Il libro della natura é scritto in lingua matematica
Galileo Galilei

Что такое математическая физика?

В. С. Владимиров

Математическая физика – это теория математических моделей физических явлений. Она относится к математическим наукам; критерий истины в ней – математическое доказательство. Однако, в отличие от чисто математических наук, в МФ исследуются физические задачи на математическом уровне, а результаты представляются в виде теорем, графиков, таблиц и т.д. и получают физическую интерпретацию. При таком широком понимании математической физики к ней следует относить и такие разделы механики, как теоретическая механика, гидродинамика и теория упругости.

Первоначально математическая физика сводилась к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Это направление составляет предмет *классической математической физики*, которая сохраняет важное значение и в настоящее время.

Классическая математическая физика развивалась со времён Ньютона параллельно с развитием физики и математики. В конце XVII в. было открыто дифференциальное и интегральное исчисление (И. Ньютон, Г. Лейбниц) и сформулированы основные законы классической механики и закон всемирного тяготения (И. Ньютон). В XVIII в. методы математической физики начали формироваться при изучении колебаний струн, стержней, маятников, а также задач, связанных с акустикой и гидродинамикой; закладываются основы аналитической механики (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Лагранж, К. Гаусс, П. Лаплас). В XIX в. методы математической физики получили новое развитие в связи с задачами теплопроводности, диффузии, теории упругости, оптики, электродинамики, нелинейными волновыми процессами и т.д.; создаются теория потенциала, теория устойчивости движения (Ж. Фурье, С. Пуассон, Л. Больцман, О. Коши, М. В. Остроградский, П. Дирихле, Дж. К. Максвелл, Б. Риман, С. В. Ковалевская, Д. Стокс, Г. Р. Кирхгоф, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Д. Гильберт, Ж. Адамар). В XX в. возникают новые задачи газовой динамики, теории переноса частиц и физики плазмы.

Среди многочисленных задач классической математической физики рассматриваются следующие три типа простейших дифференциальных уравнений – уравнений математической физики.

- *Уравнение Пуассона* (при $f = 0$ – *уравнение Лапласа*)

$$-\Delta u = f, \quad u = u(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G \subset R^n, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\,.$$

- *Уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad u = u(x,t), \quad x \in G \subset R^n, \quad t > 0. \tag{2}$$

- *Волнового уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f, \quad u = u(x,t), \quad x \in G \subset R^n, \quad t > 0. \tag{3}$$

В уравнениях (2) и (3) t обозначает время. Уравнения (2) и (3), не зависящие от времени t, называются *стационарными*. Стационарные уравнения (2) и (3) сводятся к уравнению Пуассона (1).

Дифференциальные уравнения дополняются соответствующими *краевыми условиями*. Примерами краевых условий могут быть следующие.

Для уравнения (1) – *граничные условия*

$$u|_{x \in S} = v(x) \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x \in S} = v_1(x), \tag{4}$$

где S – граница области G и $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к S, определяют *задачу Дирихле* или *задачу Неймана* соответственно (рис. 1).

Для уравнения (2) – *начальное условие*

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in R^n. \tag{5}$$

определяет *задачу Коши*.

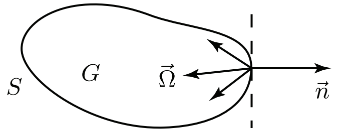

Рис. 1

Для уравнения (3) – *начальные условия*

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in R^n, \tag{6}$$

определяют *задачу Коши.*

Для уравнений (2) и (3) ставятся также *смешанные задачи*, которые содержат как граничные условия типа (4), так и начальные условия (5) или (6). Начальные и граничные условия составляют краевые условия (рис. 2).

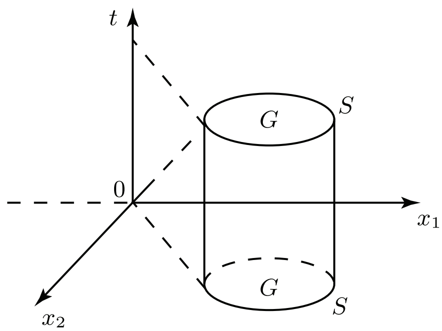

Рис. 2

Следует отметить, что при исследовании краевых задач Дирихле или Неймана весьма полезным является следующее неравенство: если область G ограничена, её граница S есть кусочно гладкая поверхность, а функция f один раз непрерывно дифференцируема в замыкании $\overline{G}$ и удовлетворяет одному из условий a) $\int_G f\,dx = 0$ или b) $f|_{x \in S} = 0$, то

$$\int_G f^2(x)\,dx \leqslant C(G) \int_G \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \right] dx.$$

Это неравенство приписывается К. Фридрихсу, хотя при $n = 3$ в случае a) оно было впервые доказано А. Пуанкаре (1894 г.), а в случае b) – В. А. Стекловым (1896 г.). Им же были указаны точные постоянные: $C(G) = 1/\lambda_0$, где λ_0 – наименьшее собственное значение задачи Неймана в случае a) и задачи Дирихле в случае b). Правильнее было бы назвать это неравенство *неравенством Пуанкаре–Стеклова.* В случае $n = 1$ неравенство принимает вид

$$\int_0^l f^2(x)\,dx \leqslant \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \int_0^l f'^2(x)\,dx.$$

По поводу ссылок см. брошюру [17].

С развитием квантовой механики и ядерной энергетики появились новые типы уравнений и краевых задач математической физики.

• *Уравнение Шрёдингера* для волновой функции $\psi(x,t)$,

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi, \tag{7}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$, где $\hbar$ – постоянная Планка. Ставится задача Коши.

Для стационарного уравнения Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi = 0 \tag{8}$$

граничным условием может быть, например, такое:

$$\psi \in L_2(R^3), \tag{9}$$

отражающее поведение решения на бесконечности.

• Для *уравнения Гельмгольца*

$$\Delta\psi + k^2\psi = -f(x)$$

ставятся граничные условия на бесконечности вида

$$\psi(x) = e^{ik(a,x)} + v(x), \qquad |a| = 1, \quad |x| \to \infty,$$

где функция $v(x)$ удовлетворяет *условиям излучения Зоммерфельда*

$$v(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - ikv(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty. \tag{10}$$

Здесь $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ – евклидова длина вектора $\vec{x}$, $(a, x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ – скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{a}$, $a = (a_1, a_2, a_3)$.

• Односкоростное *уравнение переноса частиц* для изотропного рассеяния

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\Omega, \operatorname{grad}\psi) + \alpha\psi = \frac{\beta}{4\pi}\int_{|\Omega'|=1}\psi(x, \Omega', t)\,d\Omega' + F, \tag{11}$$

где $\psi(x, \Omega, t)$ – плотность частиц, летящих со скоростью v в направлении $\vec{\Omega}$, $|\Omega| = 1$, в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t. Ставится задача Коши.

Для стационарного уравнения переноса частиц

$$(\Omega, \operatorname{grad}\psi) + \alpha(x)\psi = \frac{\beta(x)}{4\pi}\int_{|\Omega'|=1}\psi(x, \Omega')\,d\Omega' + F(x, \Omega) \tag{12}$$

граничное условие для выпуклой области может быть такое (см. рис. 1):

$$\psi|_{x\in S} = 0 \quad \text{при} \quad (\Omega, n) < 0, \tag{13}$$

которое выражает отсутствие падающего потока частиц.

Отметим, что краевая задача (12)–(13) эквивалентна интегральному уравнению Пайерлса

$$n(x) = \frac{1}{4\pi}\int_G \frac{\exp\left\{-\int_0^1 \alpha[tx + (1-t)y]\,dt\right\}}{|x-y|^2} \times \left[\beta(y)n(y) + F\left(y, \frac{x-y}{|x-y|}\right)\right]dy$$

для средней плотности

$$n(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\Omega'|=1}\psi(x, \Omega')\,d\Omega'.$$

Основными математическими средствами исследования задач классической математической физики служат теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория функций и функциональный анализ, вариационное исчисление, теория вероятностей, приближённые методы и вычислительная математика.

Среди задач математической физики выделяется важный класс *корректно поставленных задач* по Адамару, т.е. задач, для которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи. Хотя эти требования на первый взгляд кажутся совершенно естественными, их, тем не менее, необходимо доказывать в рамках принятой математической модели. Доказательство корректности – это первая апробация математической модели: модель непротиворечива (решение существует), модель однозначно описывает физический процесс (решение единственно), модель малочувствительна к погрешностям измерений физических величин (решение непрерывно зависит от данных задачи). Например, перечисленные выше краевые задачи корректно поставлены.

В XX в. появляются новые разделы физики: квантовая механика, квантовая теория поля, квантовая статистическая физика, теория относительности, гравитация (А. Пуанкаре, Д. Гильберт, П. Дирак, А. Эйнштейн, Н. Н. Боголюбов, В. А. Фок, Э. Шрёдингер, Г. Вейль, Р. Фейнман, Дж. фон Нейман, В. Гейзенберг). Для изучения этих явлений множество используемых математических средств значительно расширяется: наряду с традиционными областями математики стали широко применяться теория операторов, теория обобщённых функций, теория функций многих комплексных переменных, топологические и алгебраические методы, теория чисел, p-адический анализ, асимптотические и вычислительные методы. С появлением ЭВМ существенно расширился класс математических моделей, допускающих детальный анализ; появилась реальная возможность ставить вычислительные эксперименты, например моделировать взрыв атомной бомбы или работу атомного реактора в реальном масштабе времени. В этом интенсивном взаимодействии современной теоретической физики и современной математики оформилась новая область – *современная математическая физика.* Её модели не всегда сводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений, они часто формулируется в виде системы аксиом.[1]

Эту тенденцию в развитие ТФ XX в. хорошо понимал П. Дирак. Ещё в 1930 г. он в своей известной статье, в которой теоретически предсказал существование позитрона, писал:

“Кажется вероятным, что этот процесс непрерывного

[1]В математике, особенно в геометрии и теории множеств, аксиоматический метод давно был известен. Как всякая система аксиом, она должна удовлетворять требованиям непротиворечивости, независимости, реализуемости и полноты.

> абстрагирования будет продолжаться и в будущем и что успех физики должен в большей степени опираться на непрерывные модификации и обобщения аксиом на математической основе."

Последующее развитие теоретической физики полностью подтвердило это провидческое высказывание Дирака.

Ярким примером создания и применения аксиоматического метода в теоретической физике явилась аксиоматизация квантовой теории поля, впервые предпринятая Н. Н. Боголюбовым в 50-е годы. Важной проблемой тогда была проблема ультрафиолетовых расходимостей при использовании гамильтонова формализма. Боголюбов предложил новый подход к этой проблеме. Прежде всего он отказался от гамильтонова формализма и принял за основу теории матрицу рассеяния, введённую Гейзенбергом. Боголюбов существенно расширил множество допустимых математических объектов – элементы матрицы рассеяния предполагались из класса операторнозначных обобщённых функций. При этом требовалось, чтобы матрица рассеяния удовлетворяла основным физическим постулатам (аксиомам): *релятивистской ковариантности*, *унитарности*, *причинности*, *спектральности.*

Н. Н. Боголюбов рассматривал математику не только как средство для вычислений, но и как метод получения нового знания из нескольких очевидных положений (аксиом) с помощью математики, как говорят "на кончике пера" (вспомним вычисления Адамса и Леверье орбиты планеты Нептун, открытие новой частицы с помощью теории групп, вывод дисперсионных соотношений в квантовой теории поля, допускающих экспериментальную проверку). Предложенная Н. Н. Боголюбовым система аксиом квантовой теории поля фактически делает первые шаги к решению VI проблемы Д. Гильберта: "Аксиоматизировать те физические науки, в которых важную роль играет математика".

Органическое слияние математики и физики в творчестве Н. Н. Боголюбова позволило ему фактически заложить основы современной математической физики. Уже в 1963 году он имел полное основание опубликовать такое утверждение: "Основные понятия и методы квантовой теории поля становятся всё более математическими". Еще более определённо он оценил тенденции в современной теоретической и математической физике в программном выступлении на открытии Международного совещания по проблемам квантовой теории поля (Алушта, 1981 г.):

> “У нас на глазах за последние годы оформилась совершенно новая область науки, которую уместнее всего назвать современной математической физикой. Она имеет то же генетическое происхождение, что и классическая математическая физика ... Физики успели убедиться, что для получения разумных ответов на свои вопросы они должны глубже понять математическую природу объектов исследования, таких как обобщённые функции или неограниченные операторы, повысить принятый стандарт доказательной силы аргументации. В дальнейшем, для того чтобы освободиться от чрезмерной и иногда бессмысленной детализации, стали изыскивать аксиоматические пути построения теории. Тогда стало очевидно, что современные математические методы позволяют получать иногда очень сильные результаты ... Обращение физиков к методам современной математики, интерес математиков к задачам квантовой физики – взаимно плодотворны.”

Как мы видим, термин *современная математическая физика* Н. Н. Боголюбов ввёл в обиход еще в 1981 году.

Теперь можно сказать больше: “Теоретическая физика всё в большей степени становится математической физикой”.

В исследовании задач математической физики важную роль играют обобщённые функции и тесно связанная с ними концепция обобщённого решения. В той или иной форме обобщённые решения и δ-функция вводились ещё в XIX в. в трудах Г. Р. Кирхгофа, Дж. Максвелла и О. Хевисайда. В 20–30-е годы XX в. понятие обобщённой производной (типа функции) и обобщённого решения дифференциальных уравнений встречается в той или иной форме в работах математиков (Д. Эванс, Л. Тонелли, Ч. Мори, К. О. Фридрихс, Ж. Лере). Но ещё раньше Л. Эйлер в его фундаментальном труде “Integralrechnung” (1830 г.) явно говорит об обобщённом решении. Получив общее решение волнового уравнения, описывающего малые поперечные колебания однородной струны,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{14}$$

в виде

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at), \tag{15}$$

он пишет: “Таким путём этот проницательный муж[2] получил полный интеграл, но не заметил, что вместо введённых непрерывных функций (f и g – авт.) можно взять любые функции, вовсе лишённые свойства непрерывности.” Заметим, что во времена Эйлера под непрерывными функциями понимались аналитические функции.

Таким образом, следуя Эйлеру, мы должны считать разрывную функцию

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[H(x-at) + H(x+at)], \tag{16}$$

описывающую распад разрыва (рис. 3 и 4), обобщённым решением задачи Коши для уравнения (14) с начальными условиями

$$u(x,0) = H(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x \in R, \tag{17}$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, равная 1 при $x \geqslant 0$ и 0 при $x < 0$.

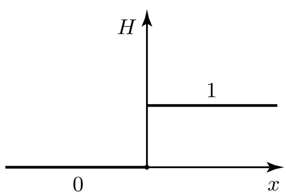

Рис. 3

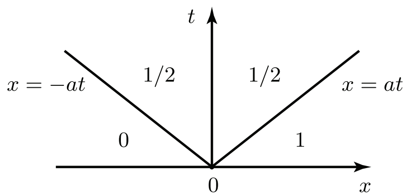

Рис. 4

В конце 20-х годов Дирак в своих квантово-механических исследованиях ввёл в науку математически корректное определение δ-функции (теперь носящей имя Дирака) как линейного функционала, сопоставляющего каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ её значение в нуле, $\varphi(0)$, что символически записывается так:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0; \qquad \int \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \equiv (\delta, \varphi). \tag{18}$$

На рис. 5 изображена “формальная” δ-функция[3], а на рис. 6 – “приближённая” $\delta_\varepsilon(x)$-функция, $\varepsilon \to 0$, $\int \delta_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

[2]Имеется в виду Даламбер.

[3]Конечно, такой функции, понимаемой в классическом смысле, не существует.

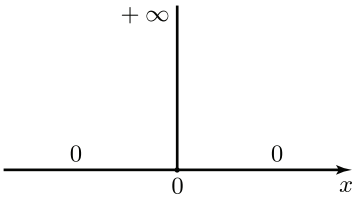

Рис. 5

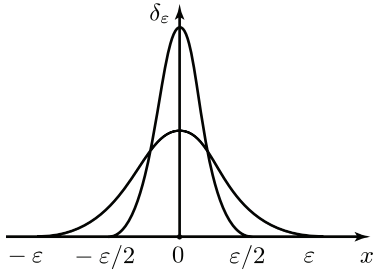

Рис. 6

Таким образом, в соответствии с равенством (18) справедливо соотношение

$$\int \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx \to \varphi(0) = (\delta, \varphi), \quad \varepsilon \to +0.$$

Это соотношение означает, что последовательность "приближённых" δ-функций $\delta_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to +0$, слабо сходится к δ-функции Дирака, в то время как поточечно она сходится к "формальной" δ-функции, т.е. к нулевой функции (рис. 5).

Потребовались ряд лет и усилия многих математиков (Ж. Адамар, С. Бохнер, М. Рисс, С. Л. Соболев, Л. Шварц), чтобы прийти к корректному определение обобщённой функции и её производных. Основы математической теории обобщённых функций заложил С. Л. Соболев (1936 г.) и успешно применил к решению обобщённой задачи Коши для гиперболических уравнений. В послевоенные годы Л. Шварц, опираясь на предварительно созданную теорию векторных локально выпуклых топологических пространств, предпринял систематическое построение теории обобщённых функций и указал ряд важных её приложений. Он изложил её в своей известной монографии "Theorie des distributions" (1950–51 гг.). В дальнейшем теория обобщённых функций находит всё более широкие применения в МФ, что стимулировало её интенсивное развитие. В настоящее время эта теория далеко продвинута и прочно вошла в обиход математика, физика и инженера.

Обобщённые функции обладают рядом замечательных свойств, расширяющих возможности классического математического анализа, например: любая обобщённая функция оказывается бесконечно дифференцируемой (в обобщённом смысле), сходящиеся ряды из обобщённых функций можно почленно дифференцировать бесконечное число раз, преобразование Фурье обобщённой функции всегда существует и т.д. Поэтому использование техники обобщённых функций существенно расширяет круг рассматриваемых задач и к тому же приводит к значительным упрощениям, автоматизируя элементарные операции.

При анализе сложных нестационарных (динамических) систем уравнений важную роль играют законы сохранения. *Законом сохранения* динамической системы относительно неизвестной функции (вектора, матрицы и т.д.) $u(x,t)$ называется всякий оператор $J(t) \equiv J(u, u'_x, \ldots; t)$, сохраняющийся по времени t на решениях u системы. Например, один из законов сохранения для уравнения (14) при нулевых граничных условиях $u(0,t) = u(l,t) = 0$ есть закон сохранения энергии (кинетической плюс потенциальной):

$$J(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx = \mathrm{Const}, \qquad t \geqslant 0. \tag{19}$$

Другой пример: для уравнения колебаний маятника (рис. 7)

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{R}\sin\varphi(t) = 0 \tag{20}$$

закон сохранения имеет вид

$$J(t) = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{g}{R}\cos\varphi = \mathrm{Const}. \tag{21}$$

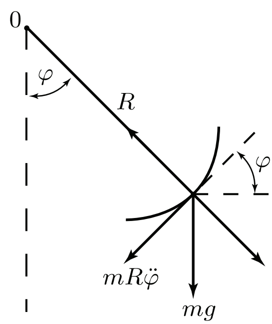

Рис. 7

Это – *локальный закон сохранения. Нелокальные законы сохранения* содержатся среди законов сохранения вида:

$$J(t) = \dot{\varphi}\psi - \dot{\psi}\varphi = \mathrm{Const}, \tag{22}$$

где ψ – решение линейного уравнения

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{R}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\psi = 0, \tag{23}$$

соответствующего уравнению (20). Если в (22) подставить нелокальное решение уравнения (23)

$$\psi(t) = C\varphi(t)\int^t \frac{1}{\varphi^2(\tau)}\,d\tau, \tag{24}$$

где C – произвольная постоянная, то получим нелокальный закон сохранения для уравнения (20).

p-Адическая математическая физика. За последние 15–20 лет появился и бурно развивается новый раздел современной математической физики – *p-адическая математическая физика.* Это альтернативная математическая физика, в которой вещественные пространственно-временные переменные (x,t) заменяются на p-адические числа. Чем это вызвано?

До последнего времени считалось, что евклидово пространство R^3 – это незыблемая математическая модель для реального физического пространства. Однако в квантовой теории с учётом гравитации было установлено (М. А. Марков и др.), что для погрешности измерения длины Δx справедливо неравенство

$$\Delta x \geqslant l_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-33}\,\mathrm{cm}, \tag{25}$$

где l_{pl} – планковская длина, G – гравитационная постоянная и c – скорость света. Из неравенства (25) следует невозможность измерений длин, меньших планковских. Отсюда следует, что структура пространства (и времени) на планковских расстояниях *неархимедова* (где аксиома Архимеда не выполняется). Следовательно, на этих расстояниях пространство и время должно описываться не полем вещественных чисел с его архимедовой структурой, а каким-либо другим новым неархимедовым полем. Это новое поле должно содержать поле рациональных чисел Q – *физически* *наблюдаемых чисел.* Поэтому для построения нового поля достаточно в поле Q найти новую, неархимедову, норму и замкнуть его по этой норме.

Математика даёт ответ на этот вопрос. Ещё в конце XIX в. К. Гензель открыл бесконечно много таких неэквивалентных (нетривиальных) норм $|\cdot|_p$, которые нумеруются простыми числами $p = 2, 3, 5, \ldots, 137, \ldots$. В поле Q норма $|\cdot|_p$ вводится следующим образом: всякое $x \in Q$ однозначно представляется в виде $x = \pm p^\gamma \frac{a}{b}$, где γ, a, b – целые числа, причём a и b не делятся на p. По определению

$$|x|_p = p^{-\gamma}, \qquad |0|_p = 0. \tag{26}$$

Замыкание поля Q по норме $|\cdot|_p$ образует *поле p-адических чисел Q_p*. Норма $|x|_p$ обладает обычными свойствами: для любых $x \in Q_p$ и $y \in Q_p$

$$\begin{aligned}
&1) \quad |x|_p \geqslant 0, \quad |x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0,\\
&2) \quad |xy|_p = |x|_p |y|_p,\\
&3) \quad |x+y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p) \leqslant |x|_p + |y|_p.
\end{aligned}$$

Неравенство треугольника 3) более сильное, чем классическое неравенство

$$3') \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|, \qquad x \text{ и } y \in R,$$

выражает свойство неархимедовости поля Q_p. Таким образом, норма $|\cdot|_p$ *неархимедова*, а пространство Q_p – *ультраметрическое.*

Евклидова норма $|\cdot|$ и p-адические нормы, $|\cdot|_p$, $p = 2, 3, \ldots$, для рациональных чисел x и $y \neq x$ связаны адельной формулой

$$|x-y| \prod_p |x-y|_p = 1, \qquad x, y \in Q, \quad x \neq y. \tag{27}$$

Эта формула означает, что измерение длины отрезка $x-y$ с рациональными концами x и y (и, стало быть, физически наблюдаемым) в евклидовом пространстве эквивалентно измерению его длины во всех p-адических пространствах. Это согласуется с известной теоремой Островского о том, что, пополняя поле рациональных чисел по возможным неэквивалентным нормам, можно построить только евклидовы и p-адические поля.

Примеры. 1. Ряд $1 + p + p^2 + \cdots$ сходится в Q_p и его сумма равна $(1-p)^{-1}$.

2. Ряд $1! + 2! + \cdots$ сходится во всех Q_p.

Обозначим через

$$B_\gamma(a) = [x \in Q_p : |x-a|_p \leqslant p^\gamma], \qquad S_\gamma(a) = [x \in Q_p : |x-a|_p = p^\gamma]$$

p-адический диск и *p-адическую окружность* соответственно радиуса p^γ с центром в точке $a \in Q_p$. Геометрия пространства Q_p весьма необычна: все треугольники в нём равнобедренные; всякая точка диска является его центром; диск не имеет границы; диск есть объединение конечного числа непересекающихся дисков меньшего радиуса; если два диска пересекаются, то один из них содержится в другом; диск и окружность – открытые компакты.

Поле Q_p есть локально компактное вполне несвязное векторное пространство с иерархической структурой. При $p = 3$ эта ситуация изображена в виде специального графа – дерева. Границей этого графа является поле Q_3 (рис. 8).

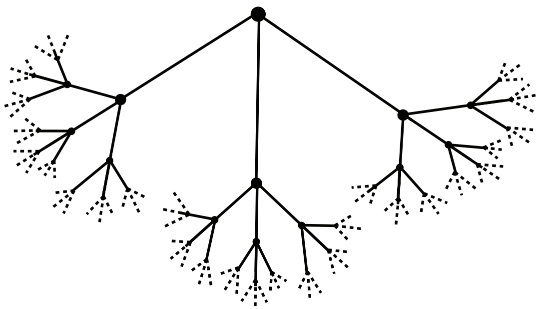

Рис. 8

Создаётся *p-адический анализ* комплексно(вещественно)-значных функций p-адических аргументов: интегрирование, преобразование Фурье, псевдодифференциальные операторы, обобщённые функции, спектральная теория и т.д. На базе p-адического анализа развивается p-адическая математическая физика, определяются следующие направления:

- p-адическая квантовая механика и квантовая теория поля;
- p-адические струны и суперструны;

- спиновые стёкла, биологические и другие иерархические системы;
- p-адическая теория вероятностей;
- динамические p-адические системы;
- распознавание образов;
- динамика тахионных струн и полей;
- модели сознания и эмоций.

Список литературы

[1] Стеклов В. А., *Основные задачи математической физики*, Наука, М., 1983 (первое издание вышло в 2-х томах в 1922 и 1923 годах в Петрограде).

[2] Владимиров В. С., *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981.

[3] Михайлов В. П., *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1983.

[4] Соболев С. Л., *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1966.

[5] Владимиров В. С., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Михайлов В. П., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И., *Сборник задач по уравнениям математической физики*, Физматлит, М., 2001.

[6] Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А., *Лекции по квантовой механике для студентов-математиков*, РХД, М., Ижевск, 2001.

[7] Дирак П., *Принципы квантовой механики*, Наука, М., 1979.

[8] Владимиров В. С., “Математические задачи односкоростной теории переноса частиц”, *Труды МИАН*, **LXI** (1961).

[9] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., *Обобщённые функции*, т. 1, 3, Физматгиз, М., 1958.

[10] Владимиров В. С., *Обобщённые функции в математической физике*, Наука, М., 1979.

[11] Рид Е., Саймон Б., *Методы современной математической физики*, т. 1–4, Мир, М., 1982.

[12] Курант Р., Гильберт Д., *Методы математической физики*, т. I, II, Гостехиздат, М., 1951.

[13] Тихонов А. Н., Самарский А. А., *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1977.

[14] Смирнов В. И., *Курс высшей математики*, т. IV, Гостехиздат, М., Л., 1951.

[15] Марчук Г. И., *Сопряжённые уравнения*, ИВМ РАН, М., 2001.

[16] Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И., *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.

[17] Владимиров В. С., Маркуш И. И., *Владимир Андреевич Стеклов – учёный и организатор науки*, Наука, М., 1981.