Лекція 5

Додатньо визначені ядра.

[1, стор. 317 - 318], [1, стор. 325 - 327], [4, стор. 52 - 54]

**Означення** Неперервне ядро  називається додатньо визначеним, якщо  . Причому   

Довільне додатньо визначене ядро є ермітовим (його білінійна форма  приймає дійсні значення).

**Лема 1** Для того, щоб неперервне ядро було додатньо визначеним необхідно і достатньо, щоб його характеристичні числа були додатні.

**Доведення:** Необхідність: Для довільної власної функції  .

Достатність: Розглянемо  як джерелувато-зображувану функцію, згідно до теореми Гілберта – Шмідта , тоді  Отже квадратична форма додатньо визначена.

Таким чином додатність характеристичних чисел є критерієм додатної визначеності ядра.

**Лема 2** Довільне додатньо визначене неперервне ядро має характеристичні числа і для них має місце варіаційний принцип:
,  (4.16),  - ортонормована система власних функцій.

**Доведення:** З теореми Гілберта Шмідта функціонал (4.16) можна оцінити  (перша нерівність виконується оскільки  – найменше характеристичне число в сумі, а друга випливає з нерівності Бесселя) З іншого боку при  маємо . Тобто існує функція на якій досягається верхня межа цієї нерівності.

**Теорема 1** *(Мерсера, Про регулярну збіжність білінійного ряду для ермітових ядер зі скінченою кількістю від’ємних характеристичних чисел)* Якщо ермітове неперервне ядро  має лише скінчену кількість від’ємних характеристичних чисел, то його білінійний ряд  (4.17) збігається в  абсолютно і рівномірно.

**Доведення:** Покажемо, що якщо ядро  - додатньо визначене, то . Оскільки  - ермітове, то  і є дійсною функцією. Якщо існує хоча б одна точка, що , то виходячи з неперервності знайдеться і деякій окіл цієї точки , що . Оберемо невід’ємну неперервну функцію , яка відміна від нуля лише в  і отримаємо

 Остання нерівність вступає в протиріччя з припущенням додотньої визначеності ядра.

Теорему достатньо довести для додатньо визначених ядер.

Розглянемо ядро , де  - номер останнього від’ємного характеристичного числа, так що усі є додатніми. Таким чином ядро  є неперервним та додатньо визначеним. А це означає, що . Таким чином маємо нерівність:  (4.18).

Розглянемо білінійний ряд  і доведемо його абсолютну і рівномірну збіжність за критерієм Коші. Використовуючи нерівність Коші – Буняківського маємо:

 (4.19).

Але оскільки має місце (4.18), яка гарантує рівномірну збіжність ряду , то білінійний ряд (4.17) збігається абсолютно і рівномірно (регулярно) в .

**Зауваження 1** Теорема Гілберта - Шмідта і її наслідки, встановлені для ермітового неперервного ядра, залишаються вірними і для ермітового слабо полярного ядра.

**Зауваження 2** Теорема Гілберта - Шмідта і формула Шмідта у випадку полярного ядра залишаються вірними, але з заміною рівномірної збіжності на середньоквадратичну.

§5. Задача Штурма - Ліувіля. Теорема Стеклова.

[1, стор. 336 - 344], [4, стор. 60 - 67]

Постановка задачі Штурма - Ліувілля:

Нехай  – диференціальний оператор другого порядку: ,  (5.1),

 (5.2),

 (5.3),

, , , , ,

,  (5.4),

 (5.5), область визначення оператора .

***Означення*** Знайти розв’язки задачі Штурма - Ліувіляозначає знайти всі ті значення параметра , при яких гранична задача (5.1) – (5.4) має нетривіальний розв’язок. Ці значення називаються *власними значеннями* задачі Штурма-Ліувіля, а самі розв’язки – *власними функціями*.

Функція Гріна оператора *L*

Будемо припускати, що  не є власним числом оператора  задачі Штурма – Ліувіля.

Розглянемо граничну задачу:

 (5.6).

Припустимо що .

З припущення, що  не є власним числом випливає, що задача (5.6) має єдиний розв’язок.

Розглянемо функції  - ненульові дійсні розв’язки однорідних задач Коші:  (5.7)

З загальної теорії задач Коші випливає, що розв’язки цих задач Коші існують, тому  – двічі неперервно диференційовані функції. Покажемо що ,  – лінійно незалежні.

Припустимо що це не так і , тобто  задовольняє одночасно граничним умовам на лівому і правому краях. Тоді  – власна функція оператора , і відповідає власному числу , що суперечить припущенню, тому ,  – лінійно незалежні. В цьому випадку визначник Вронського 

Будемо шукати розв’язок задачі (5.6) методом варіації довільної сталої у вигляді: 

Підставимо в рівняння: 

Накладемо першу умову на коефіцієнти: , маємо:



 Або , оскільки , , то , отже .

Таким чином  та  повинні задовольняти системі лінійних диференціальних рівнянь:

, визначник системи .

Має місце рівність Ліувілля: .

Розв’язавши систему рівнянь, отримаємо:

 (5.8)

Знайдемо додаткові умови для диференціальних рівнянь (5.8).



 враховуючи, що  маємо



Оскільки перший доданок дорівнює нулю, то остання рівність виконується коли , аналогічно отримаємо, що .

Проінтегруємо (5.8) отримаємо:

 (5.9)

Розв’язок граничної задачі (5.6) буде мати вигляд:

 (5.10)

Визначимо функцію Гріна:

 (5.11)

Отже розв’язок граничної задачі (5.6) можна записати у вигляді:

 (5.12),

 (дивись (5.11)) називається ф*ункцією Гріна* оператора Штурма – Ліувіля. Попередні міркування доводять наступну лему.

**Лема 3** Якщо  не є власним числом задачі Штурма - Ліувіля (5.1) – (5.4), то розв’язок граничної задачі (5.6) існує та єдиний і представляється за формулою (5.12) через функцію Гріна (5.11).

Властивості функції Гріна

1. , , .

2. Симетричність:  .

3. На діагоналі  має місце розрив першої похідної:

, .

4. Поза діагоналлю  функція Гріна задовольняє однорідному диференціальному рівнянню .

5. На бічних сторонах квадрату  функція Гріна  задовольняє граничним умовам .

6. Функція  є розв’язком неоднорідного рівняння: , де- *дельта-функція Дірака.*

Зведення граничної задачі з оператором Штурма - Ліувілля до інтегрального рівняння

Розглянемо граничну задачу з параметром  (5.13)
і покажемо що вона зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з дійсним, симетричним та неперервним ядром .

**Теорема 2** *(Про еквівалентність граничної задачі для рівняння другого порядку інтегральному рівнянню з ермітовим ядром)* Гранична задача (5.13) при умові, що  не є власним числом оператора , еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду:

,  (5.14),

де  – функція Гріна оператора .

**Доведення:** Необхідність Нехай виконується (5.13), тоді з леми 3 із заміною правої частини  розв’язок (5.13) можемо представити у вигляді:

, тобто  задовольняє інтегральному рівнянню (5.14).

Достатність. Нехай має місце рівність (5.14) і  її розв’язок. Розглянемо граничну задачу: 

За лемою 3, єдиний розв’язок цієї задачі задається формулою , звідки випливає, що  задовольняє рівнянню , таким чином тобто  є розв’язком крайової задачі (5.13).

У випадку коли , гранична задача (5.13) перетворюється в задачу Штурма–Ліувіля  (5.13/).

Задача Штурма - Ліувіля еквівалентна задачі про знаходження характеристичних чисел та власних функцій для однорідного інтегрального рівняння Фредгольма
 (5.14/) при умові, що  не є власним числом оператора .

Покажемо як позбавитись цього припущення. Нехай маємо задачу Штурма – Ліувілля:

 (5.15).

Легко бачити, що , тобто власні числа невід’ємні.

Розглянемо граничну задачу:

 (5.16).

Задача (5.16) с точністю до позначень співпадає з задачею Штурма – Ліувіля (5.1) – (5.3) Очевидно, що = 0 не є власним числом задачі Штурма - Ліувіля (5.16) (бо тоді **** = -1 могло би бути власним числом задачі Штурма – Ліувілля (5.1) – (5.4)). Введемо диференціальний оператор 

Отже, задача (5.16) еквівалентна задачі (5.15) при , та еквівалентна інтегральному рівнянню  (5.17),
де  – функція Гріна оператора .

Таким чином, ввівши оператор  і відповідну йому функцію Гріна , можна позбутися припущення, що  не є власним числом задачі Штурма – Ліувілля.

**Приклад** Знайти розв’язок інтегрального рівняння

**** де 

**Розв’язання:** Розв’язок будемо шукати за формулою Шмідта. Знайдемо характеристичні числа та власні функції ермітового ядра. Запишемо однорідне рівняння



Продиференціюємо рівняння:

.

Обчислимо другу похідну:

 Або після спрощення

. Доповнимо диференціальне рівняння другого порядку граничними умовами вигляду (5.2), (5.3)

Легко бачити що 

Аналогічно 

Таким чином отримаємо задачу Штурма - Ліувілля:



Для знаходження власних чисел і власних функцій розглянемо можливі значення параметру .

1. , .

Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь  Визначник цієї системи повинен дорівнювати нулю.

. Єдиним розв’язком цього рівняння є , яке не задовольняє, бо . Це означає, що система рівнянь має тривіальний розв’язок і будь – яке  не є власним числом.

2.  , . З граничних умов маємо, що . Тобто  не є власним числом.

3.  , 

Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

 Визначник цієї системи прирівняємо до нуля . Це рівняння має зліченну множину розв’язків . Система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв’язок .

Таким чином нормовані власні функції задачі Штурма – Ліувілля мають вигляд .

Порахуємо коефіцієнти Фур’є .

Згідно до формули Шмідта розв’язок рівняння при має вигляд: .

При  розв’язок не існує, оскільки не виконана умова ортогональності вільного члена до власної функції.