Лекція 6

Властивості власних чисел задачі Штурма – Ліувіля

[1, стор. 341 - 343]

Таким чином, теоремою 2 установлена еквівалентність задачі Штурма - Ліувіля (5.16) і задачі на власні значення для однорідного інтегрального рівняння (5.14’) з ермітовим неперервним ядром . При цьому власні значення  задачі (5.16) пов’язані з характеристичними числами  ядра  співвідношенням , а відповідні їм власні функції співпадають. Тому для задачі Штурма - Ліувіля справедливі всі положення теорії інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром.

А саме:

множина власних чисел  не порожня та немає скінчених граничних точок;

всі власні числа  дійсні та мають скінчену кратність;

власні функції 

всі  0;

Останнє твердження випливає з додатної визначеності диференціального оператора Штурма – Ліувілля з відповідними граничними умовами, для цього оператора *всі власні функції, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.*

множина власних чисел злічена (не може бути скінчена);

Дійсно, якщо б множина була скінченою , то для ядра  було вірним представлення: .

Але **,** і тому таке представлення суперечить властивості функції Гріна  про наявність розриву першої похідної. Ця суперечність і доводить твердження.

кожне власне число має одиничну кратність;

Справді, нехай  та  – власні функції, які відповідають власному значенню . З граничної умови запишемо:

  - розглядатиме ці співвідношення як систему лінійних рівнянь відносно . Визначник системи співпадає за величиною з визначником Вронського  = -w(0)  0, враховуючи лінійну незалежність власних функцій. Звідси випливає, що розв’язок лінійної системи тривіальний, тобто , що суперечить припущенню .

Тому ці розв’язки лінійно залежні. Це і означає, що  має одиничну кратність, тобто просте.

**Теорема 2** (*Стеклова про розвинення в ряд Фур’є*) Будь – яка  розкладається в ряд Фур’є за системою власних функцій задачі Штурма –Ліувіля  (5.18) І цей ряд збігається абсолютно і рівномірно.

**Доведення:** Покажемо, що ****** – джерелувато зображувана.



Функція  є розв’язком цієї граничної задачі, причому,  не є власним значенням оператора . Позначимо через  функцію Гріна оператора . Тоді має місце представлення , - джерелувато зображувана. За теоремою Гілберта - Шмідта функція  розкладається в регулярно збіжний ряд Фур’є по власним функціям ядра . Але власні функції ядра  співпадають з власними функціями  оператора .

Задача Штурма - Ліувіля з ваговим множником

[4, стор. 60 - 67]

**** (5.19), , - *ваговий множник.*

З теореми 2 випливає представлення .

Інтегральне рівняння має неперервне, але не симетричне ядра, для його симетризації домножимо рівняння на  і отримаємо = (5.20).

Позначимо , , отримаємо інтегральне рівняння з ермітовим неперервним ядром:

 (5.21).

Власні функції задачі Штурма – Ліувіля (5.19) пов’язані з власними функціями інтегрального рівняння (5.21) співвідношенням  
 (5.22).

Має місце співвідношення  - ваговий скалярний добуток.

Таким чином система власних функцій задачі Штурма – Ліувілля з ваговим множником (5.19) є ортонормованою у ваговому скалярному добутку .

§6 Інтегральні рівняння першого роду.

[3, стор. 122 - 127]

Будемо розглядати інтегральне рівняння Фредгольма першого роду  (6.1).

Неважко перевірити, що розв’язок інтегрального рівняння (6.1) може існувати не для будь – якої неперервної функції . Дійсно, нехай наприклад , а , тоді для будь – якої неперервної , . Це означає, що такий самий вигляд повинна мати і функція 

Ядра Шмідта

Будемо розглядати неперервне ядро  і спряжене до нього , яке задовольняє нерівності . Відповідні інтегральні оператори Фредгольма позначимо через . Введемо інтегральні оператори  та , які є симетричними і додатними. Цим операторам відповідають ядра

  (6.2),

які називаються ядрами Шмідта.

Можна довести, що характеристичні числа ядер Шмідта  співпадають, позначимо їх через . Позначимо через  ортонормовані власні функції ядра  та  відповідно.

Легко бачити, що ,  (6.3).

Дійсно: , тоді  звідси випливає, що . Оберемо константу з умови ортонормованості:

, звідси . І перша рівність (6.3) доведена.

Виходячи з теореми Мерсера про регулярну збіжність білінійного ряду для неперервних ядер зі скінченою кількістю від’ємних характеристичних чисел, для ядер Шмідта має місце відоме розвинення :

  (6.4).

Ряди (6.4) для неперервних ядер збігається абсолютно і рівномірно, а для ядер, які належать  в середньому квадратичному.

Покажемо, що для ядра має місце білінійне розвинення за формулою:

  (6.5).

Дійсно, написане розвинення (6.5) представляє собою ряд Фур’є ядра по ортонормованой системі функцій , або  (дивись 6.3) і збігається в середньому по кожній змінній . Тобто



. При доведенні цього представлення було використане друге співвідношення (6.3).

Інтегральні рівняння першого роду з симетричним ядром

Нехай **** симетричне ядро, а характеристичні числа та ортонормована система власних функцій цього ядра.

**Означення** Будемо називати симетричне ядро повним, якщо система його власних функцій є повною.

Якщо ядро не є повним, то інтегральне рівняння  має розв’язок відмінний від нуля. Інтегральне рівняння з симетричним повним ядром може мати лише єдиний розв’язок.

Будемо шукати розв’язок інтегрального рівняння першого роду (6.1) у вигляді  (6.6), де  невідомі константи. Вільний член рівняння представимо у вигляді ряду Фур’є по системі власних функцій ядра в результаті чого будемо мати рівність:

 (6.7), або після спрощення . Враховуючи лінійну незалежність власних функцій  отримаємо співвідношення  (6.8)

**Теорема 1** *(Пікара* *про існування розв’язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з ермітовим ядром)* Нехай  повне ермітове ядро, . Тоді для існування розв’язку рівняння (6.1) необхідно і достатньо щоб збігався ряд   
 (6.9).

**Доведення:** *Необхідність:* Нехай існує розв’язок  з  рівняння (6.1). Нехай  - коефіцієнти Фур’є розв’язку по системі власних функцій . Виходячи з (6.6) маємо, що ряд (6.9) збігається.

*Достатність:* Нехай ряд (6.9) збігається. Тоді існує єдина функція  з коефіцієнтами Фур’є . Вона має вигляд  і задовольняє інтегральному рівнянню (6.1).

Несиметричні ядра.

Розглянемо рівняння з несиметричним ядром (6.1). Для представлення ядра скористаємось формулою (6.5), а для представлення вільного члена  застосуємо розвинення цієї функції в ряд Фур’є по системі власних функцій ядра , . В результаті будемо мати:

 (6.10).

Ліву чистину можна записати у вигляді:   
. (6.11).

З останньої рівності можна записати співвідношення для коефіцієнтів Фур’є розв’язку:  (6.12).

Таким чином, для існування розв’язку інтегрального рівняння (6.1) з несиметричним ядром необхідно і достатньо щоби вільний член  можна було розкласти в ряд Фур’є по системі власних функцій  ядра Шмідта , а числовий ряд   
 (6.13) збігався.

**Приклад** Звести задачу Штурма – Ліувілля до інтегрального рівняння з ермітовим неперервним ядром:



**Розв’язок** Побудуємо функцію Гріна оператора . Розглянемо задачі Коші:



Загальний розв’язок диференціального рівняння  має вигляд . Тоді розв’язок першої задачі Коші

Розв’язки останніх можна записати у вигляді:

 

Обчислимо визначник Вронського 

Перевіримо тотожність Ліувілля . Запишемо функцію Гріна за формулою:



Запишемо інтегральне рівняння .

Симетризуємо ядро інтегрального рівняння, помножимо обидві частини на .

. Введемо позначення: .

Отримаємо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром: 