rangle)$ не може бути довільною — вона повинна бути розв'язком рівняння (3.9.53). Очевидно, що для швидкості $v = a$, тобто для $a^2 \left| \vec{\xi} \right|^2 = b^2$, уже не існує біжучої плоскої хвилі. Але для інших швидкостей і для довільного напряму можливі форми хвиль визначаються із рівняння (3.9.53) і є експоненціальними функціями. У зв'язку з цим напрям руху хвилі і її швидкість, яка відповідає рівнянню (3.9.43), можуть задаватися довільним чином (за винятком $v = a$), але при цьому можливі тільки спеціальні форми плоских хвиль. З фізичних міркувань виключаються із розгляду розв'язки, які не є рівномірно обмеженими функціями в просторі. Беручи до уваги, що

$$\begin{aligned} f(bt + \langle \xi, x \rangle) &= f\left( v \left| \vec{\xi} \right| t - \langle e, x \rangle \left| \vec{\xi} \right| \right) = \\ &= f\left( (vt - \langle e, x \rangle) \left| \vec{\xi} \right| \right) = \\ &= f(vt - \langle e, x \rangle), \end{aligned} \tag{3.9.54}$$

де $g(z) = f\left(z\left|\vec{\xi}\right|\right)$, $\vec{e} = -\vec{\xi}/\left|\vec{\xi}\right|$, $|\vec{e}| = 1$, $z = vt - \langle e, x\rangle$, маємо:

$$g''(z)\left(a^2\left|\vec{\xi}\right|^2 - b^2\right) + g(z)c - 0. \tag{3.9.55}$$

Рівномірно обмежені розв'язки рівняння (3.9.55) можна записати у вигляді $g(z) = e^{-ikz}$, при виконанні рівності

$$-(kv)^2 = -a^2k^2 + c. \tag{3.9.56}$$

Позначимо $\omega = kv$ — частота хвилі.

Таким чином, хвиля довільної форми, що задовольняє рівняння (3.9.43) при виконанні умови (3.9.56) може бути зображена як суперпозиція гармонічних хвиль вигляду:

$$u_k(t,x) = e^{ik(vt-\langle e,x\rangle)}, \tag{3.9.57}$$

З (3.9.56) маємо

$$-\omega^2 = -a^2k^2 + c, \tag{3.9.58}$$

тобто $k = \pm\frac{\sqrt{c+\omega^2}}{a}$ і гармонічні коливання (3.9.57) матимуть фазову швидкість $\omega/k$, яка залежатиме від частоти $\omega$, що дорівнює $v = \frac{\omega}{k} = \frac{a\omega}{\sqrt{c+\omega^2}}$.

Отже,

$$u_k(t,x) = \exp\left\{-\frac{i}{a}\sqrt{c+\omega^2}\left(\frac{a\omega}{\sqrt{c+\omega^2}}t - \langle e,x\rangle\right)\right\}. \tag{3.9.59}$$

Оскільки розв'язок рівняння (3.9.43) — це суперпозиція хвиль вигляду (3.9.59), які поширюються в одному й тому самому напрямі, причому всі ці хвилі мають форму, яка задовольняє рівняння (3.9.53), то різні компоненти поширюються з різними швидкостями; отже, форма складової хвилі $u(x,t)$ змінюватиметься з часом $t$ і хвильовий процес при своєму поширенні буде спотворюватися (хвилі з дисперсією). Кажуть, що якщо фазова швидкість гармонічних хвиль залежить від частоти, то рівняння (3.9.43) описує явище дисперсії.

Очевидно, що якщо рівняння (3.9.43) не допускає розв'язків у вигляді хвиль довільної форми, то має місце дисперсія хвиль.

**Визначення 3.9.4.7.** Доданок $cu(t,x)$ в рівнянні (3.9.43) іноді називають *дисперсійним членом.*

**Приклад 3.9.4.1**

Розглянемо телеграфне рівняння, яке описує електричні коливання в провідниках

$$u_{xx}(t,x) - LCu_{tt} - (RC + LG)u_t(t,x) - RGu(t,x) = 0, \qquad (3.9.60)$$

де $C$ — місткість, $R$ — омічний опір; $L$ — індуктивність; $G$ — втрата ізоляції. Всі ці величини розраховані на одиницю довжини провідника.

*Розв'язок.* Позначимо $b = RC + LG$, $d = RG$, $a^2 = 1/(LG)$ і введемо нову невідому функцію

$$v(t,x) = u(t,x)e^{a^2bt/2}. \qquad (3.9.61)$$

Тоді рівняння (3.9.60) запишеться у вигляді

$$a^2v_{xx}(t,x) - v_{xx}(t,x) + vc(t,x) =, \qquad (3.9.62)$$

де

$$c = \frac{a^2}{4}(a^2b^2 - 4d) = \frac{a^4}{4}\left(b^2 - \frac{4d}{a^2}\right) = \frac{a^4}{4}(RC - LG)^2. \qquad (3.9.63)$$

Отже, на підставі попередніх міркувань при виконанні умови

$$RC = LG, \qquad (3.9.64)$$

тобто $c = 0$ рівняння (3.9.62) буде мати хвилі без дисперсії і в силу (3.9.61), рівняння (3.9.60) має хвилі без дисперсії із згасанням вигляду

$$u(t,x) = e^{-Kt}f(x - at), \quad u(t,x) = e^{-Kt}f(-x - at), \qquad (3.9.65)$$

де $K = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)$.

Коли коефіцієнти рівняння (3.9.60), які характеризують провідник, задовольняють умову (3.9.64), то в провіднику хвилі довільної форми поширюються без спотворення і можуть лише затухати. Але це затухання в пункті прийому хвиль-сигналів завжди можна компенсувати за рахунок їх підсилення, тим самим можна точно відновити сигнали, які передаються по провіднику.

Ця обставина має дуже важливе значення в галузі телефонного зв'язку при передаванні сигналів по кабелях на великі віддалі.

Зауважимо нарешті, що рівняння (3.9.43) при $c = 0$ можуть мати, крім плоских хвиль, хвилі інших форм. Наприклад, якщо $n = 3$, характеристиками для рівняння (3.9.43) будуть також поверхні

$$r - at = \text{const}, \quad -r - at = \text{const}, \tag{3.9.66}$$

де

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{0,i})^2}, \tag{3.9.67}$$

$x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})$ — фіксована точка, а функції $u = \frac{f(r-at)}{4\pi r}$ — хвилі без дисперсії із затуханням для рівняння (3.9.43) при $n = 3$ і $c = 0$.

**Визначення 3.9.4.8.** Ці хвилі називаються сферичними.