Лекція 16

 9. Загальна постановка задачі Коші для хвильового рівняння Плоскі хвилі

Характеристичні поверхні

[1, стор. 71 - 73]

В лекції 14 розглядалися питання класифікації диференціальних рівнянь другого порядку з  незалежними змінними. Важливу роль при визначені типу рівняння і вибору нової системи координат відіграють характеристичні поверхні, які є аналогами характеристичних кривих (характеристик) для випадку рівнянь з двома незалежними змінними.

Нехай функція  є такою що на поверхні  та  (9.1).

Тоді поверхню  називають характеристичною поверхнею або характеристикою квазілінійного рівняння .

При  характеристична поверхня називається характеристичною лінією.

Оскільки , то сімейство характеристик  заповнює область таким чином, що через кожну точку області проходить одна характеристична поверхня.

Враховуючи закон перетворення коефіцієнтів рівняння  при виборі заміни змінних , знання однієї чи декількох характеристичних поверхонь дозволяє спростити рівняння, зокрема, якщо , то .

Для хвильового рівняння  характеристичне рівняння має вигляд . Одним з розв’язків цього диференціального рівняння першого порядку є поверхня .

Поверхня  (9.2) називається характеристичним конусом з вершиною в точці  є характеристичною поверхнею (характеристикою) хвильного рівняння.

Характеристичний конус є границею конусів , які називають конусами майбутнього та минулого відповідно.

Хвильове рівняння має також інше сімейство характеристичних поверхонь

, де  довільні числа такі, що .

Узагальнена задача Коші для рівняння коливання струни

Довільне квазілінійне рівняння гіперболічного типу з двома незалежними змінними


може бути зведене до одного із рівнянь:

 (9.3),

 (9.4).

Коефіцієнти  і права частина  вважаються неперервно диференційовними функціями у відповідних областях.

При постановці задачі Коші для рівняння (9.4) до тепер ми вважали, що носієм початкових умов є пряма .

На прикладі рівняння вільних коливань однорідної струни

 (9.5)
покажемо, що носієм початкових умов може бути крива , яка є відмінною від прямої  причому встановимо, яким умовам повинна задовольняти крива  і який вигляд повинні мати самі початкові умови, щоб одержана задача Коші була поставлена коректно.

Для цього позначимо через  обмежену область фазової площини  з кусково-гладкою жордановою межею . Нехай  розв’язок рівняння (9.5), який має неперервні частинні похідні 1-го порядку в області .

Інтегруючи тотожність (9.5) по області  і використовуючи формулу Гріна

, де криволінійний інтеграл в правій частині береться по контуру в напрямі проти годинникової стрілки, одержуємо
 (9.6).

Нехай  розімкнута крива Жордана з неперервною кривизною, яка задовольняє умовам:

кожна пряма із двох сімей характеристик ,  рівняння (9.5) перетинає криву  не більше, ніж в одній точці;

напрям дотичної до кривої  в жодній точці не збігається з напрямом характеристик рівняння (9.5).

Іноді таку криву  називають вільною.

Припустимо, що характеристики  і , які виходять із точки С, перетинаються із кривою  в точках і  (рис.1).



Рисунок. 1

Застосовуючи формулу (9.4) в області, яка обмежена дугою  кривої  і відрізками характеристик  і , одержуємо

 (9.7).

Оскільки вздовж  і  маємо  відповідно, то (9.5) запишеться у вигляді звідки знаходимо  (9.8).

Якщо розв’язок рівняння (9.3) задовольняє умовам

 (9.9),
де  і  задані дійсні відповідно два рази і один раз неперервно диференційовні функції, а заданий на  достатньо гладкий вектор,що ніде не збігається з дотичною до кривої . Визначимо  і  із рівностей 

де – довжина дуги , і підставляючи відомі значення  в праву частину (9.8), одержуємо розв’язок задачі Коші (9.5), (9.9).

Із наведених міркувань випливає, що постановка задачі Коші (9.3), (9.7) є коректною, тобто вона має в розглядуваній області тільки єдиний розв’язок, і він є стійким.

Аналогічно ставиться задача Коші і у випадку рівняння (9.3).

Для рівняння (9.3) характеристиками будуть прямі, паралельні осям координат ( ). Отже, в цьому випадку всяка гладка крива , яка перетинається не більш, ніж в одній точці з прямими, паралельними осям координат, буде вільною. Нехай рівняння цієї кривої буде  (або ). Вважаємо, що існують похідні , , відмінні від нуля. Тоді задача Коші може бути поставлена наступним чином: в області


знайти розв’язок диференціального рівняння (9.1), який на кривій  задовольняє умови (9.10).

Дані Коші (9.8) дозволяють на кривій  знайти значення похідної 

Дійсно, диференціюючи по ****** першу із умов (9.10), одержуємо

 або 

Узагальнена задача Коші для - вимірного хвильового рівняння

У випадку хвильового рівняння в ****** – вимірному просторі

 (9.11)

носієм початкових умов може бути будь-яка вільна поверхня , тобто гіперповерхня  яка задовольняє умовам:

в жодній її точці  не має місце рівність тобто поверхня  не є характеристичною;

при   (9.12).

Задача Коші ставиться наступним чином: знайти два рази неперервно диференційовний розв’язок рівняння (9.9), який задовольняє умови

 (9.13),

де ****** – заданий на  одиничний вектор нормалі, а  і - задані на  досить гладкі функції. Будемо вважати, що поверхня  задана рівнянням .

Покажемо, що задачу Коші (9.11), (9.13) можна звести до задачі Коші з початковими умовами заданими на поверхні .

Замість змінної  введемо змінну . Для такої заміни змінних отримаємо хвильове рівняння для функції .

Підрахуємо похідні, що входять в хвильове рівняння (9.11):


Таким чином хвильове рівняння буде мати вигляд:

 (9.14),
де .

Остання нерівність випливає з того, що  задана рівнянням  не є характеристичною поверхнею.

При обраній заміні змінних поверхня  переходить в площину .

А умови (9.13) приймають вигляд
 (9.15).

Залишається знайти . Для цього диференціюємо першу з умов (9.15). Врахуємо, що  (9.16)

Нормаль до поверхні  можна записати у вигляді . Диференціюємо  по нормалі і використаємо другу умову (9.11).

 (9.17).

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (9.16), (9.17) має єдиний розв’язок відносно невідомих величин  на будь – який поверхні , оскільки її визначник  (9.18).

Таким чином задача Коші з даними на вільній поверхні  є коректною.

Відзначимо, що умова вільності поверхні  є принциповою для коректної постановки задачі Коші. Для хвильового рівняння

 (9.19)
площина  не є вільною (не виконується умова (9.12)), ні характеристичною поверхнею. Функція де – натуральне число, є розв’язком рівняння (9.11), який задовольняє умови

 (9.20).

Але задача Коші (9.13), (9.14) поставлена некоректно, тому що

а сам розв’язок  при  є необмеженим.

Плоскі хвилі. Дисперсія хвиль

Розглянемо однорідне хвильове рівняння зі сталими коефіцієнтами

 (9.21).

Покладемо . Розв’язки рівняння (6.1) шукатимемо у вигляді

 (9.22),

де .

При різних значеннях  функція  відрізняється від  зсувом на вектор , дійсно

****.

Розв’язок вигляду (9.22) прийнято називати *плоскою хвилею,* яка рухається вздовж напряму вектора  зі швидкістю .

Вираз  називається *фазою хвилі* (9.22), а – *формою хвилі.* Якщо , то хвиля (9.22) називається *стоячою*.

Знайдемо умови, яким повинні задовольняти  і вектор , щоб функція (9.22) була розв’язком рівняння (6.1) при . Підставимо (9.22) в (9.21). Отримаємо: .

Вважаючи, що ≢, маємо . (9.23).

Розв'язками цього рівняння є вектори , які лежать на конусі  в , основою якого є сфера .

**Означення 1.** Вектор , якийзадовольняє рівняння (9.23), називається характеристичною нормаллю хвильового рівняння (9.21). Гіперплощина називається характеристичною гіперплощиною хвильового рівняння (9.21).

Ця площина перпендикулярна до характеристичної нормалі *.*

**Означення 2** Гіперповерхня в  називається характеристичною, якщо в кожній точці її дотична гіперплощина є характеристичною.

Характеристичне рівняння (9.23) свідчить, що швидкість поширення всіх плоских хвиль, які задовольняють рівняння (9.21), дорівнює :

. (9.24).

Справедливе й обернене твердження. Для довільного , який задовольняє (9.23), плоска хвиля (9.24) є розв’язком рівняння (9.21) при довільній функції .

В окремому випадку  може бути й розривною (або функцією, яка швидко змінюється) в деякій точці, наприклад при  Тоді розв’язок (9.22) буде мати той самий розрив уздовж всієї гіперплощини в :

. (9.25).

При фіксованому  цей розрив розміщений на площині в  з рівнянням (9.25). Ця площина рухається із зростанням  у напрямі перпендикулярного їй вектора , зі швидкістю .

Звідси можна зробити висновок:

1) довільна характеристична гіперплощина може бути поверхнеюрозриву розв’язку рівняння (9.21) при ;

2) усі плоскі хвилі й розриви цих хвиль, які задовольняють рівняння (9.21) при , поширюються зі швидкістю  у напрямі вектора  без спотворення (хвиля без дисперсії[[1]](#footnote-1)).

Зазначимо, що з формулою (9.24) пов’язане відкриття електромагнітної природи світла і спеціальної теорії відносності. Так, із рівнянь електродинаміки Максвелл вивів, що потенціали електромагнітного поля задовольняють хвильове рівняння  де ,  і  – відповідно діелектрична та магнітна проникність вакууму. Останні величини знаходяться експериментально з чисто електромагнітних вимірювань. Після обчислення Максвеллом швидкості поширення електромагнітних хвиль виявилось, що вона з великою точністю збігається із швидкістю світла:  км/с. Звідси Максвелл зробив висновок, що світло має електромагнітну природу.

Розглянемо диференціальне рівняння (9.21), коли . Якщо  – плоска хвиля для рівняння (9.21), то ми відразу дістаємо для заданих  і  рівняння

. (9.26).

Отже, в цьому разі функція  не може бути довільною – вона повинна бути розв’язком рівняння (9.26). Очевидно, що для швидкості , тобто для , уже не існує біжучої плоскої хвилі. Але для інших швидкостей і для довільного напряму можливі форми хвиль визначаються із рівняння (9.26) і є експоненціальними функціями. У зв’язку з цим напрям руху хвилі і її швидкість, яка відповідає рівнянню (9.21), можуть задаватися довільним чином (за винятком ), але при цьому можливі тільки спеціальні форми плоских хвиль. З фізичних міркувань виключаються із розгляду розв’язки, які не є рівномірно обмеженими функціями в просторі. Беручи до уваги, що



де , маємо:

 (9.26’).

Рівномірно обмежені розв’язки рівняння (9.26’) можна записати у вигляді , при виконанні рівності . (9.27).

Позначимо  - частота хвилі.

Таким чином, хвиля довільної форми, що задовольняє рівняння (9.21) при виконанні умови (9.27) може бути зображена як суперпозиція гармонічних хвиль вигляду: , (9.28)
З (9.27) маємо ,

Тобто  і гармонічні коливання (9.28) матимуть фазову швидкість , яка залежатиме від частоти , що дорівнює .

Отже, . (9.29).

Оскільки розв’язок рівняння (9.21) – це суперпозиція хвиль вигляду (9.29), які поширюються в одному й тому самому напрямі, причому всі ці хвилі мають форму, яка задовольняє рівняння (9.26), то різні компоненти поширюються з різними швидкостями; отже, форма складової хвилі  змінюватиметься з часом  і хвильовий процес при своєму поширенні буде спотворюватися (хвилі з дисперсією). Кажуть, що якщо фазова швидкість гармонічних хвиль залежить від частоти, то рівняння (9.21) описує явище дисперсії.

Очевидно, що якщо рівняння (9.21) не допускає розв’язків у вигляді хвиль довільної форми, то має місце дисперсія хвиль. Доданок  в рівнянні (9.21) іноді називають *дисперсійним членом.*

Для прикладу розглянемо телеграфне рівняння, яке описує електричні коливання в провідниках

 (9.30),

де  – місткість,  – омічний опір; * –* індуктивність;  –втрата ізоляції. Всі ці величини розраховані на одиницю довжини провідника Позначимо  і введемо нову невідому функцію

. (9.31).

Тоді рівняння (6.10) запишеться у вигляді

, (9.32),

де .

Отже, на підставі попередніх міркувань при виконанні умови

 (9.33), тобто  рівняння (9.32) буде мати хвилі без дисперсії і в силу (9.31), рівняння (9.30) має хвилі без дисперсії із згасанням вигляду

, де .

Коли коефіцієнти рівняння (9.30), які характеризують провідник, задовольняють умову (9.33). то в провіднику хвилі довільної форми поширюються без спотворення і можуть лише затухати. Але це затухання в пункті прийому хвиль - сигналів завжди можна компенсувати за рахунок їх підсилення, тим самим можна точно відновити сигнали, які передаються по провіднику.

Ця обставина має дуже важливе значення в галузі телефонного зв’язку при передаванні сигналів по кабелях на великі віддалі.

Зауважимо нарешті, що рівняння (9.21) при  можуть мати, крім плоских хвиль, хвилі інших форм. Наприклад, якщо , характеристиками для рівняння (9.21) будуть також поверхні

, де  – фіксована точка, а функції  – хвилі без дисперсії із затуханням для рівняння (6.1) при  і . Ці хвилі називаються *сферичними*.

1. [↑](#footnote-ref-1)