СБОРНИК ЗАДАЧ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ В.С. ВЛАДИМИРОВА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2001

УДК 517
ББК 22.16
С23

Авторы:

В. С. ВЛАДИМИРОВ, А. А. ВАШАРИН, Х. Х. КАРИМОВА,
В. П. МИХАЙЛОВ, Ю. В. СИДОРОВ, М. И. ШАБУНИН

Сборник задач по уравнениям математической физики. / Под ред. В. С. Владимирова. — 3-е изд., исправл. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 288 с. — ISBN 5-9221-0072-6.

Сборник задач, составленный коллективом преподавателей Московского физико-технического института, базируется на обновленных курсах уравнений математической физики, читаемых в МФТИ в течение многих лет.

В отличие от имеющихся задачников по уравнениям математической физики, в данном сборнике широко представлены задачи, в которых используется теория обобщенных функций и методы функционального анализа.

В настоящее издание внесены уточнения и исправления.

Второе издание — 1982 г.

Для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов.

Ил. 4. Библиогр. 8 назв.

ISBN 5-9221-0072-6

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Третье издание сборника задач по уравнениям математической физики не отличается от второго (1982 г.) по содержанию. Авторы лишь исправили отдельные неточности в формулировках задач и устранили опечатки.

Во втором издании было добавлено небольшое число задач (в основном в главу III) к первому изданию сборника (1974 г.).

Авторы выражают глубокую благодарность коллективу кафедры высшей математики Московского физико-технического института за конструктивную критику, за предложения и замечания, которые способствовали улучшению сборника и позволили устранить неточности и ошибки в ответах. В первую очередь, авторы признательны Т. Ф. Волкову, Ю. Н. Дрожжинову, А. Д. Кутасову, В. Б. Лидскому, А. Ф. Никифорову, В. И. Чехлову.

Январь 2001 г. *Авторы*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Широкое проникновение современных математических методов в теоретическую и математическую физику потребовало пересмотра традиционного курса «Уравнения математической физики». Это в первую очередь относится к такому фундаментальному понятию, как решение краевой задачи математической физики. Концепция обобщенного решения значительно расширяет круг рассматриваемых задач, позволяет изучать с единой точки зрения наиболее интересные задачи, не поддающиеся решению классическими методами. С этой целью на кафедре высшей математики Московского физико-технического института были созданы новые курсы: «Уравнения математической физики» В. С. Владимирова и «Уравнения в частных производных» В. П. Михайлова.

Настоящий «Сборник задач по уравнениям математической физики» основан на этих курсах и существенно дополняет их. Помимо классических краевых задач в сборник включено большое число краевых задач, имеющих только обобщенные решения. Исследование таких задач требует привлечения методов и результатов из различных областей современного анализа. Поэтому в сборник включены задачи по теории интегрирования по Лебегу, по функциональным пространствам, в особенности пространствам обобщенно дифференцируемых функций, по обобщенным функциям, включая преобразования Фурье и Лапласа, и по интегральным уравнениям.

Этот сборник рассчитан на студентов вузов — математиков, физиков и инженеров с повышенной математической подготовкой.

1974 г. *Авторы*

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — точки n-мерного вещественного евклидова пространства R^n.

2. $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$,

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_{R^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

3. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс ($\alpha_j \geq 0$ целые);

$$\alpha! = \alpha_1!\,\alpha_2! \ldots \alpha_n!, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

4. $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$;

$$r = |x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

5. $U(x_0; R) = \{x : |x - x_0| < R\}$ — открытый шар с центром в точке x_0 радиуса R; $S(x_0; R) = \{x : |x - x_0| = R\}$ — сфера $U_R = U(0; R)$, $S_R = S(0, R)$.

6. Множество A будем называть *строго лежащим* в области $G \subset R^n$ и писать $A \Subset G$, если A ограничено и $\overline{A} \subset G$.

7. Функция $f(x)$ называется *локально интегрируемой* в области G, если она абсолютно интегрируема по каждой подобласти $G' \Subset G$. Функции, локально интегрируемые в R^n, будем называть *локально интегрируемыми* функциями.

8. $D^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

9. $C^p(G)$ — класс функций f, непрерывных вместе с производными $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq p$ $(0 \leq p < \infty)$, в области $G \subset R^n$. Функции $f \in C^p(G)$, у которых все производные $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq p$, допускают непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$, образуют класс $C^p(\overline{G})$; $C(G) = C^0(G)$, $C(\overline{G}) = C^0(\overline{G})$; функции $f \in C^p(G)$ при всех p образуют класс $C^\infty(G)$.

10. Равномерная сходимость последовательности функций $\{f_k\}$ к функции f на множестве A обозначается

$$f_k(x) \overset{x \in A}{\rightrightarrows} f(x), \qquad k \longrightarrow \infty.$$

11. $A \cup B$ — объединение множеств A и B; $A \cap B$ — пересечение A и B; $A \times B$ — прямое произведение A и B (множество пар (a, b) $(a \in A,\ b \in B)$); $A \backslash B$ — дополнение B до A.

12. *Носителем* непрерывной функции $f(x)$ называется замыкание множества тех точек x, в которых $f(x) \neq 0$. Носитель функции f обозначается $\operatorname{supp} f$. Если измеримая на области G функция $f(x)$ обращается в нуль почти всюду в G/G', где $G' \Subset G$, то f называется *финитной в* G функцией; функция, финитная в R^n, называется *финитной.*

13. $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа; $\square_a = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$ — волновой оператор; $\square_1 = \square$; $\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$ — оператор теплопроводности.

14. $\Gamma^+ = \{x, t : at > |x|\}$ — конус будущего.

15. $\Phi(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\xi} e^{-z^2/2} dz.$

16. $\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\varepsilon^2/(\varepsilon^2 - |x|^2)}, & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$ где $C_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\varkappa$, $\dfrac{1}{\varkappa} = \displaystyle\int_0^1 e^{-1/(1-x^2)} dx$; ω_ε — ядро усреднения, «шапочка».

17. $\mathbb{C}$ — плоскость комплексного переменного.

18. $\theta(x)$ — функция Хевисайда: $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

19. $\sigma_n = \displaystyle\int_{S_1} ds = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь поверхности единичной сферы S_1 в R^n.

20. В $C^p(\overline{G})$ введена норма

$$\|f\|_{C^p(\overline{G})} = \sum_{|\alpha| \le p} \max_{x \in \overline{G}} |D^\alpha f(x)|.$$

21. Совокупность (измеримых) функций $f(x)$, для которых $|f|^p$ интегрируема на G, обозначается через $L_p(G)$. Норма в $L_p(G)$ вводится так:

$$\|f\|_{L_p(G)} = \left[\int_G |f|^p dx\right]^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(G)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in G} |f(x)|, \qquad p = \infty.$$

В $L_2(G)$ вводится скалярное произведение

$$(f, g) = \int_G f\bar{g}\, dx, \qquad f, g \in L_2(G).$$

22. Пусть $\rho(x)$ — непрерывная положительная функция в области G. Совокупность (измеримых) функций $f(x)$, для которых функция

$\rho(x)|f(x)|^2$ интегрируема на G, обозначим через $L_{2,\rho}(G)$; $L_{2,\rho}(G)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g)_{L_{2,\rho}}(G) = \int\limits_G \rho f \bar{g}\, dx.$$

23. Цилиндрические функции:

а) функции Бесселя

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \qquad -\infty < x < \infty;$$

б) функции Неймана

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi\nu}\,[J_\nu(x)\,\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)], \quad \nu \neq n,$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n\,\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right], \quad \nu = n;$$

в) функции Ханкеля

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \qquad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x);$$

г) функции мнимого аргумента

$$I_\nu(x) = e^{-\pi\nu i/2} J_\nu(ix), \qquad K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2}\, e^{\pi\nu i/2} H_\nu^{(1)}(ix).$$

Глава I

ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Вывод уравнений и постановки краевых задач

Условимся в следующих обозначениях:

$\rho(x) = \rho$ — плотность (линейная, поверхностная, объемная);

T_0 — натяжение струны, мембраны;

E — модуль Юнга;

k — коэффициент упругости упругого закрепления концов струны, стержня или края мембраны;

S — площадь поперечного сечения стержня, вала и т.д.;

$\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты;

p, p_0 — давление газа, жидкости;

m, m_0 — масса;

g — ускорение силы тяжести;

ω — угловая скорость;

$k, k(x), k(x, u)$ — коэффициент внутренней теплопроводности;

α — коэффициент внешней теплопроводности (коэффициент теплообмена);

D — коэффициент диффузии.

Приведем несколько примеров на составление уравнений.

Пример 1. Задачи о поперечных колебаниях струны. Струна длиной l натянута с силой T_0 и находится в прямолинейном положении равновесия. В момент времени $t = 0$ точкам струны сообщаются начальные отклонения и скорости. Поставить задачу для определения малых поперечных колебаний точки струны при $t > 0$, если концы струны:

а) закреплены жестко;

б) свободны, т.е. могут свободно перемещаться по прямым, параллельным направлению отклонения u;

в) закреплены упруго, т. е. каждый конец испытывает со стороны заделки сопротивление, пропорциональное отклонению и направленное противоположно ему;

г) двигаются в поперечном направлении по заданным законам.

Сопротивлением среды и действием силы тяжести пренебречь.

Решение. Пусть ось x совпадает с направлением струны в положении равновесия. Под струной понимается тонкая нить, которая не сопротивляется изгибу, не связанному с изменением ее длины. Это значит, что если мысленно разрезать струну в точке x, то действие одного участка струны на другой (сила натяжения T) будет направлено по касательной к струне в точке x. Для вывода уравнения колебаний выделим участок струны от x до $x + \Delta x$ и спроектируем все действующие на этот участок силы (включая и силы инерции) на оси координат. Согласно принципу Даламбера сумма проекций всех сил должна равняться нулю. Мы изучаем только поперечные колебания. Поэтому можно считать внешние силы и силу инерции направленными вдоль оси u. Примем во внимание также, что рассматриваются малые колебания струны. Это значит, что в процессе вывода уравнения мы будем пренебрегать квадратами величины $u_x(x,t)$. Длина S дуги AB выражается интегралом

$$S = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2}\,dx \cong \Delta x.$$

Это значит, что удлинения участков струны в процессе колебания не происходит и, следовательно, по закону Гука величина натяжения $T_0 = |T|$ не зависит ни от времени, ни от x. Найдем проекции всех

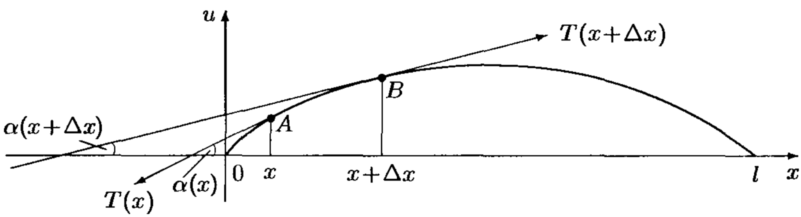

Рис. 1

сил в момент времени t на оси u. Проекция силы натяжения с точностью до бесконечно малых (б. м.) первого порядка равна (рис. 1):

$$T_0[\sin\alpha(x+\Delta x) - \sin\alpha(x)] = T_0\left[\frac{\operatorname{tg}\alpha(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x+\Delta x)}} - \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}}\right] =$$

$$= T_0\left[\frac{u_x(x+\Delta x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x+\Delta x,t)}} - \frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\right] \cong T_0[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] \cong$$

$$\cong T_0 u_{xx}(x,t)\,\Delta x.$$

Пусть $p(x,t)$ — непрерывная линейная плотность внешних сил. Тогда на участок AB вдоль оси u действует сила $p(x,t)\,\Delta x$. Для нахождения силы инерции участка AB воспользуемся выражением $-mu_{tt}$, где m — масса участка. Если $\rho(x)$ — непрерывная линейная плотность струны, то $m = \rho\Delta x$. Таким образом, проекция на ось u силы инерции задается выражением $-\rho u_{tt}\Delta x$, а проекция всех сил на ось u имеет вид

$$[T_0 u_{xx} + p(x,t) - \rho(x)\, u_{tt}]\,\Delta x = 0. \tag{1}$$

Следовательно,

$$T_0 u_{xx} - \rho(x)\, u_{tt} + p(x,t) = 0.$$

Это и есть *уравнение вынужденных колебаний струны.* Если $\rho \equiv \equiv \mathrm{const}$, то уравнение принимает вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x,t),$$

где $a^2 = T_0/\rho$, $g(x,t) = p(x,t)/\rho$. Кроме того, функция $u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$, где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные функции.

Вывод краевых условий.

а) Если концы струны жестко закреплены, то $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = 0$.

б) В случае свободных концов для получения условия при $x = 0$ спроектируем на ось u силы, действующие на участок KM (рис. 2).

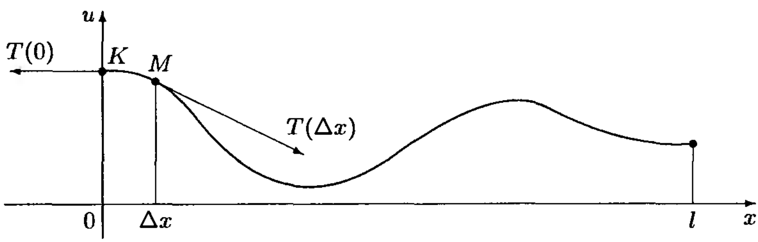

Рис. 2

Так как натяжение в точке $x = 0$ действует лишь параллельно оси x, то проекция сил натяжения на участок KM равна $T_0 u_x(\Delta x, t)$. Проекция внешней силы равна $p(0,t)\,\Delta x$, а проекция силы инерции равна $-\rho u_{tt}(0,t)\,\Delta x$. Приравнивая нулю их сумму, получим

$$T_0 u_x(\Delta x, t) + p(0,t)\,\Delta x - \rho u_{tt}(0,t)\,\Delta x = 0. \tag{2}$$

Устремим Δx к нулю. Тогда вследствие непрерывности и ограниченности входящих функций получим условие $u_x|_{x=0} = 0$. Аналогично получается условие на правом конце $u_x|_{x=l} = 0$.

в) Действие упругих сил заделки на левом конце дается выражением $-ku(0,t)$. Приравниваем в этом случае проекцию всех сил, действующих на участок KM, на ось u нулю. К левой части уравнения (2) добавится член $-ku(0,t)$. Тогда имеем

$$T_0 u_x(\Delta x, t) - ku(0,t) + p(0,t)\,\Delta x - \rho u_{tt}(0,t)\,\Delta x = 0,$$

а при $\Delta x \to 0$ получаем

$$(u_x - hu)|_{x=0} = 0, \qquad h = k/T_0.$$

На правом конце (рис. 3) проекция всех сил имеет вид

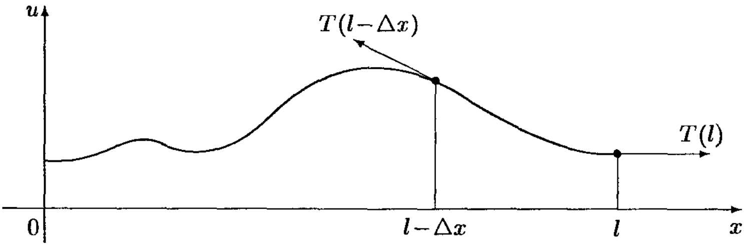

Рис. 3

$$-T_0 u_x(l-\Delta x, t) - ku(l,t) + p(l,t)\,\Delta x - \rho u_{tt}(l,t)\,\Delta x = 0,$$

поскольку

$$\sin\alpha(l-\Delta x) \cong u_x|_{x=l-\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ получим $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$.

г) $u|_{x=0} = \mu_1(t)$, $u|_{x=l} = \mu_2(t)$, где функции $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ определяют закон движения концов ($\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\mu_2(0) = \varphi(l)$).

Пример 2. Задачи о колебании стержня. Упругий прямолинейный стержень длиной l выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям в момент $t = 0$ сообщены малые продольные смещения и скорости. Предполагая, что во время движения поперечные сечения остаются параллельными плоскости, перпендикулярной к оси стержня, поставить задачу для определения малых продольных колебаний стержня при $t > 0$. Рассмотреть случаи, когда концы стержня:

а) закреплены жестко;

б) двигаются в продольном направлении по заданным законам;

в) свободны;

г) закреплены упруго, т.е. каждый из концов испытывает со стороны заделки продольную силу, пропорциональную смещению и направленную противоположно смещению.

Решение. Пусть ось x совпадает с направлением оси стержня (рис. 4) и пусть x — координата сечения pq, когда оно находится в

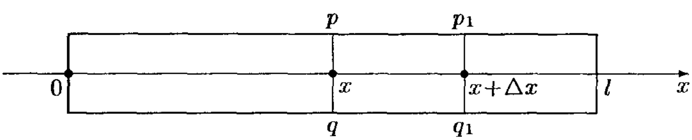

Рис. 4

покое. Мы изучаем малые продольные колебания стержня. Это значит, что внешние силы и силы инерции можно считать направленными вдоль оси стержня. Обозначим через $u(x,t)$ смещение этого сечения в момент t; тогда в рамках нашего предложения смещение сечения в точке $x + \Delta x$ будет

$$u(x + \Delta x, t) \cong u(x, t) + u_x(x, t)\, \Delta x.$$

Поэтому относительное удлинение стержня в сечении x будет равно $u_x(x, t)$. По закону Гука натяжение в этом сечении равно $T = ESu_x(x,t)$, где S — площадь поперечного сечения, E — модуль упругости материала стержня. Уравнение колебаний стержня получим, если приравняем нулю сумму всех сил, включая силы инерции, действующие на участок pq, p_1q_1. Равнодействующая сил натяжения равна

$$T(x+\Delta x)-T(x)=ES[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)] \cong ESu_{xx}(x,t)\,\Delta x.$$

Пусть $p(x,t)$ — объемная плотность внешних сил. Тогда на участок pq, p_1q_1 действует внешняя сила $Sp(x,t)\,\Delta x$ и сила инерции $-\rho(x)\,Su_{tt}(x,t)\,\Delta x$. Сумма всех сил по принципу Даламбера равна нулю, т. е.

$$[ESu_{xx}(x,t) + p(x,t)\,S - \rho(x)\,Su_{tt}(x,t)]\,\Delta x = 0. \tag{1}$$

Отсюда

$$\rho(x)\,u_{tt}(x,t) = Eu_{xx}(x,t) + p(x,t); \tag{2}$$

кроме того, $u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$, где $\varphi(x), \psi(x)$ — заданные функции. Если $\rho(x) = \rho = \mathrm{const}$ (однородный стержень), то уравнение принимает вид

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + g(x,t),$$

где

$$a^2 = E/\rho, \qquad g(x,t) = p(x,t)/\rho. \tag{3}$$

Вывод краевых условий.

а) В случае жесткого закрепления отклонения концов не происходит, и, следовательно, $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$.

б) $u|_{x=0} = \mu_1(t)$, $u|_{x=l} = \mu_2(t)$, где $\mu_1(t), \mu_2(t)$ — функции, определяющие закон движения концов ($\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\mu_2(0) = \varphi(l)$).

в) В случае свободных концов составляем баланс действующих сил для обоих концов. На левом конце равнодействующая упругих сил натяжения равна $T(\Delta x) = ESu_x(\Delta x, t)$, внешняя сила $Sp(0,t)\,\Delta x$ и сила инерции $-\rho Su_{tt}(0,t)\,\Delta x$. Сумма всех сил, действующих на выделенный элемент, равна нулю. Отсюда

$$ESu_x(\Delta x, t) + p(0,t)\,S\Delta x - \rho Su_{tt}(0,t)\,\Delta x = 0, \tag{4}$$

и при $\Delta x \to 0$ получаем $u_x|_{x=0} = 0$. Аналогично рассуждая, на правом конце получаем условие $u_x|_{x=l} = 0$.

г) В левой части уравнения (4) добавится сила $-ku(0,t)$. И после перехода к пределу при $\Delta x \to 0$ получим

$$ESu_x(0,t) - ku(0,t) = 0 \quad \text{или} \quad (u_x - hu)|_{x=0} = 0, \quad \text{где} \quad h = k/(ES).$$

На правом конце

$$-T(l - \Delta x) = -ESu_x(l - \Delta x, t),$$

$Sp(l,t)\,\Delta x$ — внешняя сила, $-\rho(x)\,Su_{tt}(l,t)\,\Delta x$ — сила инерции. Тогда имеем $-ESu_x(l - \Delta x, t) - ku(l,t) + Sp(l,t)\,\Delta x - u_{tt}(l,t)\,S\rho(x)\,\Delta x = 0$, и при $\Delta x \to 0$ получаем второе граничное условие $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$.

Пример 3. Задача о колебании мембраны. Мембраной называется натянутая пленка, которая сопротивляется растяжению и не сопротивляется изгибу. Работа внешней силы, вызывающей изменение площади некоторого участка, пропорциональна этому изменению. Положительный коэффициент пропорциональности T не зависит ни от формы этого участка, ни от его положения. Он называется *натяжением мембраны*.

Выведем уравнение равновесия мембраны, предполагая, что в начальный момент времени в положении равновесия мембрана совпадала с областью G плоскости (x_1, x_2), ограниченной некоторой достаточно гладкой кривой L. Работа внутренних сил упругости равна по абсолютной величине работе внешних сил и противоположна ей по знаку. Пусть $f(x)$ — плотность силы в точке x, действующей перпендикулярно к плоскости (x_1, x_2). Под действием внешней силы мембрана перейдет в новое положение, которое описывается уравнением $u = u(x)$. Будем считать, что мембрана не сильно изогнута, так что в рассуждениях будем пренебрегать членами $u_{x_1}^4, u_{x_2}^4$. Кроме того, будем считать, что точки мембраны под действием внешней силы перемещаются только по перпендикулярам к плоскости (x_1, x_2), и, следовательно, координаты (x_1, x_2) произвольной точки мембраны при этом не меняются.

Работа внешней силы, вызвавшей перемещение мембраны из первоначального положения ($u \equiv 0$, $x \in G$) в положение, задаваемое уравнением $u = u(x)$, $x \in G$, равна

$$\int_G f(x)\,u(x)\,dx.$$

Изменение площади мембраны при этом перемещении равно

$$\int_G \left(\sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} - 1\right) dx,$$

а работа внутренних сил упругости равна

$$-T\int_G \left[\sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} - 1\right] dx \cong -\frac{T}{2}\int_G \left(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2\right) dx.$$

Следовательно, сумма всех работ равна

$$A(u) = \int_G \left[-\frac{T}{2}\left(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2\right) + fu\right] dx. \tag{1}$$

Вариация функционала (1) выражается формулой

$$\delta A(u) = \int_G \left[-T\,(u_{x_1}\delta u_{x_1} + u_{x_2}\delta u_{x_2}) + f\,\delta u\right] dx.$$

Согласно принципу возможных перемещений в положении равновесия $\delta A(u) = 0$ при всех допустимых $\delta u(x)$. Так как

$$\int_G (u_{x_1}\delta u_{x_1} + u_{x_2}\delta u_{x_2})\,dx = \int_L \frac{\partial u}{\partial n}\,\delta u\,dl - \int_G \Delta u\,\delta u\,dx,$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней нормали к контуру L, то

$$\delta A(u) = -T\int_L \frac{\partial u}{\partial n}\,\delta u\,dl + \int_G (T\Delta u + f)\,\delta u\,dx = 0. \tag{2}$$

Так как любая непрерывно дифференцируемая в $\overline{G}$ функция, равная нулю на границе, является допустимой функцией, то, предполагая функции $u(x)$ и $f(x)$ достаточно гладкими, из (2) имеем

$$T\Delta u = -f(x), \qquad x \in G. \tag{3}$$

К р а е в ы е   у с л о в и я.

а) Закрепленная мембрана. Если край мембраны жестко закреплен, то отклонения точек мембраны на границе L не происходит и, следовательно, $u|_L = 0$.

б) Края мембраны свободны, т. е. они могут свободно перемещаться по вертикальной боковой поверхности цилиндра с основанием L. В этом случае δu будет произвольной как в G, так и на L, и из условия (2) получаем $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_L = 0$.

в) Если к краю мембраны приложена сила с линейной плотностью f_1, то криволинейный интеграл в формуле (2) в этом случае заменится на

$$\int_L \left(-T\frac{\partial u}{\partial n} + f_1\right)\delta u\,dl,$$

и вследствие произвольности δu на L получим $\left.\left(-T\dfrac{\partial u}{\partial n} + f_1\right)\right|_L = 0$.

г) В случае упругого закрепления края мембраны сила, действующая на краю, имеет плотность $-ku$, где k характеризует жесткость закрепления мембраны. Для получения граничного условия нужно в граничном условии $\left.\left(-T\dfrac{\partial u}{\partial n} + f_1\right)\right|_L = 0$ заменить f_1 на $-ku$. Тогда получим

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_L = 0, \qquad \text{где} \qquad h = \frac{k}{T}.$$

Выведем уравнение движения мембраны. Пусть $u = u(x,t)$ — уравнение, описывающее положение мембраны в момент времени t. Согласно принципу Даламбера функция $u(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $T\Delta u = -(f - \rho u_{tt})$ ($f = f(x,t)$ — плотность внешней среды, $-\rho(x)\,u_{tt}$ — плотность силы инерции). Таким образом, уравнение колебаний мембраны имеет вид

$$a^2\Delta u - u_{tt} = F(x,t), \qquad \text{где} \qquad a^2 = T/\rho, \qquad F = -f(x,t)/\rho. \quad (4)$$

Из физических соображений ясно, что для однозначного описания процесса колебаний, кроме уравнения (4) и условия на границе L (одного из условий а)–г)), нужно задать начальное положение (форму мембраны при $t = 0$) и начальные скорости точек мембраны.

Таким образом, имеем для уравнения (4) задачу: найти дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x,t)$, $x \in G$, $t > 0$, непрерывно дифференцируемое в $\overline{G}$ при $t \geq 0$, удовлетворяющее

$$a^2\Delta u - u_{tt} = F(x,t), \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные функции. Кроме того, в зависимости от условий на краю мембраны, функция $u(x,t)$ должна удовлетворять одному из условий в)–г).

Пример 4. Уравнение неразрывности. Задача обтекания. Уравнение акустики. Рассмотрим движение идеальной жидкости (газа), т. е. жидкости, в которой отсутствуют силы вязкости*). Пусть $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости движения жидкости, $\rho(x,t)$ — ее плотность, $f(x,t)$ — интенсивность источников. Выделим в жидкости некоторый объем Ω, ограниченный поверхностью S. Тогда изменение массы жидкости внутри Ω в единицу времени равно

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} \rho\, dx = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx.$$

С другой стороны, это изменение должно равняться приращению количества Q_1 жидкости, выделенной источниками, минус количество Q_2 жидкости, вытекающее через поверхность S. Очевидно,

$$Q_1 = \int\limits_{\Omega} f(x,t)\, dx, \qquad Q_2 = \int\limits_{S} \rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\, ds = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})\, dx,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль. Таким образом, имеем

$$\int\limits_{\Omega} [\rho_t + \operatorname{div}(\rho\cdot\boldsymbol{v}) - f]\, dx = 0.$$

Вследствие произвольности Ω и непрерывности подынтегрального выражения необходимо

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\cdot\boldsymbol{v}) = f(x,t).$$

Это и есть *уравнение неразрывности* движения идеальной жидкости.

Рассмотрим *задачу об обтекании* твердого тела Ω с границей S потенциальным потоком несжимаемой однородной жидкости, имеющей заданную скорость $\boldsymbol{v}_0$ на бесконечности при отсутствии источников. Так как $\rho \equiv \text{const}$ и $f \equiv 0$, то эта задача приводится к решению уравнения

*) Движение жидкости рассматривается в эйлеровых координатах.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{2}$$

при условии

$$v_n|_S = 0, \tag{3}$$

где $v_n = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль. Пусть u — потенциал скоростей, т. е. $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} u$. Тогда уравнение (2) принимает вид $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u = 0$, а граничным условием становится $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S = 0$, так как

$$v_n = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}) = (\operatorname{grad} u, \boldsymbol{n}) = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

Из физических соображений ясно, что $\boldsymbol{v}(x)$ должна стремиться к $\boldsymbol{v}_0$ при $|x| \to \infty$, где $\boldsymbol{v}_0$ — скорость потока на бесконечности.

Таким образом, указанная задача свелась к решению задачи

$$\Delta u = 0, \qquad x \notin \bar{\Omega},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S = 0, \qquad \lim_{|x| \to \infty} \operatorname{grad} u = \boldsymbol{v}_0.$$

Уравнения акустики. Предположим, что находящийся в некотором объеме идеальный газ под действием внешних сил с плотностью $F(x,t)$ совершает малые колебания около положения равновесия и что движение газа адиабатическое, т. е. давление $p(x,t)$ и плотность $\rho(x,t)$ связаны соотношением (уравнением состояния)

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \tag{4}$$

где p_0, ρ_0 — начальные давления и плотность, а постоянная $\gamma > 0$.

Обозначим через $\boldsymbol{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ вектор смещения газа относительно положения равновесия, а через $\boldsymbol{v}(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ — вектор скорости:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \boldsymbol{v}. \tag{5}$$

В наших предположениях ($\rho - \rho_0$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ и их производные малы) уравнение (4) можно переписать в виде

$$p = p_0\left(1 + \gamma\,\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right). \tag{6}$$

а уравнение неразрывности (1) — в виде

$$\rho_t + \rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{7}$$

(считаем, что интенсивность источников равна нулю).

В соответствии с законом Ньютона полный баланс сил, действующих на малый объем газа ΔV, равен нулю, т.е.

$$\rho\,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\,\Delta V + \operatorname{grad} p\,\Delta V = F\Delta V,$$

откуда после замены ρ на ρ_0 (в рамках нашего приближения) получаем

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = F - \operatorname{grad} p. \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по t и пользуясь соотношениями (6) и (7), находим уравнение для вектора скорости $\boldsymbol{v}$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = a^2 \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial F}{\partial t}, \tag{9}$$

где $a^2 = p_0\gamma/\rho_0$.

Если предположить, что в начальный момент времени имеет место равенство $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = -1$, то из (7) и (5) получим, что для всех последующих моментов времени имеет место равенство $\rho + \rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$. Отсюда и из (5), (6) и (8) вытекает уравнение для вектора смещения

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = a^2 \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho_0} F. \tag{10}$$

Наконец, дифференцируя уравнение (7) по t и используя (6) и (8), получим уравнения для плотности ρ и давления p

$$\rho_{tt} = a^2 \Delta\rho - \operatorname{div} F, \qquad p_{tt} = a^2\Delta p - a^2 \operatorname{div} F. \tag{11}$$

Уравнения (9)–(11) называются *уравнениями акустики*.

Пример 5. Задачи о распространении тепла. Вывод уравнения теплопроводности базируется на законе Фурье, согласно которому количество тепла, проходящее за время Δt через малую площадку ΔS, лежащую внутри рассматриваемого тела, определяется формулой

$$\Delta Q = -k(x,u)\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\Delta S\,\Delta t, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к площадке, направленная в сторону передачи тепла, $k(x,u)$ — коэффициент внутренней теплопроводности, $u(x,t)$ — температура тела в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t. Предположим, что тело изотропно в отношении теплопроводности. Тогда $k(x,u)$ не зависит от направления площадки. Для вывода уравнения, которому удовлетворяет температура $u(x,t)$, выделим внутри тела объем Ω, ограниченный поверхностью S. Согласно закону Фурье количество тепла, втекающее в Ω через поверхность S за промежуток времени $[t_1, t_2]$, равно

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int_{t_1}^{t_2} dt\int_\Omega \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\,dx.$$

Если $F(x,t)$ — плотность тепловых источников, то количество тепла, образованное за их счет в Ω за указанный промежуток времени, равно

$$\int_{t}^{t_2} dt\int_\Omega F(x,t)\,dx.$$

Общее количество притекшего в Ω за время от t_1 до t_2 тепла можно подсчитать также и через приращение температуры:

$$\int_\Omega c\rho[u(x,t_2) - u(x,t_1)]\,dx = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx,$$

где $c(x)$ и $\rho(x)$ — теплоемкость и плотность вещества. Следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \left(c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\operatorname{grad}u) - F(x,t)\right)dx = 0 \tag{2}$$

(при этом предполагаем, что подынтегральная функция непрерывна). В силу произвольности Ω и промежутка времени $[t_1, t_2]$ из (2) вытекает равенство

$$c\rho u_t - \operatorname{div}(k\operatorname{grad}u) = F(x,t), \tag{3}$$

называемое *уравнением теплопроводности.*

Если коэффициент теплопроводности k не зависит от температуры u, $k(x,u) = k(x)$, то уравнение (3) становится линейным. Если тело однородно, то $c(x) \equiv \mathrm{const}$, $\rho \equiv \mathrm{const}$, $k = \mathrm{const}$ и уравнение принимает вид

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t), \tag{4}$$

где $a^2 = k/(c\rho)$, $f(x,t) = F(x,t)/(c\rho)$. Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса распространения тепла необходимо, кроме уравнения (3) или (4), задать начальную температуру, т.е. $u|_{t=0} = \varphi(x)$, и температурный режим на границе. Для случая когда на границе Γ тела D поддерживается заданная температура, граничное условие выглядит так:

$$u|_\Gamma = \psi.$$

Для случая когда на границе задан тепловой поток q, граничное условие выглядит так:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = h,$$

где $h = q/k$, n — внешняя нормаль. В частности, если тело G теплоизолировано на границе, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0.$$

В случае если окружающее тело G пространство имеет заданную температуру, считаем, что на границе происходит теплообмен по закону Ньютона, т.е. $q|_\Gamma = \alpha(u_1 - u)_\Gamma$, где q — тепловой поток, α — коэффициент внешней теплопроводности (теплообмена), u_1 — температура окружающего G пространства. С другой стороны, в единицу времени с единицы площади границы Γ внутрь тела G по закону Фурье идет тепловой поток $q_1 = k\,\dfrac{\partial u}{\partial n}$. Эти потоки должны быть равны, т. е.

$$k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \alpha(u_1 - u)|_\Gamma, \qquad \text{или} \qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_\Gamma = \varphi_1(s).$$

Пример 6. Задачи о диффузии. Вывести уравнение диффузии вещества в неподвижной среде, занимающей ограниченную область Ω с границей Γ, если задана плотность источников $F(x,t)$ и диффузия происходит с поглощением (например, частицы диффундирующего вещества вступают в химическую реакцию с веществом среды), причем скорость поглощения в каждой точке пространства $x \in \Omega$ пропорциональна плотности $u(x,t)$ диффундирующего вещества.

Получить краевые условия для следующих случаев:

а) на границе области поддерживается заданная плотность;

б) граница непроницаема;

в) граница полупроницаема, причем диффузия через границу происходит по закону, подобному закону Ньютона для конвективного теплообмена.

Вывод уравнения основывается на законе Нэрнста, согласно которому количество вещества, проходящее за малый промежуток времени Δt через малую площадку ΔS, равно

$$\Delta Q = -D(x)\,\frac{\partial u}{\partial n}\,\Delta S\,\Delta t,$$

где $D(x)$ — коэффициент диффузии, n — нормаль к элементу ΔS, направленная в сторону перемещения вещества. Пусть $\rho(x)$ — коэффициент плотности среды. Как и при выводе уравнения теплопроводности, выделим некоторый объем Ω с границей S и составим баланс количества вещества, пришедшего в Ω за промежуток времени $[t_1,t_2]$.

Количество вещества, пришедшего в Ω через границу S, согласно закону Нэрнста равно

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S D(x)\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \operatorname{div}(D\operatorname{grad} u)\,dx.$$

Количество вещества, образовавшегося в Ω за счет источников, равно

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega F(x,t)\,dx.$$

Количество вещества в Ω уменьшилось на величину

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega q(x)\,u(x,t)\,dx$$

за счет поглощения среды ($q(x)$ — коэффициент поглощения). Поскольку приращение количества вещества в Ω за промежуток $[t_1,t_2]$ равно также

$$\int_\Omega \rho(x)[u(x,t_2)-u(x,t_1)]\,dx = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx,$$

то

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} (\rho u_t - \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - F + qu)\, dx = 0 \qquad (1)$$

(подынтегральная функция считается непрерывной).

В силу произвольности Ω и промежутка времени $[t_1, t_2]$ из (1) вытекает равенство

$$\rho u_t + qu = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) + F. \qquad (2)$$

Это и есть искомое *уравнение диффузии*. Из физических соображений ясно, что для однозначного описания процесса диффузии необходимо знать начальное распределение плотности $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $x \in \Omega$, и режим диффузии на границе области.

Как и в случае примера 5, краевые условия имеют вид:

а) $u|_\Gamma = u_0$;

б) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$;

в) $D\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \alpha(u_1 - u)|_\Gamma$, где u_0, u_1 — заданные функции, α — коэффициент проницаемости границы Γ.

1.1. Найти статический прогиб струны, закрепленной на концах, под действием непрерывно распределенной нагрузки (на единицу длины).

1.2. Вывести уравнение малых поперечных колебаний струны с насаженной на нее в некоторой внутренней точке x_0 бусиной массы m.

1.3. Вывести уравнение колебания струны, колеблющейся в упругой среде.

1.4. Крутильными колебаниями стержня называют такие колебания, при которых его поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого, вращаясь при этом около оси стержня. Вывести уравнение малых крутильных колебаний однородного цилиндрического стержня. Рассмотреть случаи:

а) концы стержня свободны;

б) концы стержня жестко закреплены;

в) концы стержня упруго закреплены.

1.5. Точкам упругого однородного прямоугольного стержня, жестко закрепленного на левом конце и свободного на правом, в начальный момент времени $t = 0$ сообщены малые поперечные отклонения и скорости, параллельные продольной вертикальной плоскости симметрии стержня.

Поставить краевую задачу для определения поперечных отклонений точек стержня при $t > 0$, предполагая, что стержень совершает малые поперечные колебания.

1.6. Труба, заполненная идеальным газом и открытая с одного конца, движется поступательно в направлении своей оси с постоянной скоростью v. В момент времени $t = 0$ труба мгновенно останавливается. Поставить краевую задачу об определении смещения газа внутри трубы на расстоянии x от закрытого конца.

1.7. Заключенный в цилиндрической трубке идельный газ совершает малые продольные колебания; плоские поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются и все частицы газа двигаются параллельно оси цилиндра. Поставить краевую задачу для определения смещения $u(x, t)$ частиц газа в случаях, когда концы трубки:

а) закрыты жесткими непроницаемыми перегородками;

б) открыты;

в) закрыты поршеньками с пренебрежимо малой массой, насаженными на пружинки с коэффициентами жесткости ν и скользящими без трения внутри трубки.

1.8. Начиная с момента времени $t = 0$ один конец прямолинейного упругого однородного стержня совершает продольные колебания по заданному закону, а к другому приложена сила $\Phi(t)$, направленная по оси стержня. В момент времени $t = 0$ поперечные сечения стержня были неподвижны и находились в неотклоненном положении. Поставить краевую задачу для определения малых продольных отклонений точек стержня при $t > 0$.

1.9. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны, закрепленной на обоих концах, в среде с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости.

1.10. Составить уравнение продольных колебаний стержня, у которого площадь поперечного сечения есть заданная функция от x, считая материал стержня однородным.

1.11. Поставить краевую задачу о продольных колебаниях упругого стержня, имеющего форму усеченного конуса, если концы стержня закреплены неподвижно и стержень выведен из состояния покоя тем, что его точкам в момент времени $t = 0$ сообщены начальные скорости и продольные отклонения. Длина стержня равна l, радиусы оснований R, r $(R > r)$, материал стержня однороден. Деформацией поперечных сечений пренебречь.

1.12. Находящаяся в горизонтальной плоскости невесомая струна с постоянной угловой скоростью ω вращается вокруг вертикальной оси, причем один конец струны прикреплен к некоторой точке оси, а другой свободен. В начальный момент времени $t = 0$ точкам этой струны сообщаются малые отклонения и скорости по нормалям к этой плоскости. Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от плоскости равновесного движения.

1.13. Пусть в точке $x = 0$ бесконечной однородной струны находится шарик массы m_0. Начальные скорости и начальные отклонения точек струны равны нулю. Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от их положения равновесия в следующих случаях:

а) начиная с момента времени $t = 0$ на шарик действует сила $F = F_0 \sin \Omega t$;

б) в начальный момент времени $t = 0$ шарик получает импульс p_0 в поперечном направлении;

в) шарик в случае б) закреплен упруго с эффективной жесткостью k^2.

1.14. Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного упругого стержня, один конец которого жестко закреплен, а другой испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. Сопротивлением среды пренебречь.

1.15. Во внутренних точках $x = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, на струне сосредоточены массы m_i, $i = 1, \ldots, n$. Поставить краевую задачу для определения малых поперечных колебаний струны при произвольных начальных данных. Концы струны закреплены.

1.16. Два полуограниченных однородных упругих стержня с одинаковыми поперечными сечениями соединены жестко торцами и составляют один неограниченный стержень. Пусть ρ_1, E_1 — плотность и модуль упругости одного из них, а ρ_2, E_2 — другого. Поставить краевую задачу для определения отклонений поперечных сечений неограниченного стержня от их положения равновесия, если в начальный момент времени поперечным сечениям сообщены некоторые продольные смещения и скорости.

1.17. Тяжелая однородная нить длиной l, закрепленная верхним концом ($x = l$) на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \omega^2 u.$$

1.18. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях тяжелой однородной струны относительно вертикального положения равновесия, если ее верхний конец жестко закреплен, а нижний свободен.

1.19. Поставить задачу об определении магнитного поля внутри и вне цилиндрического проводника, по поверхности которого течет ток силой J.

1.20. Кабель, имеющий потенциал v_0, при $t = 0$ заземляется на одном конце через сосредоточенную емкость (или индуктивность); другой конец изолирован. Поставить задачу об определении электрического тока в кабеле.

1.21. Конец $x = 0$ круглого однородного вала закреплен, а к концу $x = l$ жестко прикреплен диск с моментом инерции J_0. В начальный момент времени диск закручивается на угол α и отпускается без начальной скорости. Поставить краевую задачу для определения углов поворота поперечных сечений вала при $t > 0$.

1.22. Тяжелый стержень подвешен вертикально и защемлен так, что смещение во всех точках равно нулю. В момент времени $t = 0$

стержень освобождается. Поставить краевую задачу о вынужденных колебаниях стержня.

1.23. Пусть все условия предыдущей задачи остаются без изменения, за исключением условия на нижнем конце: к нему прикреплен груз Q, причем за положение равновесия принимается ненапряженное состояние стержня (например, в начальный момент времени из-под груза убирается подставка и груз начинает растягивать стержень).

1.24. Поставить задачу о движении полуограниченной струны ($0 \le x < \infty$) при $t > 0$, если при $t < 0$ по ней бежит волна $u(x,t) = f(x+at)$, а конец струны $x = 0$ закреплен жестко.

1.25. Поставить краевую задачу о малых радиальных колебаниях идеального однородного газа, заключенного в цилиндрической трубке радиуса R настолько длинной, что ее можно считать простирающейся в обе стороны до бесконечности. Начальные отклонения и начальные скорости есть заданные функции от r.

1.26. Поставить задачу об обтекании шара стационарным потоком идеальной жидкости (потенциальное течение). Привести электростатическую аналогию.

1.27. Поставить краевую задачу о малых радиальных колебаниях идеального однородного газа, заключенного в сферическом сосуде радиуса R, если начальные скорости и начальные отклонения заданы как функции от r.

1.28. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях мембраны, к которой приложено нормальное давление P на единицу площади, если в невозмущенном состоянии мембрана является плоской, а окружающая среда не оказывает сопротивления колебаниям мембраны. Рассмотреть случаи:

а) мембрана жестко закреплена на границе L;

б) мембрана свободна на L;

в) на части L_1 границы L мембрана закреплена жестко, а на остальной части L_2 границы L она свободна.

1.29. Поставить краевую задачу о колебании круглой однородной мембраны, закрепленной по краю, в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. В момент времени $t = 0$ к поверхности мембраны приложена внешняя сила плотности $f(r,\varphi,t)$, действующая перпендикулярно плоскости невозмущенной мембраны. Начальные скорости и отклонения точек мембраны отсутствуют.

1.30. Закрепленная по краям однородная прямоугольная мембрана в начальный момент времени $t = 0$ получает удар в окрестности центральной точки, так что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{U_\varepsilon} v_0(x)\,dx = A, \qquad x = (x_1, x_2),$$

где A — некоторая постоянная, $v_0(x)$ — начальная скорость. Поставить краевую задачу о свободных колебаниях.

1.31. Пусть электрическая цепь состоит из сопротивления R, самоиндукции L и емкости C. В момент времени $t = 0$ в цепь включается э. д. с. E_0. Показать, что сила тока $i(t)$ в цепи удовлетворяет уравнению

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = E_0, \qquad t > 0.$$

1.32. Рассмотрим электромагнитное поле в некоторой среде. Исходя из уравнений Максвелла вывести уравнения, которым удовлетворяют компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей для случаев:

а) плотность зарядов $\rho = 0$, $\varepsilon = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\boldsymbol{J} = \lambda\boldsymbol{E}$ (закон Ома);

б) среда — вакуум и токи отсутствуют.

1.33. Поставить задачу о проникновении магнитного поля в правое полупространство, заполненное средой с проводимостью σ, если начиная с момента времени $t = 0$ на поверхности $x = 0$ поддерживается напряженность магнитного поля $H = H_0 \sin \Omega t$, направленная параллельно поверхности.

1.34. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью. Рассмотреть случаи:

а) концы стержня поддерживаются при заданной температуре;

б) на концах стержня поддерживается заданный тепловой поток;

в) на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

1.35. Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде, предполагая, что поверхностями равной плотности в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные к оси x. Написать граничные условия, предполагая, что диффузия происходит в плоском слое $0 \leq x \leq l$. Рассмотреть случаи:

а) на граничных плоскостях концентрация диффундирующего вещества поддерживается равной нулю;

б) граничные плоскости непроницаемы;

в) граничные плоскости полупроницаемы, причем диффузия через эти плоскости происходит по закону, подобному закону Ньютона для конвективного теплообмена.

1.36. Вывести уравнение диффузии распадающегося газа (количество распавшихся молекул в единицу времени в данной точке пропорционально плотности с коэффициентом пропорциональности $\alpha > 0$).

1.37. Дан тонкий однородный стержень длиной l, начальная температура которого $f(x)$. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня, если на конце $x = 0$ поддерживается постоянная температура u_0, а на боковой поверхности и на конце $x = l$ происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой нулевой температуры.

1.38. Поставить задачу об определении температуры в бесконечном тонком теплоизолированном стержне, по которому с момента $t=0$ в положительном направлении со скоростью v_0 начинает двигаться точечный тепловой источник, дающий q единиц тепла в единицу времени.

1.39. Поставить краевую задачу об остывании тонкого однородного кольца радиуса R, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей заданную температуру. Неравномерностью распределения температуры по толщине кольца пренебречь.

1.40. Вывести уравнение диффузии взвешенных частиц с учетом оседания, предполагая, что скорость частиц, вызываемая силой тяжести, постоянна, а плотность частиц зависит только от высоты z и от времени t. Написать граничное условие, соответствующее непроницаемой перегородке.

1.41. Поставить краевую задачу об остывании равномерно нагретого стержня формы усеченного конуса (искривлением изотермических поверхностей пренебрегаем), если концы стержня теплоизолированы, а на боковой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

1.42. Растворенное вещество с начальной плотностью $c_0 = \mathrm{const}$ диффундирует из раствора, заключенного между плоскостями $x = 0$ и $x = h$, в растворитель, ограниченный плоскостями $x = h$, $x = l$. Поставить краевую задачу для процесса выравнивания плотности, предполагая, что границы $x = 0$, $x = l$ непроницаемы для вещества.

1.43. Внутри однородного шара начиная с момента времени $t = 0$ действуют источники тепла с равномерно распределеннной постоянной плотностью Q. Поставить краевую задачу о распределении температуры при $t > 0$ внутри шара, если начальная температура любой точки шара зависит только от расстояния этой точки до центра шара. Рассмотреть случаи:

а) на поверхности шара поддерживается нулевая температура;

б) на поверхности шара происходит теплообмен (по закону Ньютона) с окружающей средой нулевой температуры.

1.44. Дан однородный шар радиуса R с начальной температурой, равной нулю. Поставить краевую задачу о распределении температуры при $t > 0$ внутри шара, если:

а) шар нагревается равномерно по всей поверхности постоянным тепловым потоком q;

б) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой зависит только от времени.

1.45. Начальная температура неограниченной пластины толщины $2h$ равна нулю. Поставить краевую задачу о распределении температуры при $t > 0$ по толщине пластины, если:

а) пластина нагревается с обеих сторон равными постоянными тепловыми потоками q;

б) в пластине начиная с момента времени $t = 0$ действует источник тепла с постоянной плотностью Q, а ее основания поддерживаются при температуре, равной нулю.

1.46. Неограниченный цилиндр радиуса R имеет начальную температуру $f(r)$. Поставить краевую задачу о радиальном распространении тепла, если:

а) боковая поверхность поддерживается при постоянной температуре;

б) с боковой поверхности происходит лучеиспускание в окружающую среду нулевой температуры.

1.47. Дана тонкая прямоугольная пластина со сторонами l, m, для которой известно начальное распределение температуры. Поставить краевую задачу о распространении тепла в пластине, если боковые стороны поддерживаются при температуре

$$u|_{y=0} = \varphi_1(x), \qquad u|_{y=m} = \varphi_2(x),$$
$$u|_{x=0} = \psi_1(x), \qquad u|_{x=l} = \psi_2(x).$$

1.48. Начальное распределение температуры в однородном шаре задано функцией $f(r, \theta, \varphi)$. Поставить краевую задачу о распределении тепла в шаре, если поверхность шара поддерживается при постоянной температуре u_0.

1.49. Два полуограниченных стержня, сделанных из разных материалов, в начальный момент времени приведены в соприкосновение своими концами. Поставить краевую задачу о распределении тепла в бесконечном стержне, если известны начальные температуры каждого из двух полуограниченных стержней.

1.50. Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры в тонкой прямоугольной пластине $OACB$ со сторонами $OA = a$, $OB = b$, если:

а) на боковых сторонах пластины поддерживаются заданные температуры;

б) на сторонах OA и OB заданы тепловые потоки, а стороны BC и AC теплоизолированы.

1.51. На плоскую мембрану, ограниченную кривой L, действует стационарная поперечная нагрузка с плотностью $f(x, y)$. Поставить краевую задачу об отклонении точек мембраны от плоскости, если:

а) мембрана закреплена на краю;

б) край мембраны свободен;

в) край мембраны закреплен упруго.

1.52. Дан цилиндр с радиусом основания R и высотой h. Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры внутри цилиндра, если температура верхнего и нижнего оснований есть заданная функция от r, а боковая поверхность:

а) теплоизолирована;

б) имеет температуру, зависящую только от z;

в) свободно охлаждается в среде нужной температуры.

1.53. Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры внутренних точек полусферы, если сферическая поверхность поддерживается при заданной температуре $f(\varphi, \theta)$, а основание полусферы — при нулевой температуре.

1.54. Шар радиуса R нагревается плоскопараллельным потоком тепла плотности q, падающим на его поверхность, и отдает тепло в окружающую среду в соответствии с законом Ньютона. Поставить краевую задачу о распределении температуры внутренних точек шара.

1.55. Пусть $n(x, \boldsymbol{s}, t)$ — плотность частиц в точке x, летящих с постоянной скоростью v в направлении $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ в момент времени t; обозначим через $\alpha(x)$ коэффициент поглощения и $h(x)$ — коэффициент умножения в точке x. Предполагая рассеяние в каждой точке x изотропным, показать, что $n(x, \boldsymbol{s}, t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению переноса

$$\frac{1}{v}\frac{\partial n}{\partial t} + (\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} n) + \alpha(x)\, n = \frac{\beta(x)}{4\pi} \int\limits_{|\boldsymbol{s}'|=1} n(x, \boldsymbol{s}', t)\, d\boldsymbol{s}' + F,$$

где $F(x, \boldsymbol{s}, t)$ — плотность источников, $\beta(x) = \alpha(x)\, h(x)$.

1.56. Поставить краевую задачу для уравнения задачи 1.55, считая, что задано начальное распределение плотности и задан падающий поток частиц на границу S области G.

1.57. Показать, что для решения $n(x, s)$ стационарной краевой задачи

$$(s, \operatorname{grad} \boldsymbol{n}) + \alpha(x)\, n = \frac{\beta(x)}{4\pi} \int\limits_{|s'|=1} n(x, s')\, ds' + F(x),$$

$$n|_S = 0, \quad \text{если} \quad (s, \boldsymbol{n}) < 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к S, средняя плотность

$$n_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|s|=1} n(x, s)\, ds$$

удовлетворяет интегральному уравнению Пайерлса

$$n_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-|x-x'|}}{|x-x'|^2} \left(\int\limits_0^1 \alpha\,[tx + (1-t)\,x']\, dt \right) [\beta(x')\, n_0(x') + F(x')]\, dx'.$$

1.58. Разлагая решение $n(x, s)$ стационарной краевой задачи 1.57 в ряд по сферическим функциям от s, удерживая только члены с нулевой и первыми гармониками, показать, что функция

$$n_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|s|=1} n(x, s)\, ds$$

есть решение краевой задачи (диффузное приближение)

$$-\frac{1}{3}\operatorname{div}\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{grad}h_0\right)+(1-h)\,h_0=\frac{f}{\alpha},\qquad \left(n_0+\frac{2}{3\alpha}\frac{\partial n_0}{\partial n}\right)\Big|_S=0.$$

Ответы к § 1

1.1. $Tu_{xx}+f(x)=0,\ 0<x<l,\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$, где $f(x)$ — плотность нагрузки.

1.2. $\rho u_{tt}=T_0u_{xx},\ 0<x<l,\ x\neq x_0,\ t>0,\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$, $u(x_0+0,t)=u(x_0-0,t),\quad u_x(x_0+0,t)-u_x(x_0-0,t)=\dfrac{m}{T_0}u_{tt}(x_0,t)$.

1.3. $\rho u_{tt}=Tu_{xx}-\alpha u,\ 0<x<l,\ t>0$, где α — коэффициент упругости среды.

1.4. $\theta_{tt}=a^2\theta_{xx},\ 0<x<l,\ 0<t<\infty,\ \theta(x,0)=f(x),\ \theta_t(x,0)=$ $=F(x),\ 0\le x\le l$, где $\theta(x,t)$ — угол поворота сечения стержня с координатой x в момент времени t, $a^2=GJ/\Phi$, где G — модуль сдвига, J — полярный момент инерции поперечного сечения относительно точки, в которой ось пересекает это поперечное сечение, Φ — осевой момент инерции единицы длины стержня. Граничные условия:

а) $\theta_x(0,t)=\theta_x(l,t)=0$;

б) $\theta(0,t)=\theta(l,t)=0$;

в) $(\theta_x-h\theta)|_{x=0}=0,\ (\theta_x+h\theta)|_{x=l}=0$, где $h=k/(GJ)$, k — жесткость упругого закрепления.

1.5. $u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0,\ 0<x<l,\ t>0,\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=$ $=F(x),\ 0\le x\le l,\ u(0,t)=u_x(0,t)=u_{xx}(l,t)=u_{xxx}(l,t)=0$, где $a^2=EJ/(\rho S)$, J — геометрический момент инерции поперечного сечения относительно его средней линии, перпендикулярной к плоскости колебаний.

1.6. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0,\ a^2=\gamma p_0/\rho_0$ — скорость звука, $u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=v,\quad 0\le x\le l,\quad u(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0,\quad t>0$.

1.7. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ a^2=\gamma p_0/\rho_0,\ 0<x<l,\ t>0,\ u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=F(x),\ 0\le x\le l$. Краевые условия:

а) $u(0,t)=u(l,t)=0$;

б) $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$;

в) $(u_x-hu)|_{x=0}=0,\ (u_x+hu)|_{x=l}=0$, где $h=\nu/(S\gamma p_0)$, где S — площадь поперечного сечения трубки.

1.8. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0,\ u(0,t)=\varphi(t),\ u_x(l,t)=$ $=\Phi(t)/(ES),\quad t>0,\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le l,\quad a^2=E/\rho$.

1.9. $u_{tt}=a^2u_{xx}-2\nu^2u_t,\ 0<x<l,\ t>0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=$ $=\psi(x),\ 0\le x\le l,\ u(0,t)=u(l,t)=0,\ t>0$, где $2\nu^2=k/\rho$, k — коэффициент трения.

1.10. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[S(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2},\ a^2=\dfrac{\rho S}{E}$.

1.12. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $0 < x < l$, $t > 0$, $a^2 = \frac{\omega^2}{2}$, $|u(0,t)| < \infty$, $u(l,t) = 0$, $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = F(x)$, $0 \le x \le l$.

1.13. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \ne 0$, $t > 0$, $a^2 = T_0/\rho$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $x \ne 0$; условие в точке $x = 0$ имеет вид:

а) $-m_0 u_{tt}(0,t) + T_0[u_x(+0,t) - u_x(-0,t)] + F_0 \sin \Omega t = 0$, $t > 0$;

б) $u(-0,t) = u(+0,t)$, $-m_0 u_{tt}(0,t) + T_0[u_x(+0,t) - u_x(-0,t)] = 0$, $t > 0$, $u(-0,0) = u(+0,0) = 0$, $m_0 u_t(-0,0) = m_0 u_t(+0,0) = p_0$;

в) $u(-0,t) = u(+0,t)$, $t > 0$, $m_0 u_{tt}(0,t) + T_0[u_x(+0,t) - u_x(-0,t)] - k^2 u(0,t) = 0$, $m_0 u_t(-0,0) = m_0 u_t(+0,0) = p_0$, $u(-0,0) = u(+0,0) = 0$.

1.14. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $a^2 = E/\rho$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $0 \le x \le l$, $u(0,t) = 0$, $(ESu_x - ku_t)|_{x=l} = 0$, $t > 0$, где k — коэффициент трения для конца стержня $x = l$.

1.15. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \ne x_i$, $i = 1,\dots,n$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $u(x_i - 0,t) = u(x_i + 0,t)$, $u_x(x_i + 0,t) - u_x(x_i - 0,t) = \frac{m_i}{T} u_{tt}(x_i,t)$, $t > 0$, $i = 1,\dots,n$; $u|_{t=0} = f(x)$, $u_t|_{t=0} = F(x)$, $0 \le x \le l$.

1.16. $\left.\begin{aligned} u^1_{tt} &= a_1^2 u^1_{xx}, & -\infty < x < 0 \\ u^2_{tt} &= a_2^2 u^2_{xx}, & 0 < x < +\infty \end{aligned}\right\}$ $t > 0$, $u^1(0,t) = u^2(0,t)$,

$E_1 u^1_x(0,t) = E_2 u^2_x(0,t)$, $t > 0$, $u^1(x,0) = f(x)$, $u^1_t(x,0) = F(x)$, $-\infty < x < 0$, $u^2(x,0) = f(x)$, $u^2_t(x,0) = F(x)$, $x > 0$, где u^1, u^2 — смещение точек левого и правого стержней, $a_i^2 = E_i/\rho_i$, $i = 1, 2$.

1.18. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $0 < x < l$, $t > 0$, $|u(0,t)| < \infty$, $u(l,t) = 0$, $t > 0$, $u|_{t=0} = f(x)$, $u_t|_{t=0} = F(x)$, $0 \le x \le l$.

1.19. $\Delta\Phi^{(l)} = 0$, $r > R$, $\Delta\Phi^{(i)} = 0$, $0 \le r < R$, $\operatorname{grad}\Phi = H$, $\Phi^l_r|_{r=R} = \Phi^{(i)}_r|_{r=R}$, $\Phi^{(l)}_\varphi|_{r=R} = \left.\left(\Phi^i_\varphi + \frac{4\pi}{c} j_{\text{пов}}\right)\right|_{r=R}$, $|\Phi^i(0,t)| < \infty$, $j_{\text{пов}} = \frac{J}{2\pi R}$ — поверхностная плотность тока, а $\Phi^{(i)}, \Phi^{(l)}$ — потенциал магнитного поля внутри и вне проводника соответственно.

1.20. $J_x = -cv_t$, $v_x = -LJ_t$, $0 < x < l$, $t > 0$, $v|_{t=0} = v_0$, $v(0,t) = \frac{1}{c}\int_0^t J\,dt$ на заземленном конце, $v_x(l,t) = 0$ — на изолированном.

1.21. $\theta_{tt} = a^2\theta_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $\theta|_{t=0} = \alpha x/l$, $\theta_t|_{t=0} = 0$, $0 \le x \le l$, $\theta|_{x=0} = 0$, $\theta_x|_{x=l} = -\frac{\Phi}{JG}\theta_{tt}$, где постоянные a^2, Φ, J, G имеют тот же смысл, что и в задаче 1.4.

1.22. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + g$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, $0 \le \le x \le l$, $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$, $t > 0$, $a^2 = E/\rho$.

1.23. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + g$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$, $0 \le \le x \le l$, $u|_{x=0} = 0$, $\dfrac{Q}{g} u_{tt}|_{x=l} = -ESu_x|_{x=l} + Q$.

1.25. $u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r\right)$, $0 < r < R$, $t > 0$, $u(r,0) = f(r)$, $u_t(r,0) = F(r)$, $0 \le r \le R$, $|u(0,t)| < \infty$, $u_r|_{r=R} = 0$.

1.26. $\Delta\varphi = 0$, $r > R$, $t > 0$, $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$, $t > 0$, $\lim\limits_{r\to\infty} v = \lim\limits_{r\to\infty} \operatorname{grad}\varphi = = v_0$, где v_0 — скорость потока на бесконечности.

1.27. $u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \dfrac{2}{r} u_r\right)$, $0 \le r < R$, $t > 0$, $u(r,0) = f(r)$, $u_t|_{t=0} = F(r)$, $0 \le r \le R$, $|u(0,t)| < \infty$, $u_r|_{r=R} = 0$, где $a^2 = = \gamma p_0/\rho_0$.

1.29. $u_{tt} + ku_t = a^2 \Delta u + \dfrac{f(r,\varphi,t)}{\rho}$, $0 \le r < R$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $t > 0$, $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$, $|u(0,\varphi,t)| < \infty$, $u(R,\varphi,t) = 0$, где $a^2 = T/\rho$, $k = \alpha/\rho$, α — коэффициент упругого сопротивления среды.

1.32. а) $u_{tt} - a^2\Delta u + \dfrac{4\pi\lambda}{\varepsilon} u_t = 0$, $a^2 = \dfrac{c^2}{\varepsilon\mu}$;

б) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)\varphi_0 = -\dfrac{4\pi c^2}{\varepsilon^2\mu}\rho$, $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)\boldsymbol{\varphi} = 0$, $\dfrac{\mu\varepsilon}{c}\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial t} - \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} = 0$,

где $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$ — напряженность электрического поля, $\boldsymbol{H} = = (H_1, H_2, H_3)$ — напряженность магнитного поля, $\rho(x)$ — плотность зарядов, ε — диэлектрическая постоянная среды, μ — коэффициент магнитной проницаемости среды, $\boldsymbol{I}(x,t) = (I_1, I_2, I_3)$ — ток проводимости.

В случае а) для компонент $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ получается одно и то же телеграфное уравнение.

Для случая б) вводится четырехкомпонентный электромагнитный потенциал $(\varphi_0, \boldsymbol{\varphi})$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, с помощью которого решение уравнений Максвелла ищется в виде $\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\varphi_0 - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}$, $\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{\varphi}$.

1.33. $H_{xx} = \dfrac{4\pi\sigma}{c^2} H_t + \dfrac{1}{c^2} H_{tt}$, $x > 0$, $t > 0$, $H|_{t=0} = 0$, $H_t|_{t=0} = 0$, $x > 0$, $H|_{x=0} = H_0 \sin\Omega t$, $t > 0$, где c — скорость света.

1.34. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$, $0 \le x \le l$, краевые условия:

а) $u|_{x=0} = \varphi_1(t)$, $u|_{x=l} = \varphi_2(t)$, $t > 0$;

б) $-kSu_x|_{x=0} = q_1(t)$, $kSu_x|_{x=l} = \varphi_2(t)$, $t > 0$;

в) $u_x|_{x=0} = h[u(0,t) - \varphi_1(t)]$, $u_x|_{x=l} = -h[u(l,t) - \varphi_2(t)]$, $a^2 = = k/(c\rho)$ — теплоемкость, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ в случае а) — температура концов стержня, в случае б) — температура окружающего пространства на концах стержня, q_i — тепловые потоки на концах стержня.

1.35. $u_t = Du_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq l$, граничные условия:

а) $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t > 0$;

б) $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$, $t > 0$;

в) $u_x|_{x=0} = h[u(0,t) - \varphi_1(t)]$, $t > 0$, $u_x|_{x=l} = -h[u(l,t) - \varphi_2(t)]$, где $\alpha/D = h$, α — коэффициент проницаемости на концах.

1.36. $u_t = D\Delta u - \alpha u$, $t > 0$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$.

1.37. $u_t = a^2 u_{xx} - \dfrac{\alpha p}{c\rho S} u$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u|_{t=0} = f(x)$, $0 \leq x \leq l$, $u|_{x=0} = u_0$, $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$, $t > 0$, p — периметр поперечного сечения стержня, $h = \alpha/k$, $a^2 = k/(c\rho)$.

1.38. $u_t = a^2 u_{xx} + \dfrac{q}{c}\,\delta(x - v_0 t)$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $a^2 = k/(c\rho)$.

1.39. $u_t = a^2 u_{xx} - b(u - u_0)$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq l$, $u|_{x=0} = u|_{x=l}$, $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l}$, $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $b = \dfrac{\alpha P}{c\rho S}$, где P — периметр поперечного сечения кольца, $x = R\theta$, θ — угловая координата.

1.40. $u_t = Du_{zz} - vu_z$, $z > z_0$, $t > 0$, $(Du_z - vu)|_{z=z_0} = 0$, $t > 0$, где v — скорость оседания частиц.

1.41. $\left(1 - \dfrac{x}{H}\right)^2 \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \dfrac{x}{H}\right)^2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right] - \dfrac{2\alpha(1 - x/H)}{c\rho r_0 \cos\gamma} u$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u|_{t=0} = u_0$, $0 \leq x \leq l$, $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$, $t > 0$, где $a^2 = k/(c\rho)$, H — полная высота конуса, γ — половина угла раствора конуса, r_0 — радиус большого основания, l — высота усеченного конуса.

1.42. $c_t = Dc_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $c(x,0) = \begin{cases} c_0, & 0 < x < h, \\ 0, & h < x < l. \end{cases}$

1.43. $u_t = a^2\left(u_{rr} + \dfrac{2}{r} u_r\right) + \dfrac{Q}{c\rho}$, $0 \leq r < R$, $t > 0$, $u|_{t=0} = f(r)$, $0 \leq t \leq R$, $|u(0,t)| < \infty$; граничные условия:

а) $u(R,t) = 0$;

б) $(u_r + Hu)|_{r=R} = 0$, $H = \alpha/k$, $a^2 = k/(c\rho)$.

1.44. $u_t = a^2\left(u_{rr} + \dfrac{2}{r} u_r\right)$, $0 \leq r < R$, $t > 0$, $u|_{t=0} = 0$, $0 \leq r \leq R$; граничные условия:

а) $|u(0,t)| < \infty$, $u_r(R,t) = q/k$, $t > 0$;

б) $|u(0,t)| < \infty$, $(u_r + Hu)|_{r=R} = \varphi(t)$, $t > 0$, $H = \alpha/k$, $a^2 = k/(c\rho)$.

1.45. а) $u_t = a^2 u_{xx}$, $-h < x < h$, $t > 0$, $u|_{t=0} = 0$, $(ku_x + q)|_{x=-h} = 0$, $(-ku_x + q)|_{x=h} = 0$;

б) $u_t = a^2 u_{xx} + \dfrac{Q}{c\rho}$, $-h < x < h$, $t > 0$, $u|_{t=0} = 0$, $u|_{x=\pm h} = 0$, $a^2 = k/(c\rho)$.

1.49. $u_t = a(x)\, u_{xx}$, $x \neq 0$, $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u(-0,t) = u(+0,t)$, $k_1 u_x(-0,t) = k_2 u_x(+0,t)$, $a(x) = \begin{cases} a_1^2, & x < 0, \\ a_2^2, & x > 0, \end{cases}$ $a_i^2 = \dfrac{k_i}{c_i \rho_i}$, $i = 1, 2$.

§ 2. Классификация уравнений второго порядка

Уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, \operatorname{grad} u) = 0$$

в каждой фиксированной точке x_0 можно привести к каноническому виду неособым линейным преобразованием $\xi = B^T x$, где B — такая матрица, что преобразование $y = B\eta$ приводит квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\, y_i y_j$$

к каноническому виду. (Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду, например, методом выделения полных квадратов.)

2.1. Привести к каноническому виду уравнения:

1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$;
2) $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$;
3) $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$;
4) $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0$;
5) $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0$;
6) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0$;
7) $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0$;
8) $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0$;
9) $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} - 4u_{yz} + 2u_{yt} + u_{zz} = 0$;
10) $u_{xx} + 2u_{xz} - 2u_{xt} + u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 2u_{tt} = 0$;
11) $u_{x_1x_1} + 2\sum\limits_{k=2}^{n} u_{x_kx_k} - 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{x_kx_{k+1}} = 0$;
12) $u_{x_1x_1} - 2\sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^k u_{x_{k-1}x_k} = 0$; 13) $\sum\limits_{k=1}^{n} k u_{x_kx_k} + 2\sum\limits_{l<k} l u_{x_lx_k} = 0$;
14) $\sum\limits_{k=1}^{n} u_{x_kx_k} + \sum\limits_{l<k} l u_{x_lx_k} = 0$; 15) $\sum\limits_{l<k} u_{x_lx_k} = 0$.

Уравнение

$$a(x,y)\,u_{xx} + 2b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} = \Phi(x,y,u,u_x,u_y), \tag{1}$$

где $|a| + |b| + |c| \neq 0$, принадлежит (в точке или области):

гиперболическому типу, если $b^2 - ac > 0$;

параболическому типу, если $b^2 - ac = 0$;

эллиптическому типу, если $b^2 - ac < 0$.

Для уравнения (1) характеристическое уравнение

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)\,dx\,dy + c(x,y)(dx)^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$a\,dy - \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right)dx = 0, \tag{2}$$

$$a\,dy - \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right)dx = 0. \tag{3}$$

Уравнения гиперболического типа: $b^2 - ac > 0$. Общие интегралы $\varphi(x,y) = c_1$, $\psi(x,y) = c_2$ уравнений (2) и (3) действительны и различны. Они определяют два различных семейства действительных характеристик для уравнения (1). Заменой переменных $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ уравнение (1) приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Уравнения параболического типа: $b^2 - ac = 0$. Уравнения (2) и (3) совпадают. Общий интеграл $\varphi(x,y) = c$ уравнения (2) определяет семейство действительных характеристик для уравнения (1). Заменой переменных $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, где $\psi(x,y)$ — любая гладкая функция такая, что эта замена переменных взаимно однозначна в рассматриваемой области, уравнение (1) приводится к каноническому виду

$$u_{\eta\eta} = \Phi_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Уравнения эллиптического типа: $b^2 - ac < 0$. Пусть $\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = c$ — общий интеграл уравнения (2), где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — действительные функции*). Тогда заменой переменных $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ уравнение (1) приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

2.2. В каждой области, где сохраняется тип уравнения, привести к каноническому виду уравнения:

1) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$;

2) $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$;

---

*) Если a, b, c — аналитические функции, то существование общего интеграла уравнения (2) вытекает из теоремы Ковалевской.

3) $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0$;
4) $u_{xx} - xu_{yy} = 0$;
5) $u_{xx} - yu_{yy} = 0$;
6) $xu_{xx} - yu_{yy} = 0$;
7) $yu_{xx} - xu_{yy} = 0$;
8) $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$;
9) $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$;
10) $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$;
11) $(1+x^2)\, u_{xx}+(1+y^2)\, u_{yy}+yu_y = 0$;
12) $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} = 0$;
13) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x)\, u_{yy} = 0$;
14) $y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$;
15) $x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} = 0$.

Пусть коэффициенты уравнения (1) непрерывны в некоторой области D. Функция $u(x, y)$ называется *решением уравнения* (1), если она принадлежит классу $C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D. Множество всех решений уравнения (1) называется *общим решением уравнения* (1).

2.3. Найти общее решение уравнений с постоянными коэффициентами:

1) $u_{xy} = 0$;
2) $u_{xx} - a^2u_{yy} = 0$;
3) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$;
4) $u_{xy} + au_x = 0$;
5) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$;
6) $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0$;
7) $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}$;
8) $u_{xx} + 2au_{xy} + a^2u_{yy} + u_x + au_y = 0$.

2.4. Доказать, что уравнение с постоянными коэффициентами

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

заменой $u(x, y) = v(x, y)\, e^{-bx-ay}$ приводится к виду $v_{xy} + (c - ab)\, v = 0$.

2.5. Доказать, что общее решение уравнения $u_{xy} = u$ имеет вид

$$u(x, y) = \int_0^x f(t)\, J_0\left(2i\sqrt{y(x-t)}\right) dt + \int_0^y g(t)\, J_0\left(2i\sqrt{x(y-t)}\right) dt + [f(0) + g(0)]\, J_0\,(2i\sqrt{xy}),$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя, а f и g — произвольные функции класса C^1.

2.6. Доказать, что общее решение уравнения $u_{xy} = F(x, y)$, где $F \in C(|x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b)$, имеет вид

$$u(x, y) = f(x) + g(y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F(\xi, \eta)\, d\eta\, d\xi,$$

где f и g — произвольные функции класса C^2.

2.7. Доказать, что общее решение уравнения $u_{xy} + A(x, y)\, u_x = 0$, где $A(x, y) \in C^1(|x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b)$, имеет вид

$$u(x, y) = f(y) + \int_{x_0}^{x} g(\xi) \exp\left\{-\int_{y_0}^{y} A(\xi, \eta)\, d\eta\right\} d\xi,$$

где f и g — произвольные функции классов C^2 и C^1 соответственно.

2.8. Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} - \frac{1}{x-y} u_x + \frac{1}{x-y} u_y = 0$$

имеет вид $u(x, y) = \dfrac{f(x) + g(y)}{x - y}$, где f и g — произвольные функции из класса C^2.

2.9. Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} - \frac{n}{x-y} u_x + \frac{m}{x-y} u_y = 0,$$

где n и m — натуральные числа, имеет вид

$$u(x, y) = \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}} \left[\frac{f(x) + g(y)}{x - y}\right],$$

где f и g — произвольные функции из классов C^{m+1} и C^{n+1} соответственно.

2.10. Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} + \frac{n}{x-y} u_x - \frac{m}{x-y} u_y = 0,$$

где n и m — неотрицательные целые числа, имеет вид

$$u(x, y) = (x - y)^{n+m+1} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left[\frac{f(x) + g(y)}{x - y}\right],$$

где f и g — произвольные функции из классов C^{n+2} и C^{m+2} соответственно.

2.11. В каждой из областей, где сохраняется тип уравнения, найти общее решение уравнений:

1) $y u_{xx} + (x - y) u_{xy} - x u_{yy} = 0$;
2) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$;
3) $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2x u_x = 0$;
4) $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$;
5) $u_{xy} - x u_x + u = 0$;
6) $u_{xy} + 2xy u_y - 2xu = 0$;
7) $u_{xy} + u_x + y u_y + (y - 1) u = 0$;
8) $u_{xy} + x u_x + 2y u_y + 2xyu = 0$.

Ответы к § 2

2.1. 1) $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$; $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = x - \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z$;

2) $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\eta = 0$; $\xi = \frac{1}{2} x$, $\eta = \frac{1}{2} x + y$, $\zeta = -\frac{1}{2} x - y + z$;

3) $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0$; $\xi = x + y$, $\eta = y - x$, $\zeta = y + z$;

4) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$; $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=2x-y+z$;

5) $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}-u_{\zeta\zeta}=0$; $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$;

6) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}+u_{\tau\tau}=0$; $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=x-y+z$, $\tau=2x-2y+z+t$;

7) $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}+u_{\tau\tau}=0$; $\xi=x+y$, $\eta=y-x$, $\zeta=z$, $\tau=y+z+t$;

8) $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}-u_{\tau\tau}=0$; $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, $\zeta=-2y+z+t$, $\tau=z-t$;

9) $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}=0$; $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=2x-y+z$, $\tau=x+z+t$;

10) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$; $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=-x-y+z$, $\tau=x-y+t$;

11) $\sum\limits_{k=1}^{n}u_{\xi_k\xi_k}=0$, $\xi_k=\sum\limits_{l=1}^{k}x_l$, $k=1,2,\ldots,n$;

12) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}u_{\xi_k\xi_k}=0$, $\xi_k=\sum\limits_{l=1}^{k}x_l$, $k=1,2,\ldots,n$;

13) $\sum\limits_{k=1}^{n}u_{\xi_k\xi_k}=0$, $\xi_1=x_1$, $\xi_k=x_k-x_{k-1}$, $k=2,3,\ldots,n$;

14) $\sum\limits_{k=1}^{n}u_{\xi_k\xi_k}=0$, $\xi_k=\sqrt{\frac{2k}{k+1}}\Big(x_k-\frac{1}{k}\sum\limits_{l<k}x_l\Big)$, $k=1,2,\ldots,n$;

15) $u_{\xi_1\xi_1}-\sum\limits_{k=2}^{n}u_{\xi_k\xi_k}=0$, $\xi_1=\frac{3-n}{\sqrt{2(n-1)}}x_1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\sum\limits_{k=2}^{n}x_k$, $\xi_k=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\sqrt{2}\,x_k$, $k=2,3,\ldots,n$.

2.2. 1) $u_{\xi\eta}-\frac{1}{16}(u_\xi-u_\eta)=0$, $\xi=x-y$, $\eta=3x+y$;

2) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\xi=0$, $\xi=x$, $\eta=3x+y$;

3) $u_{\eta\eta}+u_\xi=0$, $\xi=x-2y$, $\eta=x$;

4) $u_{\xi\eta}+\frac{1}{6(\xi+\eta)}(u_\xi+u_\eta)=0$, $\xi=\frac{2}{3}x^{3/2}+y$, $\eta=\frac{2}{3}x^{3/2}-y$, $x>0$; $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}u_\xi=0$, $\xi=\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$, $\eta=y$, $x<0$;

5) $u_{\xi\eta}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0$, $\xi=x+2\sqrt{y}$, $\eta=x-2\sqrt{y}$, $y>0$; $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}u_\eta=0$, $\xi=x$, $\eta=2\sqrt{-y}$, $y<0$;

6) $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}u_\xi+\frac{1}{\eta}u_\eta=0$, $\xi=\sqrt{|x|}$, $\eta=\sqrt{|y|}$ ($x>0$, $y>0$ или $x<0$, $y<0$); $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}u_\xi-\frac{1}{\eta}u_\eta=0$, $\xi=\sqrt{|x|}$, $\eta=\sqrt{|y|}$ ($x>0$, $y<0$ или $x<0$, $y>0$);

7) $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}u_\xi-\frac{1}{3\eta}u_\eta=0$, $\xi=|x|^{3/2}$, $\eta=|y|^{3/2}$ ($x>0$, $y>0$ или $x<0$, $y<0$); $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}u_\xi+\frac{1}{3\eta}u_\eta=0$, $\xi=|x|^{3/2}$, $\eta=|y|^{3/2}$ ($x>0$, $y<0$ или $x<0$, $y>0$);

8) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_\xi-u_\eta=0$, $\xi=\ln|x|$, $\eta=\ln|y|$ (в каждом квадранте);

9) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{2\xi}u_\xi+\dfrac{1}{2\eta}u_\eta=0$, $\xi=y^2$, $\eta=x^2$ (в каждом квадранте);

10) $u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{2(\eta^2-\xi^2)}(\eta u_\xi-\xi u_\eta)=0$, $\xi=y^2-x^2$, $\eta=y^2+x^2$ (в каждом квадранте);

11) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\operatorname{th}\xi u_\xi=0$, $\xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $\eta=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$;

12) $u_{\xi\eta}-\dfrac{1}{2(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)+\dfrac{1}{4(\xi+\eta)}(u_\xi+u_\eta)=0$, $\xi=y^2+e^x$, $\eta=$ $=y^2-e^x$ ($y>0$ или $y<0$);

13) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\cos\xi u_\eta=0$, $\xi=x$, $\eta=y-\cos x$;

14) $u_{\eta\eta}-2u_\xi=0$, $\xi=2x-y^2$, $\eta=y$;

15) $u_{\eta\eta}-\xi u_\xi=0$, $\xi=xe^y$, $\eta=y$;

2.3. 1) $f(x)+g(y)$; 2) $f(y+ax)+g(y-ax)$;
3) $f(x-y)+g(3x+y)$; 4) $f(y)+g(x)\,e^{-ay}$;
5) $x-y+f(x-3y)+g(2x+y)\,e^{(3y-x)/7}$; 6) $[f(x)+g(y)]\,e^{-bx-ay}$;
7) $e^{x+y}+[f(x)+g(y)]\,e^{3x+2y}$; 8) $f(y-ax)+g(y-ax)\,e^{-x}$.

2.11. 1) $f(x+y)+(x-y)\,g(x^2-y^2)$ ($x>-y$ или $x<-y$);

2) $f(xy)+\sqrt{|xy|}\,g\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (в каждом квадранте);

3) $f(xy)+|xy|^{3/4}g\left(\dfrac{x^3}{y}\right)$ (в каждом квадранте);

4) $xf\left(\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (в каждом квадранте);

5) $xf(y)-f'(y)+\displaystyle\int_0^x(x-\xi)\,g(\xi)\,e^{\xi y}d\xi$ (У к а з а н и е. Обозначая $u_x=v$, получить соотношения $u=xv-v_y$, $v_{xy}-xv_x=0$.);

6) $2yg(x)+\dfrac{1}{x}g'(x)+\displaystyle\int_0^y(y-\xi)\,f(\xi)\,e^{-x^2\xi}d\xi$ (У к а з а н и е. Обозначая $u_y=v$, получить соотношения $u=\dfrac{1}{2x}v_x+yv$, $v_{xy}+2xyv_y=0$.);

7) $e^{-y}\left[yf(x)+f'(x)+\displaystyle\int_0^y(y-\eta)\,g(\eta)\,e^{-x\eta}d\eta\right]$ (У к а з а н и е. Обозначая $u_y+u=v$, получить соотношения $u=v_x+yv$, $v_{xy}+v_x+$ $+yv_y+yv=0$.);

8) $e^{-xy}\left[yf(x)+f'(x)+\displaystyle\int_0^y(y-\eta)\,g(\eta)\,e^{-x\eta}d\eta\right]$ (У к а з а н и е. Обозначая $u_y+xu=v$, получить соотношения $u=v_x+2yv$, $(v_y+xv)_x+$ $+2y(v_y+xv)=0$.).

Глава II

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 3. Измеримые функции. Интеграл Лебега

1. Измеримые функции. Множество $E \subset R^n$ называется *множеством* (n-мерной) *меры нуль*, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти покрывающее его счетное множество открытых (n-мерных) кубов, сумма объемов которых меньше ε.

Пусть $Q \subset R^n$ — область. Если некоторое свойство выполнено всюду в Q, за исключением, быть может, множества меры нуль, то говорят, что это свойство выполнено *почти всюду* в Q (п. в. в Q). Заданная в области Q функция $f(x)$ называется *измеримой* в Q, если она является пределом п. в. в Q сходящейся последовательности функций из $C(\overline{Q})$. Если $f(x) = g(x)$ п. в. в Q, то говорят, что функции *эквивалентны* в Q.

3.1. Установить, что следующие множества являются множествами меры нуль:

1) конечное множество точек;
2) счетное множество точек;
3) пересечение счетного множества множеств меры нуль;
4) объединение счетного множества множеств меры нуль;
5) гладкая $(n-1)$-мерная поверхность;
6) гладкая k-мерная поверхность $(k \leq n-1)$.

В задачах 3.2–3.9 доказать утверждения.

3.2. Функция Дирихле $\chi(x)$ (равная 1, если все координаты точки x рациональны, и 0 в противоположном случае) равна нулю п. в.

3.3. Функция $f(x) = \dfrac{1}{1-|x|}$ почти всюду непрерывна в R^n.

3.4. Последовательность функций $f_n(x) = |x|^n$ в шаре $|x| \leq 1$ сходится к нулю п. в.

3.5. Теорема. *Для того чтобы множество E было множеством меры нуль, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое его покрытие счетной системой открытых кубов с конечной суммой объемов, при котором каждая точка E оказывается покрытой бесконечным множеством кубов.*

3.6. Функция $f \in C(Q)$ измерима.

3.7. Если $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны и $g(x)$ измерима в Q, то $f(x)$ тоже измерима в Q.

3.8. Предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций является измеримой функцией.

3.9. Функция, непрерывная в $\bar{Q}$ за исключением подмножества, составленного из конечного (или счетного) числа гладких k-мерных поверхностей ($k \leq n-1$), измерима в Q.

3.10. Установить измеримость следующих функций, заданных на отрезке $[-1,1]$;

а) $y = \operatorname{sign} x$;

б) $y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n} \text{ при взаимно простых } m, n, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$

3.11. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы в Q. Установить измеримость следующих функций:

а) $f(x)\,g(x)$; б) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии $g(x) \neq 0$, $x \in Q$);

в) $|f(x)|$; г) $(f(x))^{g(x)}$, если $f(x) > 0$.

3.12. Пусть $f(x) \in C(Q)$ и в каждой точке $x \in Q$ существует производная f_{x_i}. Доказать, что f_{x_i} измерима в Q.

3.13. а) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы в Q. Доказать измеримость в Q функций $\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$.

б) Доказать, что всякая измеримая функция $f(x)$ есть разность двух неотрицательных измеримых функций

$$f^{+}(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad f^{-}(x) = \min\{0, -f(x)\}.$$

3.14. Доказать, что неубывающая (невозрастающая) на отрезке $[a, b]$ функция измерима.

3.15. Доказать, что если $f(x)$ измерима в Q, то существует последовательность многочленов, сходящихся к $f(x)$ п. в. в Q.

2. Интеграл Лебега. Заданную в области Q функцию $f(x)$ будем считать принадлежащей классу $L^{+}(Q)$, если существует неубывающая последовательность непрерывных в $\bar{Q}$ финитных функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к $f(x)$ п. в. в Q и такая, что последовательность интегралов (Римана) $\int\limits_Q f_n(x)\,dx$ ограничена сверху. При этом интеграл Лебега от функции $f(x) \in L^+(Q)$ определяется равенством

$$(L)\int\limits_Q f\,dx = \sup_n \int\limits_Q f_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_Q f_n\,dx.$$

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу* по области Q, если ее можно представить в виде разности $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из $L^+(Q)$. При этом *интеграл Лебега* от функции $f(x)$ определяется равенством

$$(L)\int\limits_Q f\,dx = (L)\int\limits_Q f_1\,dx - (L)\int\limits_Q f_2\,dx.$$

Комплекснозначную функцию $f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)$ будем называть *интегрируемой по Лебегу по области* Q, если функции $\operatorname{Re} f(x)$, $\operatorname{Im} f(x)$ интегрируемы по Лебегу. При этом по определению полагаем

$$(L)\int\limits_Q f\,dx = (L)\int\limits_Q \operatorname{Re} f\,dx + i\,(L)\int\limits_Q \operatorname{Im} f\,dx.$$

Множество интегрируемых по Лебегу по области Q комплекснозначных функций, отождествляемых в случае их эквивалентности, обозначается $L_1(Q)$.

Функции из $L_1(Q)$ конечны п. в. в Q. Если функция интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и ее интегралы Римана и Лебега совпадают. Поэтому в дальнейшем будем опускать (L) перед знаком интеграла; всегда под интегралом подразумевается интеграл Лебега, а под интегрируемой функцией — функция, интегрируемая по Лебегу. Более того, если функция абсолютно несобственно интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и ее интегралы Римана и Лебега совпадают.

Следующие теоремы играют важную роль в теории лебеговского интегрирования.

а) *Если функция $f(x)$ измерима в Q и $|f(x)| \le g(x)$, где $g(x) \in L_1(Q)$, то $f \in L_1(Q)$. В частности, измеримая ограниченная функция в ограниченной области Q принадлежит $L_1(Q)$.*

б) Теорема Лебега. *Если последовательность измеримых в Q функций $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ сходится к функции $f(x)$ п. в. в Q и $|f_n(x)| \le g(x)$, где $g \in L_1(Q)$, то $f \in L_1(Q)$ и $\int\limits_Q f_n(x)\,dx \longrightarrow \int\limits_Q f\,dx$ при $n \longrightarrow \infty$.*

в) Теорема Фубини. *Если $f(x,y) \in L_1(Q \times P)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in P$, где Q и P — некоторые области из R^n и R^m соответственно, то*

$$\int\limits_Q f(x,y)\,dx \in L_1(P), \qquad \int\limits_P f(x,y)\,dy \in L_1(Q)$$

и

$$\int\limits_{Q\times P} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{Q} dx \int\limits_{P} f(x,y)\,dy = \int\limits_{P} dy \int\limits_{Q} f(x,y)\,dx.$$

Если $f(x,y)$ измерима в $Q \times P$, для п. в. $x \in Q$ функция $|f(x,y)| \in$ $\in L_1(P)$ и $\int\limits_P |f(x,y)|\,dy \in L_1(Q)$, то $f(x,y) \in L_1(Q \times P)$.

В задачах 3.16–3.20 доказать утверждения.

3.16. Если $f(x) \geq 0$ и $\int\limits_Q f(x)\,dx = 0$, то $f(x) = 0$ п. в. в Q.

3.17. Если $f(x) = 0$ п. в. в Q, то $\int\limits_Q f\,dx = 0$.

3.18. Если $f, g \in L_1(Q)$, то $\alpha f + \beta g \in L_1(Q)$ при любых постоянных α и β.

3.19. Если $f \in L_1(Q)$, то $|f| \in L_1(Q)$ и

$$\left|\int\limits_Q f\,dx\right| \leq \int\limits_Q |f|\,dx.$$

3.20. Если $f \in L_1(Q)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая финитная функция $g_\varepsilon \in C(\overline{Q})$, что $\int\limits_Q |f - g_\varepsilon|\,dx < \varepsilon$.

3.21. Проверить, что функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное}, \end{cases}$$

интегрируема по Лебегу на $[0,1]$, но не интегрируема по Риману. Чему равен ее интеграл Лебега?

3.22. Найти интегралы по отрезку $[0,1]$ от следующих функций (предварительно доказав их интегрируемость):

а) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально}; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ иррационально и больше } 1/3, \\ x^3, & \text{если } x \text{ иррационально и меньше } 1/3, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально}; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{если } x \text{ иррационально и меньше } 1/2, \\ x^2, & \text{если } x \text{ иррационально и больше } 1/2, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально}; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{если } x = m/n, \text{ где } m, n \text{ взаимно просты}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} x^{-1/3}, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ x^3, & \text{если } x \text{ рационально;} \end{cases}$

е) $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$.

3.23. При каких значениях α интегрируемы по шару $|x| < 1$ следующие функции:

а) $f(x) = \dfrac{1}{|x|^\alpha}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{(1-|x|)^\alpha}$; в) $f(x) = \dfrac{x_1 x_2 \ldots x_n}{|x|^\alpha}$?

3.24. Пусть $g(x)$ — измеримая и ограниченная функция в ограниченной области Q. Показать, что функция $f(x) = \int\limits_Q \dfrac{g(\xi)}{|x-\xi|^\alpha}\, d\xi$ принадлежит $C^k(R^n)$ при $k < n - \alpha$.

3.25. Пусть $f \in L_1(Q)$. Показать, что функция

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если в точке } x\ |f(x)| < N, \\ N, & \text{если в точке } x\ |f(x)| \geq N, \end{cases}$$

интегрируема по Q и справедливо соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_Q f_N(x)\, dx = \int\limits_Q f(x)\, dx.$$

3.26. Пусть $Q = (0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1)$, а функция $f(x)$ задана в Q следующим образом:

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{|x|^4} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_2^2} & \text{при } 0 < x_1 < x_2 < 1, \\ -\dfrac{1}{x_1^2} & \text{при } 0 < x_2 < x_1 < 1, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$

1) Принадлежат ли эти функции пространству $L_1(Q)$?

2) Принадлежат ли $L_1(0,1)$ функции $\int\limits_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1$, $\int\limits_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_2$?

3) Выполняется ли равенство

$$\int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_2 = \int\limits_0^1 dx_2 \int\limits_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1?$$

3.27. На отрезке $[0,1]$ задана последовательность ступенчатых функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \dfrac{i}{2^k} \le x \le \dfrac{i+1}{2^k}, \\ 0 & \text{для остальных } x \in [0,1], \end{cases}$$

где целые числа n, k, i связаны соотношениями

$$n = 2^k + i, \qquad 0 \le i \le 2^k - 1.$$

Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n\,dx = 0$ и что $f_n(x) \not\to 0$ при $n \longrightarrow \infty$ для $x \in [0,1]$.

Множество измеримых в Q функций, квадрат модуля которых принадлежит $L_1(Q)$, называется *пространством* $L_2(Q)$ (при этом, как и в случае $L_1(Q)$; эквивалентные функции считаются отождествлеными).

В задачах 3.28–3.33 доказать утверждения.

3.28. Если $f_1, f_2 \in L_2(Q)$, то $\alpha f_1 + \beta f_2 \in L_2(Q)$ при любых постоянных α и β.

3.29. Если $f \in L_2(Q)$ и Q — ограниченная область (или область с ограниченным объемом), то $f \in L_1(Q)$.

3.30. Ни одно из включений $L_1(R^n) \subset L_2(R^n)$, $L_2(R^n) \subset L_1(R^n)$ места не имеет.

3.31. Если $f, g \in L_2(Q)$, то $f \cdot g \in L_1(Q)$.

3.32. Если $f, g \in L_2(Q)$, то имеет место неравенство Буняковского

$$\left|\int\limits_Q f \cdot g\,dx\right| \le \left(\int\limits_Q |f|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_Q |g|^2 dx\right)^{1/2}.$$

3.33. Если $f, g \in L_2(Q)$, то имеет место неравенство Минковского

$$\left(\int\limits_Q |f+g|^2 dx\right)^{1/2} \le \left(\int\limits_Q |f|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int\limits_Q |g|^2 dx\right)^{1/2}.$$

3.34. Установить принадлежность к $L_2(Q)$ следующих функций:

а) $y = x^{-1/3}$, $\quad Q = [0,1]$; $\qquad$ б) $y = \dfrac{\sin x}{x^{3/4}}$, $\quad Q = (0,1)$;

в) $y = \begin{cases} x^{-1/3}\cos x, & x \text{ иррационально}, \\ x^{-1/3}, & x \text{ рационально}, \ x \ne 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad Q = [-1,1]$;

г) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin(x_1 x_2)}{x_1^2 + x_2^2}, & |x| \ne 0, \\ 0, & |x| = 0, \end{cases} \qquad Q = (|x| < 1)$;

д) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{1/3}\operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)}, & |x| \neq 0,\ x \neq 1/k, \\ 0, & x = 0,\ x = 1/k, \end{cases}$ $\quad Q = [0,1]$.

3.35. При каких α и β функция $f(x) = \dfrac{1}{|x_1|^\alpha + |x_2|^\beta}$ принадлежит $L_2(Q)$, если $Q = \{|x_1| + |x_2| > 1\}$?

3.36. При каких α функция $r^{-\alpha}$, $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, принадлежит $L_2(Q)$, если:

а) $Q = (r < 1)$; б) $Q = (r > 1)$?

3.37. При каких α функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin |x|^2}{|x|^\alpha} & \text{при } |x| \neq 0, \\ 0 & \text{при } |x| = 0, \end{cases} \qquad |x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2},$$

принадлежит $L_2(Q)$, если $Q = (|x| < 1)$?

3.38. При каких α функция $|x|^{-\alpha}$, где $|x| = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}$, принадлежит $L_2(Q)$, если:

а) $Q = (|x| < 1)$; б) $Q = (|x| > 1)$; в) $Q = R^n$?

3.39. Пусть функция $g \in L_2(Q)$, где Q — ограниченная область. Показать, что функция $f(x) = \int\limits_Q \dfrac{g(y)}{|x-y|^\alpha}\,dy$ для $\alpha < \dfrac{n}{2}$ принадлежит пространству $C^k(\overline{Q})$ при $k < \dfrac{n}{2} - \alpha$.

3.40. Показать, что для функции $f \in L_2(Q)$ (Q — ограниченная область) по любому $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f_\varepsilon \in C(\overline{Q})$, что

$$\int\limits_Q |f - f_\varepsilon|^2 dx < \varepsilon.$$

Ответы к § 3

3.21. 0.

3.22. а) $\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{35}{108}$; в) $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{7}{24}$; г) 0; д) $\dfrac{3}{2}$; е) $1 - 2\ln 2$.

3.23. а) $\alpha < n$; б) $\alpha < 1$; в) $\alpha < 2n$.

3.26. а) 1) Нет; 2) нет; 3) нет;
б) 1) нет; 2) да; 3) нет;
в) 1) нет; 2) да; 3) нет.

3.35. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\dfrac{1}{2\alpha} + \dfrac{1}{2\beta} < 1$.

3.36. а) $\alpha < 1$; б) $\alpha > 1$.

3.37. $\alpha > \frac{7}{4}$.

3.38. а) $\alpha < \frac{n}{2}$; б) $\alpha > \frac{n}{2}$; в) ни при каких α.

§ 4. Функциональные пространства

1. Линейные нормированные пространства. *Комплексным* (*вещественным*) *линейным пространством* называется множество M, для элементов которого определены операции сложения и умножения на комплексные (вещественные) числа, не выводящие из M и обладающие свойствами:

а) $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$;

б) $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$;

в) в M существует такой элемент 0, что $0 \cdot f = 0$, для любого $f \in M$;

г) $(c_1 + c_2) f = c_1 f + c_2 f$;

д) $c(f_1 + f_2) = cf_1 + cf_2$;

е) $(c_1 c_2) f = c_1(c_2 f)$;

ж) $1 \cdot f = f$ для любых f, f_1, f_2, f_3 из M и любых комплексных (вещественных) чисел c, c_1, c_2.

Система элементов $f_1, \ldots, f_k$ из M называется *линейной независимой*, если равенство $c_1 f_1 + \ldots + c_k f_k = 0$ имеет место только при $c_1 = \ldots = c_k = 0$. В противном случае система $f_1, \ldots, f_k$ линейно зависима. Бесконечная система $f_1, f_2, \ldots$ называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Линейное пространство называется *нормированным*, если каждому его элементу f поставлено в соответствие вещественное число $\|f\|$, называемое *нормой* f, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $\|f\| \geq 0$, причем $\|f\| = 0$ лишь при $f = 0$;

б) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, (неравенство треугольника);

в) $\|cf\| = |c|\|f\|$ при произвольной постоянной c.

Для линейного нормированного пространства можно определить понятие *расстояния* между элементами $\rho(f, g) = \|f - g\|$ и понятие *сходимости по норме*: последовательность $f_1, f_2, \ldots$ сходится к некоторому элементу f ($f_n \longrightarrow f$ при $n \longrightarrow \infty$), если $\rho(f, f_n) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Последовательность $f_1, f_2, \ldots$ линейного нормированного пространства называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ при $m, n > N$.

Линейное нормированное пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность элементов имеет в этом пространстве предел. Полное линейное нормированное пространство B называется *пространством Банаха*.

Множество $R \in B$ называется *плотным* в B, если для любого элемента $f \in B$ существует последовательность $f_1, f_2, \dots$ из R, сходящаяся к f ($f_n \longrightarrow f$ при $n \longrightarrow \infty$).

4.1. Установить, что следующие множества являются линейными пространствами:

а) множество $C^k(Q)$, $0 \le k \le \infty$;

б) множество точек n-мерного пространства R^n; множество точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$;

в) множество финитных в Q функций;

г) множество ограниченных в Q функций;

д) множество аналитических функций в области Q комплексной плоскости $\mathbb{C}$;

е) множество функций из $C(\overline{Q})$, обращающихся в нуль на некотором множестве $E \in \overline{Q}$;

ж) множество $C(Q \setminus \{x^0\})$, где $x^0 \in Q$;

з) множество функций f из $C(\overline{Q})$, для которых $\int\limits_Q f\varphi\, dx = 0$, где φ — некоторая функция из $C(\overline{Q})$, а Q — ограниченная область;

и) множество функций f из $C(\overline{Q})$, для которых $\int\limits_S f\varphi\, ds = 0$, где φ — некоторая функция из $C(\overline{Q})$, а S — ограниченный кусок гладкой поверхности, лежащей в Q;

к) множество функций, интегрируемых по Риману (по области Q);

л) множество принадлежащих $C^k(\overline{Q})$ решений линейного дифференциального уравнения

$$\sum_{|\alpha| \le k} A_\alpha(x)\, D^\alpha f = 0, \qquad \text{где} \qquad A_\alpha \in C(\overline{Q}), \qquad |\alpha| \le k;$$

м) множество измеримых в Q функций;

н) пространство $L_1(Q)$;

о) пространство $L_2(Q)$.

4.2. Убедиться, что следующие множества функций не составляют линейного пространства:

а) множество функций из $C(\overline{Q})$, равных 1 в некоторой точке $x^0 \in Q$;

б) множество функций $f \in C(\overline{Q})$, для которых $\int\limits_Q f\, dx = 1$ (Q — ограниченная область);

в) множество решений дифференциального уравнения $\Delta u = 1$.

4.3. Доказать, что следующие системы функций линейно независимы:

а) $1, x, x^2 \dots$ на отрезке $[a, b]$ ($a < b$);

б) x^α, $|\alpha| = 0, 1, 2, \ldots$, в области Q;

в) e^{ikx}, $k = 0, 1, \ldots$, на отрезке $[a, b]$;

г) $[f(x)]^k$ $k = 0, 1, \ldots$, в области Q, где $f(x)$ — некоторая функция из $C(Q)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$.

4.4. Доказать, что множество $C(\overline{Q})$ является линейным нормированным пространством с нормой:

1) $\|f\|_{C(\overline{Q})} = \max\limits_{x \in \overline{Q}} |f(x)|$; 2) $\|f\|'_{C(\overline{Q})} = 13 \max\limits_{x \in \overline{Q}} |f(x)|$.

4.5. Доказать, что множество $C^k(\overline{Q})$ есть линейное нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{C^k(\overline{Q})} = \sum_{|\alpha| \le k} \max_{x \in \overline{Q}} |D^\alpha f(x)|. \tag{1}$$

4.6. Пусть E — некоторое множество из $\overline{Q}$. Показать, что множество непрерывных в $\overline{Q}$ функций $f(x)$, обращающихся в нуль в точках E, есть линейное нормированное пространство с нормой (1) при $k = 0$.

4.7. Установить, что следующие множества определенных в ограниченной области Q функций являются линейными нормированными пространствами с нормой (1) при $k = 0$:

а) множество функций из $C(\overline{Q})$, финитных в Q;

б) множество $C^\infty(\overline{Q})$;

в) множество аналитических в Q и непрерывных в $\overline{Q}$ функций.

4.8. Убедиться, что в R^n можно ввести норму следующим образом:

а) $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$; б) $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$; в) $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n x_i$.

4.9. Убедиться, что при любом $p \ge 1$ в R^n можно ввести норму формулой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Найти $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p$.

4.10. Показать, что при любом $p \ge 1$ в качестве нормы в $C(\overline{Q})$ можно взять выражение

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f|^p \, dx\right)^{1/p} \tag{2}$$

(область Q ограничена). Найти $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p$.

4.11. Убедиться, что линейные пространства примеров 4.4, 4.5, 4.6, 4.8, 4.9 являются банаховыми (т.е. полными в соответствующих нормах), а линейные нормированные пространства примеров 4.7, 4.10 при конечном p — неполными.

4.12. Показать, что в пространствах $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$ можно ввести нормы

$$\|f\|_{L_1(Q)} = \int\limits_Q |f|\, dx, \tag{3}$$

$$\|f\|_{L_2(Q)} = \left(\int\limits_Q |f|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пространства* $L_1(Q)$ *с нормой* (3) *и* $L_2(Q)$ *с нормой* (4) *банаховы.*

Подмножество B' банахова пространства B называется (*банаховым*) *подпространством* пространства B, если оно является банаховым пространством с нормой пространства B.

4.13. Пусть область Q ограничена. Показать, что:

а) множество $\overset{\circ}{C}(\overline{Q})$ функций из $C(\overline{Q})$, обращающихся в нуль на границе области Q, есть банахово подпространство $C(\overline{Q})$ (с нормой (1) при $k = 0$);

б) подмножество функций f из: 1) $C(\overline{Q})$; 2) $L_1(Q)$; 3) $L_2(Q)$, для которых $\int\limits_Q f(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — некоторые функции из $C(\overline{Q})$, есть банахово подпространство пространства $C(\overline{Q})$ (с нормой (1) при $k = 0$), $L_1(Q)$ (с нормой (3)) и $L_2(Q)$ (с нормой (4)) соответственно.

4.14. Показать, что счетное множество, составленное из линейных комбинаций с рациональными коэффициентами одночленов x^α, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = 0, 1, 2, \ldots$, всюду плотно в:

а) $C(\overline{Q})$ (норма (1) при $k = 0$);

б) $L_1(Q)$ (норма (3));

в) $L_2(Q)$ (норма (4)), где Q — ограниченная область.

2. Гильбертовы пространства. Пусть любым двум элементам f и g некоторого комплексного (вещественного) линейного пространства H поставленно в соответствие комплексное (вещественное) число (f, g), называемое *скалярным произведением* этих элементов, обладающее следующими свойствами:

а) $(f, g) = \overline{(g, f)}$;

б) $(f + g, f_1) = (f, f_1) + (g, f_1)$;

в) $(cf, g) = c(f, g)$ при любой постоянной c;

г) для любого $f \in H$ число (f, f) вещественно и $(f, f) \geq 0$, причем $(f, f) = 0$ только при $f = 0$.

Пространство H можно *нормировать*, положив, например, $\|f\| = (f,f)^{1/2}$. Эта норма называется нормой, *порожденной* скалярным произведением.

Пространство H называется *гильбертовым*, если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением.

Последовательность элементов $f_1, f_2, \ldots$ из H называется *слабо сходящейся* к элементу $f \in H$, если для любого $h \in H$

$$(f_k, h) \longrightarrow (f, h) \qquad \text{при} \qquad k \longrightarrow \infty.$$

Элементы f и g называются *ортогональными*, если $(f,g) = 0$. Элемент f называется *нормированным*, если $\|f\| = 1$. Система $e_1, e_2, \ldots$ называется *ортонормированной*, если $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots$

Пусть $f \in H$, а $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированная система в H. Числа $f_k = (f, e_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, называются *коэффициентами Фурье элемента* f, а сходящийся в норме H ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (f, e_k)\, e_k$ — *рядом Фурье элемента* f по ортонормированной системе $e_1, e_2, \ldots$

Система $e_1, e_2, \ldots$ называется *ортонормированным базисом* или *полной ортонормированной системой*, если она является ортонормированной и множество элементов $c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k$ при всевозможных постоянных $c_1, \ldots, c_k$ и k всюду плотно в H.

Ряд Фурье элемента f по ортонормированному базису сходится в норме H к f.

4.15. Показать, что $L_2(Q)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g) = \int\limits_Q f\bar{g}\, dx. \tag{1}$$

4.16. Подмножество функций $f \in L_2(Q)$, ортогональных к некоторым функциям $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ из $L_2(Q)$, образует подпространство пространства $L_2(Q)$.

Пусть в области Q задана непрерывная и положительная функция $\rho(x)$ (весовая функция). Обозначим $L_{2,\rho}(Q)$ множество измеримых в Q функций $f(x)$, для которых $\rho|f|^2 \in L_1(Q)$.

4.17. Показать, что $L_{2,\rho}(Q)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g) = \int\limits_Q \rho f\bar{g}\, dx. \tag{2}$$

4.18. Доказать, что:

а) $L_2(Q) \subset L_{2,\rho}(Q)$, если $\rho(x)$ ограничена в Q;

б) $L_{2,\rho}(Q) \subset L_2(Q)$, если $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ в Q $(\rho_0 = \mathrm{const})$.

4.19. Установить ортогональность в $L_2(0, 2\pi)$ тригонометрической системы 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x, \ldots$

4.20. Доказать, что системы функций $\sin(n+1/2)x$, $n=1,2,\ldots$, и $\cos(n+1/2)x$, $n=1,2,\ldots$, ортогональны в $L_2(0,\pi)$.

4.21. Доказать, что многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right], \qquad n=0,1,2,\ldots,$$

образуют ортонормированную систему в $L_2(-1,1)$.

4.22. Доказать, что система функций

$$T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n(\arccos x), \qquad n=0,1,2,\ldots,$$

есть система многочленов (многочлены Чебышева), ортонормированная в $L_{2,\,1/\sqrt{1-x^2}}(-1,1)$.

4.23. Доказать, что система функций

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \qquad n=0,1,\ldots,$$

есть система многочленов (многочлены Эрмита), ортогональная в $L_{2,e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$.

4.24. Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$, заданного на функциях из $C^2((0,1))\cap C^1([0,1])$ при граничных условиях $(hu-u_x)|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$, h — постоянная, ортогональны в $L_2(0,1)$.

4.25. Показать, что отвечающие различным значениям собственные функции оператора $-\Delta$, заданного на функциях $f\in C^2(Q)\cap C^1(\bar{Q})$ при граничном условии $u|_\Gamma=0$ или $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+g(x)\,u\right)\right|_\Gamma = 0$, где $g\in C(\Gamma)$, ортогональны в $L_2(Q)$.

4.26. Пусть $\rho\in C(\bar{Q})$, $\rho(x)\geq\rho_0>0$. Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора $-\dfrac{1}{\rho(x)}\Delta$, заданного на $C^2(Q)\cap C^1(\bar{Q})$ при граничных условиях задачи 4.25, ортогональны в $L_{2,\rho}(Q)$.

4.27. Пусть $p\in C^1[0,1]$, $q\in C[0,1]$, $\rho\in C[0,1]$, $\rho(x)\geq\rho_0>0$. Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора

$$-\frac{1}{\rho(x)}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]+\frac{q(x)}{\rho(x)},$$

заданного на $C^2((0,1))\cap C^1([0,1])$ при граничных условиях $u_x|_{x=0}=0$, $(u_x+Hu)|_{x=1}=0$ (H — постоянная), ортогональны в $L_{2,\rho}(0,1)$.

4.28. Пусть $p\in C^1(\bar{Q})$, $q\in C(\bar{Q})$, $\rho\in C(\bar{Q})$, $\rho(x)\geq\rho_0>0$. Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора $-\dfrac{1}{\rho(x)}\operatorname{div}(p\operatorname{grad})+q(x)$, заданного на $C^2(Q)\cap C^1(\bar{Q})$ при граничных условиях задачи 4.25, ортогональны в $L_{2,\rho}(Q)$.

4.29. Показать, что принадлежащие $C^2(Q)\cap C^1(\bar{Q})$ решения в Q уравнения $\Delta u = 0$, удовлетворяющие при различных λ граничному условию $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda u\right)\right|_\Gamma = 0$, ортогональны в $L_2(\Gamma)$.

4.30. Показать, что последовательность $\sin kx$, $k = 1,2,\ldots$, сходится слабо к нулю в $L_2(0,2\pi)$, но не сходится в норме $L_2(0,2\pi)$.

В задачах 4.31–4.39 доказать утверждения.

4.31. Если последовательность $f_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, функций из $L_2(Q)$ сходится к $f(x)$ по норме $L_2(Q)$, то она сходится и слабо к $f(x)$.

4.32. Если последовательность $f_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, функций из $L_2(Q)$ сходится к $f(x)$ по норме $L_2(Q)$, то $\int\limits_Q f_n\,dx \longrightarrow \int\limits_Q f\,dx$, $n\longrightarrow\infty$ (Q — ограниченная область).

4.33. Если $u_k\in L_2(Q)$, $k = 1,2,\ldots$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится к $u(x)$ по норме $L_2(Q)$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_Q u_k\,dx = \int\limits_Q u\,dx$ (Q — ограниченная область).

4.34. Если последовательность $f_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, функций из $C(\bar{Q})$ сходится к $f(x)$ равномерно в $\bar{Q}$, то она сходится и по норме $L_2(Q)$ (Q — ограниченная область).

4.35. Если последовательность $f_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, функций из $L_2(Q)$ сходится слабо к $f(x)\in L_2(Q)$, то последовательность норм $\|f_n(x)\|_{L_2(Q)}$, $n = 1,2,\ldots$, ограничена.

4.36. Если последовательность $f_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, функций из $L_2(Q)$ сходится слабо к $f(x)\in L_2(Q)$ и $\|f_n(x)\|\longrightarrow\|f(x)\|$ при $n\longrightarrow\infty$, то эта последовательность сходится к $f(x)$ и по норме $L_2(Q)$.

4.37. Для любой функции $f(x)\in L_2(Q)$ имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^2\le\|f\|^2,$$

где f_k, $k = 1,2,\ldots$, — коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной системе $e_1, e_2, \ldots$

4.38. Любая ортонормированная система $e_1,\ldots,e_n,\ldots$ в $L_2(Q)$ сходится слабо к нулю, но не сходится по норме $L_2(Q)$.

4.39. Для любой $f\in L_2(Q)$

$$\min_{c_1,\ldots,c_n}\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right\| = \left\|f-\sum_{k=1}^{n}f_k e_k\right\|$$

(т. е. n-я частная сумма ряда Фурье наилучшим образом приближает $f(x)$ в $L_2(Q)$).

4.40. Найти многочлен 2-й степени, наилучшим образом приближающий в $L_2(-1,1)$ функцию:

а) x^3; б) $\sin \pi x$; в) $|x|$.

4.41. Найти тригонометрический многочлен первого порядка, наилучшим образом приближающий в $L_2(-\pi,\pi)$ функцию:

а) $|x|$; б) $\sin \dfrac{x}{2}$.

4.42. Найти многочлен первой степени, наилучшим образом приближающий в $L_2(Q_i)$ функцию $x_1^2 - x_2^2$, где Q_i:

а) круг $x_1^2 + x_2^2 < 1$; б) квадрат $0 < x_1,\ \ x_2 < 1$.

4.43. Установить полноту в $L_2(Q)$ систем:

а) $\sin kx,\ k = 1, 2, \ldots,\ Q = [0, \pi]$;

б) $\sin(2k+1)x,\ k = 0, 1, \ldots,\ Q = [0, \pi/2]$.

В задачах 4.44–4.50 доказать утверждения.

4.44. Многочлены Лежандра (задача 4.21) и многочлены Чебышева (задача 4.22) образуют ортонормированные базисы пространства $L_2(-1,1)$ и $L_{2,1/\sqrt{1-x^2}}(-1,1)$ соответственно.

4.45. Чтобы ортонормированная в $L_2(Q)$ система $e_1, e_2, \ldots$ была ортонормированным базисом $L_2(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f \in L_2(Q)$ выполнялось неравенство Парсеваля–Стеклова

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2.$$

4.46. Если $f \in L_2(a,b)$ и $\int\limits_a^b x^k f(x)\,dx = 0$ для $k = 0, 1, \ldots$, то $f(x) = 0$ п. в. на (a,b).

4.47. Если $f \in L_2$ и $\int\limits_Q x^\alpha f(x)\,dx = 0$ для всех α, $|\alpha| = 0, 1, \ldots$, то $f(x) = 0$ п. в. в Q.

4.48. Если f_k и g_k, $k = 1, 2, \ldots$, — коэффициенты Фурье функций f и g из $L_2(Q)$ по некоторому ортонормированному базису, то

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \bar{g}_k.$$

4.49. Всякая ортонормированная система $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независима.

4.50. Для того чтобы система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из $L_2(Q)$ была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы определитель Грамма $\det \|(\varphi_i, \varphi_j)\|$, $i, j = 1, \ldots, n$, был отличен от нуля.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — некоторая линейно независимая система функций из $L_2(Q)$ (или $L_{2,\rho}(Q)$). Функцию $e_1(x)$ определим следующим образом: $e_1 = \dfrac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$. Подберем постоянные c_1 и c_2 так, чтобы функция $e_2 = c_1 e_1 + c_2\varphi_2$ была нормированной и ортогональной в $L_2(Q)$ (в $L_{2,\rho}(Q)$) к функции e_1 и т. д. При условии, что построены функции $e_1, \ldots, e_{n-1}$, функцию e_n будем разыскивать в виде $e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_{n-1}e_{n-1} + \beta_n\varphi_n$ с такими постоянными $\beta_1, \ldots, \beta_n$, чтобы e_n была нормированной и ортогональной к функциям $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Этот способ ортонормирования системы $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ называется *методом Грамма–Шмидта.*

4.51. Найти явное выражение функций e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, через функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

4.52. Ортонормировать в $L_{2,\rho}(Q)$ методом Грамма–Шмидта следующие последовательности функций, предварительно убедившись в их линейной независимости:

а) $1, x, x^2, x^3$ $\quad(\rho \equiv 1,\ Q = (-1, +1))$;

б) $1 - x,\ 1 + x^2,\ 1 + x^3$ $\quad(\rho \equiv 1,\ Q = (-1, +1))$;

в) $\sin^2 \pi x,\ 1,\ \cos \pi x$ $\quad(\rho \equiv 1,\ Q = (-1, +1))$;

г) $1, x, x^2$ $\quad(\rho = e^{-x},\ Q = (0, \infty))$;

д) $1, x, x^2$ $\quad(\rho = e^{-x^2/2},\ Q = (-\infty, +\infty))$;

е) $1, x, x^2$ $\quad\left(\rho = \sqrt{1 - x^2},\ Q = (-1, 1)\right)$;

ж) $1, x, x^2$ $\quad\left(\rho = 1/\sqrt{1 - x^2},\ Q = (-1, 1)\right)$.

4.53. Показать, что в результате ортонормирования системы $1,\ x,\ x^2, \ldots$ методом Грамма–Шмидта в скалярном произведении

$$(f, g) = \int_0^1 \frac{f\bar{g}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

получается ортонормированный базис пространства $L_{2,1/\sqrt{1-x^2}}(-1,1)$, состоящий из многочленов Чебышева $T_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$

4.54. Ортонормировать систему многочленов $1,\ x_1,\ x_2$ в круге $|x| < 1$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{|x|<1} u\bar{v}\, dx.$$

4.55. Ортонормировать систему многочленов $1, x_1, x_2, x_3$ в шаре $|x| < 1$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{|x|<1} u\bar{v}\, dx.$$

4.56. Обозначим через $L_2'(-\infty,\infty)$ множество таких функций $f(x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(-\infty,\infty)$, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\int\limits_{-k}^{k} |f|^2 dx$. Показать, что $L_2'(-\infty,\infty)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\int\limits_{-k}^{k} f\bar{g}\,dx.$$

4.57. Доказать, что система функций $e^{i\alpha x}$, где α — любое вещественное число, является ортонормированной системой в $L_2'(-\infty,\infty)$ (см. предыдущую задачу).

3. Гильбертовы пространства дифференцируемых функций. Пусть Q — некоторая ограниченная область пространства R^n с гладкой границей Г. Пусть $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — мультииндекс (см. обозначения). Функция $f^{(\alpha)} \in L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$ называется *обобщенной производной* (о. п.) порядка α функции f из $L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$, если для любой финитной в Q функции $g \in C^{|\alpha|}(\bar{Q})$ имеет место равенство*)

$$\int\limits_Q f D^\alpha g\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_Q f^{(\alpha)} g\,dx. \tag{1}$$

Если функция $f \in C^{|\alpha|}(Q)$, то о. п. $f^{(\alpha)}(x)$ существует и $f^{(\alpha)}(x) = D^\alpha f(x)$ п. в. Поэтому в дальнейшем о. п. порядка α функции $f(x)$ будет обозначаться через $D^\alpha f$.

Множество функций (будем считать их вещественными) $f \in L_2(Q)$, имеющих все о. п. до порядка k включительно, принадлежащие $L_2(Q)$, называется *пространством Соболева* $H^k(Q)$. $H^k(Q)$ — гильбертово пространство. Скалярное произведение в нем можно задать формулой

$$(f,g) = \int\limits_Q \left(\sum_{|\alpha|\le k} D^\alpha f D^\alpha g\right) dx, \tag{2}$$

а соответствующую согласованную с ним норму —

$$\|f\|_{H^k(Q)} = \left[\int\limits_Q \left(\sum_{|\alpha|\le k} \left|D^\alpha f\right|^2\right) dx\right]^{1/2}. \tag{2'}$$

При $k = 0$ пространство $H^k(Q)$ совпадает с $L_2(Q)$ ($H^0(Q) = L_2(Q)$). Если граница Г достаточно гладкая, то пространство $H^k(Q)$ есть пополнение множества $C^k(\bar{Q})$ по норме (2′).

---

*)Более общее определение см.: Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — 5-е изд. — М.: Наука, 1985.

Пусть $f \in H^1(Q)$, f_k, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность функций из $C^1(\overline{Q})$, сходящаяся в норме $H^1(Q)$ к $f(x)$. Для любой гладкой $(n-1)$-мерной поверхности S (состоящей из конечного числа кусков, каждый из которых однозначно проектируется на какую-нибудь координатную плоскость), лежащей в $\overline{Q}$, существует такая постоянная $c > 0$, не зависящая от $f(x)$ и $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, что

$$\int\limits_S |f_k - f_m|^2\, ds \leq c\|f_k - f_m\|^2_{H^1(Q)}.$$

Из этого неравенства и полноты пространства $L_2(S)$ вытекает, что последовательность следов функций $f_k(x)$ на S сходится в норме $L_2(S)$ к некоторой функции $g \in L_2(S)$. Функция $g(x)$ не зависит от выбора последовательности, приближающей функцию $f(x)$, и называется *следом* $f|_S$ функции $f(x)$ на поверхности $S \in \overline{Q}$.

Множество функций на $H^1(Q)$, след которых на границе Γ равен нулю п. в. на Γ, обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$. Его можно получить пополнением по норме $(2')$ при $k = 1$ множества функций, имеющих непрерывные частные производные в Q первого порядка и обращающихся в нуль на Γ.

Для функции $f \in L_1(Q)$ свертка $f_h(x) = \int\limits_Q \omega_h(|x-y|)\, f(y)\, dy$, где $\omega_h(|x-y|)$ — ядро усреднения (см. обозначения), называется *средней функцией для* f.

Пусть $x_i = \varphi_i(y)$, $i = 1, \ldots, n$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — k раз непрерывно дифференцируемое в $\overline{Q}$ взаимно однозначное отображение области Q на область Q' с якобианом, отличным от нуля в $\overline{Q}$. Тогда, если $f \in$ $\in H^k(Q)$, то

$$F(y) = f(\varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y)) \in H^k(Q').$$

Два скалярных произведения $(u, v)_{\mathrm{I}}$ и $(u, v)_{\mathrm{II}}$ в гильбертовом пространстве и соответствующие им нормы $\|u\|_{\mathrm{I}}$ и $\|u\|_{\mathrm{II}}$ называются *эквивалентными*, если существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что для любого $u \in H$ справедливы неравенства $c_1\|u\|_{\mathrm{I}} \leq$ $\leq \|u\|_{\mathrm{II}} \leq c_2\|u\|_{\mathrm{I}}$.

4.58. Установить, что смешанная о. п. не зависит от порядка дифференцирования.

4.59. Показать, что из существования о. п. $D^\alpha f$ не следует существования о. п. $D^{\alpha'} f$ при $\alpha'_i \leq \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, $|\alpha'| < |\alpha|$.

Указание. Рассмотреть функцию $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, где $f_i(x_i)$ не имеют о. п. первого порядка.

4.60. Показать, что если в области Q функция $f(x)$ имеет о. п. $D^\alpha f$, то и в любой подобласти $Q' \subset Q$ функция $f(x)$ имеет о. п. $D^\alpha f$.

4.61. Пусть в области Q_1 задана функция $f_1(x)$, имеющая о. п. $D^\alpha f_1$, а в области Q_2 — функция $f_2(x)$, имеющая о. п. $D^\alpha f_2$. Доказать, что если $Q_1 \cup Q_2$ — область и для $x \in Q_1 \cap Q_2$ $f_1(x) = f_2(x)$, то функция

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in Q_1, \\ f_2(x), & x \in Q_2, \end{cases}$$

имеет о. п. $D^\alpha f$ в $Q_1 \cup Q_2$, равную $D^\alpha f_1$ в Q_1 и $D^\alpha f_2$ в Q_2.

4.62. Пусть

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1,\ x_2 > 1, \\ -1, & \text{если } |x| < 1,\ x_2 < 1. \end{cases}$$

Убедиться, что $f(x_1, x_2)$ имеет обобщенные производные первого порядка в каждом из полукругов, но не имеет о. п. по x_2 в круге $|x| < 1$.

4.63. Доказать свойства средних функций:

а) $f_h \in C^\infty(R^n)$;

б) $f_h(x)$ сходятся при $h \longrightarrow 0$ к $f(x)$ в $L_2(Q)$, если $f \in L_2(Q)$;

в) в любой строго внутренней подобласти $Q' \Subset Q$ при достаточно малом h имеет место равенство $(D^\alpha f)_h = D^\alpha f_h$, т. е. обобщенная производная от средней функции равна средней функции от обобщенной производной.

В задачах 4.64–4.72 доказать утверждения.

4.64. Если у функции $f(x)$ в области Q существует о. п. $D^\alpha f = \omega(x)$, а для функции $\omega(x)$ существует о. п. $D^\beta \omega$, то существует о. п. $D^{\alpha+\beta} f$.

4.65. а) $y = \operatorname{sign} x \notin H^1(-1, 1)$;

б) $y = |x| \in H^1(-1, 1)$, $\quad y = |x| \notin H^2(-1, 1)$.

4.66. Если $f \in H^1(a, b)$ и о. п. $f'(x) = 0$, то $f(x) = \text{const}$ п. в.

4.67. Если $f \in H^1(a, b)$, то $f(x)$ эквивалентна на $[a, b]$ непрерывной функции.

4.68. Если $f(x) \in H^1(-\infty, \infty)$, то $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

4.69. Обозначим через $\widetilde{H}^1(0, 2\pi)$ подпространство пространства $H^1(0, 2\pi)$, состоящее из всех функций $f(x)$ из $H^1(0, 2\pi)$, для которых $f(0) = f(2\pi)$.

Доказать следующее утверждение: для того чтобы функция $f(x)$ (из $H^1(0,2\pi)$) принадлежала $\widetilde{H}^1(0,2\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд с общим членом $n^2(a_n^2 + b_n^2)$, где

$$a_n = \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad b_n = \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Равенство

$$\|f\|^2_{\widetilde{H}^1(0,2\pi)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)\left(k^2+1\right)$$

определяет одну из эквивалентных норм $\widetilde{H}^1(0,2\pi)$.

4.70. Для того чтобы функция $f \in L_2(0,\pi)$ принадлежала $\overset{\circ}{H}{}^1(0,\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд с общим членом $k^2 b_k^2$, $b_k = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$. При этом

$$\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(0,\pi)} = \int\limits_0^{\pi} \left(f^2 + f'^2\right) dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2+1\right) b_k^2.$$

4.71. Для любой $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(a,b)$ имеет место неравенство (одномерный вариант неравенства Стеклова)

$$\int\limits_a^b f^2\,dx \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int\limits_a^b f'^2\,dx.$$

4.72. Найти функцию $f_0(x) \not\equiv 0$, для которой неравенство задачи 4.71 превращается в равенство. Показать, что если $f(x) \not\equiv cf_0(x)$, где c — постоянная, то для $f(x)$ имеет место строгое неравенство.

4.73. Доказать, что для любой функции $f \in H^1(0,2\pi)$, для которой $f(0) = f(2\pi)$, имеет место неравенство

$$\int\limits_0^{2\pi} f^2 dx \le \int\limits_0^{2\pi} (f')^2 dx + \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx\right)^2.$$

4.74. Доказать, что для любой функции $f \in H^1(0,2\pi)$ имеет место неравенство (одномерный вариант неравенства Пуанкаре)

$$\int\limits_0^{2\pi} f^2 dx \le 4\int\limits_0^{2\pi} (f')^2 dx + \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} f\,dx\right)^2.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что система $\cos(kx/2)$, $k = 0,1,2,\ldots$, является ортогональным базисом пространства $H^1(0,2\pi)$.

4.75. Доказать, что существует двумерное подпространство пространства $H^1(0,2\pi)$, для всех элементов которого неравенство задачи 4.74 превращается в равенство. Найти это подпространство и доказать, что для всех элементов из $H^1(0,2\pi)$, не принадлежащих этому подпространству, неравенство задачи 4.74 строгое.

4.76. Пусть $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(|x|<1)$, $x_1 = |x|\cos\varphi$, $x_2 = |x|\sin\varphi$, $f(x) = f(|x|,\varphi)$. Доказать, что $\lim\limits_{|x|\to 1-0} \int\limits_0^{2\pi} f^2(|x|,\varphi)\,d\varphi = 0$.

4.77. Пусть $f \in H^1(|x|<1)$, $x_1 = |x|\cos\varphi$, $x_2 = |x|\sin\varphi$, $f|_{|x|=1} = h(\varphi)$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Доказать, что

$$\lim_{|x|\to 1-0} \int_0^{2\pi} |h(\varphi) - f(|x|,\varphi)|^2 d\varphi = 0.$$

4.78. Пусть $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1)$. Доказать, что

$$\int_0^1 f^2(x_1,x_2)\,dx_1 = o(x_2) \qquad \text{при} \qquad x_2 \longrightarrow 0.$$

4.79. Пусть $x = (x_1,x_2) = (\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)$ и функция

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

принадлежит $H^1(|x| < 1)$. Выразить через a_k, b_k интеграл

$$\int_{\rho<1} \left(|\operatorname{grad} f|^2 + |f|^2\right) dx.$$

4.80. Пусть

$$\psi(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k\left(a_k^2 + b_k^2\right) < \infty.$$

Доказать, что существует функция $f(x_1,x_2) \in H^1(|x| < 1)$ такая, что $f|_{\rho=1} = \psi(\varphi)$, $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$.

4.81. При каких значениях α функция $f = |x|^{-\alpha}\sin|x|$ принадлежит $H^2(|x| < 1)$, $x = (x_1,x_2)$?

4.82. Доказать, что $|x_1|(|x|^2 - 1) \in \overset{\circ}{H}{}^1(|x| < 1)$, $x = (x_1,x_2,x_3)$.

4.83. При каких значениях α функция $f = |x|^{-\alpha}e^{x_1-x_2}$ принадлежит $H^1(|x| < 1)$, $x = (x_1,x_2,x_3)$?

4.84. Пусть $f(x_1,x_2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx_1\, e^{-kx_2}$, $0 \le x_1 \le \pi$, $x_2 > 0$. При каких a_k функция f принадлежит $H^1(0 < x_1 < \pi,\ x_2 > 0)$?

4.85. Пусть $f \in H^1(|x| < 1)$, $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $n \ge 2$. Обязана ли функция $f(x)$ быть эквивалентной непрерывной функции в шаре $|x| < 1$ (ср. с результатом задачи 4.67)?

В задачах 4.86–4.90 доказать утверждения.

4.86. Если $f \in H^1(Q)$ и $f(x) = \text{const}$ п. в. в $Q' \subset Q$, то $\operatorname{grad} f = 0$ п. в. в Q'.

4.87. Если $f \in H^1(Q)$ и $|\operatorname{grad} f| = 0$ п. в. в Q, то $f(x) = \text{const}$ п. в. в Q.

4.88. Если $f \in H^1(Q)$, $g \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, то для всех $i = 1,2,\ldots,n$ справедлива формула $\int\limits_Q f g_{x_i}\,dx = -\int\limits_Q g f_{x_i}\,dx$ (формула интегрирования по частям).

4.89. Если $f \in H^1(Q)$ и $g \in H^1(Q)$, то для всех $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_Q f g_{x_i}\, dx = -\int_Q g f_{x_i}\, dx + \int_\Gamma fg \cos(nx_i)\, ds,$$

где под знаком интеграла по Γ стоят следы функций f и g на Γ.

4.90. $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ есть подпространство пространства $H^1(Q)$.

Пусть функция $f \in L_2(Q)$ продолжена, например, нулем вне Q. *Конечноразностным отношением* $f(x)$ по переменному x_i, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, будем называть при $h \neq 0$ функцию

$$\delta_i^h f = \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x)}{h},$$

также принадлежащую пространству $L_2(Q)$.

В задачах 4.91–4.96 доказать утверждения.

4.91. Для любой финитной на (a, b) функции f из $L_2(a, b)$ и любой функции $g \in L_2(a, b)$ при достаточно малых $|h|$ имеет место формула «интегрирования по частям»

$$(\delta^h f, g) = -(f, \delta^{-h} g), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

4.92. Для достаточно малых $|h| \neq 0$ для произвольной финитной в Q функции $f \in L_2(Q)$ и произвольной функции $g \in L_2(Q)$ имеет место формула «интегрирования по частям»

$$(\delta_i^h f, g) = -(f, \delta_i^{-h} g), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

4.93. Если финитная на (a, b) функция f принадлежит $H^1(a, b)$, то при $h \longrightarrow 0$ $\delta^h f(x) \longrightarrow f'(x)$ в норме $L_2(a, b)$.

4.94. Если для финитной на (a, b) функции $f \in L_2(a, b)$ при $h \longrightarrow 0$ $\delta^h f \longrightarrow \widetilde{f}(x)$ в норме $L_2(a, b)$, то $f(x)$ принадлежит $H^1(a, b)$ и $\widetilde{f}(x)$ является о. п. функции $f(x)$.

4.95. Если финитная в Q функция $f \in L_2(Q)$ имеет о. п. $f_{x_i} \in$ $\in L_2(a, b)$ при некотором $i = 1, 2, \ldots n$, то при $h \longrightarrow 0$ $\delta_i^h f \longrightarrow f_{x_i}$ в норме $L_2(Q)$.

4.96. Если финитная в Q функция f принадлежит $L_2(Q)$ и при $h \longrightarrow 0$ $\delta_i^h f \longrightarrow \widetilde{f}_i(x)$ в норме $L_2(Q)$ при некотором $i = 1, 2, \ldots, n$, то $f(x)$ имеет в Q о. п. по x_i, совпадающую с $\widetilde{f}_i(x)$.

4.97. С помощью результата задачи 4.71 показать, что скалярные произведения

$$(f, g)_{\mathrm{I}} = \int_0^\pi (fg + f'g')\, dx, \qquad (f, g)_{\mathrm{II}} = \int_0^\pi f'g'\, dx$$

в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(0, \pi)$ эквивалентны.

4.98. Доказать с помощью задачи 4.74, что скалярные произведения

$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_0^{2\pi} (fg + f'g')\,dx, \qquad (f,g)_{\mathrm{II}} = \int_0^{2\pi} f'g'\,dx + \left(\int_0^{2\pi} f\,dx\right)\left(\int_0^{2\pi} g\,dx\right)$$

в пространстве $H^1(0,2\pi)$ эквивалентны.

4.99. Множество $\widetilde{H}^1(0,2\pi)$ функций $f \in H^1(0,2\pi)$, для которых $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$, есть подпространство пространства $H^1(0,2\pi)$. Показать, что в $\widetilde{H}^1(0,2\pi)$ скалярное произведение можно определить соотношением $(fg)_{\widetilde{H}^1(0,2\pi)} = \int\limits_0^{2\pi} f'g'\,dx$.

4.100. Пусть $\rho(x) \in C(\overline{Q})$ и $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$. Показать, что формулой $(f,g)_{\mathrm{I}} = \int\limits_Q \rho fg\,dx$, $f,g \in L_2(Q)$, определяется скалярное произведение в $L_2(Q)$, эквивалентное скалярному произведению $\int\limits_Q fg\,dx$.

4.101. Пусть $\rho \in C(\overline{Q})$, $\rho(x) > 0$ в $\overline{Q}\backslash x^0$ и $\rho(x^0) = 0$, где x^0 — некоторая точка из $\overline{Q}$. Тогда формулой для $(f,g)_{\mathrm{I}}$ задачи 4.100 определяется скалярное произведение в $L_2(Q)$, не эквивалентное скалярному произведению $\int\limits_Q fg\,dx$ (Q — ограниченная область).

4.102. Пусть $\rho \in C(\overline{Q}\backslash x^0)$, где x^0 — некоторая точка из $\overline{Q}$ и $\rho(x) > 0$ для $x \in \overline{Q}\backslash x^0$, $\rho(x) \longrightarrow \infty$ при $x \longrightarrow x^0$, $x \in \overline{Q}$. Показать, что в $L_{2,\rho}(Q)$ можно ввести скалярное произведение $\int\limits_Q fg\,dx$, не эквивалентное скалярному произведению $\int\limits_Q \rho fg\,dx$.

4.103. Пусть $f \in H^1(|x| < 1)$, $x = (x_1, x_2)$ и $f(x)|_{|x|=1} = h(\varphi)$, $x_1 = |x|\cos\varphi$, $x_2 = |x|\sin\varphi$. Доказать, что существует такая не зависящая от функции $f(x)$ постоянная $c > 0$, что

$$\int_{|x|<1} f^2\,dx \leq c\left[\int_0^{2\pi} h^2(\varphi)\,d\varphi + \int_{|x|<1} |\mathrm{grad}\, f|^2 dx\right].$$

4.104. Доказать существование такой постоянной $c > 0$, что для любой $f \in \mathring{H}^1(Q)$ имеет место неравенство Стеклова

$$\int_Q f^2\,dx \leq c\int_Q |\mathrm{grad}\, f|^2 dx.$$

4.105. Показать, что выражение $\int\limits_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)\,dx$ задает скалярное произведение в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, эквивалентное скалярному произведению $\int\limits_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\,dx$.

4.106. Пусть $p, q \in C(\overline{Q})$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$. Доказать, что скалярные произведения в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$

$$(f,g) = \int\limits_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\,dx,$$

$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int\limits_Q [qfg + p(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\,dx$$

эквивалентны.

4.107. Пусть вещественные функции p_{ij}, $p_{ij}(x) = p_{ji}(x)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, и q принадлежат $C(\overline{Q})$, $q \geq 0$, и для всех $x \in \overline{Q}$ и всех вещественных векторов $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \gamma_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

где постоянная $\gamma_0 > 0$.

Доказать, что в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ можно определить скалярное произведение

$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int\limits_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg \right) dx,$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(f,g) = \int\limits_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\,dx.$$

4.108. Пусть $p, q \in C(\overline{Q})$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq q_0 > 0$. Тогда скалярные произведения в $H^1(Q)$

$$(f,g) = \int\limits_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\,dx,$$

$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int\limits_Q [qfg + p(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\,dx$$

эквивалентны.

При решении задач 4.109, 4.113, 4.114, 4.118 полезна следующая

Теорема. *Для того чтобы множество $M \subset H^1(Q)$ было компактным в $L_2(Q)$, достаточно, чтобы M было ограниченным в норме $H^1(Q)$, т. е. чтобы существовала такая постоянная $c > 0$,* *что* $\|u\|_{H^1(Q)} \leq c$ *для всех* $u \in M$. (*Компактность* M *в* L_2 *означает, что из любой бесконечной последовательности элементов из* M *можно выбрать фундаментальную в* L_2 *подпоследовательность.*)

4.109. Пусть x^0 — произвольная точка из $\overline{Q}$, а $U = Q \cap \cap \{|x - x_0| < r\}$ при некотором $r > 0$. Доказать, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $f \in H^1(Q)$ имеет место неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq c\left[\int_Q |\mathrm{grad}\, f|^2 dx + \int_U f^2 dx\right].$$

4.110. С помощью результата задачи 4.108 показать, что скалярные произведения в $H^1(Q)$

$$(f, g)_{\mathrm{I}} = \int_Q [fg + (\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g)]\, dx,$$

$$(f, g)_{\mathrm{II}} = \int_Q [qfg + p(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g)]\, dx$$

эквивалентны, если непрерывные в $\overline{Q}$ функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям: $p \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$ и $q(x) \not\equiv 0$ в Q.

4.111. Если в условиях задачи 4.107 $q(x) \geq q_0 > 0$, то выражение

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg\right) dx$$

можно принять за скалярное произведение в $H^1(Q)$, причем оно будет эквивалентным скалярному произведению $\int_Q [(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g) + fg]\, dx$.

4.112. Если в условиях задачи 4.107 $q(x) \geq 0$ в $\overline{Q}$ и $q(x) \not\equiv 0$, то выражение

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg\right) dx$$

можно принять за скалярное произведение в $H^1(Q)$, причем оно будет эквивалентным скалярному произведению $\int_Q [fg + (\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g)]\, dx$.

4.113. Показать, что существует такая постоянная $c > 0$, что для любой $f \in H^1(Q)$ имеет место неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq c\left[\int_Q |\mathrm{grad}\, f|^2 dx + \int_{\partial Q} f^2\, ds\right].$$

4.114. Пусть x^0 — произвольная точка границы ∂Q, а $U = \partial Q \cap \cap \{|x - x^0| < r\}$ при некотором $r > 0$. Доказать существование такой постоянной $c > 0$, что для всех $f \in H^1(Q)$ справедливо неравенство

$$\int_Q f^2 dx \le c\left[\int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx + \int_U f^2 ds\right].$$

4.115. Доказать, что если $\sigma \in C(\partial Q)$ и $\sigma(x) > 0$, то выражение

$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)\, dx + \int_{\partial Q} \sigma f g\, ds$$

задает в $H^1(Q)$ скалярное произведение, причем оно будет эквивалентным скалярному произведению

$$(f,g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\, dx.$$

4.116. Доказать, что если $\sigma \in C(\partial Q)$, $\sigma(x) \ge 0$, $\sigma(x) \not\equiv 0$, то в $H^1(Q)$ можно задать скалярное произведение

$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)\, dx + \int_{\partial Q} \sigma f g\, ds,$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(f,g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\, dx.$$

4.117. Пусть $p \in C(\overline{Q})$, $q \in C(\overline{Q})$, $\sigma \in C(\partial Q)$, $p(x) \ge p_0 > 0$, $q(x) \ge 0$ в $\overline{Q}$, $\sigma(x) \ge 0$ на ∂Q, причем или $q(x) \not\equiv 0$, или $\sigma(x) \not\equiv 0$. Тогда скалярные произведения в $H^1(Q)$

$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_Q [p(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) + qfg]\, dx + \int_{\partial Q} \sigma f g\, ds,$$

$$(f,g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\, dx$$

эквивалентны.

4.118. Показать, что существует постоянная $c > 0$ такая, что для любой функции $f \in H^1(Q)$ $(\partial Q \in C^1)$ имеет место неравенство (неравенство Пуанкаре)

$$\int_Q f^2 dx \le c\left[\left(\int_Q f\, dx\right)^2 + \int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx\right].$$

4.119. С помощью результата задачи 4.118 показать эквивалентность скалярных произведений

$$(f,g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\, dx,$$

$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)\, dx + \int_Q f\, dx \cdot \int_Q g\, dx$$

в пространстве $H^1(Q)$.

4.120. Показать, что множество $\widetilde{H}^1(Q)$ функций $f \in H^1(Q)$, для которых $\int\limits_Q f\,dx = 0$, образует подпространство $H^1(Q)$.

4.121. Показать, что в подпространстве $\widetilde{H}^1(Q)$ можно определить скалярное произведение $(f,g)_{\mathrm{I}} = \int\limits_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)\,dx$, эквивалентное скалярному произведению

$$(f,g) = \int\limits_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]\,dx.$$

Ответы к § 4

4.9. $\max\limits_i |x_i|$.

4.10. $\max |f(x)|$.

4.40. а) $\frac{3}{5}x$; б) $\frac{3}{\pi}x$; в) $\frac{15x^2}{16} + \frac{3}{16}$.

4.41. а) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x$; б) $\frac{8}{3\pi}\sin x$.

4.42. а) 0; б) $x_1 - x_2$.

4.51. $$\mathrm{e}_n = \frac{\varphi_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} e_k(\varphi_n, e_k)}{\left\| \varphi_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} e_k(\varphi_n, e_k) \right\|}.$$

4.52. а) P_0, P_1, P_2, P_3, где P_n — многочлены Лежандра (см. **4.21**);

б) $\sqrt{\frac{3}{8}}(1-x)$, $\sqrt{\frac{15}{16}}x(1+x)$, $\sqrt{\frac{21}{136}}(2-2x-5x^2+5x^3)$;

в) $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 \pi x$, $\sqrt{\frac{8}{3}}\left(\sin^2 \pi x - \frac{3}{4}\right)$, $\cos \pi x$;

г) 1, $x-1$, $1-2x+\frac{x^2}{2}$; д) $\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}$, $\frac{x}{\sqrt[4]{2\pi}}$, $\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2\pi}}$;

е) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\sqrt{\frac{8}{\pi}}x$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}(4x^2-1)$ — многочлен Чебышева второго рода;

ж) T_0, T_1, T_2, $T_n(x)$ — многочлен Чебышева.

4.54. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{2x_1}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{2x_2}{\sqrt{\pi}}$.

4.55. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sqrt{15}\,x_1}{2\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sqrt{15}\,x_2}{2\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sqrt{15}\,x_3}{2\sqrt{\pi}}$.

4.72. $\sin\frac{\pi(x-a)}{b-a}$.

4.75. Подпространство с базисными элементами 1 и $\cos\frac{x}{2}$.

4.79. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2+b_k^2}{k+1}+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\left(a_k^2+b_k^2\right)\right).$

4.81. $\alpha < -1.$

4.83. $\alpha < 1/2.$

4.84. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\left(a_k^2+b_k^2\right) < \infty.$

4.85. Нет.

§ 5. Интегральные уравнения

Уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x) \qquad (1)$$

относительно неизвестной функции $\varphi(x)$ в области $G \subset R^n$ называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма* (второго рода). Известные функции $\mathscr{K}(x,y)$ и $f(x)$ называются *ядром* и *свободным членом* интегрального уравнения (1); λ — комплексный параметр.

Интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy \qquad (2)$$

называется *однородным интегральным уравнением*, соответствующим уравнению (1), а интегральное уравнение (здесь $\mathscr{K}^*(x,y) = \overline{\mathscr{K}(y,x)}$)

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int\limits_G \mathscr{K}^*(x,y)\,\psi(y)\,dy \qquad (3)$$

— *союзным* к уравнению (2), ядро $\mathscr{K}^*(x,y)$ называется *эрмитово сопряженным* ядром к ядру $\mathscr{K}(x,y)$.

Интегральные уравнения (1)–(3) иногда записывают в операторной форме

$$\varphi = \lambda K\varphi + f, \qquad \varphi = \lambda K\varphi, \qquad \psi = \bar{\lambda}K^*\psi,$$

где интегральные операторы K и K^* определяются ядрами $\mathscr{K}(x,y)$ и $\mathscr{K}^*(x,y)$ соответственно, т. е.

$$Kg = \int\limits_G \mathscr{K}(x,y)\,g(y)\,dy, \qquad K^*g = \int\limits_G \mathscr{K}^*(x,y)\,g(y)\,dy.$$

Если при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_0$ однородное интегральное уравнение (2) имеет ненулевые решения из $L_2(G)$, то число λ_0 называется *характеристическим числом ядра* $\mathscr{K}(x,y)$ (интегрального уравнения (2)), а соответствующие решения уравнения (2) — *собственными функциями ядра* $\mathscr{K}(x,y)$.

Рангом (*кратностью*) характеристического числа λ_0 называется максимальное число линейно независимых собственных функций, отвечающих этому числу λ_0.

Будем предполагать, что в уравнении (1) область G ограничена в R^n, функция f непрерывна на $\overline{G}$, а ядро $\mathscr{K}(x,y)$ непрерывно на $\overline{G}\times\overline{G}$.

В задачах 5.5–5.7 используются следующие обозначения:

$$M = \max_{x\in\overline{G},\, y\in\overline{G}} |\mathscr{K}(x,y)|, \qquad v = \int_G dy.$$

5.1. Показать, что интегральный оператор K с ядром $\mathscr{K}(x,y)$ ограничен из $L_2(G)$ в $L_2(G)$, если

$$\int_{G\times G} |\mathscr{K}(x,y)|^2 dx\,dy = c^2 < \infty.$$

5.2. Показать, что интегральный оператор K с непрерывным ядром $\mathscr{K}(x,y)$ является нулевым в $L_2(G)$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}(x,y)=0$, $x\in G$, $y\in G$.

5.3. Пусть ядро $\mathscr{K}(x,y)$ интегрального уравнения (1) принадлежит $L_2(G\times G)$. Доказать сходимость метода последовательных приближений для любой функции $f\in L_2(G)$, если $|\lambda| < 1/|c|$ (постоянная c взята из задачи 5.1).

5.4. Пусть K — интегральный оператор с непрерывным ядром. Доказать, что операторы $K^p = K(K^{p-1})$, $p=2,3,\ldots$, являются интегральными операторами с непрерывными ядрами $\mathscr{K}_p(x,y)$ и эти ядра удовлетворяют соотношениям

$$\mathscr{K}_p(x,y) = \int_G \mathscr{K}(x,\xi)\,\mathscr{K}_{p-1}(\xi,y)\,d\xi.$$

5.5. Показать, что ядра $\mathscr{K}_p(x,y)$, введенные в задаче 5.4 (они называются *повторными* (итерированными) ядрами ядра $\mathscr{K}(x,y)$), удовлетворяют неравенствам:

$$|\mathscr{K}_p(x,y)| \le M^p v^{p-1}, \qquad p=1,2,\ldots$$

5.6. Показать, что ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \lambda^m \mathscr{K}_{m+1}(x,y)$, $x\in\overline{G}$, $y\in\overline{G}$, сходится в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{Mv}$, а его сумма $\mathscr{R}(x,y;\lambda)$ (*резольвента* ядра $\mathscr{K}(x,y)$) непрерывна в $\overline{G}\times\overline{G}\times U_{1/(Mv)}$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{Mv}$.

Показать также, что при $|\lambda| < \dfrac{1}{Mv}$ решение интегрального уравнения (1) единственно в классе $C(\overline{G})$ и для любой $f\in C(\overline{G})$ представляется через резольвенту $\mathscr{R}(x,y;\lambda)$ формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G \mathscr{R}(x,y;\lambda)\,f(y)\,dy.$$

5.7. Показать, что резольвента $\mathscr{R}(x,y;\lambda)$ (см. задачу 5.6) непрерывного ядра $\mathscr{K}(x,y)$ удовлетворяет при $|\lambda| < \dfrac{1}{Mv}$ каждому из уравнений:

а) $\mathscr{R}(x,y;\lambda) = \lambda \int\limits_G \mathscr{K}(x,\xi)\,\mathscr{R}(\xi,y;\lambda)\,d\xi + \mathscr{K}(x,y)$;

б) $\mathscr{R}(x,y;\lambda) = \lambda \int\limits_G \mathscr{K}(\xi,y)\,\mathscr{R}(x,\xi;\lambda)\,d\xi + \mathscr{K}(x,y)$;

в) $\dfrac{\partial \mathscr{R}(x,y;\lambda)}{\partial \lambda} = \int\limits_G \mathscr{R}(x,\xi;\lambda)\,\mathscr{R}(\xi,y;\lambda)\,d\xi$.

В задачах 5.8–5.13 рассматриваются интегральные уравнения вида

$$\int\limits_0^x \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{4}$$

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^x \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x), \tag{5}$$

которые называются *интегральными уравнениями Вольтерра* первого и второго родов соответственно.

5.8. Пусть выполнены следующие условия:

а) функции $\mathscr{K}^*(x,y)$ и $\mathscr{K}_x(x,y)$ непрерывны на множестве $0 \le x \le y \le a$;

б) $\mathscr{K}(x,x) \ne 0$ для всех x;

в) $f \in C^1([0,a])$ и $f(0) = 0$.

Доказать, что при этих условиях уравнение (4) равносильно уравнению

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{\mathscr{K}(x,x)} - \int\limits_0^x \frac{\mathscr{K}_x(x,y)}{\mathscr{K}(x,x)}\,\varphi(y)\,dy.$$

5.9. Показать, что дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y = F(x)$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ при начальных условиях $y(0) = C_0$, $y'(0) = C_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$ равносильно интегральному уравнению (5), где

$$\mathscr{K}(x,y) = \sum_{m=1}^{n} a_m(x)\,\frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$f(x) = F(x) - C_{n-1}a_1(x) - (C_{n-1}x + C_{n-2})\,a_2(x) - \ldots$$
$$\ldots - \left(C_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_1 x + C_0\right) a_n(x).$$

5.10. Пусть $\mathscr{K} \in C\,(x \geq 0)$, $\mathscr{K}(x) = 0$ при $x < 0$. Доказать, что обобщенная функция

$$\mathscr{E}(x) = \delta(x) + \mathscr{R}(x), \qquad \text{где} \qquad \mathscr{R} = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\mathscr{K} * \mathscr{K} * \ldots * \mathscr{K}}_{m \text{ раз}},$$

есть фундаментальное решение оператора Вольтерра второго рода с ядром $\mathscr{K}(x,y)$ (см. (5)), т.е.

$$\mathscr{E} - \mathscr{K} * \mathscr{E} = \delta.$$

Показать, что при этом ряд для $\mathscr{R}(x)$ сходится равномерно в каждом конечном промежутке и удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра

$$\mathscr{R}(x) = \int_0^x \mathscr{K}(x-y)\,\mathscr{R}(y)\,dy + \mathscr{K}(x), \qquad x \geq 0$$

(функция $\mathscr{R}(x-y)$ является резольвентой ядра $\mathscr{K}(x-y)$ при $\lambda = 1$).

5.11. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра (5) с ядром $\mathscr{K}(x,y)$:

1) $\mathscr{K}(x,y) = 1$; 2) $\mathscr{K}(x,y) = x - y$.

5.12. Решить следующие интегральные уравнения:

1) $\varphi(x) = x + \int_0^x (y-x)\,\varphi(y)\,dy$;

2) $\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^x (x-y)\,\varphi(y)\,dy$;

3) $\varphi(x) = \lambda \int_0^x (x-y)\,\varphi(y)\,dy + x^2$.

5.13. Показать, что если $g \in C^1\,(x \geq 0)$, $g(0) = 0$, $0 < \alpha < 1$, то функция

$$f(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^x \frac{g'(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\,dy$$

удовлетворяет интегральному уравнению Абеля

$$\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{\alpha}}\,dx = g(x).$$

В задачах 5.14–5.30 ядро $\mathscr{K}(x,y)$ интегрального уравнения является вырожденным, т. е.

$$\mathscr{K}(x,y) = \sum_{m=1}^{N} f_m(x)\,g_m(y),$$

где функции $f_m(x)$ и $g_m(y)$ $(m = 1, 2, \ldots, N)$ непрерывны в квадрате $a \leq x,\ y \leq b$ и линейно независимы между собой. В этом случае интегральное уравнение (1) можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{N} c_m f_m(x),$$

где неизвестные c_m определяются из системы алгебраических уравнений.

5.14. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x)$$

в следующих случаях:

1) $\mathscr{K}(x,y) = x - 1,\qquad f(x) = x;$
2) $\mathscr{K}(x,y) = 2e^{x+y},\qquad f(x) = e^x;$
3) $\mathscr{K}(x,y) = x + y - 2xy,\qquad f(x) = x + x^2.$

5.15. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x)$$

в следующих случаях:

1) $\mathscr{K}(x,y) = xy + x^2y^2,\qquad f(x) = x^2 + x^4;$
2) $\mathscr{K}(x,y) = x^{1/3} + y^{1/3},\qquad f(x) = 1 - 6x^2;$
3) $\mathscr{K}(x,y) = x^4 + 5x^3y,\qquad f(x) = x^2 - x^4;$
4) $\mathscr{K}(x,y) = 2xy^3 + 5x^2y^2,\qquad f(x) = 7x^4 + 3;$
5) $\mathscr{K}(x,y) = x^2 - xy,\qquad f(x) = x^2 + x;$
6) $\mathscr{K}(x,y) = 5 + 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 9x^2y^2,\qquad f(x) = x.$

5.16. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x)$$

в следующих случаях:

1) $\mathscr{K}(x,y) = \sin(2x + y),\qquad f(x) = \pi - 2x;$
2) $\mathscr{K}(x,y) = \sin(x - 2y),\qquad f(x) = \cos 2x;$
3) $\mathscr{K}(x,y) = \cos(2x + y),\qquad f(x) = \sin x;$
4) $\mathscr{K}(x,y) = \sin(3x + y),\qquad f(x) = \cos x;$
5) $\mathscr{K}(x,y) = \sin y + y\cos x,\qquad f(x) = 1 - \dfrac{2x}{\pi};$
6) $\mathscr{K}(x,y) = \cos^2(x - y),\qquad f(x) = 1 + \cos 4x.$

5.17. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x)$$

в следующих случаях:

1) $\mathscr{K}(x,y) = \cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y, \qquad f(x) = \cos 3x;$

2) $\mathscr{K}(x,y) = \cos x \cos y + 2\sin 2x \sin 2y, \qquad f(x) = \cos x;$

3) $\mathscr{K}(x,y) = \sin x \sin y + 3\cos 2x \cos 2y, \qquad f(x) = \sin x.$

5.18. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции следующих интегральных уравнений:

1) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \left[\sin(x+y) + \frac{1}{2}\right] \varphi(y)\,dy;$

2) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \left[\cos^2(x+y) + \frac{1}{2}\right] \varphi(y)\,dy;$

3) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{1} \left(x^2y^2 - \frac{2}{45}\right) \varphi(y)\,dy;$

4) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{1} \left[\left(\frac{x}{y}\right)^{2/5} + \left(\frac{y}{x}\right)^{2/5}\right] \varphi(y)\,dy;$

5) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{\pi} (\sin x \sin 4y + \sin 2x \sin 3y +$
$+ \sin 3x \sin 2y + \sin 4x \sin y)\,\varphi(y)\,dy.$

5.19. При каких значениях параметров a и b разрешимо интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 12 \int\limits_0^1 \left(xy - \frac{x+y}{2} + \frac{1}{3}\right) \varphi(y)\,dy + ax^2 + bx - 2\,?$$

Найти решения при этих значениях a и b.

5.20. При каких значениях параметра a разрешимо интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sqrt{15} \int\limits_0^1 [y(4x^2 - 3x) + x(4y^2 - 3y)]\,\varphi(y)\,dy + ax + \frac{1}{x}\,?$$

Найти решения при этих значениях a.

5.21. Выяснить, при каких значениях λ интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \cos(2x - y)\,\varphi(y)\,dy + f(x)$$

разрешимо для любой $f(x) \in C([0, 2\pi])$, и найти решение.

5.22. Найти решения следующих интегральных уравнений при всех λ и при всех значениях параметров a, b, c, входящих в свободный член этих уравнений:

1) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (y \sin x + \cos y)\,\varphi(y)\,dy + ax + b;$

2) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\pi \cos(x+y)\,\varphi(y)\,dy + a\sin x + b;$

3) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 (1+xy)\,\varphi(y)\,dy + ax^2 + bx + c;$

4) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 (x^2y + xy^2)\,\varphi(y)\,dy + ax + bx^3;$

5) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{2}(xy + x^2y^2)\,\varphi(y)\,dy + ax + b;$

6) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 \left[5(xy)^{1/3} + 7(xy)^{2/3}\right]\varphi(y)\,dy + ax + bx^{1/3};$

7) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 \frac{1+xy}{1+y^2}\,\varphi(y)\,dy + a + x + bx^2;$

8) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)\varphi(y)\,dy + ax^2 + bx + c;$

9) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 (xy + x^2 + y^2 - 3x^2y^2)\,\varphi(y)\,dy + ax + b.$

5.23. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $\mathcal{K}(x,y)$ и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int\limits_{-1}^1 \mathcal{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x)$$

при всех λ, a, b, если:

1) $\mathcal{K}(x,y) = 3x + xy - 5x^2y^2, \qquad f(x) = ax;$

2) $\mathcal{K}(x,y) = 3xy + 5x^2y^2, \qquad f(x) = ax^2 + bx.$

5.24. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $\mathcal{K}(x,y)$ и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\pi}^\pi \mathcal{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x)$$

при всех λ, a, b, если:

1) $\mathcal{K}(x,y) = x\cos y + \sin x\,\sin y, \qquad f(x) = a + b\cos x;$

2) $\mathcal{K}(x,y) = x\sin y + \cos x, \qquad f(x) = ax + b.$

5.25. Найти решение и резольвенту $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$ следующих интегральных уравнений:

1) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\pi \sin(x+y)\,\varphi(y)\,dy + f(x);$

2) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1 - y + 2xy)\, \varphi(y)\, dy + f(x);$

3) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos x)\, \varphi(y)\, dy + ax + b;$

4) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{0}^{2\pi} (\sin x\, \sin y + \sin 2x\, \sin 2y)\, \varphi(y)\, dy + f(x).$

5.26. Найти все значения параметров a, b, c, при которых следующие интегральные уравнения имеют решения при любых λ:

1) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (xy + x^2y^2)\, \varphi(y)\, dy + ax^2 + bx + c;$

2) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1 + xy)\, \varphi(y)\, dy + ax^2 + bx + c,$ где $a^2 + b^2 + c^2 = 1;$

3) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{1 + xy}{\sqrt{1 - y^2}}\, \varphi(y)\, dy + x^2 + ax + b;$

4) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{0}^{1} \left(xy - \frac{1}{3}\right) \varphi(y)\, dy + ax^2 - bx + 1;$

5) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{0}^{1} (x + y)\, \varphi(y)\, dy + ax + b + 1;$

6) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{0}^{2\pi} \cos(2x + 4y)\, \varphi(y)\, dy + e^{ax+b};$

7) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{0}^{\pi} (\sin x\, \sin 2y + \sin 2x\, \sin 4y)\, \varphi(y)\, dy + ax^2 + bx + c;$

8) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1 + x^2 + y^3)\, \varphi(y)\, dy + ax + bx^3.$

5.27. Найти все значения параметра a, при которых интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{0}^{1} (ax - y)\, \varphi(y)\, dy + f(x)$$

разрешимо при всех действительных λ и всех $f \in C([0, 1])$.

5.28. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции следующих интегральных уравнений:

1) $\varphi(x_1, x_2) = \lambda \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left[x_1 + x_2 + \frac{3}{32}(y_1 + y_2)\right] \varphi(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2;$

2) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} \left(|x|^2 + |y|^2\right) \varphi(y)\, dy, \qquad x = (x_1, x_2);$

3) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} \dfrac{1+|y|}{1+|x|} \varphi(y)\, dy, \qquad x = (x_1, x_2, x_3).$

5.29. Выяснить, имеет ли интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} \left(|x|^2 - |y|^2\right) \varphi(y)\, dy, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)$$

вещественные характеристические числа, и если имеет, то найти соответствующие собственные функции.

5.30. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $\mathscr{K}(x,y) = x_1x_2 + y_1y_2$ и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} (x_1x_2 + y_1y_2)\, \varphi(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 + f(x_1, x_2).$$

В задачах 5.31, 5.33–5.35 ядро $\mathscr{K}(x,y)$ интегрального уравнения (1) является *эрмитовым*, т. е. совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром:

$$\mathscr{K}(x,y) = \mathscr{K}^*(x,y) = \overline{\mathscr{K}(y,x)}.$$

В частности, если эрмитово ядро является вещественным, то оно симметрично, т. е. $\mathscr{K}(x,y) = \mathscr{K}(y,x)$.

Эрмитово непрерывное ядро $\mathscr{K}(x,y) \not\equiv 0$ обладает следующими свойствами:

1) множество характеристических чисел этого ядра не пусто, расположено на действительной оси, не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек;

2) система собственных функций $\{\varphi_k\}$ может быть выбрана ортонормальной:

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}.$$

5.31. Доказать, что если $\mathscr{K}(x,y)$ — эрмитово ядро, то характеристические числа второго итерированного ядра $\mathscr{K}_2(x,y)$ (см. задачи 5.4–5.5) положительны.

5.32. Доказать, что если ядро $\mathscr{K}(x,y)$ является кососимметричным, т. е. $\mathscr{K}(x,y) = -\mathscr{K}^*(x,y)$, то его характеристические числа чисто мнимые.

В задачах 5.33–5.35 предполагается, что характеристические числа λ_k эрмитова непрерывного ядра $\mathscr{K}(x,y)$ занумерованы в порядке возрастания их модулей, т. е.

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le |\lambda_3| \le \ldots$$

и каждое из этих чисел повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций. Тогда можно считать, что каждому характеристическому числу λ_k соответствует одна собственная функция φ_k. Систему собственных функций $\{\varphi_k\}$ будем считать ортонормальной.

5.33. Пусть $\mathscr{K}(x,y)$ — эрмитово непрерывное ядро, $\mathscr{K}_p(x,y)$ — повторное ядро ядра $\mathscr{K}(x,y)$. Доказать формулы:

1) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{|\varphi_m(x)|^2}{\lambda_m^2} = \int\limits_a^b |\mathscr{K}(x,y)|^2 dy$;

2) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_m^2} = \int\limits_a^b\int\limits_a^b |\mathscr{K}(x,y)|^2 dx\,dy$;

3) $(Kf,f) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{|(f,\varphi_k)|^2}{\lambda_k}$, $f \in L_2(G)$, K — интегральный оператор с ядром $\mathscr{K}(x,y)$;

4) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_m^{2p}} = \int\limits_a^b\int\limits_a^b |\mathscr{K}_p(x,y)|^2 dx\,dy \qquad p = 1,2,\ldots$

Пусть $\mathscr{K}_n(x,y)$ — n-е повторное ядро для эрмитова непрерывного ядра $\mathscr{K}(x,y)$. Назовем величину

$$\alpha_n = \int\limits_a^b \mathscr{K}_n(x,x)\,dx, \qquad n = 1,2,\ldots$$

n-м следом ядра $\mathscr{K}(x,y)$.

5.34. Доказать:

1) отношение $\dfrac{\alpha_{2n+2}}{\alpha_{2n}}$ не убывает и ограничено;

2) существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_{2n}}{\alpha_{2n+2}}$ и этот предел равен наименьшему характеристическому числу ядра $\mathscr{K}_2(x,y)$;

3) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_m^n} = \alpha_n$ $(n \geq 2)$, где λ_m, $m = 1,2,\ldots$, — характеристические числа ядра $\mathscr{K}(x,y)$, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$;

4) $\dfrac{1}{|\lambda_1|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{\alpha_{2n+2}}{\alpha_{2n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\alpha_{2n}}$.

5.35. Пусть λ не является характеристическим числом эрмитова непрерывного ядра $\mathscr{K}(x,y)$. Доказать, что (единственное) решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x)$$

можно представить в виде ряда

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_m)}{\lambda_m - \lambda} \varphi_m(x) + f(x),$$

равномерно сходящегося на $\overline{G}$, а для резольвенты $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$ имеет место формула

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)\, \bar{\varphi}_m(y)}{\lambda_m - \lambda},$$

где билинейный ряд сходится в $L_2(G \times G)$.

5.36. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathscr{K}(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

в следующих случаях:

1) $\mathscr{K}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad 0 \le x \le y \le 1, \\ y, & \text{если} \quad 0 \le y \le x \le 1; \end{cases}$

2) $\mathscr{K}(x, y) = \begin{cases} x(1 - y), & \text{если} \quad 0 \le x \le y \le 1, \\ y(1 - x), & \text{если} \quad 0 \le y \le x \le 1; \end{cases}$

3) $\mathscr{K}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2 - y}{2}\, x, & \text{если} \quad 0 \le x \le y \le 1, \\ \dfrac{2 - x}{2}\, y, & \text{если} \quad 0 \le y \le x \le 1; \end{cases}$

4) $\mathscr{K}(x, y) = \begin{cases} (x + 1)(y - 2), & \text{если} \quad 0 \le x \le y \le 1, \\ (y + 1)(x - 2), & \text{если} \quad 0 \le y \le x \le 1; \end{cases}$

5) $\mathscr{K}(x, y) = \begin{cases} (x + 1)y, & \text{если} \quad 0 \le x \le y \le 1, \\ x(y + 1), & \text{если} \quad 0 \le y \le x \le 1; \end{cases}$

6) $\mathscr{K}(x, y) = \begin{cases} \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^y + e^{2-y}\right), & \text{если} \quad 0 \le x \le y \le 1, \\ \left(e^x + e^{2-x}\right)\left(e^y - e^{-y}\right), & \text{если} \quad 0 \le y \le x \le 1; \end{cases}$

7) $\mathscr{K}(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin(1 - y), & \text{если} \quad 0 \le x \le y \le 1, \\ \sin(1 - x) \sin y, & \text{если} \quad 0 \le y \le x \le 1. \end{cases}$

5.37. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения с ядром $\mathscr{K}(x, y)$ в следующих случаях:

1) $\mathscr{K}(x, y) = \begin{cases} (1 + x)(1 - y), & \text{если} \quad -1 \le x \le y \le 1, \\ (1 - x)(1 + y), & \text{если} \quad -1 \le y \le x \le 1; \end{cases}$

2) $\mathscr{K}(x, y) = \begin{cases} \cos x \sin y, & \text{если} \quad 0 \le x \le y \le \pi, \\ \cos y \sin x, & \text{если} \quad 0 \le y \le x \le \pi; \end{cases}$

3) $\mathscr{K}(x,y) = \begin{cases} \sin x \cos y, & \text{если} \quad 0 \le x \le y \le \pi, \\ \sin y \cos x, & \text{если} \quad 0 \le y \le x \le \pi. \end{cases}$

5.38. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \omega(x+y)\,\varphi(y)\,dy$$

в следующих случаях:

1) $\omega(t)$ — четная 2π-периодическая функция, причем $\omega(t) = t$, если $t \in [0,\pi]$;

2) $\omega(t)$ — четная 2π-периодическая функция, причем $\omega(t) = \pi - t$, если $t \in [0,\pi]$.

5.39. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения с ядром $\mathscr{K}(x,y) = \omega(x-y)$, где $\omega(t)$ — непрерывная кусочно гладкая четная 2π-периодическая функция, $0 \le x \le 2\pi$, $0 \le y \le 2\pi$.

5.40. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x),$$

если $f(x) \in C^2([0,1])$ и

$$\mathscr{K}(x,y) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad 0 \le x \le y \le 1, \\ y, & \text{если} \quad 0 \le y \le x \le 1. \end{cases}$$

Пусть $\mathscr{K}(x,y)$ — непрерывное ядро интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x). \tag{6}$$

Выражение

$$\mathscr{K}\begin{pmatrix} x_1\ x_2\ \ldots\ x_n \\ y_1\ y_2\ \ldots\ y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathscr{K}(x_1,y_1) & \mathscr{K}(x_1,y_2) & \ldots & \mathscr{K}(x_1,y_n) \\ \mathscr{K}(x_2,y_1) & \mathscr{K}(x_2,y_2) & \ldots & \mathscr{K}(x_2,y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathscr{K}(x_n,y_1) & \mathscr{K}(x_n,y_2) & \ldots & \mathscr{K}(x_n,y_n) \end{vmatrix}$$

называется *символом Фредгольма*, а функция

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n}{n!}\,\lambda^n, \tag{7}$$

где

$$A_n = \int_a^b \ldots \int_a^b \mathscr{K}\begin{pmatrix} t_1\ t_2\ \ldots\ t_n \\ t_1\ t_2\ \ldots\ t_n \end{pmatrix} dt_1\,dt_2 \ldots dt_n, \tag{8}$$

называется *определителем Фредгольма* ядра $\mathscr{K}(x,y)$ или интегрального уравнения (6).

5.41. Доказать, что коэффициенты A_n определителя Фредгольма удовлетворяют неравенствам $|A_n| \le n^{n/2} M^n (b-a)^n$. Вывести отсюда, что $D(\lambda)$ — целая функция от λ.

Указание. Использовать неравенство Адамара (см. [2]).

Минором Фредгольма называется функция

$$D(x, y; \lambda) = \lambda \mathscr{K}(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n(x, y)}{n!} \lambda^{n+1}, \tag{9}$$

где

$$B_n(x, y) = \int_a^b \ldots \int_a^b \mathscr{K}\begin{pmatrix} x & t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ y & t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n. \tag{10}$$

5.42. Показать, что если $\mathscr{K}(x, y)$ — непрерывная в квадрате $L : \{a \le x,\ y \le b\}$ функция, то $D(x, y; \lambda)$ — непрерывная функция переменных x, y, λ в $L \times \mathbb{C}$ и $D(x, y; \lambda)$ (при фиксированных x и y) является целой функцией от λ.

5.43. Доказать, что коэффициенты A_n, функции $B_n(x, y)$ и ядро $\mathscr{K}(x, y)$ (см. (7)–(10)) связаны равенствами:

1) $B_n(x, y) = A_n \mathscr{K}(x, y) - n \int_a^b B_{n-1}(x, \xi)\, \mathscr{K}(\xi, y)\, d\xi;$

2) $B_n(x, y) = A_n \mathscr{K}(x, y) - n \int_a^b \mathscr{K}(x, \xi)\, B_{n-1}(\xi, y)\, d\xi.$

Указание. Разложить определитель, входящий в подынтегральное выражение для $B_n(x, y)$, по элементам первого столбца.

5.44. Доказать первое и второе фундаментальные соотношения Фредгольма:

$$D(x, y; \lambda) - \lambda \mathscr{K}(x, y)\, D(\lambda) = \lambda \int_a^b \mathscr{K}(x, \xi)\, D(\xi, y; \lambda)\, d\xi,$$

$$D(x, y; \lambda) - \lambda \mathscr{K}(x, y)\, D(\lambda) = \lambda \int_a^b \mathscr{K}(\xi, y)\, D(x, \xi; \lambda)\, d\xi.$$

Указание. Воспользоваться разложением (9), сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ в левой и правой частях доказываемых равенств и применить результат предыдущей задачи.

5.45. Доказать формулы

$$A_n = \int_a^b B_{n-1}(x, x)\, dx, \qquad \int_a^b D(x, x; \lambda)\, dx = -\lambda D'(\lambda).$$

5.46. Доказать формулу $\dfrac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda^{n-1}$ (коэффициенты α_n определены на с. 75).

5.47. Пусть определитель Фредгольма $D(\lambda)$ интегрального уравнения (6) не равен нулю. Доказать, что в этом случае интегральное уравнение для любой $f(x) \in C([a,b])$ имеет решение и при том только одно и что это решение дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_a^b \frac{D(x,y;\lambda)}{D(\lambda)} f(y)\,dy.$$

5.48. Используя представление решения интегрального уравнения при $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ через резольвенту $\mathscr{R}(x,y;\lambda)$ (см. задачу 5.6) и результат предыдущей задачи, доказать формулу

$$\mathscr{R}(x,y;\lambda) = \frac{D(x,y;\lambda)}{\lambda D(\lambda)}$$

(эта формула определяет аналитическое продолжение резольвенты, заданной при $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ в виде ряда (см. задачу 5.6)).

5.49. Доказать, что характеристические числа интегрального уравнения с непрерывным ядром совпадают с нулями определителя Фредгольма $D(\lambda)$ этого уравнения.

5.50. Доказать, что ранг m характеристического числа λ_0 интегрального уравнения с непрерывным ядром $\mathscr{K}(x,y)$ конечен и имеет место неравенство

$$m \le |\lambda_0|^2 \int\limits_a^b\int\limits_a^b |\mathscr{K}(x,y)|^2 dx\,dy.$$

5.51. Доказать, что определители Фредгольма непрерывного ядра $\mathscr{K}(x,y)$ и союзного с ним ядра $\mathscr{K}^*(x,y)$ совпадают и, следовательно, данное и союзное уравнения имеют одни и те же характеристические числа (см. задачу 5.49).

5.52. Показать, что ранг характеристического числа для данного непрерывного ядра и союзного с ним ядра один и тот же.

5.53. Доказать, что при $|\lambda| < 1$ интегральное уравнение Милна

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{|x-y|=0}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \right) \varphi(y)\,dy$$

имеет единственное решение $\varphi = 0$ в классе ограниченных функций на $[0,\infty)$.

5.54. Для интегрального уравнения Пайерлса

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{4\pi} \int\limits_G \frac{e^{-\alpha|x-y|}}{|x-y|^2} \varphi(y)\,dy, \qquad \alpha > 0,$$

доказать оценку

$$\lambda_1\left(1-e^{-\alpha D}\right) \geq \alpha,$$

где D — диаметр области $G \subset R^3$, λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число ядра.

5.55. Доказать, что при $\lambda < 1/2$ решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)\,dy + f(x)$$

единственно в классе ограниченных функций в R^1 и выражается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,|x-y|} f(y)\,dy.$$

Ответы к § 5

5.11. 1) $e^{\lambda(x-y)}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,(x-y)$.

5.12. 1) $\sin x$; 2) $\operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)$; 3) $\frac{2}{\lambda}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,x - 1\right)$.

5.14. 1) Если $\lambda = -2$, то решений нет; если $\lambda \neq -2$, то $\varphi(x) = \frac{2x(\lambda+1)-\lambda}{\lambda+2}$;

2) если $\lambda \neq \lambda_1$, где $\lambda_1 = \frac{1}{e^2-1}$, то $\frac{e^x}{1-\lambda(e^2-1)}$; при $\lambda = \lambda_1$ уравнение не имеет решений;

3) если $\lambda \neq 2$ и $\lambda \neq -6$, то $\frac{12\lambda^2 x - 24\lambda x - \lambda^2 + 42\lambda}{6(\lambda+6)(2-\lambda)}$; при $\lambda = 2$ и $\lambda = -6$ уравнение не имеет решений.

5.15. 1) Если $\lambda \neq \frac{3}{2}$ и $\lambda \neq \frac{5}{2}$, то $\frac{5(7+2\lambda)}{7(5-2\lambda)}x^2 + x^4$; если $\lambda = \frac{3}{2}$, то $Cx + \frac{25}{7}x^2 + x^4$, где C — произвольная постоянная; при $\lambda = \frac{5}{2}$ уравнение не имеет решений;

2) $\frac{2\lambda}{12\lambda^2-5}\left(5\sqrt[3]{x} + 6\lambda\right) + 1 - 6x^2$, если $\lambda \neq \pm\sqrt{\frac{5}{12}}$; при $\lambda = \pm\sqrt{\frac{5}{12}}$ уравнение не имеет решений;

3) $\frac{5(2\lambda-3)}{3(5-2\lambda)}x^4 + x^2$, если $\lambda \neq \frac{5}{2}$ и $\lambda \neq \frac{1}{2}$; $Cx^3 + x^2 - \frac{5}{6}x^4$ при $\lambda = \frac{1}{2}$, C — произвольная постоянная; при $\lambda = \frac{5}{2}$ уравнение не имеет решений;

4) $\frac{20\lambda}{1-2\lambda}x^2 + 7x^4 + 3$, если $\lambda \neq \frac{5}{2}$ и $\lambda \neq \frac{1}{2}$; $7x^4 + 3 - \frac{50}{3}x^2 + Cx$, где C — произвольная постоянная, если $\lambda = \frac{5}{4}$; при $\lambda = \frac{1}{2}$ уравнение не имеет решений;

5) $\dfrac{3(5-2\lambda)\,x}{5(3+2\lambda)}+x^3$, если $\lambda\neq\pm\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{1}{5}x+x^3+Cx^2$, где C — произвольная постоянная, если $\lambda=\dfrac{3}{2}$; при $\lambda=-\dfrac{3}{2}$ решений нет;

6) если $\lambda=\lambda_1=\dfrac{1}{8}$, то $C_1+\dfrac{3}{2}x$; если $\lambda=\lambda_2=\dfrac{5}{8}$, то $C_2(3x^2-1)-$ $-\dfrac{3}{2}x$ (C_1 и C_2 — произвольные постоянные); при $\lambda=\lambda_3=\dfrac{3}{8}$ уравнение не имеет решений; если $\lambda\neq\lambda_i$ $(i=1,2,3)$, то $\varphi(x)=\dfrac{3x}{3-8\lambda}$.

5.16. 1) $\dfrac{12\lambda}{3-4\lambda}\sin 2x+\pi-2x$, если $\lambda\neq\dfrac{3}{4}$ и $\lambda\neq-\dfrac{3}{2}$; $\pi-2x-$ $-2\sin 2x+C\cos 2x$, где C — произвольная постоянная, если $\lambda=-\dfrac{3}{2}$; при $\lambda=\dfrac{3}{4}$ уравнение не имеет решений;

2) $\dfrac{3\pi\lambda}{2(2\lambda+3)}\sin x+\cos 2x$, если $\lambda\neq-\dfrac{3}{2}$ и $\lambda\neq-\dfrac{3}{4}$; $\cos 2x-\dfrac{3\pi}{4}\sin x+$ $+C\cos x$, где C — произвольная постоянная, если $\lambda=-\dfrac{3}{4}$; при $\lambda=-\dfrac{3}{2}$ уравнение не имеет решений;

3) $\sin x+\dfrac{3\pi\lambda}{8\lambda^2-9}\left(2\lambda\cos 2x+\dfrac{3}{2}\sin 2x\right)$, если $\lambda\neq\pm\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$; при $\lambda=$ $=\pm\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ уравнение не имеет решений;

4) $\dfrac{\lambda\pi}{2}\sin 3x+\cos x$ при всех значениях λ;

5) $1-\dfrac{2x}{\pi}-\dfrac{\lambda\pi^2}{6(1+2\lambda)}\cos x$, если $\lambda\neq\pm\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{4}{3}-\dfrac{2x}{\pi}+(8+\pi^2\cos x)\,C$, где C — произвольная постоянная, если $\lambda=\dfrac{1}{2}$; при $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ уравнение не имеет решений;

6) $\dfrac{\lambda\pi}{2-\lambda\pi}+1+\cos 4x$, если $\lambda\neq\dfrac{2}{\pi}$ и $\lambda\neq\dfrac{4}{\pi}$; $\cos 4x-1+C_1\cos 2x+$ $+C_2\sin 2x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, если $\lambda=\dfrac{4}{\pi}$; при $\lambda=\dfrac{2}{\pi}$ уравнение не имеет решений.

5.17. 1) $\cos 3x$, если $\lambda\neq\dfrac{1}{\pi}$; $\cos 3x+C_1\cos x+C_2\cos 2x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, если $\lambda=\dfrac{1}{\pi}$;

2) $\dfrac{\cos x}{1-\lambda\pi}$ если $\lambda\neq\dfrac{1}{\pi}$ и $\lambda\neq\dfrac{1}{2\pi}$; $2\cos x+C\sin 2x$, где C — произвольная постоянная, если $\lambda=\dfrac{1}{2\pi}$; при $\lambda=\dfrac{1}{\pi}$ уравнение не имеет решений;

3) $\dfrac{\sin x}{1-\pi\lambda}$ если $\lambda \neq \dfrac{1}{\pi}$ и $\lambda \neq \dfrac{1}{3\pi}$; $\dfrac{3}{2}\sin x + C\cos 2x$, где C — произвольная постоянная, если $\lambda = \dfrac{1}{3\pi}$; при $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$ уравнение не имеет решений.

5.18. 1) $\lambda_1 = \dfrac{1}{\pi}$, $\sin x + \cos x$, 1; $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\pi}$, $\cos x - \sin x$;

2) $\lambda_1 = \dfrac{1}{2\pi}$, 1; $\lambda_2 = \dfrac{2}{\pi}$, $\cos 2x$; $\lambda_3 = -\dfrac{2}{\pi}$, $\sin 2x$;

3) $\lambda_1 = -45$, $3x^2 - 2$; $\lambda_2 = \dfrac{45}{8}$, $15x^2 - 1$;

4) $\lambda_1 = \dfrac{3}{8}$, $3x^{2/5} + x^{-2/5}$; $\lambda_2 = -\dfrac{3}{2}$, $3x^{2/5} - x^{-2/5}$;

5) $\lambda_1 = -\dfrac{2}{\pi}$, $\sin x - \sin 4x$, $\sin 2x - \sin 3x$; $\lambda_2 = \dfrac{2}{\pi}$, $\sin 2x + \sin 3x$, $\sin x + \sin 4x$.

5.19. $a = -12$, $b = 12$, $-12x^2 + C_1x + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

5.20. $a = \sqrt{15} - 3$, $C\left[4\sqrt{15}\,x^2 + 3\left(1 - \sqrt{15}\right)x\right] + \dfrac{1}{x} - 3x$, где C — произвольная постоянная.

5.21. Уравнение разрешимо при любом λ,

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x - y)\, f(y)\, dy + f(x).$$

5.22. 1) $\dfrac{\lambda a\pi^3}{12(1-2\lambda)}\sin x + \dfrac{2\lambda b}{1-2\lambda} + ax + b$, если $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ (a, b любые); при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ уравнение разрешимо в том и только в том случае, когда $a = b = 0$, $\varphi(x) = C_1\sin x + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные;

2) $\dfrac{2(a-2\lambda b)}{2+\lambda\pi}\sin x + b$, если $\lambda \neq \pm\dfrac{2}{\pi}$ (a, b любые); при $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$ уравнение разрешимо при любых a и b и $\varphi(x) = \dfrac{a\pi - 4b}{2\pi}\sin x + b + {}$ ${}+ C_1\cos x$, где C_1 — произвольная постоянная; если $\lambda = -\dfrac{2}{\pi}$, то уравнение разрешимо в том и только в том случае, когда $a\pi + 4b = 0$ и $\varphi(x) = b + C_2\sin x$, где C_2 — произвольная постоянная;

3) $\dfrac{2\lambda a + 3c}{3(1-2\lambda)} + \dfrac{3b}{3-2\lambda}x + ax^2$, если $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ и $\lambda \neq \dfrac{3}{2}$ (a, b, c любые); при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ уравнение разрешимо, если $a + 3c = 0$, $\varphi(x) =$ $= \dfrac{3}{2}bx + ax^2 + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная; при $\lambda = \dfrac{3}{2}$ уравнение разрешимо, если $b = 0$ и $\varphi(x) = ax^2 - \dfrac{1}{2}(a + c) + C_2x$, где C_2 — произвольная постоянная;

4) $\dfrac{2\lambda(5a+3b)}{15-4\lambda^2}\,x^2 + \dfrac{4\lambda^2(5a+3b)}{5(15-4\lambda^2)}\,x + ax + bx^3$, если $\lambda \neq \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ $(a, b$ любые); при $\lambda = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ уравнение разрешимо, если $5a + 3b = 0$, и

$$\varphi(x) = a\Big(x - \frac{5}{3}\,x^3\Big) + C_1\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,x^2 + x\right),$$

где C_1 — произвольная постоянная; при $\lambda = -\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ уравнение разрешимо, если $5a + 3b = 0$ и

$$\varphi(x) = a\Big(x - \frac{5}{3}\,x^3\Big) + C_2\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\,x^2\right),$$

где C_2 — произвольная постоянная;

5) $\dfrac{3a}{3-\lambda}\,x + \dfrac{5\lambda b}{3(5-\lambda)}\,x^2 + b$, если $\lambda \neq 3$ и $\lambda \neq 5$ $(a, b$ любые); при $\lambda = 3$ уравнение разрешимо, если $a = 0$, и $\varphi(x) = b\Big(\dfrac{5}{2}\,x^2 + 1\Big) + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная; при $\lambda = 5$ уравнение разрешимо, если $b = 0$, и $\varphi(x) = C_2x^2 - \dfrac{3}{2}\,ax$, где C_2 — произвольная постоянная;

6) $\dfrac{30\lambda a + 7b}{7(1-6\lambda)}\,x^{1/3} + ax$, если $\lambda \neq \dfrac{1}{6}$ $(a, b$ любые); при $\lambda = \dfrac{1}{6}$ уравнение разрешимо, если $5a + 7b = 0$, и $\varphi(x) = -\dfrac{7}{5}\,bx + C_1x^{1/3} + C_2x^{2/3}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные;

7) $\dfrac{2a + \lambda b(4-\pi)}{2-\lambda\pi} + \dfrac{2}{2-\lambda(4-\pi)}\,x + bx^2$, если $\lambda \neq \dfrac{2}{\pi}$ и $\lambda \neq \dfrac{2}{4-\pi}$ $(a,b$ любые); при $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$ уравнение разрешимо, если $a\pi + b(4-\pi) = 0$, и $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2(\pi-2)}\,x + bx^2 + C$, где C — произвольная постоянная; при $\lambda = \dfrac{2}{4-\pi}$ уравнение не имеет решений;

8) $\dfrac{5\lambda(14a + 36\lambda b + 42c)}{21(5-12\lambda^2)}\,x^{1/3} + \dfrac{28\lambda^2 a + 30\lambda b + 35}{7(5-12\lambda^2)} + ax^2 + bx$, если $\lambda \neq \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ $(a, b, c$ любые); при $\lambda = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ уравнение разрешимо, если $15\sqrt{3}\,b + 7\sqrt{5}\,(a + 3c) = 0$, и

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c + C_1\left(x^{1/3} + \sqrt{\frac{3}{5}}\right),$$

где C_1 — произвольная постоянная; при $\lambda = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ уравнение разрешимо, если $15\sqrt{3}\,b - 7\sqrt{5}\,(a + 3c) = 0$, и

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c + C_2\left(x^{1/3} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right),$$

где C_2 — произвольная постоянная;

9) $\dfrac{30(b-1)\lambda}{15+8\lambda}x^2 + \dfrac{3a\lambda^2}{3-2\lambda}x + \dfrac{36\lambda^2(b-1)}{(15+8\lambda)(3-2\lambda)}$, если $\lambda \neq -\dfrac{15}{8}$ и $\lambda \neq \dfrac{3}{2}$ (a, b любые); при $\lambda = -\dfrac{15}{8}$ уравнение разрешимо, если $b = 1$, и $\varphi(x) = \dfrac{17}{2}ax + 1 - 20a + C(x^2+1)$, где C — произвольная постоянная; при $\lambda = \dfrac{3}{2}$ уравнение разрешимо, если $a = b = 0$, и $\varphi(x) = C_1x + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

5.23. 1) $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$, $\varphi_1 = x$; $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$, $\varphi_2 = 3x - 4x^2$; $\varphi(x) = \dfrac{3ax}{3-2\lambda}$, если $\lambda \neq \dfrac{3}{2}$ и $\lambda \neq -\dfrac{1}{2}$ (a любое); при $\lambda = \dfrac{3}{2}$ уравнение разрешимо, если $a = 0$, и $\varphi(x) = C_1x$ (C_1 — произвольная постоянная); при $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ уравнение разрешимо при любом a и $\varphi(x) = \dfrac{3}{4}ax + C_2(3x - 4x^2)$, где C_2 — произвольная постоянная;

2) $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, $\varphi_1^{(1)} = x$, $\varphi_1^{(2)} = x^2$, $\varphi(x) = \dfrac{ax^2+bx}{1-2\lambda}$, если $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$; при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ уравнение разрешимо, если $a = b = 0$ и $\varphi(x) = C_1x^2 + C_2x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

5.24. 1) $\lambda_1 = \dfrac{1}{\pi}$, $\varphi_1 = \sin x$; $\varphi(x) = a + b\cos x + \lambda b\pi x + \dfrac{2\pi^2\lambda^2 b}{1-\lambda\pi}\sin x$, если $\lambda \neq \dfrac{1}{\pi}$ (a, b любые); при $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$ уравнение разрешимо, если $b = 0$, и $\varphi(x) = a + C\sin x$, где C — произвольная постоянная;

2) $\lambda_1 = \dfrac{1}{2\pi}$, $\varphi_1 = x$; $\varphi(x) = \dfrac{ax}{1-2\pi\lambda} + b + 2\pi b\lambda\cos x$, если $\lambda \neq \dfrac{1}{2\pi}$ (a, b любые); при $\lambda = \dfrac{1}{2\pi}$ уравнение разрешимо, если $a = 0$ и $\varphi(x) = b(1+\cos x) + Cx$, где C — произвольная постоянная.

5.25. 1) $\varphi(x) = \lambda\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x+y) + \frac{\lambda\pi}{2}\cos(x-y)}{\Delta(\lambda)} f(y)\,dy + f(x)$, если $\Delta(\lambda) \neq 0$, где $\Delta(\lambda) = 1 - \lambda^2\dfrac{\pi^2}{4}$; при $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$ уравнение разрешимо, если $f_1 + f_2 = 0$, где

$$f_1 = \int_0^\pi f(y)\cos y\,dy, \qquad f_2 = \int_0^\pi f(y)\sin y\,dy,$$

$$\varphi(x) = C_1(\sin x + \cos x) + \frac{2}{\pi}f_1\sin x + f(x)$$

(C_1 — произвольная постоянная); при $\lambda = -\dfrac{2}{\pi}$ уравнение разрешимо, если $f_1 - f_2 = 0$, и $\varphi(x) = C_2(\sin x - \cos x) - \dfrac{2}{\pi} f_1 \sin x + f(x)$, где C_2 — произвольная постоянная;

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \frac{\sin(x+y) + \frac{\lambda\pi}{2}\cos(x-y)}{\Delta(\lambda)};$$

2) $\varphi(x) = \lambda \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1 - \frac{4}{3}\lambda + y(2x - 4\lambda x - 1)}{\Delta(\lambda)} f(y)\,dy + f(x)$, если $\Delta(\lambda) \neq 0$, где $\Delta(\lambda) = (1 - 2\lambda)\left(1 - \dfrac{4}{3}\lambda\right)$; при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ уравнение разрешимо, если $f_1 = 3f_2$, где

$$f_1 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx, \qquad f_2 = \int_{-1}^{1} x f(x)\,dx, \qquad \varphi(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) f_1 + f(x) + C_1$$

(C_1 — произвольная постоянная); при $\lambda = \dfrac{3}{4}$ уравнение разрешимо, если $f_2 = 0$, $\varphi(x) = -\dfrac{3}{2} f_1 + f(x) + C_2(x+1)$, где C_2 — произвольная постоянная;

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \frac{1 - \frac{4}{3}\lambda + y(2x - 4\lambda x - 1)}{\Delta(\lambda)};$$

3) $\varphi(x) = \lambda \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x \sin y}{1 - 2\pi\lambda} + \cos x\right)(ay + b)\,dy + ax + b = \frac{ax}{1 - 2\pi\lambda} +$ $+ 2\pi\lambda b \cos x + b$, если $\lambda \neq \dfrac{1}{2\pi}$ (a, b любые); при $\lambda = \dfrac{1}{2\pi}$ уравнение разрешимо, если $a = 0$, $\varphi(x) = b(\cos x + 1) + Cx$, где C — произвольная постоянная;

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \frac{x \sin y}{1 - 2\pi\lambda} + \cos x;$$

4) $\varphi(x) = \lambda \displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y}{1 - \lambda\pi} f(y)\,dy + f(x)$, если $\lambda \neq \dfrac{1}{\pi}$; при $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$ уравнение разрешимо, если

$$\int_{0}^{2\pi} f(y) \sin y\,dy = \int_{0}^{2\pi} f(y) \sin 2y\,dy = 0, \qquad \varphi(x) = f(x) + C_1 \sin x + C_2 \sin 2x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные;

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \frac{\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y}{1 - \lambda\pi}.$$

5.26. 1) $b = 0$, $3a + 5c = 0$;

2) $a = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $b = 0$, $c = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $a = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $b = 0$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$;

3) $a = 0,\ b = -\frac{1}{2}$; 4) $a = 6$;

5) $a = 0,\ b = -1$; 6) a, b любые;

7) a, b, c любые; 8) $7a + 5b = 0$.

5.27. $\frac{1}{3} < a < 3$.

5.28. 1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi_1 = 4(x_1 + x_2) + 1$; $\lambda_2 = -1$, $\varphi_2 = 4(x_1 + x_2) - 1$;

2) $\lambda_1 = \frac{4\sqrt{3} - 6}{\pi}$, $\varphi_1 = 1 + \sqrt{3}(x_1^2 + x_2^2)$; $\lambda_2 = -\frac{4\sqrt{3} + 6}{\pi}$, $\varphi_2 = \sqrt{3}(x_1^2 + x_2^2) - 1$;

3) $\lambda_1 = \frac{3}{4\pi}$, $\varphi_1 = \frac{1}{1 + r}$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

5.29. Уравнение не имеет вещественных характеристических чисел.

5.30. Характеристические числа $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ и $\lambda_2 = -\frac{3}{4}$, соответствующие собственные функции $\varphi_1 = 1 + 3x_1x_2$ и $\varphi_2 = 3x_1x_2 - 1$. Если $\lambda = \pm\frac{3}{4}$, то

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{\lambda}{\Delta(\lambda)} \left[(f_1 + 4\lambda f_2)\, x_1x_2 + \frac{4}{9}\, \lambda f_1 + f_2 \right] + f(x_1, x_2),$$

где

$$f_1 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2, \qquad f_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y_1y_2\, f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2,$$

$\Delta(\lambda) = 1 - \frac{16}{9}\lambda^2$; при $\lambda = \frac{3}{4}$ уравнение разрешимо, если $f_1 + 3f_2 = 0$, и $\varphi(x_1, x_2) = \frac{3}{4}\, x_1x_2 f_1 + f(x_1, x_2) + C(3x_1x_2 + 1)$, где C_1 — произвольная постоянная; при $\lambda = -\frac{3}{4}$ уравнение разрешимо, если $f_1 - 3f_2 = 0$, и $\varphi(x_1, x_2) = -\frac{3}{4}\, x_1x_2 f_1 + f(x_1, x_2) + C_2(3x_1x_2 - 1)$, где C_2 — произвольная постоянная.

5.36. 1) $\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$, $\varphi_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$;

2) $\lambda_n = n^2\pi^2$, $\varphi_n = \sin \pi n x$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

3) λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$, $\varphi_n = \sin\sqrt{\lambda_n}\, x$;

4) $\lambda_n = -\frac{1}{3}\mu_n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где μ_n — положительные корни уравнения $\mu - \frac{1}{\mu} = 2\operatorname{ctg}\mu$, $\varphi_n = \sin\mu_n x + \mu_n \cos\mu_n x$;

5) $\lambda_0 = 1$, $\varphi_0 = e^x$; $\lambda_n = -n^2\pi^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\varphi_n = \sin \pi n x + \pi n \cos \pi n x$;

6) $\lambda_n = \dfrac{\pi^2(2n+1)^2+4}{8(1+e^2)}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $\varphi_n = \sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi x$;

7) $\lambda_n = \dfrac{(n\pi)^2-1}{\sin 1}$, $\varphi_n = \sin\pi n x$ $(n=1,2,\ldots)$.

5.37. 1) $\lambda_n^{(1)} = \dfrac{(\pi n)^2}{2}$, $\varphi_n^{(1)} = \sin\pi n x$ $(n=1,2,\ldots)$; $\lambda_n^{(2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)^2$, $\varphi_n^{(2)} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)x$ $(n=0,1,2,\ldots)$;

2) $\lambda_n = 1-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2$, $\varphi_n = \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ $(n=0,1,2,\ldots)$;

3) $\lambda_n = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2-1$, $\varphi_n = \sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

5.38. 1) $\lambda_n^{(1)} = \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2$, $\varphi_n^{(1)} = \sin(2n+1)x$ $(n=0,1,2,\ldots)$; $\lambda_n^{(2)} = -\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2$, $\varphi_n^{(2)} = \cos(2n+1)x$ $(n=0,1,2,\ldots)$; $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi^2}$, $\varphi_0 = 1$;

2) $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi^2}$, $\varphi_0 = 1$; $\lambda_n^{(1)} = \dfrac{(2n+1)^2}{4}$, $\varphi_n^{(1)} = \cos(2n+1)x$ $(n = 0,1,2,\ldots)$; $\lambda_n^{(2)} = -\dfrac{(2n+1)^2}{4}$, $\varphi_n^{(2)} = \sin(2n+1)x$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

5.39. $\lambda_n = \dfrac{1}{a_n}$, $\varphi_n^{(1)} = \sin nx$, $\varphi_n^{(2)} = \cos nx$ $(n=1,2,\ldots)$, если $a_n = \int\limits_0^{2\pi}\omega(t)\cos nt\,dt \neq 0$; $\lambda_0 = \dfrac{1}{a_0}$, $\varphi_0 = 1$, если $a_0 = \int\limits_0^{2\pi}\omega(t)\,dt \neq 0$.

5.40. $\varphi(x) = \lambda\int\limits_0^1 G(x,y)\,f(y)\,dy + f(x)$, где

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x\,\cos\sqrt{\lambda}(y-1)}{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}, & x\le y,\\[2ex] \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}y\,\cos\sqrt{\lambda}(x-1)}{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}, & x\ge y.\end{cases}$$

Глава III

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 6. Основные и обобщенные функции

Обозначим через $\mathscr{D} \equiv \mathscr{D}(R^n)$ совокупность всех бесконечно дифференцируемых финитных функций в R^n. Последовательность $\{\varphi_k\}$ функций из $\mathscr{D}$ называется *сходящейся* к функции φ (из $\mathscr{D}$) если:

а) существует такое число $R > 0$, что $\operatorname{supp}\varphi_k \subset U_R$;

б) при каждом α

$$D^\alpha \varphi_k(x) \overset{x \in R^n}{\rightrightarrows} D^\alpha \varphi(x), \qquad K \longrightarrow \infty\,^{*)}.$$

При этом пишем $\varphi_k \longrightarrow \varphi$, $k \longrightarrow \infty$ в $\mathscr{D}$. Совокупность $\mathscr{D}$ функций с введенной сходимостью называется пространством *основных функций* $\mathscr{D}$.

Обозначим через $\mathscr{S} \equiv \mathscr{S}(R^n)$ совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций в R^n, убывающих при $|x| \longrightarrow \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

Последовательность $\{\varphi_k\}$ функций из $\mathscr{S}$ называется *сходящейся* к функции φ (из $\mathscr{S}$), если для всех α и β

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \overset{x \in R^n}{\rightrightarrows} x^\beta D^\alpha \varphi(x), \qquad k \longrightarrow \infty.$$

При этом пишем $\varphi_k \longrightarrow \varphi$, $k \longrightarrow \infty$ в $\mathscr{S}$. Совокупность $\mathscr{S}$ функций с введенной сходимостью называется пространством *основных функций* $\mathscr{S}$.

6.1. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}$. Выяснить, есть ли среди последовательностей:

1) $\dfrac{1}{k}\varphi(x)$; 2) $\dfrac{1}{k}\varphi(kx)$; 3) $\dfrac{1}{k}\varphi\left(\dfrac{x}{k}\right)$;

$k = 1, 2, \ldots$, сходящиеся в $\mathscr{D}$.

6.2. Пусть $n = 1$ и

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad -2\varepsilon \le x \le 2\varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > 2\varepsilon. \end{cases}$$

Показать, что функция

$$\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(y)\,\omega_\varepsilon(x-y)\,dy,$$

*) По поводу обозначений см. с. 6–8.

где ω_ε — «шапочка», является основной из $\mathscr{D}(R^1)$, причем $0 \le \eta(x) \le 1$, $\eta(x) \equiv 1$ при $-\varepsilon \le x \le \varepsilon$, $\eta(x) \equiv 0$ при $|x| > 3\varepsilon$.

6.3. Пусть $G_{2\varepsilon} = \bigcup\limits_{x \in G} U(x; 2\varepsilon)$ — 2ε-окрестность ограниченной области G и $\chi(x)$ — характеристическая функция области $G_{2\varepsilon}$, т. е. $\chi(x) = 1$, $x \in G_{2\varepsilon}$ и $\chi(x) = 0$, $x \,\bar{\in}\, G_{2\varepsilon}$. Доказать, что функция

$$\eta(x) = \int \chi(y)\, \omega_\varepsilon(x - y)\, dy$$

основная из $\mathscr{D}(R^n)$, причем $0 \le \eta(x) \le 1$, $\eta(x) \equiv 1$ при $x \in G_\varepsilon$; $\eta(x) \equiv 0$ при $x \,\bar{\in}\, G_{3\varepsilon}$.

6.4. Пусть функция $\eta(x)$ удовлетворяет условиям задачи 6.2,

$$H(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \eta(x - \varepsilon\nu), \qquad e(x) = \frac{\eta(x)}{H(x)}.$$

Доказать, что $H \in C^\infty(R^1)$, $H(x) \ge 1$; $e \in \mathscr{D}(R^1)$, $0 \le e(x) \le 1$; $e(x) \equiv 1$ при $|x| \le \varepsilon$ и $e(x) = 0$ при $|x| \ge 3\varepsilon$; $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} e(x - \varepsilon\nu) \equiv 1$.

6.5. Доказать, что существуют такие функции $\varphi_\delta \in \mathscr{D}(R^1)$, $\delta > 1$, что $\varphi_\delta(x) = 1$ при $|x| \le \delta - 1$, $\varphi_\delta(x) = 0$ при $|x| \ge \delta$ и $|\varphi_\delta^{(\alpha)}(x)| \le C_\alpha$, где постоянная C_α не зависит от δ.

6.6. Пусть непрерывная функция $f(x)$ финитна: $f(x) = 0$, $|x| > R$. Показать, что функция

$$f_\varepsilon(x) = \int f(y)\, \omega_\varepsilon(x - y)\, dy \qquad (\varepsilon < R)$$

основная из $\mathscr{D}(R^n)$, причем $f_\varepsilon(x) = 0$ при $|x| > R + \varepsilon$. Показать, что

$$f_\varepsilon(x) \overset{x \in R^n}{\rightrightarrows} f(x), \qquad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

6.7. 1) Доказать, что функция

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m}\left[\varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right], \qquad m = 1, 2,$$

основная из $\mathscr{D}(R^1)$, где $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$ и $\eta \in \mathscr{D}(R^1)$, $\eta \equiv 1$ в окрестности $x = 0$;

2) доказать, что функция

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \eta(x)\, \varphi(0)}{\alpha(x)}$$

основная из $\mathscr{D}(R^1)$, где $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$, $\eta(x)$ — функция из задачи 6.7, 1) и $\alpha \in C^\infty(R^1)$, имеет единственный нуль порядка 1 в точке $x = 0$.

6.8. 1) Показать, что функция φ_1 из $\mathscr{D}(R^1)$ может быть представлена как производная от некоторой другой функции φ_2 из $\mathscr{D}(R^1)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\,dx = 0;$$

2) показать, что всякая функция $\varphi(x)$ из $\mathscr{D}(R^1)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0(x)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\,dx' + \varphi_1'(x),$$

где $\varphi_1 \in \mathscr{D}(R^1)$, а $\varphi_0(x)$ — любая основная функция из $\mathscr{D}(R^1)$, удовлетворяющая условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\,dx = 1$.

Указание. Воспользоваться задачей 6.8, 1).

6.9. Показать, что $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ и из сходимости в $\mathscr{D}$ следует сходимость в $\mathscr{S}$.

6.10. Пусть $\varphi \in \mathscr{S}$. Выяснить, есть ли среди последовательностей:

1) $\frac{1}{k}\,\varphi(x)$; 2) $\frac{1}{k}\,\varphi(kx)$; 3) $\frac{1}{k}\,\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$;

$k = 1, 2, \ldots$, сходящиеся в $\mathscr{S}$.

6.11. Пусть $\varphi \in \mathscr{S}$ и P — полином. Доказать, что $\varphi P \in \mathscr{S}$.

6.12. Пусть функция $\psi \in C^\infty(R^1)$, $\psi(x) = 0$ при $x < a$ и ограничена вместе со всеми производными. Доказать, что функция $\psi(x)\,e^{-\sigma x}$ основная из $\mathscr{S}(R^1)$, если $\sigma > 0$.

Обозначим через $\mathscr{D}' \equiv \mathscr{D}'(R^n)$ совокупность всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций $\mathscr{D}$. Всякий функционал $f \in \mathscr{D}'$ назовем *обобщенной функцией* (из пространства D').

Обозначим через $\mathscr{S}' \equiv \mathscr{S}'(R^n)$ совокупность всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций $\mathscr{S}$. Всякий функционал $f \in \mathscr{S}'$ назовем *обобщенной функцией медленного роста* (из пространства $\mathscr{S}'$).

Значение функционала f на основной функции φ обозначим через (f, φ). Чтобы указать аргумент основных функций, иногда вместо f и (f, φ) будем писать $f(x)$ и $(f(x), \varphi(x))$.

Последовательность $\{f_k\}$ обобщенных функций из $\mathscr{D}'$ называется *сходящейся к обобщенной функции* f (из $\mathscr{D}'$), если $(f_k, \varphi) \longrightarrow (f, \varphi)$, $k \longrightarrow \infty$ для любой φ из $\mathscr{D}$. В частности, ряд из обобщенных функций $u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots$ называется *сходящимся в* $\mathscr{D}'$ *к обобщенной функции* f, если для любой $\varphi \in \mathscr{D}$ числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k, \varphi)$ сходится к (f, φ). Сходимость последовательности и ряда в $\mathscr{S}$ определяется аналогично.

Говорят, что обобщенная функция f *равна нулю в области* G, если $(f, \varphi) = 0$ для всех φ из $\mathscr{D}$ с носителем в G. Обобщенные функции f_1 и f_2 называются *равными в области* G, если их разность $f_1 - f_2$ равна нулю в G; f_1 и f_2 называются *равными*, если $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}$.

Носителем обобщенной функции f называется множество всех таких точек, ни в какой окрестности которых f не обращается в нуль. Носитель f обозначается через $\operatorname{supp} f$. Если $\operatorname{supp} f$ — ограниченное множество, то f называется *финитной* обобщенной функцией.

Регулярной обобщенной функцией из $\mathscr{D}'(R^n)$ называется всякий функционал вида

$$(f, \varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(R^n),$$

где f — локально интегрируемая в R^n функция.

Если $f(x)$ — функция медленного роста в R^n, т.е.

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-m}dx < \infty$$

при некотором $m \geq 0$, то она определяет р е г у л я р н у ю обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$ (медленного роста).

Всякая обобщенная функция, не являющаяся регулярной, называется *сингулярной*.

Примером сингулярной обобщенной функции является δ-функция Дирака, определяемая правилом

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(R^n).$$

Обобщением δ-функции является поверхностная δ-функция. Пусть S — кусочно гладкая поверхность и $\mu(x)$ — непрерывная функция на ней. Обобщенную функцию $\mu\delta_S$, действующую по формуле

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int\limits_S \mu(x)\,\varphi(x)\,dS_x, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(R^n),$$

назовем *простым слоем*. В частности, если S есть плоскость $t = 0$ в $R^{n+1}(x,t)$, то $\mu\delta_{(t=0)}(x,t)$ обозначим $\mu(x)\,\delta(t)$, так что

$$(\mu(x)\,\delta(t), \varphi) = \int\limits_{R^n} \mu(x)\,\varphi(x,0)\,dx.$$

При $n = 1$ простой слой $\delta_{S_R}(x)$ на сфере S_R обозначим через $\delta(R-|x|)$, так что $(\delta(R-|x|), \varphi) = \varphi(R) + \varphi(-R)$.

Произведением f из $\mathscr{D}'(R^n)$ и функции $\alpha(x) \in C^\infty(R^n)$ называется обобщенная функция αf, действующая по формуле $(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$.

Пусть $f(x) \in \mathscr{D}'(R^n)$, A — неособое линейное преобразование и b — вектор в R^n. Обобщенную функцию $f(Ay+b)$ определим формулой

$$(f(Ay+b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(R^n).$$

При $A = I$ имеем сдвиг обобщенной функции f на вектор $-b$:

$$(f(y+b), \varphi) = (f, \varphi(x-b)).$$

Например,

$$(\delta(x-x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0)$$

— сдвиг $\delta(x)$ на вектор x_0. При $A=-I$, $b=0$ имеем отражение

$$(f(-x), \varphi) = (f, \varphi(-x)).$$

6.13. Доказать, что $\delta(x)$ — сингулярная обобщенная функция. Дать физическую интерпретацию ее.

6.14. Дать физическую интерпретацию обобщенным функциям:

1) $2\delta(x-x_0)$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{N} m_k\delta(x-x_k)$;

3) $\mu(x)\,\delta_S(x)$; 4) $|x|\,\delta_{S_R}(x-x_0)$;

5) $2\delta(R_1-|x-1|)+3\delta(R_2-|x-2|)$.

Найти их носители.

6.15. Доказать, что:

1) $\delta(x-\nu) \longrightarrow 0$, $\nu \longrightarrow \infty$ в $\mathscr{D}'(R^1)$;

2) $\delta_{S_R}(x) \longrightarrow 0$, $R \longrightarrow \infty$ в $\mathscr{D}'$.

6.16. Доказать, что $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$ и из сходимости в $\mathscr{S}'$ следует сходимость в $\mathscr{D}'$.

6.17. Доказать, что:

1) $e^x \in \mathscr{D}'(R^1)$, $e^x \bar{\in} \mathscr{S}'(R^1)$; 2) $e^{1/x} \bar{\in} \mathscr{D}'(R^1)$;

3) $e^x \sin e^x \in \mathscr{S}'(R^1)$.

6.18. Доказать, что функционал $\mathscr{P}\frac{1}{x}$, действующий по формуле

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \mathrm{Vp}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \qquad \varphi \in \mathscr{D},$$

— сингулярная обобщенная функция.

6.19. Вычислить пределы в $\mathscr{D}'(R^1)$ при $\varepsilon \longrightarrow +0$:

1) $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon), & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon; \end{cases}$ 2) $\dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$;

3) $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\, e^{-x^2/(4\varepsilon)}$; 4) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{\varepsilon}$; 5) $\dfrac{1}{\pi x^2}\sin^2\dfrac{x}{\varepsilon}$.

6.20. Доказать формулу Сохоцкого

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

6.21. Вычислить пределы в $\mathscr{D}'(R^1)$ при $t \longrightarrow +\infty$:

1) $\dfrac{e^{ixt}}{x-i0}$; 2) $\dfrac{e^{-ixt}}{x-i0}$; 3) $\dfrac{e^{ixt}}{x+i0}$; 4) $\dfrac{e^{-ixt}}{x+i0}$;

5) $t^m e^{ixt}$, $m \ge 0$.

6.22. Найти предел $\mathscr{P}\dfrac{\cos kx}{x}$, $k \longrightarrow \infty$, в $\mathscr{D}'(R^1)$, где

$$\left(\mathscr{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi\right) = \operatorname{Vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx = \\ = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathscr{D}.$$

6.23. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(x-k)$:

1) сходится в $\mathscr{D}'$ при любых a_k;
2) сходится в $\mathscr{S}'$, если $|a_k| \le C(1+|k|)^m$.

6.24. Пусть $\psi \in \mathscr{D}(R^n)$, $\psi \ge 0$, $\int \psi(x)\,dx = 1$. Доказать, что $\varepsilon^{-n}\psi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \longrightarrow \delta(x)$, $\varepsilon \longrightarrow +0$ в $\mathscr{D}'(R^n)$; в частности, $\omega_\varepsilon(x) \longrightarrow \delta(x)$, $\varepsilon \longrightarrow 0$ в $\mathscr{D}'(R^n)$.

6.25. Показать, что функционал $\mathscr{P}\dfrac{1}{x^2}$, действующий по формуле

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x^2}, \varphi\right) = \operatorname{Vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx, \qquad \varphi \in \mathscr{D},$$

— сингулярная обобщенная функция.

6.26. Показать, что:

1) $\alpha(x)\,\delta(x) = \alpha(0)\,\delta(x)$, $\alpha \in C^\infty(R^n)$; в частности, $x\delta(x) = 0$, $x \in R^1$;

2) $x\mathscr{P}\dfrac{1}{x} = 1$;

3) $x^m\mathscr{P}\dfrac{1}{x} = x^{m-1}$, $m \ge 1$.

6.27. 1) Пусть обобщенная функция f равна нулю вне отрезка $[-a, a]$; доказать, что $f = \eta f$, где $\eta \in C^\infty(R^1)$ и $\eta(x) \equiv 1$ в $[-a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ любое;

2) пусть $f \in \mathscr{D}'(R^n)$ и $\eta \in C^\infty(R^n)$, $\eta(x) \equiv 1$ в окрестности $\operatorname{supp} f$; показать, что $f = \eta f$ и $f \in \mathscr{S}'(R^n)$.

6.28. Доказать, что $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|^n}\,\delta(x)$, $a \ne 0$.

6.29. Доказать, что $(\alpha f)(x+h) = \alpha(x+h)\,f(x+h)$, где $\alpha \in C^\infty(R^n)$, $f \in \mathscr{D}'(R^n)$, $h \in R^n$.

6.30. Доказать, что обобщенная функция

$$\left(\operatorname{Pf}\frac{1}{x^2+y^2},\ \varphi(x,y)\right) = \\ = \int\limits_{x^2+y^2<1} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(0,0)}{x^2+y^2}\,dx\,dy + \int\limits_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

удовлетворяет уравнению $(x^2+y^2)\operatorname{Pf}\dfrac{1}{x^2+y^2} = 1$ в $\mathscr{D}'(R^2)$.

6.31. Пусть $f \in \mathscr{S}'$ и P — полином. Показать, что $fP \in \mathscr{S}'$.

6.32. Пусть $f \in \mathscr{D}'(R^1)$ финитна и $\eta(x)$ — произвольная функция из $\mathscr{D}(R^1)$, равная 1 в окрестности $\operatorname{supp} f$. Положим

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(f(x'), \frac{\eta(x')}{x'-z}\right), \qquad z = x + iy.$$

Доказать, что:

1) $\hat{f}(z)$ не зависит от выбора вспрмогательной функции η;

2) $\hat{f}(z)$ — аналитическая функция при $z \,\bar{\in}\, \operatorname{supp} f$;

3) $\hat{f}(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$, $z \longrightarrow \infty$;

4) $\hat{f}(x + i\varepsilon) - \hat{f}(x - i\varepsilon) \longrightarrow f(x)$, $\varepsilon \longrightarrow +0$ в $\mathscr{D}'(R^1)$.

6.33. Пусть $f \in \mathscr{D}'(R^1)$, $\operatorname{supp} f \subset [-a, a]$ и $\eta \in \mathscr{D}(R^1)$, $\eta(\xi) \equiv 1$ в окрестности $\operatorname{supp} f$. Доказать, что функция

$$\tilde{f}(z) = \left(f(\xi), \eta(\xi)\, e^{iz\xi}\right), \qquad z = x + iy,$$

не зависит от η, целая и удовлетворяет при некотором $m \geq 0$ и любом $\varepsilon > 0$ оценке

$$\left|\tilde{f}(x + iy)\right| \leq C_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)|y|}(1 + |x|)^m.$$

6.34. Пусть $f \in \mathscr{D}'(R^n)$ и $\operatorname{supp} f = \{0\}$. Доказать, что f однозначно представляется в виде

$$f(x) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq N} C_\alpha D^\alpha \delta(x).$$

6.35. Пусть ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \delta^{(\nu)}(x)$ сходится в $\mathscr{D}'(R^1)$. Доказать, что $a_\nu = 0$ при $\nu > \nu_0$.

Ответы к § 6

6.1. 1) Сходится к нулю; 2) и 3) не сходятся, если $\varphi(x) \not\equiv 0$.

6.6. Ясно, что $f_\varepsilon(x) \in \mathscr{D}$. Далее, так как $f(x)$ непрерывна и финитна, то для любого $\sigma > 0$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $|f(x) - f(y)| < \sigma$ при $|x - y| \leq \varepsilon$, $x, y \in R^1$, так что

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \int |f(x) - f(y)|\, \omega_\varepsilon(x - y)\, dy < \sigma \int\limits_{|x-y|<\varepsilon} \omega_\varepsilon(x - y)\, dy = \sigma,$$
$$x \in R^1.$$

6.7. 1) Р е ш е н и е. Очевидно, функция $\psi(x)$ финитна и бесконечно дифференцируема при $x \neq 0$. Осталось доказать, что $\psi(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $x = 0$. Пусть $\eta(x) \equiv 1$ при $|x| \leq \varepsilon$. Обозначив

$$f(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, x^k,$$

получим

$$\psi(0) = \lim_{x\to 0}\psi(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m} = \frac{f^{(m)}(0)}{m!},$$

$$\psi'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\dfrac{x^m f^{(m)}(0)}{m!}}{x^{m+1}} = \frac{f^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}$$

и т.д.

Таким образом, $\psi(x)\in C^\infty$, и, значит, $\psi\in\mathscr{D}$.

6.8. 1) Указание. Для доказательства достаточности проверить, что

$$\varphi_2(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi_1(x)\,dx \in \mathscr{D}.$$

6.10. 1) и 3) сходятся к нулю в $\mathscr{S}$;

2) не сходится в $\mathscr{S}$, если $\varphi(x)\not\equiv 0$.

6.19. 1) $\delta(x)$; 2) $\delta(x)$; 3) $\delta(x)$; 4) $\pi\delta(x)$; 5) $\delta(x)$.

6.21. 1) $2\pi i\delta(x)$; 2) 0; 3) 0; 4) $-2\pi i\delta(x)$; 5) 0.

6.22. 0.

§ 7. Дифференцирование обобщенных функций

Производной обобщенной функции f из $\mathscr{D}'(R^1)$ называется функционал f', определяемый формулой $(f',\varphi) = -(f,\varphi')$, $\varphi\in\mathscr{D}(R^1)$.

Каждая обобщенная функция имеет производные любого порядка и $f^{(m)}$, $m\geq 1$, есть функционал, действующий по формуле

$$\bigl(f^{(m)},\varphi\bigr) = (-1)^m\bigl(f,\varphi^{(m)}\bigr). \qquad (*)$$

В случае $n>1$ формула $(*)$, определяющая производную $D^\alpha f$, принимает вид

$$(D^\alpha f,\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f,D^\alpha\varphi), \qquad \varphi\in\mathscr{D}(R^n).$$

Пусть S — кусочно гладкая двусторонняя поверхность, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к S и $\nu(x)$ — непрерывная функция на S. Обобщенную функцию $-\dfrac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$, действующую по формуле

$$\Bigl(-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S),\varphi\Bigr) = \int_S \nu(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\,dS, \qquad \varphi\in\mathscr{D}(R^n),$$

назовем *двойным слоем* на поверхности S. В частности, если S есть плоскость $t=0$ в пространстве R^{n+1} переменных $(x,t) = (x_1,x_2,\ldots$ $\ldots,x_n,t)$, то $-\dfrac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_{(t=0)}(x,t))$ обозначим через $-\nu(x)\,\delta'(t)$, так что

$$(-\nu(x)\,\delta'(t),\varphi) = \int_{R^n}\nu(x)\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}\,dx.$$

Пусть локально интегрируемая в R^n функция $f(x)$ такова, что ее классическая производная порядка $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — кусочно непрерывная функция в R^n. Регулярную обобщенную функцию, определяемую этой производной, обозначим через $\{D^\alpha f(x)\}$ (в отличие от обобщенной производной $D^\alpha f(x)$).

7.1. Дать физическую интерпретацию обобщенным функциям:

$$\text{в } R^1 \quad -\delta'(x), \qquad -\delta'(x-x^0);$$

$$\text{в } R^3 \quad -\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \quad -2\frac{\partial}{\partial n}\delta_{S_R}(x-x^0).$$

7.2. Показать, что $\big(\delta^{(m)}(x-x_0,\varphi(x)\big) = (-1)^m\varphi^{(m)}(x_0)$, $m \geq 1$.

7.3. Показать, что в $D'(R^1)$:

1) $\rho(x)\,\delta'(x) = -\rho'(0)\,\delta(x) + \rho(0)\,\delta'(x)$, где $\rho(x) \in C^1(R^1)$;

2) $x\delta^{(m)}(x) = -m\delta^{(m-1)}(x)$, $m = 1, 2, \ldots$;

3) $x^m\delta^{(m)}(x) = (-1)^m m!\,\delta(x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$;

4) $x^k\delta^{(m)}(x) = 0$, $m = 0, 1, \ldots, k-1$;

5) $\alpha(x)\delta^{(m)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{j+m}C_m^j\alpha^{(m-j)}(0)\delta^{(j)}(x)$, где $\alpha(x) \in C^\infty(R^1)$;

6) $x^k\delta^{(m)}(x) = (-1)^k k!\,C_m^k\delta^{(m-k)}(x)$, $m = k, k+1, \ldots$

7.4. Показать, что $\theta' = \delta$, где θ — функция Хевисайда.

7.5. 1) Показать, что в $\mathscr{D}'(R^1)$

$$(\theta(x)\,\rho(x))' = \delta(x)\,\rho(0) + \theta(x)\,\rho'(x),$$

где $\rho(x) \in C^1(R^1)$;

2) показать, что в $\mathscr{D}'(R^2)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta(t)\,\rho(x,t)) = \delta(t)\,\rho(x,0) + \theta(t)\,\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t},$$

где $\rho \in C^1$ $(t \geq 0)$.

Указание. Воспользоваться определением *простого слоя* (§ 6).

7.6. Вычислить:

1) $\theta'(-x)$;

2) $\theta^{(m)}(x-x_0)$, $m \geq 1$ целое;

3) $\theta^{(m)}(x_0-x)$, $m \geq 1$;

4) $(\operatorname{sign} x)^{(m)}$, $m \geq 1$;

5) $(x\operatorname{sign} x)'$;

6) $(|x|)^{(m)}$, $m \geq 2$;

7) $(\theta(x)\,\sin x)'$;

8) $(\theta(x)\,\cos x)'$;

9) $(\theta(x)\,x^{m+k})^{(m)}$, $m \geq 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

10) $(\theta(x)\,x^{m-k})^{(m)}$, $m \geq 1$, $k = 1, \ldots, m$;

11) $(\theta(x)\,e^{ax})^m$, $m \geq 1$.

7.7. Вычислить производные порядка 1, 2, 3 функций:

1) $y = |x|\,\sin x$; 2) $y = |x|\,\cos x$.

7.8. Показать, что

$$(D^\alpha f)(x+h) = D^\alpha f(x+h), \qquad f \in \mathscr{D}', \qquad h \in R^n.$$

7.9. Доказать, что обобщенные функции $\delta, \delta', \delta'', \ldots, \delta^{(m)}$ линейно независимы.

7.10. Доказать:

1) $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \mathscr{P}\dfrac{1}{x}$, где $\mathscr{P}\dfrac{1}{x}$ определена в задаче 6.18;

2) $\dfrac{d}{dx}\mathscr{P}\dfrac{1}{x} = -\mathscr{P}\dfrac{1}{x^2}$, где $\mathscr{P}\dfrac{1}{x^2}$ определена в задаче 6.25;

3) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x\pm i0} = \mp\pi\delta'(x) - \mathscr{P}\dfrac{1}{x^2}$;

4) $\dfrac{d}{dx}\mathscr{P}\dfrac{1}{x^2} = -2\mathscr{P}\dfrac{1}{x^3}$, где

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x^3},\varphi\right) = \mathrm{Vp}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)}{x^3}\,dx, \qquad \varphi\in\mathscr{D}(R^1).$$

7.11. Показать, что ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_k\delta^{(k)}(x-k)$ сходится в $\mathscr{D}'(R^1)$ при любых a_k.

7.12. Показать, что если $|a_k| \le A|k|^m + B$, то ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ сходится в $\mathscr{S}'(R^1)$.

7.13. Пусть $f(x)$ — такая кусочно непрерывная функция, что

$$f\in C^1(x\le x_0)\cap C^1(x\ge x_0).$$

Доказать, что

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x-x_0) \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(R^1), \qquad (**)$$

где $[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ — скачок функции f в точке x_0.

Доказать, что если классическая производная функции $f(x)$ имеет изолированные разрывы 1-го рода в точках $\{x_k\}$, то формула $(**)$ принимает вид

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_k [f]_{x_k}\delta(x-x_k).$$

7.14. Вычислить $f^{(m)}$ для функций:

1) $\theta(a-|x|)$, $a>0$; 2) $[x]$; 3) $\operatorname{sign}\sin x$; 4) $\operatorname{sign}\cos x$;

Здесь $[x]$ означает целую часть x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

7.15. Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая функция, причем $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2\pi}$, $0 < x \le 2\pi$. Найти f'.

7.16. Пусть $f(x) = x$, $-1 < x \le 1$, — периодическая с периодом 2 функция. Найти $f^{(m)}$, $m \ge 1$.

7.17. Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi).$$

7.18. Доказать, что

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\cos(2k+1)x = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(x-k\pi).$$

7.19. Пусть $f(x) \in C^\infty(x \le x_0) \cap C^\infty(x \ge x_0)$. Доказать, что в $\mathscr{D}'(R^1)$

$$f^{(m)}(x) = \{f^{(m)}(x)\} + [f]_{x_0}\delta^{(m-1)}(x - x_0) + \\ + \left[f'\right]_{x_0}\delta^{(m-2)}(x - x_0) + \ldots + \left[f^{(m-1)}\right]_{x_0}\delta(x - x_0),$$

где

$$\left[f^{(k)}\right]_{x_0} = f^{(k)}(x_0 + 0) - f^{(k)}(x_0 - 0), \qquad k = 0, 1, \ldots, m - 1,$$

— скачок k-й производной в точке x_0.

7.20. Найти все производные функций:

1) $y = \begin{cases} \sin x, & x \ge 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \cos x, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x^2, & -1 \le x \le 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} 1, & x \le 0, \\ x + 1, & 0 \le x \le 1, \\ x^2 + 1, & x \ge 1; \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ (x + 1)^2, & -1 \le x \le 0, \\ x^2 + 1, & x \ge 0; \end{cases}$ 6) $y = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 \le x \le 1, \\ (x - 2)^2, & 1 \le x \le 2, \\ 0, & x \ge 2; \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} \sin x, & -\pi \le x \le \pi, \\ 0, & |x| \ge \pi; \end{cases}$ 8) $y = \begin{cases} |\sin x|, & -\pi \le x \le \pi, \\ 0, & |x| \ge \pi. \end{cases}$

7.21. Доказать:

1) $|\sin x|'' + |\sin x| = 2 \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi)$;

2) $|\cos x|'' + |\cos x| = 2 \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \dfrac{2k+1}{2}\pi\right)$.

У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 7.14, 3) и 4).

Пусть

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, y^{(k)} = f \qquad (*)$$

— линейное дифференциальное уравнение порядка m с коэффициентами $a_k(x) \in C^\infty(R^1)$ и $f \in \mathscr{D}'(R^1)$. Его *обобщенным решением* называется всякая обобщенная функция $y \in \mathscr{D}'(R^1)$, удовлетворяющая уравнению $(*)$ в обобщенном смысле, т. е.

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k y^{(k)}, \varphi\right) = \left(y, \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (a_k \varphi)^{(k)}\right) = (f, \varphi)$$

для любой $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$ *). Всякое решение уравнения (*) можно представить в виде суммы его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

7.22. Найти общие решения в $\mathscr{D}'(R^1)$ следующих уравнений:

1) $xy = 0$;

2) $\alpha(x)\,y = 0$, где $\alpha \in C^\infty(R^1)$ и имеет единственный нуль в точке $x = 0$ порядка 1;

3) $\alpha(x)\,y = 0$, где $\alpha \in C$ и $\alpha > 0$;

4) $(x-1)y = 0$; 5) $x(x-1)y = 0$; 6) $(x^2-1)y = 0$;

7) $xy = 1$; 8) $xy = \mathscr{P}\dfrac{1}{x}$; 9) $x^n y = 0$, $n = 2, 3, \ldots$;

10) $x^2 y = 2$; 11) $(x+1)^2 y = 0$; 12) $(\cos x)\,y = 0$.

7.23. Найти общие решения в $\mathscr{D}'(R^1)$ уравнений:

1) $y' = 0$; 2) $y^{(m)} = 0$, $m = 2, 3, \ldots$

7.24. Доказать, что общим решением в $\mathscr{D}'(R^1)$ уравнения $x^n y^{(m)} = 0$, $n > m$, является обобщенная функция

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \theta(x)\, x^{m-k-1} + \sum_{k=m}^{n-1} b_k \delta^{(k-m)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k,$$

где a_k, b_k, c_k — произвольные постоянные.

7.25. Найти общие решения в $\mathscr{D}'(R^1)$ уравнений:

1) $xy' = 1$; 2) $xy' = \mathscr{P}\dfrac{1}{x}$; 3) $x^2 y' = 0$;

4) $x^2 y' = 1$; 5) $y'' = \delta(x)$; 6) $(x+1)\,y'' = 0$;

7) $(x+1)^2 y'' = 0$; 8) $(x+1)\,y''' = 0$.

7.26. Доказать, что общим решением в $\mathscr{D}'(R^1)$ уравнения $xy = \operatorname{sign} x$ является обобщенная функция $C\delta(x) + \mathscr{P}\dfrac{1}{|x|}$, где

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|}, \varphi\right) = \int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|}\,dx + \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx.$$

7.27. Доказать, что если $f \in \mathscr{D}'(R^1)$ инвариантна относительно сдвига, т. е. $(f, \varphi) = (f(x), \varphi(x+h))$, где h — любое вещественное число, то $f = \mathrm{const}$.

Указание. Доказать, что $f' = 0$, и воспользоваться задачей 7.23, 1).

*) Иногда для краткости выражение «удовлетворяет уравнению в обобщенном смысле» заменяется выражением «удовлетворяет уравнению в $\mathscr{D}'$».

7.28. Найти решение в $\mathscr{D}'(R^1)$ уравнения:

$$af'' + bf' + cf = m\delta + n\delta',$$

где a, b, c, m, n — заданные числа.

Рассмотреть случаи:

1) $a = c = n = 1,\ \ b = m = 2;$
2) $b = n = 0,\ \ a = m = 1,\ \ c = 4;$
3) $b = 0,\ \ a = n = 1,\ \ m = 2,\ \ c = -4.$

7.29. Доказать, что система $\dfrac{dy}{dx} = A(x)\,y$, где матрица $A(x) \in \in C^\infty(R^1)$ имеет в $\mathscr{D}'$ только классическое решение.

7.30. Доказать, что уравнение $u' = f$ разрешимо в $\mathscr{D}'(R^1)$ при любой $f \in \mathscr{D}'(R^1)$.

Указание. Воспользоваться задачей 6.8, 2).

7.31. Доказать, что уравнение $xu = f$ разрешимо в $\mathscr{D}'(R^1)$ при любой $f \in \mathscr{D}'(R^1)$.

Указание. Воспользоваться задачей 6.7, 1).

7.32. Доказать, что уравнение $x^3u' + 2u = 0$ не имеет решений в $\mathscr{D}'(R^1)$ (кроме 0).

7.33. Пусть $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \theta(x_1)\ldots\theta(x_n)$. Показать, что

$$\frac{\partial^n\theta}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_n} = \delta(x) = \delta(x_1, \ldots, x_n)$$

в $\mathscr{D}'(R^n)$.

7.34. На плоскости (x, y) рассмотрим квадрат с вершинами

$$A(1,1), \quad B(2,0), \quad C(3,1), \quad D(2,2).$$

Пусть функция f равна 1 в $ABCD$ и 0 вне его. Вычислить

$$f''_{yy} - f''_{xx}.$$

7.35. Пусть область $G \subset R^3$ ограничена кусочно гладкой поверхностью S и дана функция $f \in C^1(\overline{G}) \cap C^1(\overline{G}_1)$, где $G_1 = R^n \backslash \overline{G}$. Доказать формулу

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} + [f]_S \cos\,(\boldsymbol{n}, x_i)\,\delta_S, \qquad i = 1, 2, 3,$$

в $\mathscr{D}'(R^3)$, где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_x$ — внешняя нормаль к S в точке $x \in S$, а $[f]_S$ — скачок функции $f(x)$ при переходе извне через поверхность S:

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ x' \in G_1}} f(x') - \lim_{\substack{x' \to x \\ x' \in G}} f(x') = [f]_S(x), \qquad x \in S.$$

7.36. Доказать, что если $f \in C^2(\overline{G}) \cap C^2(\overline{G}_1)$, где $G_1 = R^n \backslash \overline{G}$, то справедлива формула Грина

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial n}\left([f]_S\delta_S\right).$$

7.37. Доказать, что если $f(x,t) \in C^2\,(t \geq 0)$ и $f = 0$ при $t < 0$, то в R^{n+1} справедливы формулы:

1) $\Box_a f = \{\Box_a f\} + \delta(t)\, f_t(x,0) + \delta'(t)\, f(x,0)$;

2) $\dfrac{\partial f}{\partial t} - a^2 \Delta f = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial t} - a^2 \Delta f\right\} + \delta(t)\, f(x,0)$.

Ответы к § 7

7.6. 1) $-\delta(x)$; 2) $\delta^{(m-1)}(x - x_0)$; 3) $-\delta^{(m-1)}(x - x_0)$; 4) $2\delta^{(m-1)}(x)$; 5) $\operatorname{sign} x$; 6) $2\delta^{(m-2)}(x)$; 7) $\theta(x)\cos x$; 8) $\delta(x) - \theta(x)\sin x$; 9) $\dfrac{(m+k)!}{k!}\,\theta(x)\, x^k$;
10) $(m-k)!\,\delta^{(k-1)}(x)$;
11) $\delta^{(m-1)}(x) + a\delta^{(m-2)}(x) + \ldots + a^{m-1}\delta(x) + a^m\theta(x)\, e^{ax}$.

7.7. 1) $y' = \operatorname{sign} x \sin x + |x| \cos x$, $y'' = 2\operatorname{sign} x \cos x - |x| \sin x$, $y''' = 4\delta(x) - 3\operatorname{sign} x \sin x - |x| \cos x$;

2) $y' = \operatorname{sign} x \cos x - |x| \sin x$, $y'' = 2\delta(x) - 2\operatorname{sign} x \sin x - |x| \cos x$, $y''' = 2\delta'(x) - 3\operatorname{sign} x \cos x + |x| \sin x$.

7.10. 2) Р е ш е н и е.

$$\left(\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}\right)', \varphi\right) = -\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi'\right) = -\mathrm{Vp}\int \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(0)\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{dx}{x^2} -$$

$$- \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{-\varepsilon}\right) - \left(\mathscr{P}\frac{1}{x^2}, \varphi\right) = \left(-\mathscr{P}\frac{1}{x^2}, \varphi\right), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

7.14. 1) $\delta^{(m-1)}(x+a) - \delta^{(m-1)}(x-a)$; 2) $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta^{(m-1)}(x-k)$;

3) $2\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta^{(m-1)}(x - k\pi)$;

4) $2\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k+1}\delta^{(m-1)}\left(x - (2k+1)\,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7.15. $f' = -\dfrac{1}{2\pi} + \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x - 2k\pi)$.

7.16. $f' = 1 - 2\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x - 2k - 1)$, $f^{(m)} = -2\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta^{(m-1)}(x - 2k - 1)$, $m = 2, 3, \ldots$

7.17. Указание. Воспользоваться 7.15.

7.18. Указание. Воспользоваться 7.17.

7.20. Указание. Воспользоваться задачами 7.13 и 7.19.

1) $y' = \theta(x)\cos x$, $y^{(m)} = \sum\limits_{k=1}^{[m/2]} (-1)^{k-1}\delta^{(m-2k)}(x) + \theta(x)(\sin x)^{(m)}$, $m = 2, 3, \ldots$, где $[m/2]$ — целая часть $\dfrac{m}{2}$;

2) $y' = \delta(x) - \theta(x)\sin x$, $y^{(m)} = \sum\limits_{k=1}^{[(m+1)/2]} (-1)^{k-1}\delta^{(m-2k+1)}(x) + \theta(x)(\cos x)^{(m)}$, $m = 2, 3, \ldots$;

3) $y' = 2\theta(1-|x|)\,x + \delta(x-1) - \delta(x+1)$, $y'' = 2\theta(1-|x|) - 2\delta(x+1) - 2\delta(x-1) + \delta'(x+1) - \delta'(x-1)$, $y^{(m)} = \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{2}{(3-k)!}\left[(-1)^{k-1}\delta^{(m-k)} \times (x+1) - \delta^{(m-k)}(x-1)\right]$, $m = 3, 4, \ldots$;

4) $y' = \theta(x) - \theta(x-1) + 2\theta(x-1)\,x$, $y'' = \delta(x) + \delta(x-1) + 2\theta(x-1)$, $y^{(m)} = 2\delta^{(m-3)}(x-1) + \delta^{(m-2)}(x-1) + \delta^{(m-2)}(x)$, $m = 3, 4, \ldots$;

5) $y' = 2\theta(x+1)(x+1) - 2\theta(x)$, $y'' = -2\delta(x) + 2\theta(x+1)$, $y^{(m)} = -2\delta^{(m-2)}(x) + 2\delta^{(m-3)}(x+1)$, $m = 3, 4, \ldots$;

6) $y' = 2\theta(x)\,x - 4\theta(x-1) - 2\theta(x-2)(x-2)$, $y'' = 2\theta(x) - 2\theta(x-2) - 4\delta(x-1)$, $y^{(m)} = 2\delta^{(m-3)}(x) - 2\delta^{(m-3)}(x-2) - 4\delta^{(m-2)}(x-1)$, $m = 3, 4, \ldots$;

7) $y' = \theta(\pi - |x|)\cos x$, $y^{(m)} = \theta(\pi - |x|)(\sin x)^{(m)} + \sum\limits_{k=1}^{[m/2]} (-1)^k \times \left\{\delta^{(m-2k)}(x+\pi) - \delta^{(m-2k)}(x-\pi)\right\}$, $m = 2, 3, \ldots$;

8) $y' = \theta(\pi - |x|)\operatorname{sign} x \cos x$, $y^{(m)} = \theta(\pi - |x|)\operatorname{sign} x \sin^{(m)} x - \sum\limits_{k=1}^{[m/2]} (-1)^k\left\{2\delta^{(m-2k)}(x) + \delta^{(m-2k)}(x+\pi) + \delta^{(m-2k)}(x-\pi)\right\}$, $m = 2, 3, \ldots$

7.22. 1) Решение. Пусть решение $y \in \mathscr{D}'$ существует. Тогда

$$(y, x\varphi) = 0 \qquad \text{для любой} \qquad \varphi \in \mathscr{D}. \qquad (*)$$

Найдем это y. Имеем $(y, \varphi) = (y, \varphi(0)\,\eta(x) + \varphi(x) - \varphi(0)\,\eta(x))$, где $\eta \in \mathscr{D}$, $\eta(x) \equiv 1$ в $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и $\eta(x) \equiv 0$ вне $[-3\varepsilon, 3\varepsilon]$,

$$(y, \varphi) = \varphi(0)(y, \eta(x)) + \left(y, x\,\frac{\varphi(x) - \varphi(0)\,\eta(x)}{x}\right) = \varphi(0)\,C + (y, x\psi(x)), \quad (**)$$

где $C = (y, \eta)$ и $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)\,\eta(x)}{x} \in \mathscr{D}$ (см. решение задачи 6.7). В силу $(*)$ $(y, x\psi) = 0$. Тогда из $(**)$ имеем $(y, \varphi) = (C\delta, \varphi)$ для всякой $\varphi \in \mathscr{D}$, т.е. $y = C\delta(x)$. Осталось заметить, что $C\delta(x)$ удовлетворяет уравнению $xy = 0$;

2) $C\delta(x)$ (Указание. Воспользоваться задачей 6.7, 2).);

3) 0; 4) $C\delta(x-1)$;

5) $C_1\delta(x)+C_2\delta(x-1)$; 6) $C_1\delta(x-1)+C_2\delta(x+1)$;

7) $C\delta(x)+\mathscr{P}\frac{1}{x}$; 8) $C\delta(x)+\mathscr{P}\frac{1}{x^2}$;

9) $\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_k\delta^{(k)}(x)$ (Указание. Свести к решению уравнения вида $xz(x)=f(x)$, обозначив последовательно $x^{m-1}y(x)=z(x)$, $x^{m-2}y(x)=$ $=z(x)$ и т.д., и воспользоваться результатом задачи 7.22, 1).);

10) $C_0\delta(x)+C_1\delta'(x)+2\mathscr{P}\frac{1}{x^2}$, где $\mathscr{P}\frac{1}{x^2}$ — обобщенная функция из задачи 6.25;

11) $C_0\delta(x+1)+C_1\delta'(x+1)$; 12) $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_k\delta\left(x-\frac{\pi}{2}-k\pi\right)$.

7.23. 1) Решение. Пусть решение $y\in\mathscr{D}'$ существует, т.е.

$$(y,\varphi')=0 \qquad \text{для любой} \qquad \varphi\in\mathscr{D}. \tag{*}$$

В силу результата задачи 6.8 (2) любая $\varphi\in\mathscr{D}$ может быть представлена в виде

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx+\varphi_1'(x),$$

где $\varphi_1\in\mathscr{D}$, а $\varphi_0(x)$ — любая основная функция из $\mathscr{D}$, удовлетворяющая условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)\,dx=1$. Следовательно,

$$(y,\varphi)=\left(y,\varphi_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\,dx+\varphi_1'\right)=(y,\varphi_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\,dx+(y,\varphi_1').$$

Так как, в силу (*), $(y,\varphi_1')=0$, а $(y,\varphi_0)=C$, то

$$(y,\varphi)=C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\,dx=(C,\varphi) \qquad \text{для любой} \qquad \varphi\in\mathscr{D},$$

т.е. $y=C$;

2) $C_0+C_1x+\ldots+C_{m-1}x^{m-1}$ (Указание. Свести к решению уравнения вида $z'=f(x)$, обозначая последовательно $y^{(m-1)}=z$, $y^{(m-2)}=z$ и т.д., и воспользоваться результатом задачи 7.23, 1).).

7.25. 1) $C_1+C_2\theta(x)+\ln|x|$; 2) $C_1+C_2\theta(x)-\mathscr{P}\frac{1}{x}$;

3) $C_1+C_2\theta(x)+C_3\delta(x)$; 4) $C_1+C_2\theta(x)+C_3\delta(x)-\mathscr{P}\frac{1}{x}$;

5) $C_0+C_1x+\theta(x)\,x$; 6) $C_0+C_1x+C_2\theta(x+1)(x+1)$;

7) $C_0+C_1x+C_2\theta(x+1)+C_3\theta(x+1)(x+1)$;

8) $C_0+C_1x+C_2x^2+C_3\theta(x+1)(x+1)^2$.

7.28. 1) $\theta(x)\,e^{-x}(1+x)$; 2) $\frac{1}{2}\theta(x)\,\sin 2x$; 3) $\theta(x)\,e^{2x}$.

Указание. Искать решение в виде $\theta(x)\,z(x)$, где $z \in C^2(R^1)$ — искомая.

7.34. $-2\delta(x-1,y-1)+2\delta(x-2,y)+2\delta(x-3,y-1)-2\delta(x-2,y-2)$.

§ 8. Прямое произведение и свертка обобщенных функций

Прямым произведением обобщенных функций $f(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$ и $g(y) \in \mathcal{D}'(R^m)$ называется обобщенная функция $f(x)\cdot g(y)$ из $\mathcal{D}'(R^{n+m})$, определяемая формулой

$$(f(x)\cdot g(y), \varphi(x,y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y))), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m}). \tag{1}$$

Прямое произведение *коммутативно*, т. е. $f(x)\cdot g(y) = g(y)\cdot f(x)$ и ассоциативно, т. е.

$$[f(x)\cdot g(y)]\cdot h(z) = f(x)\cdot[g(y)\cdot h(z)].$$

Если $f \in \mathcal{S}'(R^n)$ и $g \in \mathcal{S}'(R^m)$, то $f(x)\cdot g(y)$ определяется по формуле (1), где $\varphi \in \mathcal{S}(R^{m+n})$, и принадлежит $\mathcal{S}'(R^{m+n})$.

Производная прямого произведения обладает свойством

$$D_x^\alpha(f(x)\cdot g(y)) = D^\alpha f(x)\cdot g(y); \qquad D_y^\alpha(f(x)\cdot g(y)) = f(x)\cdot D^\alpha g(y). \tag{2}$$

Если $\mu(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$ и $\nu(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$, то обобщенные функции $\mu(x)\cdot\delta(t)$ и $-\nu(x)\cdot\delta'(t)$ называются *простым* и *двойным слоями* на поверхности $t=0$ *с плотностями* $\mu(x)$ и $\nu(x)$ соответственно. В случае непрерывных плотностей эти определения слоев совпадают с определениями, приведенными в § 6 и § 7, т. е. $\mu(x)\cdot\delta(t) = \mu(x)\,\delta(t)$ и $-\nu(x)\cdot\delta'(t) = -\nu(x)\,\delta'(t)$.

Обобщенную функцию $\delta(at-|x|)$, $a>0$, из $\mathcal{D}'(R^2)$ определим равенством

$$\delta(at-|x|) = \theta(t)\,\delta(at+x) + \theta(t)\,\delta(at-x), \tag{3}$$

где обобщенные функции $\theta(t)\,\delta(at+x)$ и $\theta(t)\,\delta(at-x)$ есть результаты линейных замен переменных $t'=t$, $\xi = at \pm x$ в $\theta(t')\cdot\delta(\xi)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned}(\theta(t)\,\delta(at+x),\varphi) &= \int_0^\infty \varphi(-at',t')\,dt',\\ (\theta(t)\,\delta(at-x),\varphi) &= \int_0^\infty \varphi(at',t')\,dt'.\end{aligned}\right\} \tag{3_1}$$

8.1. Доказать: $\operatorname{supp}(f(x)\cdot g(y)) = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g$.

8.2. Доказать, что в $\mathcal{D}'(R^{n+1}(x,t))$:

1) $(u_1(x)\cdot\delta(t),\varphi) = (u_1(x),\varphi(x,0))$;

2) $(u_0(x)\cdot\delta'(t),\varphi) = -\left(u_0(x), \dfrac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}\right)$.

Указание. Воспользоваться формулой (1).

8.3. Доказать:

1) $\theta_t(x,t)$ — простой слой на оси $t=0$ плоскости (x,t) с плотностью $\theta(x)$;

2) $-\theta_{tt}(x,t)$ — двойной слой на оси $t=0$ с плотностью $\theta(x)$.

Указание. Воспользоваться задачей 8.2.

8.4. Показать:

1) $\theta(x_1)\cdot\theta(x_2)\cdot\ldots\cdot\theta(x_n) = \theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

2) $\delta(x_1)\cdot\delta(x_2)\cdot\ldots\cdot\delta(x_n) = \delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

8.5. Показать:

$$\frac{\partial^n\theta(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_n} = \delta(x_1)\cdot\delta(x_2)\cdot\ldots\cdot\delta(x_n).$$

8.6. Показать, что $(f\cdot g)(x+x_0,y) = f(x+x_0)\cdot g(y)$.

8.7. Показать, что $a(x)(f(x)\cdot g(y)) = a(x)\,f(x)\cdot g(y)$, где $a\in C^\infty(R^n)$.

8.8. Доказать, что в $\mathscr{D}'(R^2)$:

1) $\dfrac{\partial}{\partial t}\theta(at-|x|) = a\delta(at-|x|)$;

2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\theta(at-|x|) = \theta(t)\,\delta(at+|x|) - \theta(t)\,\delta(at-|x|)$;

3) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(at-|x|),\ \varphi\right) = -a\left(\delta(at-|x|),\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$;

4) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(at-|x|),\ \varphi\right) = -\left(\theta(t)\,\delta(at+x),\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \left(\theta(t)\,\delta(at-x),\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$.

Обобщенную функцию вида $f(x)\cdot 1(y)$ назовем *не зависящей от* y. Она действует по правилу

$$(f(x)\cdot 1(y),\varphi) = \int (f(x),\varphi(x,y))\,dy. \tag{4}$$

8.9. Показать:

1) $\int (f(x),\varphi(x,y))\,dy = \left(f(x), \int \varphi(x,y)\,dy\right)$;

2) $D_y^\alpha(f(x)\cdot 1(y)) = 0$, где $f\in\mathscr{D}'$, $|\alpha|\neq 0$.

8.10. Пусть $g(y)\in\mathscr{S}'(R^m)$ и $\varphi\in\mathscr{S}(R^{n+m})$. Доказать, что:

1) $\psi(x) = (g(y),\varphi(x+y))\in\mathscr{S}(R^n)$;

2) $D^\alpha\psi(x) = (g(y), D_x^\alpha\varphi(x,y))$;

3) если $\varphi_k \longrightarrow \varphi$, $k \longrightarrow \infty$ в $\mathscr{S}(R^{n+m})$, то $\psi_k \longrightarrow \psi$, $k \longrightarrow \infty$ в $\mathscr{S}(R^n)$;

4) если $f \in \mathscr{S}'(R^n)$ и $g \in \mathscr{S}'(R^m)$, то $f(x) \cdot g(y) \in \mathscr{S}'(R^{n+m})$.

Сверткой локально интегрируемых в R^n функций $f(x)$ и $g(x)$ таких, что функция

$$h(x) = \int |f(y)\, g(x-y)|\, dy$$

также локально интегрируема в R^n, называется функция

$$(f*g)(x) = \int f(y)\, g(x-y)\, dy = \int g(y)\, f(x-y)\, dy = (g*f)(x).$$

Последовательность $\{\eta_k(x)\}$ функций из $\mathscr{D}(R^n)$ называется *сходящейся* к 1 в R^n, если она обладает свойствами:

а) для любого шара U_R найдется такой номер N, что $\eta_k(x) = 1$ при всех $x \in U_R$ и $k \geq N$;

б) функции $\{\eta_k\}$ равномерно ограничены в R^n вместе со всеми производными, т. е.

$$|D^\alpha \eta_k(x)| \leq C_\alpha, \qquad x \in R^n, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

α — любое.

Пусть $\{\eta_k(x;y)\}$ — любая последовательность функций из $\mathscr{D}(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n}. Пусть обобщенные функции $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathscr{D}'(R^n)$ таковы, что для любой $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ числовая последовательность

$$(f(x) \cdot g(y), \eta_k(x;y)\, \varphi(x+y))$$

имеет предел при $k \longrightarrow \infty$ и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{\eta_k\}$. Этот предел обозначим через

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)).$$

Сверткой $f * g$ называется функционал

$$(f*g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x;y)\, \varphi(x+y)), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(R^n). \qquad (5)$$

Свертка *коммутативна*, т. е. $f * g = g * f$.

Д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е с в е р т к и. Если свертка $f * g$ существует, то существуют и свертки $D^\alpha f * g$ и $f * D^\alpha g$, причем

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f*g) = f * D^\alpha g. \qquad (6)$$

Свертка инвариантна относительно сдвига, т. е.

$$f(x+h) * g(x) = (f*g)(x+h), \qquad h \in R^n.$$

Д о с т а т о ч н ы е у с л о в и я с у щ е с т в о в а н и я с в е р т к и.

I. Если f — произвольная, а g — финитная обобщенные функции в $\mathscr{D}'$, то $f * g$ существует в $\mathscr{D}'$ и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y)\,\varphi(x+y)), \qquad \varphi \in \mathscr{D}, \tag{7}$$

где η — любая основная функция, равная 1 в окрестности $\operatorname{supp} g$.

II. Обозначим через $\mathscr{D}'_+$ множество обобщенных функций из $\mathscr{D}'(R^1)$, обращающихся в нуль при $x < 0$. Если $f, g \in \mathscr{D}'_+$, то их свертка принадлежит $\mathscr{D}'_+$ и выражается формулой

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta_1(x)\,\eta_2(y)\,\varphi(x+y)), \tag{8}$$

где

$$\eta_k(t) = \begin{cases} 1, & t \geq -\varepsilon_k, \\ 0, & t < -2\varepsilon_k, \end{cases} \qquad \eta_k \in C^\infty(R^1), \qquad k = 1, 2.$$

Таким образом, множество $\mathscr{D}'_+$ образует сверточную алгебру.

8.11. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ локально интегрируемы в R^n. Показать, что свертка $f * g$ является локально интегрируемой функцией, если:
1) f и $g \in L_1(R^n)$;
2) f или g финитна;
3) $f = 0$ и $g = 0$ при $x < 0$; $n = 1$.

В случае 1) показать, что $f * g \in L_1(R^n)$ и справедливо неравенство

$$\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}.$$

8.12. Показать, что в условиях задачи 8.11, 3)

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(y)\,g(x-y)\,dy. \tag{9}$$

8.13. Показать:
1) $\delta * f = f * \delta = f$;
2) $\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$;
3) $\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$;
4) $\delta^{(m)} * f = f^{(m)}$;
5) $\delta^{(m)}(x-a) * f(x) = f^{(m)}(x-a)$.

8.14. Вычислить в $\mathscr{D}'(R^1)$:
1) $\theta(x) * \theta(x)$;
2) $\theta(x) * \theta(x)\,x^2$;
3) $e^{-|x|} * e^{-|x|}$;
4) $e^{-ax^2} * xe^{-ax^2}$, $a > 0$;
5) $\theta(x)\,x^2 * \theta(x)\,\sin x$;
6) $\theta(x)\,\cos x * \theta(x)\,x^3$;
7) $\theta(x)\,\sin x * \theta(x)\operatorname{sh} x$;
8) $\theta(a-|x|) * \theta(a-|x|)$.

В задачах 8.15–8.29 доказать утверждения.

8.15. Если $f_\alpha(x) = \theta(x)\,\dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$ — целое, то $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

8.16. Если $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/(2\alpha^2)}$, $\alpha > 0$, то $f_\alpha * f_\beta = f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

8.17. Если $f_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$, $\alpha > 0$, то $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

8.18. $\operatorname{supp}(f * g) \subset [\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g]$.

Указание. Воспользоваться задачей 8.1.

8.19. Если $f, g \in \mathscr{D}'_+$, то $e^{ax}f * e^{ax}g = e^{ax}(f * g)$.

8.20. Если $f \in \mathscr{D}'$, $\varphi \in \mathscr{D}$, то $f * \varphi = (f(y), \varphi(x-y)) \in C^\infty(R^1)$.

Указание. Воспользоваться формулой (7) и задачей 8.9, 1).

8.21. Если $f \in \mathscr{D}'$, $f * g = 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}$ и $\operatorname{supp}\varphi \in [x<0]$, то $f = 0$ при $x < 0$.

8.22. Если свертка $f * 1$ существует, то она постоянна.

8.23. Для независимости обобщенной функции от x_i необходима и достаточна ее инвариантность относительно всех сдвигов по x_i.

8.24. Для независимости $f(x) \in \mathscr{D}'(R^n)$ от x_i необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$.

8.25. Если $f \in \mathscr{D}'$ не зависит от x_i, то и $f * g$ не зависит от x_i.

8.26. Решением уравнения $Lu = \delta$, где

$$L = \frac{d^m}{dx^m} + a_1(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + a_{m-1}(x)\frac{d}{dx} + a_m(x),$$

$a_k \in C^\infty(R^1)$, в $\mathscr{D}'(R^1)$ является $u(x) = \theta(x)\,Z(x)$, $Z(x) \in C^m(R^1)$ — решение задачи

$$LZ = 0, \qquad Z(0) = Z'(0) = \ldots = Z^{(m-2)}(0) = 0, \qquad Z^{(m-1)}(0) = 1.$$

8.27. Решением уравнения $Lu = f$, $f \in \mathscr{D}'_+$, в $\mathscr{D}'_+$ является $u = \theta Z * f$, где $Z(x)$ — функция из задачи 8.25.

8.28. Решением уравнения Абеля

$$\int_0^x \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^\alpha}\,d\xi = g(x),$$

где $g(0) = 0$, $g \in C^1(x \geq 0)$, $0 < \alpha < 1$, является функция

$$u(x) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^x \frac{g'(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}.$$

Указание. Уравнение записать в виде свертки $u * \theta(x-\alpha) = g(x)$ (считаем $u = 0$ и $g = 0$ при $x < 0$) и воспользоваться задачей 8.15 при $\beta = 1 - \alpha$.

8.29. Решением уравнения $\theta(x)\cos x * f = g$ в $\mathscr{D}'(R^1)$, где $g \in C^1(x \geq 0)$, $g = 0$ при $x < 0$, является

$$f(x) = g'(x) + \int_0^x g(\xi)\,d\xi.$$

8.30. Пусть электрическая цепь состоит из сопротивления R, самоиндукции L и емкости C. В момент времени $t = 0$ в цепь включается э. д. с. $E(t)$. Показать, что сила тока $i(t)$ в цепи удовлетворяет уравнению $Z * i = E(t)$, где

$$Z = L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{\theta(t)}{C} \text{ — импеданс цепи.}$$

8.31. Пусть $f \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$. Доказать:

1) $[\delta(x - x_0) \cdot \delta(t)] * f(x,t) = f(x - x_0, t)$;

2) $[\delta(x - x_0) \cdot \delta^{(m)}(t)] * f(x,t) = \dfrac{\partial^m f(x - x_0, t)}{\partial t^m}$.

8.32. Вычислить следующие свертки в $\mathscr{D}'(R^n)$:

1) $f * \delta_{S_R}$, где $f(x) \in C$ и $\delta_{S_R}(x)$ — простой слой на сфере $|x| = R$ с плотностью 1 (см. § 6);

2) $f * \dfrac{\partial}{\partial n} \delta_{S_R}$, где $f \in C^1$; 3) $\delta_{S_R} * |x|^2$, $n = 3$;

4) $\delta_{S_R} * e^{-|x|^2}$, $n = 3$; 5) $\delta_{S_R} * \sin|x|^2$, $n = 3$;

6) $\delta_{S_R} * \dfrac{1}{1 + |x|^2}$, $n = 3$;

7) $\dfrac{1}{|x|} * \mu\delta_S$, $n = 3$; $\ln \dfrac{1}{|x|} * \mu\delta_S$, $n = 2$;

8) $-\dfrac{1}{|x|} * \dfrac{\partial}{\partial n} (\nu\delta_S)$, $n = 3$; $\ln|x| * \dfrac{\partial}{\partial n} (\nu\delta_S)$, $n = 2$;

S — ограниченная поверхность. Определение обобщенных функций $\mu\delta_S$ и $-\dfrac{\partial}{\partial n} (\nu\delta_S)$ см. в § 6 и § 7.

8.33. Вычислить в $\mathscr{D}'(R^2)$:

1) $\theta(t)\, x * \theta(x)\, t$; 2) $\theta(t - |x|) * \theta(t - |x|)$;

3) $\theta(t)\, \theta(x) * \theta(t - |x|)$.

8.34. Пусть $f, g \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$, $f(x,t) = 0$ при $t < 0$ и $g = 0$ вне $\overline{\Gamma}^+$. Доказать, что свертка $g * f$ существует в $\mathscr{D}'(R^{n+1})$ и выражается формулой

$$(g * f, \varphi) = (g(\xi, t) \cdot f(y, \tau), \eta(t)\, \eta(\tau)\, \eta(a^2 t^2 - |\xi|^2)\, \varphi(\xi + y, t + \tau)),$$
$$\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+1}),$$

где $\eta(t) \in C^\infty(R^1)$, $\eta(t) = 0$ при $t < -\delta$ и $\eta(t) \equiv 1$ при $t > -\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \delta)$.

8.35. Пусть $g(x,t) \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$, $g = 0$ вне $\overline{\Gamma}^+$ и $u(x) \in \mathscr{D}'(R^n)$. Доказать:

1) $g * u(x) \cdot \delta(t) = g(x,t) * u(x)$, причем обобщенная функция $g(x,t) * * u(x)$ действует по правилу

$$(g(x,t) * u(x), \varphi) = (g(\xi, t) \cdot u(y), \eta(a^2 t^2 - |\xi|^2)\, \varphi(\xi + y, t)),$$
$$\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+1});$$

2) $g * u(x) \cdot \delta^{(k)}(t) = \dfrac{\partial^k}{\partial t^k} (g(x,t) * u(x)) = \dfrac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k} * u(x)$.

8.36. Вычислить в $\mathscr{D}'(R^2)$:

1) $\theta(at-|x|)*[\omega(t)\cdot\delta(x)]$, $a>0$, где $\omega(t)\in C(t\geq 0)$ и $\omega(t)=0$ при $t<0$;

2) $\theta(at-|x|)*[\theta(t)\cdot\delta(x)]$; 3) $\theta(at-|x|)*\dfrac{\partial}{\partial t}[\theta(t)\cdot\delta(x)]$;

4) $\theta(at-|x|)*[\theta(t)\cdot\delta'(x)]$; 5) $\theta(at-|x|)*[\theta(x)\cdot\delta(t)]$;

6) $\theta(at-|x|)*\dfrac{\partial}{\partial t}[\omega(x)\cdot\delta(t)]$, где $\omega(x)\in C(R')$ (Указание. Воспользоваться задачей 7.5, 2).);

7) $\theta(at-|x|)*\dfrac{\partial}{\partial x}[\theta(x)\cdot\delta(t)]$.

8.37. Вычислить в $\mathscr{D}'(R^2)$:

1) $e^x\delta(t)*\dfrac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/(4a^2t)}$, $a>0$; 2) $\theta(t)\,e^t x*\dfrac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/(4t)}$;

3) $\theta(x)\,\delta(t)*\dfrac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/(4t)}$.

8.38. Пусть $f\in C^\infty(R^n\backslash\{0\})$ и $g\in\mathscr{D}'(R^n)$ финитна. Показать, что $f*g\in C^\infty(R^n\backslash\operatorname{supp}g)$.

Указание. Воспользоваться формулой (7).

8.39. Пусть $f\in\mathscr{S}'$ и $g\in\mathscr{D}'$ финитна. Доказать, что $f*g\in\mathscr{S}'$.

8.40. Доказать: если $f\in\mathscr{D}'$, то $f*\omega_\varepsilon\longrightarrow f'$, $\varepsilon\longrightarrow 0$ в $\mathscr{D}'$. Указание. Воспользоваться задачей 6.24.

Введем обобщенную функцию $f_\alpha(x)$, зависящую от параметра α, $-\infty<\alpha<\infty$,

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta(x)\,x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha>0,\\ f^{(N)}_{\alpha+N}(x), & \alpha\leq 0,\ \alpha+n>0,\ N\ \text{целое}\end{cases}$$

(ср. с задачей 8.15).

8.41. Доказать, что $f_\alpha*f_\beta=f_{\alpha+\beta}$.

8.42. Доказать, что

$$f_0*=\delta*,\qquad f_{-n}*=\frac{d^n}{dx^n}*,\qquad f_n*=\underbrace{\theta*\theta*\ldots*\theta*}_{n\ \text{раз}}.$$

Сверточная операция $f_{-\alpha}*$ при $\alpha>0$, α не равно целому числу, называется (*дробной*) *производной* порядка α (эту производную обозначим через $u^{(\alpha)}$, т. е. $u^{(\alpha)}\equiv f_{-\alpha}*u$); $f_\alpha*$ при $\alpha>0$ называется *первообразной* порядка α (эту первообразную обозначим через $u_{(\alpha)}$, т. е. $u_{(\alpha)}=f_\alpha*u$).

8.43. Вычислить производную порядка 3/2 от $\theta(x)$.

8.44. Вычислить первообразную порядка 3/2 от $\theta(x)$.

8.45. Вычислить производную порядка $1/2$ от $f(x)$, $f = 0$ при $x < 0$.

8.46. Вычислить первообразную порядка $1/2$ от $f(x)$, $f = 0$ при $x < 0$.

8.47. Обозначим через $\mathscr{E}'$ пространство финитных обобщенных функций со сходимостью $f_k \longrightarrow 0$, $k \longrightarrow \infty$ в $\mathscr{E}'$, если:

а) $f_k \longrightarrow 0$, $k \longrightarrow \infty$ в $\mathscr{D}'$;

б) существует число R такое, что $\operatorname{supp} f_k \subset U_R$ при всех k.

Доказать теорему: *если линейный непрерывный оператор L из $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{D}'$ коммутирует с операцией сдвига, то L — оператор свертки, $L = f_0*$, где $f_0 = L\delta$.*

Ответы к § 8

8.8. 1) Решение. В силу формул (3) и (3_1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\theta(at-|x|),\varphi\right) = -\left(\theta(at-|x|),\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{|x|/a}^{\infty}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\,dt\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)dx = a\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(-at',t')\,dt' + a\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(at',t')\,dt' =$$

$$= (a\theta(t)\,\delta(at+x) + a\theta(t)\,\delta(at-x),\varphi) = (a\delta(at-|x|),\varphi).$$

8.14. 1) Решение. В силу формулы (9)

$$\theta*\theta = \int\limits_{0}^{x}\theta(y)\,\theta(x-y)\,dy = \theta(x)\int\limits_{0}^{x}dy = \theta(x)\,x;$$

2) $\theta(x)\,\dfrac{x^3}{3}$; 3) $e^{-|x|}(1+|x|)$;

4) $\sqrt{\dfrac{\pi}{8a}}\,xe^{-ax^2/2}$; 5) $\theta(x)\left(x^2 - 4\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$;

6) $\theta(x)(3x^2 + 6\cos x - 6)$; 7) $\dfrac{\theta(x)}{2}\,(\operatorname{sh} x - \sin x)$;

8) $\theta(2a-|x|)(2a-|x|)$.

8.21. Указание. Воспользоваться задачей 8.20, применив ее к $\varphi(-x)$ и положив $x = 0$.

8.30. Указание. Воспользоваться задачей 1.31.

8.31. 2) Решение. В силу формул (2) и (6) и результатов задач 8.4, 2) и 8.13, 2)

$$[\delta(x-x_0)\cdot\delta^{(m)}(t)]*f(x,t) = \frac{\partial^m}{\partial t^m}\,[\delta(x-x_0)\cdot\delta(t)]*f(x,t) =$$

$$= \frac{\partial^m}{\partial t^m}\,(\delta(x-x_0,t)*f(x,t)) = \frac{\partial^m f(x-x_0,t)}{\partial t^m}.$$

8.32. 1) $\displaystyle\int\limits_{|x-y|=R} f(y)\,dS_y$;

2) Решение. В силу формулы (7) и определения двойного слоя (см. § 7)

$$\left(f * \frac{\partial}{\partial n}\delta_{S_R}, \varphi\right) = \left(f(y)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\delta_{S_R}(\xi), \eta(\xi)\,\varphi(y+\xi)\right) =$$

$$= \left(f(y), \left(\frac{\partial}{\partial n}\delta_{S_R}(\xi), \eta(\xi)\varphi(y+\xi)\right)\right) = -\int_{R^n} f(y)\left(\int_{|\xi|=R}\frac{\partial\varphi(y+\xi)}{\partial n_\xi}\,dS_\xi\right)dy =$$

$$= -\int_{|\xi|=R}\left(\frac{\partial}{\partial n_\xi}\int_{R^n} f(x-\xi)\,\varphi(x)\,dx\right)dS_\xi = \left(-\int_{|\xi|=R}\frac{\partial f(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,dS_\xi, \varphi\right);$$

3) $$\int_{|x-y|=R}|y|^2 dS_y = \int_{|y|=R}|x-y|^2 dS_y =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(|x|^2+R^2-2R|x|\,\cos\theta\right)R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 4\pi R^2\left(|x|^2+R^2\right);$$

4) $\dfrac{\pi R}{|x|}\left(e^{-(R-|x|)^2} - e^{-(R+|x|)^2}\right)$; 5) $\dfrac{2\pi R}{|x|}\sin\left(R^2+|x|^2\right)\sin 2R|x|$;

6) $\dfrac{\pi R}{|x|}\ln\dfrac{1+(|x|+R^2)^2}{1+(|x|-R)^2}$; 7) $\displaystyle\int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|}\,dS_y$; $\displaystyle\int_S \mu(y)\ln\frac{1}{|x-y|}\,dl_y$;

8) $\displaystyle\int_S \nu(y)\,\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\,dS_y$; $\displaystyle\int_S \nu(y)\,\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|x-y|}\,dl_y$.

8.33. 1) Не существует; 2) $\theta(t-|x|)\,\dfrac{t^2-x^2}{2}$;

3) $\frac{1}{2}\,\theta(t)[\theta(x+t)(x+t)^2 + \theta(x-t)(x-t)^2 - 2\theta(x)\,x^2]$.

8.34. Решение. В силу задачи 6.27 $f(y,\tau) = \eta(\tau)\,f(y,\tau)$ и $g(\xi,t) = \eta(t)\,\eta(a^2t^2-|\xi|^2)\,g(\xi,t)$, так как $\eta(\tau) = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} f(y,\tau)\subset[\tau\geq 0]$ и $\eta(t)\,\eta\left(a^2t^2-|\xi|^2\right) = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} g(\xi,t)\subset \subset\bar{\Gamma}^+$ ($\bar{\Gamma}^+$ — область $a^2t^2-|\xi|^2\geq 0$, $t\geq 0$). В силу формулы (5)

$$(g*f,\varphi) = \lim_{k\to\infty}\left(g(\xi,t)\cdot f(y,\tau), \eta_k(\xi,t;y,\tau)\,\varphi(\xi+y,t+\tau)\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\eta(t)\,\eta(a^2t^2-|\xi|^2)\,g(\xi,t)\cdot\eta(\tau)\,f(y,\tau),\right.$$

$$\left.\eta_k(\xi,t;y,\tau)\,\varphi(\xi+y;t+\tau)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(g(\xi,t)\cdot f(y,\tau), \eta(t)\,\eta(\tau)\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\eta\left(a^2t^2-|\xi|^2\right)\eta_k(\xi,t;y,\tau)\,\varphi(\xi+y,t+\tau)\right) =$$

$$= \left(g(\xi,t)\cdot f(y,\tau), \eta(t)\,\eta(\tau)\,\eta\left(a^2t^2-|\xi|^2\right)\,\varphi(\xi+y,t+\tau)\right),$$

так как $\eta(t)\,\eta(\tau)\,\eta\left(a^2t^2-|\xi|^2\right)\,\varphi(\xi+y,t+\tau)\in\mathscr{D}(R^{2n+2})$.

8.35. 1) Решение. В силу формулы задачи 8.34, ассоциативности прямого произведения и формулы (1)

$$(g * [u(x) \cdot \delta(t)], \varphi) =$$
$$= \left([g(\xi, t) \cdot u(y)] \cdot \delta(\tau), \eta(t)\, \eta(\tau)\, \eta\left(a^2t^2 - |\xi|^2\right) \varphi(\xi + y, t + \tau)\right) =$$
$$= \Big(g(\xi, t) \cdot u(y), \eta(t)\, \eta\left(a^2t^2 - |\xi|^2\right) \varphi(\xi + y, t)\Big).$$

Далее, в силу задачи 6.27 $g = \eta(t)\, g$, так как $\operatorname{supp} g(\xi, t) \subset [t \geq 0]$. Следовательно,

$$(g * [u(x) \cdot \delta(t)], \varphi) =$$
$$= \left(g(\xi, t) \cdot u(y), \eta\left(a^2t^2 - |\xi|^2\right) \varphi(x + \xi, t)\right) = (g(x, t) \cdot u(x), \varphi),$$

так как $\eta\left(a^2t^2 - |\xi|^2\right) \varphi(x + \xi, t) \in \mathscr{D}(R^{2n+1})$;

2) В силу формул (2) и (6) и формулы задачи 8.35, 1)

$$g * u(x) \cdot \delta^{(k)}(t) = g * \frac{\partial^k}{\partial t^k}\,(u(x) \cdot \delta(t)) = \frac{\partial^k}{\partial t^k}\,(g(x, t) * u(x)) = \frac{\partial^k g(x, t)}{\partial t^k} * u(x).$$

8.36. 1) Решение. В силу формулы задачи 8.35, 1)

$$(I, \varphi) = \left(\theta(at - |x|) \cdot \omega(\tau), \eta\left(a^2t^2 - |x|^2\right) \varphi(x, t + \tau)\right) =$$
$$= \int \omega(\tau) \left(\iint \theta(at - |x|)\, \varphi(x, t + \tau)\, dx\, dt \right) d\tau =$$
$$= \iint \varphi(x, t') \left(\theta(at' - |x|) \int\limits_0^{t' - |x|/a} \omega(\tau)\, d\tau \right) dx\, dt'.$$

Следовательно,

$$I = \theta(at - |x|) \int\limits_0^{t - |x|/a} \omega(\tau)\, d\tau;$$

2) $\theta(at - |x|)\left(t - \dfrac{|x|}{a}\right)$;

3) $\theta(at - |x|)$ (Указание. Воспользоваться задачей 8.35, 2).);

4) $-\theta(at - |x|)\, \dfrac{\operatorname{sign} x}{a}$;

5) $\theta(t)[\theta(x + at)(x + at) - \theta(x - at)(x - at)]$;

6) $a\theta(t)[\omega(x + at) + \omega(x - at)]$;

7) $\theta(at - |x|)$.

8.37. 1) $\theta(t)\, e^{x + a^2 t}$; 2) $\theta(t)\, x(e^t - 1)$;

3) $\theta(t)\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})} e^{-z^2/2} dz = \theta(t)\, \Phi\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$.

8.43. Решение.

$$\theta^{(3/2)}(x) = f_{-3/2} * \theta = f'_{-1/2} * \theta = f''_{1/2} * \theta = (f_{1/2} * \theta)'' =$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\theta(x)}{\Gamma(1/2)} \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(2\theta(x)\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\theta(x)\,\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\right).$$

8.44. Решение.

$$\theta_{(3/2)}(x) = f_{3/2} * \theta = \frac{\theta(x)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int\limits_0^x \sqrt{x-\xi}\,d\xi = \theta(x)\,\frac{4x}{3}\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

8.45. Решение.

$$f^{(1/2)}(x) = f_{-1/2} * f = f'_{1/2} * f = (f_{1/2} * f)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta(x)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\,d\xi\right).$$

8.46. $\dfrac{\theta(x)}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int\limits_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\,d\xi.$

§ 9. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Операция преобразования Фурье $F[\varphi]$ на функциях φ из $\mathscr{S}$ определяется формулой

$$F[\varphi](\xi) = \int e^{i(\xi,x)}\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Преобразование Фурье $F[f]$ произвольной *обобщенной функции* f из $\mathscr{S}'(R^n)$ определим формулой

$$(F[f],\varphi) = (f, F[\varphi]). \tag{2}$$

Оператор

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n}\,F[f(-x)], \qquad f \in \mathscr{S}' \tag{3}$$

(обратное преобразование Фурье), является обратным для оператора F, т. е. $F^{-1}[F[f]] = f$, $F[F^{-1}[f]] = f$, $f \in \mathscr{S}'$.

Справедливы следующие формулы ($f, g \in \mathscr{S}'$):

$$\begin{aligned}
D^\alpha F[f] &= F[(ix)^\alpha f],\\
F[D^\alpha f] &= (-i\xi)^\alpha F[f],\\
F[f(x-x_0)] &= e^{i(x_0,\xi)}F[f],\\
F[f](\xi+\xi_0)] &= F\left[f(x)\,e^{i(x,\xi_0)}\right](\xi),\\
F[f(cx)] &= \frac{1}{|c|^n}\,F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \quad c \neq 0,\\
F[f(x)\cdot g(y)] &= F[f](\xi)\cdot F[g](\eta),\\
F[f*g] &= F[f]\,F[g] \quad (f \text{ или } g \text{ финитна}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Преобразование Фурье F_x по переменной x обобщенной функции $f(x,y) \in \mathscr{S}'(R^{n+m})$, где $x \in R^n$, $y \in R^m$, определим формулой

$$\bigl(F_x[f(x,y)](\xi,y),\varphi(\xi,y)\bigr) = \bigl(f(x,y),F[\varphi(\xi,y)](x,y)\bigr),$$
$$\varphi \in \mathscr{S}(R^{n+m}). \tag{5}$$

9.1. 1) Пусть $f(x) \in C^k(R^1)$, $k \geq 0$, и $\int |f^{(\alpha)}(x)|\,dx < \infty$, $\alpha \leq k$; доказать, что $F[f] \in C[R^1]$ и $|\xi|^k |F[f](\xi)| \leq a$;

2) пусть $f(x) \in C^k(R^n)$, $k \geq 0$ и $|x|^{n+l}|D^\alpha f(x)| \leq b$, $|\alpha| \leq k$, $l \geq 1$ целое; доказать, что

$$F[f] \in C^{l-1}(R^n) \qquad \text{и} \qquad |\xi|^k |D^\beta F[f](\xi)| \leq b, \qquad |\beta| \leq l-1.$$

9.2. Доказать, что $f = F^{-1}[F[f]]$, где F^{-1} определяется формулой (3), для следующих f:

1) $f(x) \in C(R^n)$, $|x|^{n+\varepsilon}|f(x)| \leq a$, $|\xi|^{n+\varepsilon}|F[f](\xi)| \leq a$, $\varepsilon > 0$;

2) $f(x) \in C^2(R^1)$, $\int |f^{(\alpha)}(x)|\,dx < \infty$, $\alpha \leq 2$;

3) $f(x) \in C^{n+1}(R^n)$, $|D^\alpha f(x)||x|^{n+1} \leq a$, $|\alpha| \leq n+1$.

Проверить, что случай 3) вытекает из случая 1).

9.3. Доказать, что

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta(x^\alpha \varphi)](\xi), \qquad \varphi \in \mathscr{S}.$$

9.4. 1) Доказать, что если $\varphi \in \mathscr{S}$, то и $F[\varphi] \in \mathscr{S}$;

2) доказать, что операция преобразования Фурье непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$, т. е. что из $\varphi_k \longrightarrow \varphi$, $k \longrightarrow \infty$, в $\mathscr{S}$ следует $F[\varphi_k] \longrightarrow F[\varphi]$ в $\mathscr{S}$.

Указание. Воспользоваться задачей 9.3.

9.5. 1) Доказать, что если $f \in \mathscr{S}'$, то и $F[f] \in \mathscr{S}'$;

2) доказать, что операция преобразования Фурье непрерывна из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$, т. е. из $f_k \longrightarrow f$, $k \longrightarrow \infty$, в $\mathscr{S}'$ следует $F[f_k] \longrightarrow F[f]$ в $\mathscr{S}'$;

3) доказать, что если f — функция медленного роста, то

$$F[f](\xi) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|<R} f(x)\, e^{i(\xi,x)} dx \quad \text{в} \quad \mathscr{S}';$$

4) доказать, что если $f \in L_2(R^n)$, то $F[f] \in L_2(R^n)$ и

$$F[f](\xi) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|<R} f(x)\, e^{i(\xi,x)} dx \quad \text{в} \quad L_2(R^n)$$

(теорема Планшереля);

5) доказать, что если f и $g \in L_2(R^n)$, то справедливо равенство Парсеваля

$$(2\pi)^n (f,g) = (F[f], F[g]);$$

6) доказать, что если $f \in L_1(R^n)$, то $F[f] \in L_\infty(R^n) \cap C(R^n)$ и выражается формулой

$$F[f](\xi) = \int f(x)\, e^{i(\xi,x)} dx, \qquad \|F[f]\|_{L_\infty(R^n)} \le \|f\|_{L_1(R^n)},$$

$$F[f(\xi)] \longrightarrow 0, \qquad |\xi| \longrightarrow \infty$$

(теорема Римана–Лебега), $F[f * g] = F[f]\, F[g]$, $f, g \in L_1(R^n)$;

7) доказать, что если $f \in \mathscr{S}'$ и $\varphi \in \mathscr{S}$, то

$$F[f * \varphi] = F[f]\, F[\varphi];$$

8) пусть $f \in L_1(R^1)$ — кусочно непрерывная функция такая, что $\{f'(x)\}$ — также кусочно непрерывна; доказать формулу обращения

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Vp} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F[f](\xi)\, e^{-i\xi x} d\xi, \qquad x \in R^1.$$

9.6. Доказать в $\mathscr{S}(R^n)$:

1) $F[\delta(x - x_0)] = e^{i(\xi,x_0)}$; 2) $F[\delta] = 1$; 3) $f[1] = (2\pi)^n \delta(\xi)$;

4) $F\left[\dfrac{\delta(x-x_0) + \delta(x+x_0)}{2}\right] = \cos x_0\xi, \qquad n = 1;$

5) $F\left[\dfrac{\delta(x-x_0) - \delta(x+x_0)}{2i}\right] = \sin x_0\xi, \qquad n = 1.$

9.7. Доказать в $\mathscr{S}'(R^n)$:

1) $F[D^\alpha \delta] = (-i\xi)^\alpha$; 2) $F[x^\alpha] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi)$.

9.8. Вычислить преобразования Фурье следующих функций ($n = 1$):

1) $\theta(R - |x|)$; 2) $e^{-a^2x^2}$; 3) e^{ix^2}; 4) e^{-ix^2};

5) $f(x) = 0$ при $x < 0$, $f(x) = k$, $k < x < k+1$, $k = 0, 1, \ldots$

9.9. Доказать ($n = 1$):

1) $F\left[\theta(x)\, e^{-ax}\right] = \dfrac{1}{a - i\xi}, \qquad a > 0;$

2) $F\left[\theta(-x)\, e^{ax}\right] = \dfrac{1}{a + i\xi}, \qquad a > 0;$

3) $F\left[e^{-a|x|}\right] = \dfrac{2a}{a^2 + \xi^2}, \qquad a > 0;$

4) $F\left[\dfrac{2a}{a^2 + x^2}\right] = 2\pi e^{-a|\xi|}, \qquad a > 0;$

5) $F\left[\theta(x)\, e^{-ax} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] = \dfrac{1}{(a + i\xi)^\alpha}, \qquad a > 0,\ \alpha > 0.$

9.10. Воспользовавшись формулой Сохоцкого (см. задачу 6.20) и результатами задач 9.5 и 9.9, 1) и 2), доказать:

1) $F[\theta(x)] = \pi\delta(\xi) + i\mathscr{P}\dfrac{1}{\xi}$; 2) $F[\theta(-x)] = \pi\delta(\xi) - i\mathscr{P}\dfrac{1}{\xi}$.

9.11. Вычислить преобразования Фурье следующих обобщенных функций ($n = 1$):

1) $\delta^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$; 2) $\theta(x - a)$; 3) $\operatorname{sign} x$;

4) $\mathscr{P}\dfrac{1}{x}$; 5) $\dfrac{1}{x \pm i0}$; 6) $|x|$;

7) $\theta(x)x^k$, $k = 1,2,\ldots$; 8) $|x|^k$, $k = 2,3,\ldots$; 9) $x^k\mathscr{P}\dfrac{1}{x}$, $k = 1,2,\ldots$;

10) $x^k\delta$, $k = 1,2\ldots$; 11) $x^k\delta^{(m)}(x)$, $m \geq k$;

12) $\mathscr{P}\dfrac{1}{x^2}$, где $\mathscr{P}\dfrac{1}{x^2}$ определена в задаче 6.25;

13) $\mathscr{P}\dfrac{1}{x^3}$, где $\mathscr{P}\dfrac{1}{x^3}$ определена в задаче 7.10;

14) $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(x - k)$, $|a_k| \leq C(1 + |k|)^m$;

15) $\theta^{(1/2)}(x)$ (определение дробных производных см. в § 8).

9.12. Доказать, что

$$F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|x|}\right] = -2c - 2\ln|\xi|,$$

где

$$c = \int_0^1 \frac{1 - \cos u}{u}\,du - \int_1^\infty \frac{\cos u}{u}\,du \text{ — постоянная Эйлера,}$$

а $\mathscr{P}\dfrac{1}{|x|}$ ($x \in R^1$) определена в задаче 7.26.

9.13. Доказать, что

$$F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2}\right] = -2\pi\ln|\xi| - 2\pi c_0,$$

где обобщенная функция $\mathscr{P}\dfrac{1}{|x|^2}$, $x \in R^2$, определяется формулой

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2}, \varphi\right) = \int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2}\,dx + \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2}\,dx,$$

$$c_0 = \int_0^1 \frac{1 - J_0(u)}{u}\,du - \int_1^\infty \frac{J_0(u)}{u}\,du$$

и J_0 — функция Бесселя.

9.14. Решить в $\mathscr{S}'$ интегральное уравнение

$$\int_0^\infty u(\xi)\cos\xi x\,dx = \theta(1 - x).$$

9.15. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\,\sin bx}{x^2}\,dx.$$

Указание. Воспользоваться равенством Парсеваля и задачей 9.8, 1).

9.16. Доказать, что

$$F\left[\frac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right] = 2\pi\,\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}, \qquad \xi \in R^2.$$

9.17. Доказать:

1) $F\left[\frac{1}{|x|^2}\right] = \frac{2\pi^2}{|\xi|}, \quad \xi \in R^3;$

2) $F[|x|^{-k}] = 2^{n-k}\pi^{n/2}\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,|\xi|^{k-n},\ \xi \in R^n,\ 0 < k < n.$

Указание. Воспользоваться формулой (2) при $f = |x|^{-k}$ в $\mathscr{S}'(R^1)$ и $\varphi = e^{-|x|^2/2}$.

9.18. Доказать, что $F\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{2\pi i}{\zeta},\ \zeta = \xi + i\eta.$

9.19. Вычислить преобразование Фурье обобщенной функции $\frac{1}{4\pi R}\,\delta_{S_R},\ n = 3$, определенной в § 6.

9.20. Методом преобразования Фурье доказать в $\mathscr{S}'(R^1)$, что:

1) $y = c_0\delta(x) + c_1\delta^1(x) + \ldots + c_{n-1}\delta^{(n-1)}(x)$ — общее решение уравнения $x^n y = 0,\ n = 1, 2, \ldots;$

2) $\sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k x^k + \sum\limits_{k=0}^{m-1} b_k\theta(x)\,x^{m-k-1} + \sum\limits_{k=m}^{n-1} c_k\delta^{(k-m)}(x)$ — общее решение уравнения $x^n y^{(m)} = 0,\ n > m.$

Указание. Воспользоваться задачами 7.23, 2) и 7.24.

9.21. Доказать в $\mathscr{S}'(R^{n+1}(x,t))$, где $(x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$:

1) $F_x[\delta(x,t)] = 1(\xi)\cdot\delta(t);$

2) $F_x\left[\frac{\partial^m f(x,t)}{\partial t^m}\right] = \frac{\partial^m}{\partial t^m}\,F_x[f(x,t)];$

3) $F_x[\theta(at - |x|)] = 2\theta(t)\,\sin\frac{a\xi t}{\xi},\ a > 0,\ n = 1;$

4) $F_x[f(x)\,\delta(t)] = F[f](\xi)\,\delta(t),\ f \in \mathscr{S}'(R^n).$

9.22. Доказать в $\mathscr{S}'(R^{n+m})$:

1) $D_\xi^\alpha D_y^\beta F_x[f(x,y)] = F_x[(ix)^\alpha D_y^\beta f];$

2) $F_x[D_x^\alpha D_y^\beta f] = (-i\xi)^\alpha F_x[D_y^\beta f].$

9.23. Доказать, что в $\mathscr{S}'(R^2)$

$$F_\xi^{-1}\left[\theta(t)\,e^{-a^2\xi^2 t}\right] = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-x^2/(4a^2t)}.$$

Указание. Воспользоваться формулой (3) и задачей 9.8, 2).

9.24. Доказать, что в $\mathscr{S}'(R^{n+1})$

$$F_\xi^{-1}\left[\theta(t)\,e^{-a^2|\xi|^2t}\right]=\theta(t)\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n e^{-|x|^2/(4a^2t)}.$$

Указание. Воспользоваться задачей 9.23.

9.25. Доказать, что в $\mathscr{S}'(R^2)$

$$F_\xi^{-1}\left[\theta(t)\,\frac{\sin a\xi t}{a\xi}\right]=\frac{1}{2a}\,\theta(at-|x|).$$

Указание. Воспользоваться задачей 9.8, 1).

9.26. Доказать, что в $\mathscr{S}'(R^3)$

$$F_\xi^{-1}\left[\theta(t)\,\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right]=\frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}.$$

Указание. Воспользоваться задачей 9.16.

9.27. Доказать, что в $\mathscr{S}'(R^4)$

$$F_\xi^{-1}\left[\theta(t)\,\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right]=\frac{\theta(t)}{4\pi a^2t}\,\delta_{S_{at}}(x)$$

(здесь $S_{at}=\{x:|x|=at\}$).

Указание. Воспользоваться задачей 9.19.

9.28. Пусть f — финитная обобщенная функция и η — любая функция из $\mathscr{D}$, равная 1 в окрестности носителя f. Доказать, что функция $\widetilde{f}(z)=\big(f(\xi),\eta(\xi)\,e^{i(z,\xi)}\big)$, $z=x+iy$:

а) не зависит от η;

б) целая;

в) $\widetilde{f}(x)=F[f]$.

9.29. Доказать, что если f и g финитны и $f*g=0$, то либо $f=0$, либо $g=0$.

Указание. Воспользоваться задачей 9.28.

9.30. 1) Доказать, что $F[\delta(x)\cdot 1(y)]=(2\pi)^m 1(\xi)\,\delta(\eta)$;

2) обозначим δ-функцию на гиперплоскости $(a,x)=0$ пространства R^n через $\delta((a,x))$, так что

$$(\delta((a,x)),\varphi)=\int\limits_{(a,x)=0}\varphi\,ds,\qquad \varphi\in\mathscr{D}(R^n).$$

Доказать, что $F[\delta(a_1x_1+a_2x_2)]=2\pi\delta(a_2\xi_1-a_1\xi_2)$.

Ответы к § 9

9.8. 1) $2\,\dfrac{\sin R\xi}{\xi}$; 2) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{a}\,e^{-\xi^2/(4a^2)}$; 3) $\sqrt{\pi}\,e^{-i(\xi^2-\pi)/4}$;

4) $\sqrt{\pi}\,e^{i(\xi^2-\pi)/4}$;

5) Решение.

$$f[f]=\sum_{k=1}^{\infty}k\int\limits_{k}^{k+1}e^{ix\xi}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{i\xi}e^{ik\xi}\left(e^{i\xi}-1\right)=$$

$$=\frac{e^{i\xi}-1}{i\xi}\sum_{k=1}^{\infty}ke^{ik\xi}=-\frac{e^{i\xi}-1}{\xi}\frac{d^3}{d\xi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik\xi}}{k^2}$$

— ряд сходится в $\mathscr{D}'$, так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik\xi}}{k^2}$ сходится равномерно в R^1.

9.11. 1) $(-i\xi)^k$; 2) $\pi\delta(\xi)+ie^{ia\xi}\mathscr{P}\frac{1}{\xi}$; 3) $2i\mathscr{P}\frac{1}{\xi}$;

4) $i\pi\operatorname{sign}\xi$; 5) $\mp i\pi+i\pi\operatorname{sign}\xi$; 6) $2\left(\mathscr{P}\frac{1}{\xi}\right)'=-2\mathscr{P}\frac{1}{\xi^2}$;

7) $(-i)^k\left[\pi\delta(\xi)+i\mathscr{P}\frac{1}{\xi}\right]^{(k)}$;

8) $(-i)^k2\pi\delta^{(k)}(\xi)$, k четное, $(-i)^{k-1}2\left(\mathscr{P}\frac{1}{\xi}\right)^{(k)}$, k нечетное;

9) $2(-i)^{k-1}\pi\delta^{(k-1)}(\xi)$; 10) 0;

11) $(-i)^{k+m}\frac{m!}{(m-k)!}\xi^{m-k}$; 12) $-\pi|\xi|$;

13) Решение. В силу задачи 7.10, 4), второй из формул (4) и задачи 9.11, 12)

$$F\left[\mathscr{P}\frac{1}{x^3}\right]=F\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\mathscr{P}\frac{1}{x^2}\right]=\frac{i\xi}{2}F\left[\mathscr{P}\frac{1}{x^2}\right]=-\frac{i\pi\xi|\xi|}{2};$$

14) Решение. В силу результатов задач 6.25, 2), 7.12 и 9.6, 1)

$$\left(F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(x-k)\right],\varphi(\xi)\right)=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(x-k),F[\varphi(\xi)]\right)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(a_ke^{ik\xi},\varphi(\xi)\right)=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{ik\xi},\varphi(\xi)\right),\qquad \varphi\in\mathscr{S}(R^1);$$

15) Решение.

$$F\left[\theta^{(1/2)}\right]=F\left[f_{-1/2}*\theta\right]=F\left[f'_{1/2}*\theta\right]=F\left[(f_{1/2}*\theta)'\right]=$$

$$=F\left[\left(\frac{\theta x^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}*\theta\right)'\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}F\left[\left(\theta\cdot\sqrt{x}\right)'\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}F\left[\frac{\theta}{\sqrt{x}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{d}{i\,d\xi}\right)\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}e^{ix\xi}dx.$$

9.14. $\frac{2}{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}$.

9.15. $\frac{\pi}{2}\min(a,b)$.

9.19. $\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}$.

9.20. Решение. Из $F\left[x^n y^{(m)}\right] = 0$, в силу первой из формул (4), $F^{(n)}\left[y^{(m)}\right] = 0$. Отсюда в силу результатов задач 7.23, 2), 9.7, 2) и формулы (3)

$$F\left[y^{(m)}(x)\right] = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \ldots + \alpha_{n-1}\xi^{n-1},$$

$$y^{(m)} = \beta_0\delta(x) + \beta_1\delta'(x) + \ldots + \beta_{n-1}\delta^{(n-1)}(x).$$

Отсюда в силу результатов задач 7.23, 2) и 7.6, 10)

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m-1} b_k\theta(x)\, x^{m-k-1} + \sum_{k=m}^{n-1} c_k\delta^{(k-m)}(x).$$

9.21. 1) Решение. В силу формулы (5) и определения прямого произведения (см. § 8)

$$\big(F_x[\delta(x,t)](\xi,t), \varphi(\xi,t)\big) = \big(\delta(x,t), F_\xi[\varphi(\xi,t)](x,t)\big) =$$

$$= \left(\delta(x,t), \int e^{i(\xi,x)}\varphi(\xi,t)\,d\xi\right) = \int \varphi(\xi,0)\,d\xi = \big(1(\xi)\cdot\delta(t), \varphi(\xi,t)\big);$$

2) Решение. В силу формулы (5) и определения производной обобщенной функции (см. § 7):

$$\left(F_x\left[\frac{\partial^m f(x,t)}{\partial t^m}\right](\xi,t), \varphi\right) = (-1)^m\left(f(x,t), \frac{\partial^m}{\partial t^m} F_\xi[\varphi(\xi,t)]\right) =$$

$$= (-1)^m\left(f(x,t), F_\xi\left[\frac{\partial^m\varphi(\xi,t)}{\partial t^m}\right]\right) = \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} F_x[f(x,t)], \varphi\right).$$

9.27. $F\left[\dfrac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\right]$ при $t > 0$ и $n = 3$ вычисляется так:

$$F\left[\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\right] = \lim_{R\to\infty} 2\pi\int_0^r \rho\sin t\rho\int_0^\pi e^{ir\rho\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\,d\rho =$$

$$= -\frac{2\pi}{r}\lim_{R\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R \cos t\rho\int_{-r}^r e^{i\rho u}du\,d\rho =$$

$$= -\frac{2\pi}{r}\lim_{R\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-r}^r\int_0^R \cos t\rho\, e^{i\rho u}d\rho\,du =$$

$$= -\frac{\pi}{r}\lim_{R\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-r}^r\int_0^R \left[\cos\rho(u-t) + \cos\rho(u+t)\right]d\rho\,du =$$

$$= -\frac{\pi}{r}\lim_{R\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-r}^r\left[\frac{\sin R(u-t)}{u-t} + \frac{\sin R(u+t)}{u+t}\right]du =$$

$$= -\frac{2\pi^2}{r}\frac{\partial}{\partial t}\theta(r-t) = \frac{2\pi^2}{r}\delta(r-t) = \frac{2\pi^2}{t}\delta_t(x), \qquad r = |x|.$$

Указание. При переходе к пределу воспользоваться задачей 6.19, 4).

§ 10. Преобразование Лапласа обобщенных функций

Обозначим через $\mathscr{D}'_+(a)$ совокупность обобщенных функций $f(t)$ из $\mathscr{D}'(R^1)$, обращающихся в нуль при $t<0$ и таких, что $f(t)\,e^{-\sigma t}\in\mathscr{S}'$ при всех $\sigma>a$.

Преобразование Лапласа $\mathscr{F}(p)$ обобщенной функции f из $\mathscr{D}'_+(a)$ определяется равенством

$$\mathscr{F}(p)=F\left[f(t)\,e^{-\sigma t}\right](-\omega),\qquad \sigma>a.$$

При этом f называют *оригиналом*, $\mathscr{F}$ — *изображением* и этот факт записывают так:

$$f(t)\longleftrightarrow\mathscr{F}(p),\qquad \sigma>a;$$

здесь $p=\sigma+i\omega$. Функция $\mathscr{F}(p)$ аналитична в полуплоскости $\sigma>a$ и удовлетворяет следующему условию роста: для любых $\varepsilon>0$ и $\sigma_0>a$ существуют такие числа $c_\varepsilon(\sigma_0)\geq 0$ и $m=m(\sigma_0)\geq 0$, что

$$|\mathscr{F}(p)|\leq c_\varepsilon(\sigma_0)\,e^{\varepsilon\sigma}(1+|p|)^m,\qquad \sigma>\sigma_0.$$

Справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
(-t)^m f(t)&\longleftrightarrow\mathscr{F}^{(m)}(p), && \sigma>a,\ m=0,1,\ldots;\\
f^{(m)}(t)&\longleftrightarrow p^m\mathscr{F}(p), && \sigma>a,\ m=0,1,\ldots;\\
f(t)\,e^{\lambda t}&\longleftrightarrow\mathscr{F}(p-\lambda), && \sigma>a+\mathrm{Re}\,(\lambda);\\
f(kt)&\longleftrightarrow\frac{1}{k}\mathscr{F}\left(\frac{p}{k}\right), && \sigma>ka,\ k>0;\\
f(t-\tau)&\longleftrightarrow e^{-\tau p}\mathscr{F}(p), && \sigma>a;\\
f_{(m)}(t)&\longleftrightarrow\frac{\mathscr{F}(p)}{p^m}, && \sigma>a,\ m=0,1,\ldots,
\end{aligned}$$

где $f_{(m)}$ — m-я первообразная f из $\mathscr{D}'_+(a)$;

$$(f*g)(t)\longleftrightarrow\mathscr{F}(p)\,\mathscr{G}(p),\sigma>a,$$

если

$$g(t)\longleftrightarrow\mathscr{G}(p),\qquad \sigma>a;$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{d}{dt}-a\right)^{m+2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\mathscr{F}(p)\,e^{pt}}{(p-a)^{m+2}}\,dp$$

— *формула обращения* для преобразования Лапласа, интеграл не зависит от $\sigma>\sigma_0>a$, $m=m(\sigma_0)$.

В задачах 10.1–10.9 и 10.11–10.14 доказать утверждения.

10.1. Если $f(t)$ — локально интегрируема в R^1, $f(t)=0$, $t<0$ и $f(t)=O(e^{at})$, $t\longrightarrow\infty$, то $f\in\mathscr{D}'_+(a)$ и

$$\mathscr{F}(p)=\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt,\qquad \sigma>a.$$

10.2. Если $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, $f(t) \longleftrightarrow \mathscr{F}(p)$, $\sigma > a$ и функция $\mathscr{F}(\sigma + i\omega)$ абсолютно интегрируема по ω на R^1 при некотором $\sigma > a$, то в этом случае формула обращения принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathscr{F}(p)\, e^{pt} dp.$$

10.3. 1) $\mathscr{D}'_+(a_1) \subset \mathscr{D}'_+(a_2)$, если $a_1 \le a_2$;

2) если $f \in \mathscr{S}' \cap \mathscr{D}'_+$, то $f \in \mathscr{D}'_+(0)$.

10.4. Если $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, то:

1) $pf \in \mathscr{D}'_+(a)$, где p — полином; 2) $f(kt) \in \mathscr{D}'_+(ka)$, $k > 0$;

3) $f(t)\, e^{\lambda t} \in \mathscr{D}'_+(a + \operatorname{Re} \lambda)$.

10.5. Если $f, g \in \mathscr{D}'_+(a)$, то $f * g \in \mathscr{D}'_+(a)$ и справедливо равенство

$$(f * g)\, e^{-\sigma t} = \left(f e^{-\sigma t}\right) * \left(g e^{-\sigma t}\right), \qquad \sigma > a.$$

Указание. Воспользоваться 8.20.

10.6. Если $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, то:

1) $f(t - \tau) \in \mathscr{D}'_+(a)$, $\tau \ge 0$; 2) $f^{(m)} \in \mathscr{D}'_+(a)$, $m = 1, 2, \ldots$;

3) $f_{(m)} \in \mathscr{D}'_+(a)$, $m = 1, 2, \ldots$

10.7. 1) $\delta(t) \longleftrightarrow 1$;

2) $\delta^{(m)}(t - \tau) \longleftrightarrow p^m e^{-\tau p}$, $\tau \ge 0$, p любое, $m = 0, 1, \ldots$;

3) $\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{p}$, $\sigma > 0$; 4) $\theta(t)\, e^{i\omega t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{p - i\omega}$, $\sigma > 0$;

5) $\theta(t)\, e^{-i\omega t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{p + i\omega}$, $\sigma > 0$; 6) $\theta(t) \cos t \longleftrightarrow \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$, $\sigma > 0$;

7) $\theta(t) \sin t \longleftrightarrow \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, $\sigma > 0$;

8) $\dfrac{\theta(t)\, t^{m-1}}{\Gamma(m)}\, e^{\lambda t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{(p - \lambda)^m}$, $\sigma > \operatorname{Re} \lambda$, $m = 0, 1, \ldots$;

9) $\theta(t)\, J_0(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$, $\sigma > 0$.

10.8. Если f — функция из $\mathscr{D}'_+(a)$, $f \in C^n\,(t \ge 0)$ и $f \longleftrightarrow \mathscr{F}$, то

$$\left\{f^{(n)}(t)\right\} \longleftrightarrow p^n \mathscr{F}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(+0)\, p^{n-k-1}, \qquad \sigma > a.$$

10.9. Если f и g — функции из $\mathscr{D}'_+(a)$, $g \in C^1(t \ge 0)$ и $f \longleftrightarrow \mathscr{F}$, $g \longleftrightarrow \mathscr{G}$, то

$$\int\limits_0^t f(\tau)\{g'(t - \tau)\}\, d\tau \longleftrightarrow p\mathscr{F}(p)\, \mathscr{G}(p) - g(+0)\, \mathscr{F}(p), \qquad \sigma > a.$$

10.10. Решить уравнение $L \dfrac{di}{dt} + Ri + \dfrac{1}{C} \displaystyle\int\limits_0^t i(\tau)\, d\tau = e(t)$, где $e(t)$ — локально интегрируемая функция, $e(t) = 0$, $t < 0$.

10.11. Фундаментальное решение $\mathscr{E}(t)$ уравнения

$$\mathscr{E}^{(m)} + a_1\mathscr{E}^{(m-1)} + \ldots + a_m\mathscr{E} = \delta$$

существует и единственно в классе $\mathscr{D}'_+(a)$ и удовлетворяет соотношению

$$\mathscr{E}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{Q(p)}, \qquad \sigma > a,$$

где $\theta(p) = p^m + a_1p^{m-1} + \ldots + a_m$, $a = \max\limits_j \operatorname{Re}\lambda_j$, λ_j — корни полинома Q.

10.12. Если $f_\alpha(t)$, $-\infty < \alpha < \infty$, — обобщенная функция, введенная в § 8 (с. 110), то:

1) $f_\alpha(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{p^\alpha}$, $\sigma > 0$, где p^α — та ее ветвь, для которой $p^\alpha > 0$ при $p > 0$;

2) $f_\alpha(t)\, e^{\lambda t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{(p-\lambda)^\alpha}$; $\sigma > \operatorname{Re}\lambda$.

10.13. Если $|a_k| \le c(1+k)^m$, $k = 0, 1, \ldots$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\delta(t-k) \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-kp}, \qquad \sigma > 0.$$

10.14. Если $f(t)$ — T-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на периоде, то

$$\theta(t)\, f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t)\, e^{-pt}dt, \qquad \sigma > 0.$$

10.15. Найти решения уравнений в классе $\mathscr{D}'_+(a)$ (при надлежащем a):

1) $(\theta\cos t) * \mathscr{E} = \delta(t)$;   2) $(\theta t\cos t) * \mathscr{E} = \delta(t)$;

3) $\mathscr{E} + 2(\theta\cos t) * \mathscr{E} = \delta(t)$;   4) $\begin{cases} \theta * u_1 + \delta' * u_2 = \delta(t), \\ \delta * u_1 + \delta' * u_2 = 0. \end{cases}$

10.16. Пусть $\mathscr{E}_1$ — решение уравнения $g * \mathscr{E}_1 = \theta$ в $\mathscr{D}'_+(a)$, причем $\mathscr{E}_1$ — локально интегрируемая функция, $\mathscr{E}_1 \in C^1$ $(t \ge 0)$. Доказать, что решение в $\mathscr{D}'_+(a)$ уравнения $g*u = f$, где f — локально интегрируемая функция из $\mathscr{D}'_+(a)$, выражается формулой

$$u(t) = \mathscr{E}_1(+0)\, f(t) + \int_0^t f(\tau)\{\mathscr{E}_1'(t-\tau)\}\, d\tau.$$

10.17. Вычислить преобразование Лапласа функции

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2^k, & k < t < k+1, \; k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

10.18. Решить уравнение $\chi * a = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k\delta(t-k)$ в $\mathscr{D}'_+(\ln 2)$; функция $a(t)$ определена в задаче 10.17.

10.19. Доказать формулу: $\sin t = \int\limits_0^t J_0(t-\tau)\, J_0(\tau)\, d\tau$.

10.20. Решить следующие задачи Коши:

1) $u' + 3u = e^{-2t}, \qquad u(0) = 0;$

2) $u'' + 5u' + 6u = 12, \qquad u(0) = 2,\ u'(0) = 0;$

3) $\begin{cases} u' + 5u + 2v = e^{-t}, \\ v' + 2v + 2u = 0, \end{cases} \qquad u(0) = 1,\ v(0) = 0.$

Ответы к § 10

10.3. 2) Решение. Пусть η — любая функция класса $C^\infty(R^1)$ такая, что $\eta(t) = 0$, $t < -\delta$, $\eta(t) = 1$, $t > -\frac{\delta}{2}$, $\delta > 0$ любое. Тогда при всех $\sigma > 0$, $\eta(t)\, e^{-\sigma t} \in \mathscr{S}$, $f = \eta f$, и поэтому $f(t)\, e^{-\sigma t} = f(t)\, \eta(t)\, e^{-\sigma t} \in \mathscr{S}'$.

10.6. Указание. Воспользоваться задачей 10.5 и формулами, соответственно:

1) $f(t-\tau) = f * \delta(t-\tau)$; 2) $f^{(m)} = f * \delta^{(m)}$;

3) $f_{(m)} = \underbrace{\theta * \ldots * \theta}_{m \text{ раз}} * f$.

10.7. 9) Указание. Воспользоваться уравнением Бесселя.

10.10. $\frac{1}{\sqrt{d}} \int\limits_0^t \left[p_+ e^{p_+(t-\tau)} - p_- e^{p_-(t-\tau)}\right] e(\tau)\, d\tau, \qquad p_\pm = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{d}}{2L}$, $d = R^2 - \frac{4L}{c}$.

10.15. 1) $\delta'(t) + \theta(t), \qquad a = 0;$

2) $\delta''(t) + 3\delta(t) + 4\theta(t) \operatorname{sh} t, \qquad a = 1;$

3) $\delta(t) - 2\theta(t)\, e^t(1-t), \qquad a = 1;$

4) $u_1(t) = -\delta(t) - \theta(t)\, e^t,\ u_2(t) = \theta(t)\, e^t, \qquad a = 1.$

10.16. Указание. Воспользоваться формулой задачи 10.8.

10.17. $\frac{1 - e^{-p}}{p(1 - 2e^{-p})}$, $\sigma > \ln 2$.

10.18. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta'(t-k)$.

10.19. Указание. Воспользоваться задачей 10.7, 9).

10.20. 1) $e^{-2t} - e^{-3t}$; 2) 2;

3) $\frac{9}{25} e^{-t} + \frac{1}{5} t e^{-t} + \frac{16}{25} e^{-6t}, \quad -\frac{8}{25} e^{-t} - \frac{2}{5} t e^{-t} + \frac{8}{25} e^{-6t}.$

§ 11. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов

Обобщенным решением в области $G \subset R^n$ линейного дифференциального уравнения

$$L(x, D)\, u \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u = f(x), \qquad (*)$$

где $a_\alpha(x) \in C^\infty(R^n)$, $f \in \mathscr{D}'$, называется всякая обобщенная функция u, удовлетворяющая этому уравнению в G в обобщенном смысле, т. е. для любой $\varphi \in \mathscr{D}$, носитель которой содержится в G, имеет место равенство

$$(u, L^*(x, D)\, \varphi) = (f, \varphi),$$

где $L^*(x, D)\, \varphi = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)$.

Обобщенная функция u принадлежит классу $C^P(G)$, если в области G она совпадает с функцией $u_0(x)$ класса $C^P(G)$, т. е. для любой $\varphi \in \mathscr{D}$, $\operatorname{supp}\varphi \in G$, имеет место равенство

$$(u, \varphi) = \int u_0(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Пусть $f \in C(G) \cap \mathscr{D}'$. Для того чтобы обобщенная функция u удовлетворяла уравнению $(*)$ в области G в классическом смысле, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу $C^m(G)$ и удовлетворяла этому уравнению в обобщенном смысле в области G.

Фундаментальным решением (функцией влияния) линейного дифференциального оператора

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha$$

с постоянными коэффициентами $a_\alpha(x) = a_\alpha$ называется обобщенная функция $\mathscr{E}$, удовлетворяющая в R^n уравнению

$$L(D)\, \mathscr{E} = \delta(x).$$

У всякого линейного дифференциального оператора $L(D)$ существует фундаментальное решение медленного роста и это решение удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$L(-i\xi)\, F|\mathscr{E}| = 1.$$

Пусть $f \in \mathscr{D}'$ такова, что свертка $\mathscr{E} * f$ существует в $\mathscr{D}'$. Тогда

$$u = \mathscr{E} * f$$

есть решение уравнения $L(D)\, u = f$. Это решение единственно в классе тех обобщенных функций u, для которых существует свертка с $\mathscr{E}$.

11.1. Доказать, что единственное в $\mathscr{D}'_+$ фундаментальное решение оператора
$$\frac{d^m}{dx^m} + a_1\,\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + a_m$$
выражается формулой задачи 8.26 (определение $\mathscr{D}'_+$ см. § 8).

11.2. Доказать, что функция $\mathscr{E}(x)$ является фундаментальным решением оператора:

1) $\mathscr{E}(x) = \theta(x)\,e^{\pm ax}, \qquad \dfrac{d}{dx} \mp a;$

2) $\mathscr{E}(x) = \theta(x)\,\dfrac{\sin ax}{a}, \qquad \dfrac{d^2}{dx^2} + a^2;$

3) $\mathscr{E}(x) = \theta(x)\,\dfrac{\operatorname{sh} ax}{a}, \qquad \dfrac{d^2}{dx^2} - a^2;$

4) $\mathscr{E}(x) = \theta(x)\,e^{\pm ax}\,\dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}, \qquad \left(\dfrac{d}{dx} \mp a\right)^m, \quad m = 2, 3, \ldots$

11.3. Найти единственные в $\mathscr{D}'_+$ фундаментальные решения следующих операторов:

1) $\dfrac{d^2}{dx^2} + 4\,\dfrac{d}{dx};$ 2) $\dfrac{d^2}{dx^2} - 4\,\dfrac{d}{dx} + 1;$ 3) $\dfrac{d^2}{dx^2} + 3\,\dfrac{d}{dx} + 2;$

4) $\dfrac{d^2}{dx^2} - 4\,\dfrac{d}{dx} + 5;$ 5) $\dfrac{d^3}{dx^3} - a^3;$ 6) $\dfrac{d^3}{dx^3} - 3\,\dfrac{d^2}{dx^2} + 2\,\dfrac{d}{dx};$

7) $\dfrac{d^4}{dx^4} - a^4;$ 8) $\dfrac{d^4}{dx^4} - 2\,\dfrac{d^2}{dx^2} + 1.$

11.4. Доказать, что:

1) $\mathscr{E}(x,y) = \dfrac{1}{\pi z} = \dfrac{1}{\pi(x+iy)}$ — фундаментальное решение оператора Коши–Римана $\dfrac{\partial}{\partial \bar z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial}{\partial y}\right);$

2) $\mathscr{E}(x,y) = \dfrac{\bar z^{k-1} e^{\lambda \bar z}}{\pi \Gamma(k)\, z}$, $k = 1, 2, \ldots$, — фундаментальное решение оператора $\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar z} - \lambda\right)^k;$

3) $\mathscr{E}(x,y) = \dfrac{2\bar z^{k-1} z^{m-1}}{\pi \Gamma(k)\,\Gamma(m)} \ln|z|$, $k, m = 1, 2, \ldots$, — фундаментальное решение оператора $\dfrac{\partial^{k+m}}{\partial \bar z^k \partial z^m};$

4) $\mathscr{E}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi i}\,\dfrac{\operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda}{y - \lambda x}\, e^{-\mu \alpha}$ — фундаментальное решение обобщенного оператора Коши–Римана $\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \mu$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

11.5. Доказать, что $\mathscr{E}(x) = \dfrac{1}{2\pi} \ln|x|$ — фундаментальное решение оператора Лапласа в R^2. Выяснить физический смысл.

11.6. Доказать:

1) $\mathscr{E}(x) = -\dfrac{1}{4\pi |x|}$ — фундаментальное решение оператора Лапласа в R^3; выяснить физический смысл;

2) $\mathscr{E}(x) = -\dfrac{1}{(n-2)\,\sigma_n |x|^{n-2}}$, $n = 3, 4, \ldots$, — фундаментальное решение оператора Лапласа в R^n, где $\sigma_n = \int\limits_{S_1} dS = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь поверхности единичной сферы в R^n;

3) $\mathscr{E}_{n,k}(x) = \dfrac{(-1)^k \Gamma(n/2-k)}{2^{2k}\pi^{n/2}\Gamma(k)}\,|x|^{2k-n}$ — фундаментальное решение итерированного оператора Лапласа Δ^k при $2k < n$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\mathscr{E}_{n,k}(x) = \frac{1}{\pi \cdot 2^{2k-1}\Gamma(k)}\,|x|^{2k-2}\ln|x|, \qquad n = 2.$$

Указание. Воспользоваться задачей 9.17, 2).

11.7. Доказать, что $\mathscr{E}(x) = -\dfrac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$ и $\bar{\mathscr{E}}(x) = -\dfrac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$ — фундаментальные решения оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ в R^3.

11.8. Доказать, что если функция $u(x)$ удовлетворяет в R^3 уравнению $\Delta u + k^2 u = 0$ и условиям излучения

$$u(x) = O\big(|x|^{-1}\big), \qquad \frac{\partial u}{\partial |x|} - iku(x) = o\big(|x|^{-1}\big)$$

при $|x| \longrightarrow \infty$, то $u \equiv 0$.

11.9. Доказать, что фундаментальными решениями оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ являются функции:

1) $\mathscr{E}(x) = -\dfrac{i}{4}\,H_0^{(1)}(k|x|)$ и $\bar{\mathscr{E}}(x, y) = \dfrac{i}{4}\,H_0^{(2)}(k|x|)$ в R^2, где $H_0^{(k)}$, $k = 1, 2$, — функции Ханкеля;

2) $\mathscr{E}(x) = \dfrac{1}{i2k}\,e^{ik|x|}$ и $\bar{\mathscr{E}}(x) = -\dfrac{1}{i2k}\,e^{-ik|x|}$ в R^1.

11.10. Доказать, что фундаментальными решениями оператора $\Delta - k^2$ являются функции:

1) $\mathscr{E}(x) = -\dfrac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}$ в R^3;

2) $\mathscr{E}(x) = -\dfrac{1}{2\pi}\,K_0(k|x|)$ в R^2, где $K_0(\xi) = i\,\dfrac{\pi}{2}\,H_0^{(1)}(i\xi)$ — функция Ханкеля мнимого аргумента;

3) $\mathscr{E}(x) = \dfrac{e^{-k|x|}}{2k}$ в R^1;

4) $\mathscr{E}(x) = -\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\left(\dfrac{k}{|x|}\right)^{n/2-1} K_{n/2-1}(k|x|)$ в R^n.

11.11. Доказать, что если $\mathscr{E}_1(x,t)$ — фундаментальное решение оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} + L(D_x)$, то $\dfrac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}\mathscr{E}_1(x,t)$ — фундаментальное решение оператора $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + L(D_x)\right)^k$.

11.12. Доказать, что:

1) $\mathscr{E}(x,t) = \dfrac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\, e^{-|x|^2/(4a^2t)}$ — фундаментальное решение оператора теплопроводности $\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$ в R^n; выяснить физический смысл;

2) $\dfrac{\theta(t)\,t^{k-1}}{(2a\sqrt{\pi t})^n\Gamma(k)}\, e^{-|x|^2/(4a^2t)}$ — фундаментальное решение оператора $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)^k$ в R^n, $k = 1, 2, \ldots$

Указание. Воспользоваться задачей 11.11.

11.13. Доказать, что $\mathscr{E}(x,t) = \dfrac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{ct-(x+bt)^2/(4a^2t)}$ — фундаментальное решение оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial}{\partial x} - c$.

11.14. Доказать, что:

1) $\mathscr{E}_1(x,t) = -\dfrac{i\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{i(x^2/(4t)-\pi/4)}$ — фундаментальное решение оператора Шрёдингера $i\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ (Указание. Воспользоваться формулой $\int\limits_0^\infty e^{iu^2}du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{i\pi/4}$);

2) $\mathscr{E}_n(x,t) = -\dfrac{i\theta(t)}{\hbar}\left(\dfrac{m_0}{2\pi\hbar t}\right)^{n/2}\exp\left\{i\left[\dfrac{|x|^2}{2\hbar t}(m+i0) - \dfrac{\pi n}{4}\right]\right\}$ — фундаментальное решение оператора $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\hbar^2}{2m_0}\Delta$; n любое;

3) $\dfrac{\theta(t)\,t^{k-1}}{(2a\sqrt{\pi t})^n\Gamma(k)}\exp\left\{\pm\left(\dfrac{|x|^2}{4ia^2t} + \dfrac{\pi n}{4}i\right)\right\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — фундаментальное решение оператора $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} \pm ia^2\Delta\right)^k$ в R^n (Указание. Воспользоваться задачей 11.11.).

11.15. Доказать, что:

1) $\mathscr{E}_1(x,t) = \dfrac{1}{2a}\theta(at - |x|)$ — фундаментальное решение одномерного волнового оператора $\Box_a$; выяснить физический смысл;

2) $\mathscr{E}_2(x,t) = \dfrac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}$ — фундаментальное решение двумерного волнового оператора $\Box_a$, $x = (x_1, x_2)$; выяснить физический смысл.

Указание. Воспользоваться задачей 9.26.

11.16. Доказать, что:

1) $\mathscr{E}_3(x,t) = \dfrac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\,\delta_{S_{at}}(x) = \dfrac{\theta(t)}{2\pi a}\,\delta\left(a^2t^2 - |x|^2\right)$, где $S_{at}: |x| = at$, является фундаментальным решением трехмерного волнового оператора $\Box_a$, $x = (x_1, x_2, x_3)$; выяснить физический смысл (Указание. Воспользоваться задачей 9.27.);

2) $\dfrac{1}{8\pi a^5}\,\theta(at-|x|)$ — фундаментальное решение оператора $\Box_a^2$ в R^4;

3) $\dfrac{1}{\pi 2^{2k-1}a^{2k+1}\Gamma(k)\,\Gamma(k-1)}\left(a^2t^2 - |x|^2\right)^{k-2}\theta(at-|x|)$ — фундаментальное решение оператора $\Box_a^k$ в R^n;

4) фундаментальное решение оператора $\Box_a$ в R^4 можно представить в виде
$$\mathscr{E}_3(x,t) = \frac{1}{8\pi a^3}\,\Box_a\theta(at-|x|).$$

11.17. Доказать, что
$$\mathscr{E}_n(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2a)^{n-2}\pi^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,\Box_a^{(n-3)/2}\left[\theta(t)\,\delta\left(a^2t^2 - |x|^2\right)\right], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad n \geq 3 \text{ нечетное}, \\ \dfrac{1}{(2a)^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\Box_a^{(n-2)/2}\left[\dfrac{\theta(at-|x|)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}\right], \quad n \text{ четное}, \end{cases}$$
является фундаментальным решением волнового оператора $\Box_a$.

Указание. При нечетных n воспользоваться формулой
$$\mathscr{E}_n(x,t) = \theta(t)\,F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin|\xi|\,t}{|\xi|}\right]$$
и задачей 9.27; при четных n применить метод спуска по переменной x_{n+1}.

11.18. Доказать, что $\mathscr{E}(x,t) = \dfrac{1}{2a}\,\theta(at-|x|)\,e^{b(at-x)/(2a^2)}$ — фундаментальное решение оператора
$$\Box_a - b\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{b}{a}\,\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \text{где} \qquad a, b > 0.$$

Указание. Воспользоваться формулой
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{z\tau}}{z}\,dz = \theta(\tau), \qquad \alpha > 0.$$

11.19. Доказать, что:

1) $\mathscr{E}(x,t) = -\theta(t)\,\theta(-x)\,e^{at+bx}$ — фундаментальное решение оператора
$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t} - a\,\frac{\partial}{\partial x} - b\,\frac{\partial}{\partial t} + ab, \qquad \text{где} \qquad b > 0$$
(см. указание к задаче 11.18);

2) $\mathscr{E}(x,t) = \theta(t)\,\theta(x)\,I_0\left(2m\sqrt{xy}\right)$ — фундаментальное решение оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial t} - m^2$ в R^2.

11.20. Доказать, что фундаментальным решением оператора $\Box_a - m^2$ является функция

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2a} I_0\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-x^2}\right).$$

11.21. Доказать, что фундаментальным решением оператора Клейна–Гордона–Фока $\Box_a + m^2$ являются функции

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2a} J_0\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-x^2}\right), \qquad n=1;$$

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a^2} \frac{\cos\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-x^2}\right)}{\sqrt{a^2t^2-x^2}}, \qquad n=2;$$

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a}\delta\left(a^2t^2-|x|^2\right) - \frac{m}{4\pi a^2}\theta(at-|x|)\frac{J_1\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-|x|^2}\right)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}, \qquad n=3,$$

где J_0, J_1 — функции Бесселя.

11.22. Доказать, что фундаментальными решениями телеграфного оператора $\Box_a + 2m\dfrac{\partial}{\partial t}$ являются функции

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2a} e^{-mt}\theta(at-|x|) I_0\left(m\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}\right), \qquad n=1;$$

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{e^{-mt}\theta(at-|x|)\operatorname{ch}\left(m\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}\right)}{2\pi a^2\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}}, \qquad n=2;$$

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(at)}{2\pi a} e^{-mt}\delta\left(a^2t^2-|x|^2\right) - \frac{me^{-mt}\theta(at-|x|) I_1\left(m\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}\right)}{4\pi a^3\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}}, \qquad n=3,$$

где $I_0(\xi) = J_0(i\xi)$, $I_1(\xi) = -iJ_1(i\xi)$ — функции Бесселя мнимого аргумента.

Указание. Воспользоваться задачей 11.21.

11.23. 1) Доказать, что $\mathscr{E}(x,t) = v\theta(t)\, e^{-\alpha vt}\delta(x-vts)$, где

$$\left(\theta(t)\, e^{-\alpha vt}\delta(x-vts), \varphi(x,t)\right) = \int_0^\infty e^{-\alpha vt}\varphi(vts,t)\,dt$$

— фундаментальное решение оператора переноса

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} + (s, \operatorname{grad}\mathscr{E}) + \alpha\mathscr{E} = \delta(x,t), \quad |s|=1, \quad v>0, \quad \alpha\geq 0; \quad n=3;$$

2) доказать, что

$$\mathscr{E}^0(x) = \left(\frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^2}\,\delta\left(s - \frac{x}{|x|}\right), \varphi\right) = \int\limits_0^\varphi e^{-\alpha\rho}\varphi(\rho s)\,d\rho$$

— фундаментальное решение стационарного оператора переноса

$$(\boldsymbol{S}, \operatorname{grad}\mathscr{E}^0) + \alpha\mathscr{E}^0 = \delta(x), \qquad n = 3.$$

11.24. Найти фундаментальное решение уравнения $Z * \mathscr{E} = \delta$, где Z из задачи 8.30.

11.25. Доказать, что если $\mathscr{E}(x,t)$ — фундаментальное решение оператора переноса

$$L(D) = a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_n\frac{\partial}{\partial x_n} + \alpha, \qquad |a| \neq 0,$$

то

$$\frac{1}{\Gamma(k)|a|^{2(k-1)}}\,(\bar a_1 x_1 + \ldots + \bar a_n x_n)^{k-1}\,\mathscr{E}(x,t)$$

— фундаментальное решение оператора $L^k(D)$.

У к а з а н и е. Воспользоваться индукцией по k.

Пусть $f(x,t) \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$ и $\varphi(x) \in \mathscr{D}(R^n)$. Введем обобщенную функцию $(f(x,t),\varphi(x)) \in \mathscr{D}'(R^1)$, действующую на основные функции $\psi \in \mathscr{D}(R^1)$ по формуле

$$\big((f(x,t),\varphi(x)),\psi(t)\big) = (f,\varphi\psi).$$

Из определения вытекает, что

$$\left(\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k}, \varphi(x)\right) = \frac{d^k}{dt^k}\,(f(x,t),\varphi(x)), \qquad k = 1,2,\ldots$$

Говорят, что обобщенная функция $f(x,t)$ *принадлежит классу* C^p *по переменной* t *в интервале* (a,b), если для любой $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ обобщенная функция $(f(x,t),\varphi(x)) \in C^p(a,b)$.

11.26. Для фундаментальных решений $\mathscr{E}_n(x,t)$, $n = 1,2,3$, волнового оператора, рассмотренных в задачах 11.15–11.16, доказать:

1) $\mathscr{E}_n(x,t) \in C^\infty$ по $t \in [0,\infty)$;

2) $\mathscr{E}_n(x,t) \longrightarrow 0$, $\dfrac{\partial\mathscr{E}_n(x,t)}{\partial t} \longrightarrow \delta(x)$, $\dfrac{\partial^2\mathscr{E}_n(x,t)}{\partial t^2} \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow +0$ в $\mathscr{D}'(R^n)$.

11.27. Для фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ оператора теплопроводности (см. задачу 11.12) доказать, что

$$\mathscr{E}(x,t) \longrightarrow \delta(x), \qquad t \longrightarrow +0 \qquad \text{в} \qquad \mathscr{D}'(R^n).$$

11.28. Для фундаментального решения оператора Шрёдингера (см. задачу 11.14) доказать, что

$$\mathscr{E}_1(x,t) \longrightarrow -i\delta(x), \qquad t \longrightarrow +0 \qquad \text{в} \qquad \mathscr{D}'(R^1).$$

11.29. Для фундаментального решения из задачи 11.18 доказать:

1) $\mathscr{E}(x,t) \in C^\infty$ по $t \in [0,\infty)$;

2) $\mathscr{E}(x,t) \longrightarrow 0$, $\dfrac{\partial\mathscr{E}(x,t)}{\partial t} \longrightarrow \delta(x)$, $\dfrac{\partial^2\mathscr{E}(x,t)}{\partial t^2} \longrightarrow -\dfrac{b}{a}\,\delta(x)$, $t \longrightarrow +0$ в $\mathscr{D}'(R^1)$.

11.30. Для фундаментального решения из задачи 11.13 доказать, что

$$\mathscr{E}(x,t) \longrightarrow \delta(x), \qquad t \longrightarrow +0 \qquad \text{в} \qquad \mathscr{D}'(R^1).$$

Ответы к § 11

11.1. Единственность. Очевидно, $\mathscr{E}(x) \in \mathscr{D}'_+$. Для $u = \mathscr{E} - \mathscr{E}^*$, где $\mathscr{E}^* \in \mathscr{D}'_+$ — другое фундаментальное решение, имеем $L(D)\,u = 0$. Свертка $u * \mathscr{E}$ существует (см. формулу (8), § 8). Имеем $u = u * \delta = u * L(D)\,\mathscr{E} = L(D)\,u * \mathscr{E} = 0$. Следовательно, $\mathscr{E}^* = \mathscr{E}$.

11.3. 1) $\theta(x)\,\dfrac{1-e^{-4x}}{4}$; 2) $\theta(x)\,xe^{x}$;

3) $\theta(x)\bigl(e^{-x} - e^{-2x}\bigr)$; 4) $\theta(x)\,e^{2x}\sin x$;

5) $\dfrac{\theta(x)}{3a^2}\left[e^{ax} - e^{-ax/2}\left(\cos\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\,x + \sqrt{3}\sin\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right]$;

6) $\dfrac{\theta(x)}{2}\,(1-e^{x})^2$;

7) $\dfrac{\theta(x)}{2a^2}\,(\operatorname{sh} ax - \sin ax)$; 8) $\dfrac{\theta(x)}{2}\,(x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$.

11.12. Решение. Применив преобразование Фурье F_x к равенству $\dfrac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} - a^2\Delta\mathscr{E} = \delta(x,t)$, в силу результатов задачи 9.21, 1) и 2) и формул из § 9 получим

$$\frac{\partial\widetilde{\mathscr{E}}}{\partial t} + a^2|\xi|^2\widetilde{\mathscr{E}} = 1(\xi)\cdot\delta(t), \qquad \text{где} \qquad \widetilde{\mathscr{E}}(\xi,t) = F_x[\mathscr{E}(x,t)].$$

Пользуясь формулой для $\mathscr{E}(t)$ задачи 11.2, 1) с заменой a на $a^2|\xi|^2$, заключаем, что $\widetilde{\mathscr{E}}(\xi,t) = \theta(t)\,e^{-a^2|\xi|^2t}$. Отсюда в силу задачи 9.24

$$\mathscr{E}(x,t) = F_\xi^{-1}\left[\widetilde{\mathscr{E}}(\xi,t)\right] = \frac{\theta(t)}{\bigl(2a\sqrt{\pi t}\bigr)^n}\,e^{-|x|^2/(4a^2t)}.$$

11.15. Указание. См. решение задачи 11.12. Для искомой $Z(t) \in C^2$ получим задачу $Z'' + a^2\xi^2 Z = 0$, $Z(0) = 0$, $Z(0) = 1$. Отсюда $Z(t) = \dfrac{\sin a\xi t}{a\xi}$ и, следовательно,

$$\widetilde{\mathscr{E}}_1(\xi,t) = \theta(t)\,\frac{\sin a\xi t}{a\xi}.$$

Далее воспользоваться задачей 9.25.

11.24. $\dfrac{\theta(t)}{L}\,e^{-Rt/(2L)}\left(\cos\omega t - \dfrac{R}{2L\omega}\sin\omega t\right)$, если $4L - CR^2 > 0$, где $\omega = \dfrac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}$.

Глава IV

ЗАДАЧА КОШИ

§ 12. Задача Коши для уравнения второго порядка гиперболического типа

1. Задача Коши на плоскости. Задача Коши для уравнения

$$a(x,y)\,u_{xx} + 2b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)\,u_x + \\ + e(x,y)\,u_y + f(x,y)\,u = F(x,y) \qquad (1)$$

с условиями

$$u\big|_{\Gamma} = u_0(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{\Gamma} = u_1(x,y) \qquad (2)$$

состоит в следующем. Пусть в области D задано уравнение (1) гиперболического типа ($b^2 - ac > 0$) и на кривой Γ, которая принадлежит области D или является частью границы области D, заданы функции $u_0(x,y)$, $u_1(x,y)$ и направление $l(x,y)$. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая в области D является решением уравнения (1) и на кривой Γ удовлетворяет условиям (2).

Если в каждой точке кривой Γ направление l не является касательным к кривой Γ и касательное направление к кривой Γ не является характеристическим, то в области D, ограниченной характеристиками, проходящими через концы кривой Γ, при достаточной гладкости коэффициентов уравнения (1) и данных условий (2) существует единственное решение задачи Коши (1), (2).

12.1. Пусть на интервале (a,b) заданы функции $\varphi \in C^2$, $\varphi' \neq 0$, $u_0 \in C^2$, $u_1 \in C^1$. Доказать, что задача Коши

$$u_{xy} = 0, \qquad a < x < b, \qquad c < y < d;$$

$$u\big|_{y=\varphi(x)} = u_0(x), \qquad u_y\big|_{y=\varphi(x)} = u_1(x)$$

имеет единственное решение

$$u(x,y) = u_0(x) + \int\limits_x^{\varphi^{-1}(y)} u_1(\xi)\,\varphi'(\xi)\,d\xi,$$

где $c = \inf \varphi(x)$, $d = \sup \varphi(x)$, $\varphi^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $\varphi(x)$.

12.2. Пусть на интервале $(-1, 1)$ заданы функции $u_0 \in C^2$, $u_1 \in C^1$. Доказать, что задача Коши

$$u_{xx} - u_{yy} = 0; \qquad u|_{y=0} = u_0(x), \qquad u_y|_{y=0} = u_1(x)$$

имеет единственное решение в квадрате $\{|x - y| < 1, |x + y| < 1\}$. Показать, что этот квадрат является наибольшей областью единственности решения поставленной задачи.

12.3. Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xy} = 0, \qquad -\infty < x, \qquad y < \infty;$$

$$u|_{y=0} = u_0(x), \qquad u_y|_{y=0} = u_1(x)$$

существует только тогда, когда $u_0(x) \in C^2(R^1)$, а $u_1(x) \equiv \text{const}$. Показать, что при этом решение поставленной задачи не единственно и все решения этой задачи можно представить в виде

$$u(x, y) = u_0(x) + f(y) - f(0) + y[u_1(0) - f'(0)],$$

где $f(y)$ — любая функция из класса $C^2(R^1)$.

12.4. Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xy} = 0, \qquad |x| < 1, \qquad 0 < y < 1;$$

$$u|_{y=x^2} = 0, \qquad u_y|_{y=x^2} = u_1(x)$$

существует только тогда, когда $u_1(x) \in C(-1, 1)$, $xu_1(x) \in C^1(-1, 1)$, $u_1(x)$ — четная функция.

Показать, что при этом решение поставленной задачи единственно и $u(x, y) = 2\int\limits_x^{\sqrt{y}} \xi u_1(\xi)\, d\xi$.

12.5. Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xy} = 0, \qquad |x| < 1, \qquad |y| < 1;$$

$$u|_{y=x^3} = |x|^\alpha, \qquad u_x|_{y=x^3} = 0$$

существует только тогда, когда $\alpha = 0$ или $\alpha \geq 6$. Показать, что при этом решение поставленной задачи единственно и $u(x, y) = |y|^{\alpha/3}$.

12.6. Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xx} - u_{yy} = 6(x + y), \qquad -\infty < x, \qquad y < \infty;$$

$$u|_{y=x} = 0, \qquad u_x|_{y=x} = u_1(x)$$

существует только тогда, когда $u_1(x) - 3x^2 \equiv \text{const}$. Показать, что при этом решение поставленной задачи не единственно и все решения этой задачи можно представить в виде

$$u(x, y) = x^3 - y^3 + f(x - y) - f(0) + (x - y)[u_1(0) - f'(0)],$$

где $f(x)$ — любая функция из класса $C^2(R^1)$.

В задачах 12.7–12.19 требуется найти наибольшую область, в которой поставленная задача Коши имеет единственное решение, и найти это решение.

12.7. $u_{xy} = 0$;
$$u|_{y=x^2} = 0, \qquad u_y|_{y=x^2} = \sqrt{|x|}, \qquad |x| < 1.$$

12.8. $u_{xy} + u_x = 0$;
$$u|_{y=x} = \sin x, \qquad u_x|_{y=x} = 1, \qquad |x| < \infty.$$

12.9. $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$;
$$u|_{y=0} = x, \qquad u_y|_{y=0} = 0, \qquad |x| < \infty.$$

12.10. $u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4$;
$$u|_{x=0} = -y, \qquad u_x|_{x=0} = y - 1, \qquad |y| < \infty.$$

12.11. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2$;
$$u|_{y=0} = 0, \qquad u_y|_{y=0} = x + \cos x, \qquad |x| < \infty.$$

12.12. $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$;
$$u|_{y=3x} = 0, \qquad u_y|_{y=3x} = e^{-5x^2}, \qquad x < 1.$$

12.13. 1) $xu_{xx} - u_{yy} + \dfrac{1}{2}\,u_x = 0$;
$$u|_{y=0} = x, \qquad u_y|_{y=0} = 0, \qquad x > 0;$$

2) $xu_{xy} - yu_{yy} - u_y = 2x^3$;
$$u|_{y=x} = \sin x, \qquad u_x|_{y=x} = \cos x, \qquad x > 0.$$

12.14. $xu_{xx} + (x + y)\,u_{xy} + yu_{yy} = 0$;
$$u|_{y=1/x} = x^3, \qquad u_x|_{y=1/x} = 2x^2, \qquad x > 0.$$

12.15. $u_{xx} + 2(1 + 2x)\,u_{xy} + 4x(1 + x)\,u_{yy} + 2u_y = 0$;
$$u|_{x=0} = y, \qquad u_x|_{x=0} = 2, \qquad |y| < \infty.$$

12.16. 1) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$;
$$u|_{x=1} = y, \qquad u_x|_{x=1} = y, \qquad y < 0;$$

2) $u_{xx} - 4x^2u_{yy} - \dfrac{1}{x}\,u_x = 0$;
$$u|_{x=1} = y^2 + 1, \qquad u_x|_{x=1} = 4, \qquad |y| < \infty.$$

12.17. $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} = 0$;
$$u|_{y=1} = 0, \qquad u_y|_{y=1} = \sqrt[4]{x^7}, \qquad x > 0.$$

12.18. $yu_{xx} + x(2y - 1)\,u_{xy} - 2x^2u_{yy} - \dfrac{y}{x}\,u_x + \dfrac{2x}{1 + 2y}\,(u_x + 2xu_y) = 0$;
$$u|_{y=0} = x^2, \qquad u_y|_{y=0} = 1, \qquad x > 0.$$

12.19. $yu_{xx} - (x+y)u_{xy} + xu_{yy} - \dfrac{x+y}{x-y}(u_x - u_y) = 0;$

$$u|_{y=0} = x^2, \qquad u_y|_{y=0} = x, \qquad x > 0.$$

Задачи 12.20–12.24 требуется решить методом Римана.

12.20. $u_{xy} + 2u_x + u_y + 2u = 1, \quad 0 < x, \quad y < 1;$

$$u|_{x+y=1} = x, \qquad u_x|_{x+y=1} = x.$$

12.21. $xyu_{xy} + xu_x - yu_y - u = 2y, \quad 0 < x,\ y < \infty;$

$$u|_{xy=1} = 1 - y, \qquad u_y|_{xy=1} = x - 1.$$

12.22. $u_{xy} + \dfrac{1}{x+y}(u_x + u_y) = 2, \quad 0 < x,\ y < \infty;$

$$u|_{y=x} = x^2, \qquad u_x|_{y=x} = 1 + x.$$

12.23. $u_{xx} - u_{yy} + \dfrac{2}{x}u_x - \dfrac{2}{y}u_y = 0, \quad |x-y| < 1, \quad |x+y-2| < 1;$

$$u|_{y=1} = u_0(x), \quad u_y|_{y=1} = u_1(x), \quad u_0 \in C^2(0,2), \quad u_1 \in C^1(0,2).$$

12.24. $2u_{xy} - e^{-x}u_{yy} = 4x, \quad -\infty < x, \quad y < \infty;$

$$u|_{y=x} = x^5 \cos x, \qquad u_y|_{y=x} = x^2 + 1.$$

2. Классическая задача Коши. Классической задачей Коши для волнового уравнения называется задача о нахождении функции $u(x,t)$ класса $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t) \tag{3}$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x), \tag{4}$$

где f, u_0 и u_1 — заданные функции.

Если выполняются условия

$$\begin{aligned} &f \in C^1(t \geq 0), \quad u_0 \in C^2(R^1), \quad u_1 \in C^1(R^1), \quad n = 1;\\ &f \in C^2(t \geq 0), \quad u_0 \in C^3(R^n), \quad u_1 \in C^2(R^n), \quad n = 2,3, \end{aligned} \tag{5}$$

то решение задачи Коши (3), (4) существует, единственно и выражается:

1) при $n = 1$ *формулой Даламбера*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau; \tag{6}$$

2) при $n = 2$ *формулой Пуассона*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{|\xi - x| < a(t-\tau)} \frac{f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\xi - x|^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \int_{|\xi - x| < at} \frac{u_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi - x|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\xi - x| < at} \frac{u_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi - x|^2}}; \quad (7)$$

3) при $n = 3$ *формулой Кирхгофа*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\xi - x| < at} \frac{1}{|\xi - x|} f\left(\xi, t - \frac{|\xi - x|}{a}\right) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 a^2 t} \int_{|\xi - x| = at} u_1(\xi)\,dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{|\xi - x| = at} u_0(\xi)\,dS\right]. \quad (8)$$

12.25. Пусть функция $u(x,t)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x).$$

Доказать, что для любого $T > 0$ существует решение задачи Коши

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \qquad t < T, \qquad x \in R^1; \qquad v|_{t=T} = u|_{t=T}, \qquad v_t|_{t=T} = u_t|_{t=T}.$$

Показать, что $u(x,t) \equiv v(x,t)$ при $0 \le t \le T$.

12.26. Доказать, что если существует решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

то $u \in C^2(t \ge 0)$, $u_0 \in C^2(R^1)$, $u_1 \in C^1(R^1)$.

12.27. Пусть функция $u(x,t)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = 0.$$

Доказать, что функция $v(x,t) = \int\limits_0^t u(x,\tau)\,d\tau$ является решением задачи Коши

$$v_{tt} = a^2 \Delta v; \qquad v|_{t=0} = 0, \qquad v_t|_{t=0} = \varphi(x).$$

12.28. Пусть функция $u(x,t,t_0)$ при каждом фиксированном $t_0 \ge 0$ является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \qquad u|_{t=t_0} = 0, \qquad u_t|_{t=t_0} = f(x,t_0).$$

Доказать, что функция $v(x,t,t_0) = \int\limits_{t_0}^t u(x,t,\tau)\,d\tau$ является решением задачи Коши

$$v_{tt} = a^2 \Delta v + f(x,t); \qquad v|_{t=t_0} = 0, \qquad v_t|_{t=t_0} = 0.$$

12.29. Доказать, что если функции $f(x), u_0(x), u_1(x)$ — гармонические в R^n, а $g(t) \in C^1(t \ge 0)$, то решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2\Delta u + g(t)\,f(x); \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

выражается формулой

$$u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + f(x)\int\limits_0^t (t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau.$$

12.30. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x); \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

если $\Delta^N f = 0$, $\Delta^N u_0 = 0$, $\Delta^N u_1 = 0$.

12.31. Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \qquad x \in R^2;$$

$$u|_{t=0} = f(x_1) + g(x_2), \qquad u_t|_{t=0} = F(x_1) + G(x_2)$$

достаточно, чтобы функции $f(x_1)$ и $g(x_2)$ принадлежали классу $C^2(R^1)$, а функции $F(x_1)$ и $G(x_2)$ — классу $C^1(R^1)$. Найти это решение.

12.32. Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \qquad x \in R^3;$$

$$u|_{t=0} = f(x_1)\,g(x_2,x_3), \qquad u_t|_{t=0} = 0$$

достаточно, чтобы функция $g(x_2,x_3)$ была гармонической и $f \in C^2(R^1)$. Найти это решение.

12.33. Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \qquad x \in R^3;$$

$$u|_{t=0} = \alpha(|x|), \qquad u_t|_{t=0} = \beta(|x|)$$

достаточно, чтобы $\alpha(r) \in C^3(r \geq 0)$, $\beta(r) \in C^2(r \geq 0)$ и $\alpha'(0) = 0$. Найти это решение.

12.34. Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = \Delta u, \qquad x \in R^3;$$

$$u|_{t=0} = \theta(1-|x|)|x|^\alpha(1-|x|)^\beta, \qquad u_t|_{t=0} = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы $\alpha \geq 2$ и $\beta \geq 3$. Найти это решение.

Результат этой задачи сравнить с достаточными условиями (5) (с. 137) в случаях $2 < \alpha < 3$, $\beta \geq 3$ и $\alpha = 2$, $2 < \beta < 3$.

12.35. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx}; \qquad u|_{t=0} = \theta(1-|x|)(x^2-1)^3, \qquad u_t|_{t=0} = 0.$$

Построить графики функций $u(x,0)$, $u\left(x,\dfrac{1}{2}\right)$, $u(x,1)$, $u(x,2)$.

Решение задач 12.36–12.38 можно находить по формулам (6)–(8), но иногда удобнее применить метод разделения переменных или воспользоваться результатами задач 12.27–12.32.

12.36. Решить задачи ($n = 1$):

1) $u_{tt} = u_{xx} + 6;\qquad u|_{t=0} = x^2,\qquad u_t|_{t=0} = 4x;$

2) $u_{tt} = 4u_{xx} + xt;\qquad u|_{t=0} = x^2,\qquad u_t|_{t=0} = x;$

3) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$; $u|_{t=0} = \sin x$, $u_t|_{t=0} = 0$;

4) $u_{tt} = u_{xx} + e^x$; $u|_{t=0} = \sin x$, $u_t|_{t=0} = x + \cos x$;

5) $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x$; $u|_{t=0} = 1$, $u_t|_{t=0} = 1$;

6) $u_{tt} = a^2u_{xx} + \sin \omega x$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 0$;

7) $u_{tt} = a^2u_{xx} + \sin \omega t$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 0$.

12.37. Решить задачи ($n = 2$):

1) $u_{tt} = \Delta u + 2$; $u|_{t=0} = x$, $u_t|_{t=0} = y$;

2) $u_{tt} = \Delta u + 6xyt$; $u|_{t=0} = x^2 - y^2$, $u_t|_{t=0} = xy$;

3) $u_{tt} = \Delta u + x^3 - 3xy^2$; $u|_{t=0} = e^x \cos y$, $u_t|_{t=0} = e^y \sin x$;

4) $u_{tt} = \Delta u + t \sin y$; $u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = \sin y$;

5) $u_{tt} = 2\Delta u$; $u|_{t=0} = 2x^2 - y^2$, $u_t|_{t=0} = 2x^2 + y^2$;

6) $u_{tt} = 3\Delta u + x^3 + y^3$; $u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = y^2$;

7) $u_{tt} = \Delta u + e^{3x+4y}$; $u|_{t=0} = e^{3x+4y}$, $u_t|_{t=0} = e^{3x+4y}$;

8) $u_{tt} = a^2\Delta u$; $u|_{t=0} = \cos(bx + cy)$, $u_t|_{t=0} = \sin(bx + cy)$;

9) $u_{tt} = a^2\Delta u$; $u|_{t=0} = r^4$, $u_t|_{t=0} = r^4$;

10) $u_{tt} = a^2\Delta u + r^2e^t$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 0$.

12.38. Решить задачи ($n = 3$):

1) $u_{tt} = \Delta u + 2xyz$; $u|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2$, $u_t|_{t=0} = 1$;

2) $u_{tt} = 8\Delta u + t^2x^2$; $u|_{t=0} = y^2$, $u_t|_{t=0} = z^2$;

3) $u_{tt} = 3\Delta u + 6r^2$; $u|_{t=0} = x^2y^2z^2$, $u_t|_{t=0} = xyz$;

4) $u_{tt} = \Delta u + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z$;

$$u|_{t=0} = e^{x+y} \cos z\sqrt{2}, \qquad u_t|_{t=0} = e^{3y+4z} \sin 5x;$$

5) $u_{tt} = a^2\Delta u$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = r^4$;

6) $u_{tt} = a^2\Delta u + r^2e^t$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$;

7) $u_{tt} = a^2\Delta u + \cos x \sin ye^z$;

$$u|_{t=0} = x^2e^{y+z}, \qquad u_t|_{t=0} = \sin xe^{y+z};$$

8) $u_{tt} = a^2\Delta u + xe^t \cos(3y + 4z)$;

$$u|_{t=0} = xy \cos z, \qquad u_t|_{t=0} = yze^x;$$

9) $u_{tt} = a^2\Delta u$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = \cos r$.

12.39. Пусть выполнены достаточные условия (5) (с. 137) для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2\Delta u; \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u|_{t=0} = u_1(x)$$

и пусть при $|x| \geq \delta > 0$

$$m|x|^\alpha \leq u_0(x) \leq M|x|^\alpha, \qquad m|x|^{\alpha-1} \leq u_1(x) \leq M|x|^{\alpha-1},$$

где $\alpha > 0$, $0 < m < M$. Доказать, что для каждой точки x_0 существуют положительные числа t_0, C_1, C_2 такие, что при всех $t \geq t_0$ выполняется оценка

$$C_1 t^\alpha \le u(x_0, t) \le C_2 t^\alpha.$$

12.40. Пусть выполнены достаточные условия (5) (с. 137) для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

и пусть для $\alpha > 0$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^\alpha} = A, \qquad \lim_{|x|\to\infty} \frac{u_1(x)}{|x|^{\alpha-1}} = B.$$

Доказать, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{u(x,t)}{t^\alpha} = C_n$ и найти C_n, $n = 1, 2, 3$.

3. Обобщенная задача Коши для волнового уравнения. Если решение $u(x,t)$ классической задачи Коши для волнового уравнения (3), (4) и функцию $f(x,t) \in C(t \ge 0)$ продолжить нулем при $t < 0$, то эта функция $u(x,t)$ удовлетворяет в R^{n+1} уравнению (в обобщенном смысле)

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t).$$

Обобщенной задачей Коши для волнового уравнения с источником $F \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$, $F(x,t) = 0$ при $t < 0$, называется задача о нахождении обобщенной функции $u \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$, удовлетворяющей волновому уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + F(x,t) \tag{9}$$

и обращающейся в нуль при $t < 0$.

Решение обобщенной задачи Коши (9) существует, единственно и определяется формулой

$$u = \mathscr{E}_n * F, \tag{10}$$

где $\mathscr{E}_n(x,t)$ — фундаментальное решение волнового оператора,

$$\mathscr{E}_1(x,t) = \frac{1}{2a}\,\theta(at - |x|), \qquad \mathscr{E}_2(x,t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}},$$

$$\mathscr{E}_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\,\delta_{S_{at}}(x).$$

Свертка $V_n = \mathscr{E}_n * F$ называется *обобщенным волновым (запаздывающим) потенциалом с плотностью F.*

В частности, если $F = u_1(x) \cdot \delta(t)$ или $F = u_0(x) \cdot \delta'(t)$, то свертки

$$V_n^{(0)} = \mathscr{E}_n(x,t) * [u_1(x) \cdot \delta(t)] = \mathscr{E}_n(x,t) * u_1(x),$$

$$V_n^{(1)} = \mathscr{E}_n(x,t) * [u_0(x) \cdot \delta'(t)] = (\mathscr{E}_n(x,t) * u_0(x))_t$$

называются *обобщенными поверхностными волновыми (запаздывающими) потенциалами (простого и двойного слоя с плотностями u_1 и u_0 соответственно).*

Волновой (запаздывающий) потенциал V_n удовлетворяет уравнению (9).

12.41. Доказать, что если $F(x,t) \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$, $F = 0$ при $t < 0$, то свертка $\mathscr{E}_n * F$ существует в $\mathscr{D}'(R^{n+1})$.

12.42. Доказать, что обобщенная задача Коши (9) имеет единственное решение в классе обобщенных функций из $\mathscr{D}'(R^{n+1})$, обращающихся в нуль при $t < 0$.

12.43. Доказать:

1) $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$ принадлежат классу C^∞ по $t \in (0,\infty)$;

2) $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$ удовлетворяют предельным соотношениям при $t \longrightarrow +0$

$$V_n^{(0)}(x,t) \longrightarrow 0, \qquad \frac{\partial V_n^{(0)}(x,t)}{\partial t} \longrightarrow u_1(x) \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(R^n),$$

$$V_n^{(1)}(x,t) \longrightarrow u_0(x), \qquad \frac{\partial V_n^{(1)}(x,t)}{\partial x} \longrightarrow 0 \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(R^n).$$

12.44. Решить обобщенную задачу Коши (9) ($x \in R^1$) со следующими источниками $F(x,t)$:

1) $\delta(t) \cdot \delta(x)$; 2) $\delta(t-t_0) \cdot \delta(x-x_0)$, $t_0 \geq 0$;
3) $\delta(t) \cdot \delta'(x)$; 4) $\delta'(t) \cdot \delta(x)$;
5) $\delta'(t-t_0) \cdot \delta(x)$; 6) $\delta(t) \cdot \delta'(x_0 - x)$;
7) $\delta''(t) \cdot \delta(x)$; 8) $\delta(t) \cdot \delta''(x)$;
9) $\delta(t) \cdot \alpha(x)\,\delta(x)$, где $\alpha(x) \in C$ и $\alpha(0) = 0$;
10) $\delta(t) \cdot \beta(x)\,\delta(x)$, где $\beta(x) \in C$ и $\beta(0) = 1$.

Ниже при постановке обобщенной задачи Коши будем считать источником функцию вида $F(x,t) = f(x,t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$, $f = 0$ при $t < 0$.

12.45. Решить обобщенную задачу Коши со следующими источниками ($x \in R^1$):

1) $f = \omega(t) \cdot \delta(x)$, где $\omega(t) \in C(t \geq 0)$, $\omega(t) = 0$ при $t < 0$, $u_0 = \delta(x)$, $u_1 = \delta(x)$;
2) $f = \theta(t) \cdot \delta(x)$, $u_0 = \delta(x - x_0)$, $u_1 = x\delta(x)$;
3) $f = \theta(t)\, t \cdot \delta(x)$, $u_0 = \delta(2 - x)$, $u_1 = \delta(3 - x)$; $a = 1$;
4) $f = \theta(t) \sin t \cdot \delta(x - x_0)$, $u_0 = 0$, $u_1 = x\delta'(x)$;
5) $f = \theta(t) \cos t \cdot \delta(x)$, $u_0 = 0$, $u_1 = x^2\delta''(x)$;
6) $f = \theta(t)\, e^{\alpha t} \cdot \delta(x)$, $u_0 = \delta(1 - |x|)$, $u_1 = 0$;
7) $f = \dfrac{\theta(t)}{\sqrt{t}} \cdot \delta(2 - x)$, $u_0 = 0$, $u_1 = \delta(R - |x|)$; $a = 1$;
8) $f = \theta(t)\, t^2 \cdot \delta(x)$, $u_0 = C = \text{const}$, $u_1 = \theta'(R - |x|)$; $a = 1$;
9) $f = \theta(t) \ln t \cdot \delta(x)$, $u_0 = \dfrac{1}{1+x^2}\delta(x)$, $u_1 = 0$;
10) $f = \dfrac{\theta(t-1)}{1+t^2} \cdot \delta(x)$, $u_0 = \theta'(2 - |x|)$, $u_1 = 0$; $a = 1$;

11) $f = 0,\quad u_0 = 0,\quad u_1 = \theta''(2-|x|);\quad a = 1;$

12) $f = \dfrac{\theta(t)}{1+t}\cdot\delta(x-1),\quad u_0 = 0,\quad u_1 = \sin x\,\delta'(x-\pi);$

13) $f = \theta(at-|x|),\quad u_0 = 0,\quad u_1 = 0;$

14) $f = \theta(t)(\alpha t+\beta)\cdot x\delta'(x),\quad u_0 = 0,\quad u_1 = x\delta''(x);\quad a = 1.$

12.46. Доказать, что если $u_1(x)$ — локально интегрируемая функция в R^1, то $V_1^{(0)}(x,t)$ — непрерывная функция в R^2 и выражается формулой

$$V_1^{(0)}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi. \tag{11}$$

12.47. Доказать, что если $u_0(x)$ — локально интегрируемая функция в R^1, то $V_1^{(1)}(x,t)$ — непрерывная функция в R^2 и выражается формулой

$$V_1^{(1)}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2}\,[u_0(x+at)+u_0(x-at)]. \tag{12}$$

Указание. Воспользоваться тем, что $V_1^{(1)} = \dfrac{\partial}{\partial t}\,[\mathscr{E}_1 * u_0(x)]$ в силу задач 8.35 и 12.46.

12.48. Доказать, что если $f(x,t)$ — локально интегрируемая функция в R^2, равная нулю при $t<0$, то потенциал $V_1(x,t)$ принадлежит $C(R^2)$ и выражается формулой

$$V_1(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{13}$$

12.49. Решить обобщенные задачи:

1) $u_{tt} = a^2u_{xx} + \theta(x)\cdot\delta'(t) + \theta(x)\cdot\delta(t);$

2) $u_{tt} = a^2u_{xx} + \theta(t)(x-1) + x\cdot\delta'(t) + \operatorname{sign}(x)\cdot\delta(t);$

3) $u_{tt} = a^2u_{xx} + \theta(t)\,tx + \dfrac{\theta(x)}{\sqrt{x}}\cdot\delta(t);$

4) $u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{\theta(x)}{t+1} + \theta(-x)\cdot\delta(t);$

5) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t-2)\ln t + |x|\cdot\delta'(t);$

6) $u_{tt} = a^2u_{xx} + \theta(t)\,t^m + \theta(2-|x|)\cdot\delta'(t),\quad m = 1,2,\ldots;$

7) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\,e^{x+t} + \theta(x)\,e^{-x}\cdot\delta(t);$

8) $u_{tt} = 9u_{xx} + \theta(t-\pi)\cos t + \theta(x-3)\cdot\delta'(t) + 1(x)\cdot\delta(t);$

9) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\,\theta(x);$

10) $u_{tt} = u_{xx} + 2\theta(t)\,\theta(x)\,x + e^{\alpha x}\cdot\delta(t),\quad \alpha\neq 0;$

11) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t-1)(x+t) + |x|\cdot\delta(t);$

12) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t-2)\,t + \theta(x-1)\ln x\cdot\delta'(t);$

13) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(x)\,x^m\cdot\delta'(t) + \theta(x)\,x^m\cdot\delta(t),\quad m = 1,2,\ldots;$

14) $u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{\theta(t)}{\sqrt{t}} + \theta(x)\cos x \cdot \delta(t)$;

15) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\sqrt{t}\, x + \theta(-x)\cdot\delta'(t) + \theta(-x)\, x \cdot \delta(t)$;

16) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(x)\, e^{-\sqrt{x}} \cdot \delta'(t) + x^2 \cdot \delta(t)$;

17) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\sin(x+t) + \sin x \cdot \delta(t)$;

18) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(1-|x|)\cdot\delta(t)$.

12.50. Доказать:

1) если $u_0 \in C^2(R^1)$ и $u_1 \in C^1(R^1)$, то потенциалы $V_1^{(0)}$ и $V_1^{(1)}$ принадлежат классу $C^2(t \geq 0)$, удовлетворяют при $t > 0$ уравнению $\Box_a u = 0$ и начальным условиям:

$$V_1^{(0)}|_{t=+0} = 0, \qquad \left(V_1^{(0)}\right)_t|_{t=+0} = u_1(x),$$
$$V_1^{(1)}|_{t=+0} = u_0(x), \qquad \left(V_1^{(1)}\right)_t|_{t=+0} = 0$$

(Указание. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формул (11) и (12).);

2) если $f \in C^1(t \geq 0)$, то потенциал $V_1 \in C^2(R^2)$ удовлетворяет при $t > 0$ уравнению $\Box_a u = f(x,t)$ и начальным условиям

$$V_1|_{t=+0} = 0, \qquad (V_1)_t|_{t=+0} = 0$$

(Указание. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формулы (13).).

12.51. Пусть в задаче Коши (обобщенной)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + u_0(x)\cdot\delta'(t) + u_1(x)\cdot\delta(t)$$

функции $u_0 \in C^2$ и $u_1 \in C^1$ для всех x, кроме $x = x_0$, где u_0, u_1 (или их производные) имеют разрыв первого рода. Показать, что решение этой задачи является классическим всюду в полуплоскости $t > 0$, кроме точек, лежащих на характеристиках, проходящих через точку $x = x_0$, $t = 0$ (распад разрыва), для следующих случаев:

1) $u_0 = \theta(x)\,\omega(x)$, где $\omega = C^2(R^1)$, $\omega(0) \neq 0$ и $u_1 = 0$;

2) $u_0 = 0$, $u_1 = \theta(x - x_0)\,\omega(x)$, где $\omega \in C^1(R^1)$, $\omega(x_0) \neq 0$;

3) $u_0 = \theta(x-1)$, $u_1 = \theta(x-2)$.

12.52. Для задачи Коши (9) убедиться в том, что:

1) от источника возмущения

$$F = u_0(x)\cdot\delta'(t) = \theta(x_0 - |x|)\, f(x)\cdot\delta'(t), \qquad x_0 > 0,$$

$f \in C^2(R^1)$, возникают две волны, которые имеют в каждый момент времени $t > 0$ *передний фронт* в точках $x = \pm(at + x_0)$ соответственно и в каждый момент времени $t > \dfrac{x_0}{a}$ *задний фронт* в точках $x = \pm(at - x_0)$ (принцип Гюйгенса);

2) от источника

$$F = u_1(x) \cdot \delta(t) = \theta(x_0 - |x|)\, f(x) \cdot \delta(t), \qquad x_0 > 0,$$

$f \in C^1(R^1)$, возникают две волны, которые имеют в каждый момент времени $t > 0$ *передний фронт* в точках $x = \pm(at + x_0)$ и не имеют *заднего фронта* (размыв заднего фронта волны или *диффузия волн*).

Указание. Воспользоваться формулами (11) и (12).

12.53. Решить следующие обобщенные задачи и доказать, что полученные решения являются решениями и классической задачи Коши (3), (4):

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)(x + t) + e^{\alpha x} \cdot \delta'(t)$;

2) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)\, t \ln t + 3^x \cdot \delta'(t)$;

3) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)(x^2 + t^2) + x^m \cdot \delta'(t)$, $m = 1, 2 \ldots$;

4) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\, x^2 + \cos x \cdot \delta'(t) + \cos x \cdot \delta(t)$;

5) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + x^2 \ln |x| \cdot \delta(t)$;

6) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \cos(x + t) + 2^x \cdot \delta(t)$;

7) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \sin t + \dfrac{1}{1 + x^2} \cdot \delta(t)$;

8) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)\, e^t + \dfrac{1}{1 + x^2} \cdot \delta'(t)$;

9) $u_{tt} = u_{xx} + (\alpha x^2 + \beta) \cdot \delta'(t) + x^{4/3} \cdot \delta(t)$;

10) $u_{tt} = u_{xx} + \ln(1 + e^x) \cdot \delta'(t) + e^{-x^2} \cdot \delta(t)$;

11) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\, t^m x + \sin x \cdot \delta'(t) + x^m \delta(t)$, $m = 1, 2, \ldots$;

12) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \operatorname{arctg} t + \ln(1 + x^2) \cdot \delta'(t)$;

13) $u_{tt} = 4u_{xx} + \theta(t) \cos x + \sqrt{1 + x^2} \cdot \delta'(t)$;

14) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\, x \sin t + x^2 e^{-|x|} \cdot \delta'(t)$;

15) $u_{tt} = 4u_{xx} + e^{-x^2} \cdot \delta'(t) + e^{-x} \sin x \cdot \delta(t)$;

16) $u_{tt} = u_{xx} + \sin^2 x \cdot \delta'(t) + x e^{-|x|} \cdot \delta(t)$;

17) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \dfrac{x}{1 + t^2} + \dfrac{1}{2 - \cos x} \cdot \delta'(t)$;

18) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)(x e^t + t e^x) + \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \delta(t)$.

12.54. Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения ($x \in R^2$):

1) $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t) \cdot \delta(x) + \delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta(x) \cdot \delta(t)$;

2) $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t)\, t^2 \cdot \delta(x) + |x|^m \delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta(x - x^2) \cdot \delta(t)$, $m = 1, 2, \ldots$;

3) $u_{tt} = a^2 \Delta u + \omega(t) \cdot \delta(x) + e^{|x|} \delta(x) \cdot \delta(t)$, где $\omega \in C(t \geq 0)$ и $\omega = 0$ при $t < 0$;

4) $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t)(\alpha t + \beta) \cdot \delta(x) + \delta(x - x_0) \cdot \delta(t)$.

12.55. Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения ($x \in R^3$):

1) $u_{tt} = a^2\Delta u + \theta(t)\cdot\delta(x) + \delta(x)\cdot\delta'(t) + \delta(x)\cdot\delta(t)$;

2) $u_{tt} = a^2\Delta u + \theta(t-t_0)\cdot\delta(x-x_0) + \delta(x-x')\cdot\delta(t)$, $t_0 \geq 0$;

3) $u_{tt} = a^2\Delta u + \omega(t)\cdot\delta(x) + |x|^2\,\dfrac{\partial^2\delta(x)}{\partial x_k^2}\cdot\delta'(t) + \dfrac{\partial\delta(x)}{\partial x_k}\cdot\delta(t)$, $k = 1,2,3$, где $\omega \in C\,(t \geq 0)$ и $\omega = 0$ при $t < 0$;

4) $u_{tt} = a^2\Delta u + \theta(t)\sin t\cdot\delta(x) + e^{-|x|^2}\,\dfrac{\partial\delta(x)}{\partial x_k}\cdot\delta'(t)$.

12.56. Доказать, что если $u_1(x)$ — локально интегрируемая функция в R^n, $n = 2,3$, то $V_n^{(0)}$ — локально интегрируемая функция в R^{n+1} и выражается формулами

$$V_2^{(0)}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a}\int\limits_{|x-\xi|<at}\frac{u_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}, \qquad (14_1)$$

$$V_3^{(0)}(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|x-\xi|=at} u_1(\xi)\,ds. \qquad (14_2)$$

Замечание. Так как $V_n^{(1)} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mathscr{E}_n(x,t) * u_0(x)\right)$, то, заменяя в (14_1) и (14_2) u_1 на u_0 и дифференцируя по t, получим

$$V_2^{(1)}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta(t)}{2\pi a}\int\limits_{|x-\xi|<at}\frac{u_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}\right), \qquad (14_3)$$

$$V_3^{(1)}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|x-\xi|=at} u_0(\xi)\,ds\right). \qquad (14_4)$$

12.57. Доказать, что если $f(x,t)$ — локально интегрируемая функция в R^{n+1}, $n = 2,3$, равная нулю при $t < 0$, то V_2 — непрерывная функция и V_3 — локально интегрируемая функция в R^{n+1} и они выражаются формулами:

$$V_2(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t\int\limits_{|x-\xi|<a(t-\tau)}\frac{f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}, \qquad (15_1)$$

$$V_3(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{|x-\xi|<at}\frac{f(\xi,t-|x-\xi|/a)}{|x-\xi|}\,d\xi. \qquad (15_2)$$

12.58. Доказать:

1) если $u_0 \in C^3(R^n)$, $u_1 \in C^2(R^n)$ при $n = 2,3$, то $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$, $n = 2,3$, принадлежат классу $C^2(t \geq 0)$, удовлетворяют при $t > 0$ уравнению $\Box_a u = 0$ и начальным условиям

$$V_n^{(0)}|_{t=+0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial V_n^{(0)}}{\partial t}\right|_{t=+0} = u_1(x),$$

$$V_n^{(1)}|_{t=+0} = u_0(x), \qquad \left.\frac{\partial V_n^{(1)}}{\partial t}\right|_{t=+0} = 0;$$

2) если $f \in C^2(t \geq 0)$, то $V_n \in C^2(t \geq 0)$, $n = 2, 3$, удовлетворяет при $t > 0$ уравнению $\Box_a u = f(x,t)$ и начальным условиям

$$V|_{t=+0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial V_n}{\partial t}\right|_{t=+0} = 0.$$

Указание. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формул (14) и (15), если в них сделать замену переменных $\xi - x = at\eta$ и $\xi - x = a(t-\tau)\eta$ соответственно.

12.59. Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения ($x \in R^2$) и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (3), (4):

1) $f = \theta(t)$, $u_0 = C$, $u_1 = C$, $C = \text{const}$;
2) $f = \theta(t)|x|^2$, $u_0 = |x|^2$, $u_1 = |x|^2$;
3) $f = \theta(t)\,t^2$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + |x|^2$;
4) $f = \theta(t)\,e^{-t}|x|^2$, $u_0 = 1 + |x|^2$, $u_1 = 0$.

12.60. Решить задачу Коши для волнового уравнения ($x \in R^3$) со следующими данными:

1) $f = \theta(t)|x|^2$, $u_0 = 0$, $u_1 = |x|^2$;
2) $f = \theta(t)\,t^2|x|^2$, $u_0 = 1$, $u_1 = 1$;
3) $f = \omega(t)$, где $\omega \in C^2(t \geq 0)$ и $\omega = 0$ при $t < 0$, $u_0 = 0$, $u_1 = \alpha|x|^2 + \beta$;
4) $f = \theta(t)\ln|x|$, $u_0 = 0$, $u_1 = 0$; $a = 1$;
5) $f = \theta(t)$, $u_0 = \dfrac{1}{1+|x|^2}$, $u_1 = 0$;
6) $f = 0$, $u_0 = \sin|x|^2$, $u_1 = \operatorname{sh}|x|^2$; $a = 1$;
7) $f = \theta(t)\,t$, $u_0 = |x|^2$, $u_1 = \dfrac{1}{1+|x|^2}$;
8) $f = \theta(t)\,e^{-ikt}\omega(x)$, где $\omega \in C^2$, $u_0 = \sqrt{1+|x|^2}$, $u_1 = 0$; $a = 1$;
9) $f = \theta(t)\,e^{-|x|^2}$, $u_0 = 0$, $u_1 = \cos|x|^2$; $a = 1$;
10) $f = 0$, $u_0 = \ln(1+|x|^2)$, $u_1 = e^{-|x|^2}$; $a = 1$;
11) $f = 0$, $u_0 = e^{-|x|^2}$, $u_1 = \ln|x|$; $a = 1$;
12) $f = \theta(t)\sin t$, $u_0 = \cos|x|^2$, $u_1 = 0$;
13) $f = 0$, $u_0 = C\theta(R - |x|)$, $u_1 = 0$;
14) $f = \theta(at - |x|)$, $u_0 = 0$, $u_1 = 0$.

Задачи Коши для уравнений 12.61–12.63 формулируются так же, как для волнового уравнения.

12.61. Решить обобщенную задачу Коши для уравнения гиперболического типа

$$\square_a u = bu_x + \frac{b}{a}\,u_t + F(x,t), \qquad a > 0, \qquad b > 0,$$

где

$$F(x,t) = f(x,t) + u_0(x)\cdot\delta'(t) + \left[u_1(x) - \frac{b}{a}\,u_0(x)\right]\cdot\delta(t),$$

со следующими данными:

1) $f = \theta(t)\cdot\delta(x)$, $\quad u_0 = \delta(x)$, $\quad u_1 = \delta(x)$;

2) $f = \theta(t)\,x$, $\quad u_0 = 0$, $\quad u_1 = \theta(x)$; $\quad a = b = 1$;

3) $f = \theta(t)\,t$, $\quad u_0 = 1$, $\quad u_1 = x$; $\quad a = b = 1$;

4) $f = \theta(t)\,e^t$, $\quad u_0 = e^x$, $\quad u_1 = e^x$; $\quad b = 1$;

5) $f = \theta(t)\,e^x$, $\quad u_0 = \alpha x + \beta$, $\quad u_1 = 0$.

12.62. Решить обобщенную задачу Коши для уравнения Клейна–Гордона–Фока

$$\square_a u + m^2 u = f(x,t) + u_0(x)\cdot\delta'(t) + u_1(x)\cdot\delta(t)$$

со следующими данными:

1) $f = 0$, $\quad u_0 = \delta(x)$, $\quad u_1 = \delta(x)$, $\quad a = m = 1$;

2) $f = \omega(t)\cdot\delta(x)$, где $\omega \in C(t \geq 0)$ и $\omega = 0$ при $t < 0$, $u_0 = 0$, $u_1 = x$; $a = m = 1$;

3) $f = \theta(t)$, $\quad u_0 = 1$, $\quad u_1 = 1$, $\quad a = m = 1$;

4) $f = 0$, $\quad u_0 = \theta(x)$, $\quad u_1 = \theta(x)$, $\quad a = m = 1$.

12.63. Решить обобщенную задачу Коши для телеграфного уравнения

$$\square_a u + 2mu_t = f(x,t) + u_0(x)\cdot\delta'(t) + u_1(x)\cdot\delta(t)$$

со следующими данными:

1) $f = 0$, $\quad u_0 = \delta(x)$, $\quad u_1 = \delta(x)$, $\quad a = m = 1$;

2) $f = \omega(t)\cdot\delta(x)$, где $\omega \in C(t \geq 0)$ и $\omega = 0$ при $t < 0$, $u_0 = 0$, $u_1 = 0$; $a = m = 1$;

3) $f = 0$, $\quad u_0 = 1$, $\quad u_1 = \theta(x)$, $\quad a = m = 1$.

Ответы к § 12

12.7. $\frac{4}{5}\left(y^{5/4} - |x|^{5/2}\right)$; $|x| < 1$, $0 < y < 1$.

12.8. $\sin y - 1 + e^{x-y}$; $-\infty < x,\ y < \infty$.

12.9. $x - y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,e^{2y}$; $-\infty < x,\ y < \infty$.

12.10. $\frac{1}{2}\left[1 - x - 3y + (x + y - 1)\,e^{2x}\right]$; $-\infty < x,\ y < \infty$.

12.11. $xy + \frac{3}{2}\sin\frac{2y}{3}\cos\left(x + \frac{y}{3}\right)$; $-\infty < x,\ y < \infty$.

12.12. $(y-3x)\,e^{-(x^2+y^2)/2}$; $x<1$, $y<3$.

12.13. 1) $x+\dfrac{1}{4}\,y^2$; $x>0$, $|y|<2\sqrt{x}$;

2) $x^3y+\sin x-\dfrac{1}{2}\,x^4-\dfrac{1}{2}\,x^4y^2$; $x>0$, $y>0$.

12.14. $\dfrac{x^2}{y}$; $x>0$, $y>0$.

12.15. $2x+y-x^2$; $-\infty<x,\ y<\infty$.

12.16. 1) $\dfrac{y}{3x}+\dfrac{2x^2y}{3}$; $x>0$, $y<0$; 2) x^4+y^2; $x>0$.

12.17. $\dfrac{3}{4}\sqrt[4]{x^7y}\left(\sqrt[3]{y}-\dfrac{1}{y}\right)$; $x>0$, $y>0$.

12.18. x^2+2y^2+1; $x>0$, $-\dfrac{1}{2}<y<x^2$.

12.19. x^2+xy+y^2; $x>|y|$.

12.20. $\dfrac{1}{2}+(4-3y)\,e^{1-x-y}-\left(2x+\dfrac{3}{2}\right)e^{2(1-x-y)}$; $R=e^{x-\xi+2(y-\eta)}$.

12.21. $xy-y$; $R=\dfrac{\xi y}{x\eta}$.

12.22. $x-y+xy$; $R=\dfrac{x+y}{\xi+\eta}$.

12.23.
$$\frac{1}{2xy}\left[(x+y-1)\,u_0(x+y-1)+(x-y+1)\,u_0(x-y+1)\right]+\\ +\frac{1}{2xy}\int\limits_{x-y+1}^{x+y-1}\left[u_0(\xi)+u_1(\xi)\right]\xi\,d\xi.$$

12.24. $(y-x)(x^2+1)+x^5\cos x$.

12.30.
$$\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{(at)^{2k}}{(2k)!}\,\Delta^k u_0(x)+\frac{a^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\Delta^k u_1(x)+\frac{a^{2k}t^{2k+2}}{(2k+2)!}\,\Delta^k f(x)\right].$$

12.31.
$$\frac{1}{2}\left[f(x_1+at)+f(x_1-at)+g(x_2+at)+g(x_2-at)\right]+\\ +\frac{1}{2a}\int\limits_{x_1-at}^{x_1+at}F(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_2-at}^{x_2+at}G(\eta)\,d\eta.$$

12.32. $\dfrac{1}{2}\,g(x_2,x_3)\left[f(x_1+at)+f(x_1-at)\right]$.

12.33.
$$\frac{1}{2|x|}\left[(|x|+at)\,\alpha(|x|+at)+(|x|-at)\,\alpha(\big||x|-at\big|)\right]+\frac{1}{2a|x|}\times\\ \times\int\limits_{||x|-at|}^{|x|+at}r\beta(r)\,dr \quad \text{при } |x|\neq 0 \text{ и } u(0,t)=\alpha(at)+at\alpha'(at).$$

12.34.
$$\frac{1}{2|x|}\left[\theta(1-|x|-t)(|x|+t)^{\alpha+1}(1-|x|-t)^{\beta}+\theta(1-\big||x|-t\big|)\times\\ \times\operatorname{sign}(|x|-t)\big||x|-t\big|^{\alpha+1}(1-\big||x|-t\big|)^{\beta}\right]$$
при $|x|\neq 0$ и $u(0,t)=\theta(1-t)\,t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}\left[(\alpha+1)(1-t)-\beta t\right]$.

12.35. $\frac{1}{2}\,\theta(1-|x+t|)\bigl[(x+t)^2-1\bigr]^3+\frac{1}{2}\,\theta(1-|x-t|)\bigl[(x-t)^2-1\bigr]^3.$

12.36. 1) $(x+2t)^2$; 2) $x^2+xt+4t^2+\frac{1}{6}\,xt^3$;
3) $\sin x$; 4) $xt+\sin(x+t)-(1-\operatorname{ch} t)\,e^x$;
5) $1+t+\frac{1}{9}\,(1-\cos 3t)\,\sin x$; 6) $\frac{1}{a^2\omega^2}\,(1-\cos a\omega t)\,\sin\omega x$;
7) $\frac{t}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}\,\sin\omega t$.

12.37. 1) $x+ty+t^2$; 2) $xyt(1+t^2)+x^2-y^2$;
3) $\frac{1}{2}\,t^2(x^3-3xy^2)+e^x\cos y+te^y\sin x$; 4) $x^2+t^2+t\sin y$;
5) $2x^2-y^2+(2x^2+y^2)\,t+2t^2+2t^3$;
6) $x^2+ty^2+\frac{1}{2}\,t^2(6+x^3+y^3)+t^3+\frac{3}{4}\,t^4(x+y)$;
7) $e^{3x+4y}\left[\frac{26}{25}\operatorname{ch}5t-\frac{1}{25}+\frac{1}{5}\operatorname{sh}5t\right]$;
8) $\cos(bx+cy)\cos\left(at\sqrt{b^2+c^2}\right)+\frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\,\sin(bx+cy)\sin\left(at\sqrt{b^2+c^2}\right)$;
9) $(x^2+y^2)^2(1+t)+8a^2t^2(x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{3}\,t\right)+\frac{8}{3}\,a^4t^4\left(1+\frac{1}{5}\,t\right)$;
10) $(x^2+y^2+4a^2)(e^t-1-t)-2a^2t^2\left(1+\frac{1}{3}\,t\right)$.

12.38. 1) $x^2+y^2-2z^2+t+t^2xyz$;
2) $y^2+tz^2+8t^2+\frac{8}{3}\,t^3+\frac{1}{12}\,t^4x^2+\frac{2}{45}\,t^6$;
3) $x^2y^2z^2+txy+3t^2(x^2+y^2+z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)+$
$+3t^4\left(\frac{3}{2}+x^2+y^2+z^2\right)+\frac{9}{5}\,t^6$;
4) $e^{x+y}\cos\left(z\sqrt{2}\right)+te^{3y+4z}\sin 5x+t^3e^{x\sqrt{2}}\sin y\cos z$;
5) $(1+t)(x^2+y^2+z^2)^2+10a^2t^2\left(1+\frac{1}{3}\,t\right)(x^2+y^2+z^2)+a^4t^4(5+t)$;
6) $(x^2+y^2+z^2+6a^2)(e^t-1-t)-a^2t^2(3+t)$;
7) $\frac{1}{a^2}\,(1-\cos at)\,e^z\cos x\sin y+$
$+e^{y+z}\left[\frac{1}{a}\operatorname{sh}at\sin x+\frac{at}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\left(at\sqrt{2}\right)+x^2\operatorname{ch}\left(at\sqrt{2}\right)\right]$;
8) $xy\cos z\cos at+\frac{1}{a}\,yze^x\operatorname{sh}at+$
$+\frac{x}{1+25a^2}\,\cos(3y+4z)\left(e^t-\cos 5at-\frac{1}{5a}\,\sin 5at\right)$;
9) $\left(\cos at+\frac{1}{a}\,\sin at\right)\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}+$
$+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(t\cos at-at\sin at-\frac{1}{a}\,\sin at\right).$

12.40. $C_1 = a^\alpha\left(A + \frac{B}{a\alpha}\right)$, $C_2 = a^\alpha\left[A(a+1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{\alpha+1}\varphi\,d\varphi + \frac{B}{a}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^\alpha\varphi\,d\varphi\right]$, $C_3 = a^\alpha\left[A(a+1) + \frac{B}{a}\right]$.

12.41. Р е ш е н и е. Свертка $\mathscr{E}_n * F$ существует в силу 8.34 и определяется формулой этой задачи, где $g = \mathscr{E}_n$ и $f = F$, так как $F(x,t) = 0$ при $t < 0$ и $\operatorname{supp}\mathscr{E}_n(x,t) \subset \bar{\Gamma}^+$ в силу 11.15–11.17.

12.42. Р е ш е н и е. Для $w = u - u^*$, где $u^*(x,t) \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$, $u^* = 0$ при $t < 0$, — другое решение задачи (9), имеем $w \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$, $w = 0$ при $t < 0$ и $w_{tt} = a^2\Delta w$. Свертка $\mathscr{E}_n * w$ существует в силу 12.41. Тогда $w = \delta * w = ((\mathscr{E}_n)_{tt} - a^2\Delta\mathscr{E}_n) * w = \mathscr{E}_n * (w_{tt} - a^2\Delta w) = 0$. Следовательно, $u^* = u$.

12.43. Р е ш е н и е. 1) $\mathscr{E}_n(x,t) \in C^\infty$ по $t \in [0,\infty)$ в силу 11.26. При каждом $t > 0$ носитель $\operatorname{supp}\mathscr{E}_n$ содержится в шаре $|x| \le at$ и, следовательно, равномерно ограничен в R^n при $t \longrightarrow t_0 \ge 0$. Поэтому в силу непрерывности свертки в $\mathscr{D}'$ имеем

$$\left(\frac{\partial^k\mathscr{E}_n(x,t)}{\partial t^k} * u_1(x), \varphi(x)\right) \in C[0,\infty), \qquad k = 0,1,\ldots \tag{$*$}$$

Для всех $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ (определение обобщенной функции $(u(x,t),\varphi(x)) \in \mathscr{D}'(R^n)$ см. в конце § 11). Далее, в силу результатов задачи 8.35

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}(V_n^{(0)}(x,t),\varphi(x)) = \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}(\mathscr{E}_n(x,t) * u_1(x)\cdot\delta(t)),\varphi\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial^k\mathscr{E}_n(x,t)}{\partial t^k} * u_1(x),\varphi\right) \in C[0,\infty)$$

в силу $(*)$. Следовательно, $(V_n^{(0)}(x,t),\varphi(x)) \in C^\infty[0,\infty)$, т. е. $V_n^{(0)} \in C^\infty$ по $t \in [0,\infty)$. Аналогично для $V_n^{(1)}$;

2) в силу 11.26 при $t \longrightarrow +0$

$$V_n^{(0)}(x,t) = \mathscr{E}_n(x,t) * u_1(x) \longrightarrow 0 * u_1 = 0 \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(R^n),$$
$$\frac{\partial V_n^{(0)}(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[\mathscr{E}_n(x,t) * u_1(x)] =$$
$$= \frac{\partial\mathscr{E}_n(x,t)}{\partial t} * u_1(x) \longrightarrow \delta * u_1 = u_1(x) \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(R^n).$$

12.44. У к а з а н и е. Воспользоваться формулой (10) из § 12, задачей 11.15, формулами (3), (3_1) из § 8 и задачами 8.31 и 8.8.

1) $u = \mathscr{E}_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$; 2) $\frac{1}{2a}\theta(a(t-t_0) - |x - x_0|)$;

3) $\frac{\partial\mathscr{E}_1}{\partial x} = \frac{1}{2a}\theta(t)\,\delta(at + x) - \frac{1}{2a}\theta(t)\,\delta(at - x)$;

4) $\dfrac{\partial \mathscr{E}_1}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\,\delta(at-|x|)$; 5) $\dfrac{1}{2}\,\delta(a(t-t_0)-|x|)$;

6) $\dfrac{1}{2a}\,\theta(t)\,\delta(at+x-x_0) - \dfrac{1}{2a}\,\theta(t)\,\delta(at-x-x_0)$;

7) $\dfrac{\partial^2 \mathscr{E}_1}{\partial t^2} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial}{\partial t}\,\delta(at-|x|)$; 8) $\dfrac{\partial^2 \mathscr{E}_1}{\partial x^2} = \dfrac{\theta(t)}{2a}\,[\delta'(at+x)-\delta'(at-x)]$;

9) 0; 10) $\dfrac{1}{2a}\,\theta(at-|x|)$.

12.45. См. указания к задаче 12.44.

1) Р е ш е н и е. Уравнение (9) для искомой $u(x,t)$ имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) + u_0(x)\cdot\delta'(t) + u_1(x)\cdot\delta(t) = \\ = a^2 u_{xx} + \omega(t)\cdot\delta(x) + \delta(x)\cdot\delta'(t) + \delta(x)\cdot\delta(t). \qquad (*)$$

В силу формулы (10)

$$u = V_1 + V_1^{(1)} + V_1^{(0)} = \mathscr{E}_1 * [\omega(t)\cdot\delta(x)] + \\ + \mathscr{E}_1 * [\delta(x)\cdot\delta'(t)] + \mathscr{E}_1 * [\delta(x)\cdot\delta(t)]. \qquad (**)$$

В силу задачи 8.36, 1)

$$V_1 = \frac{1}{2a}\,\theta(at-|x|)\int\limits_0^{t-|x|/a}\omega(\tau)\,d\tau.$$

В силу задачи 12.44, 1) и 4)

$$V_1^{(0)}(x,t) = \frac{1}{2a}\,\theta(at-|x|) \quad \text{и} \quad V_1^{(1)}(x,t) = \frac{1}{2}\,\delta(at-|x|).$$

Подставив $V_1, V_1^{(1)}$ и $V_1^{(0)}$ в (**), получим решение обобщенной задачи Коши (*). Из 12.2 следует единственность задачи (*). Из задачи 12.43 следуют предельные соотношения $u(x,t) \longrightarrow \delta(t)$, $u_t(x,t) \longrightarrow \delta(t)$, $t \longrightarrow 0$ в $\mathscr{D}'(R^n)$;

2) $\dfrac{1}{2a^2}\,\theta(at-|x|)(at-|x|) + \dfrac{1}{2}\,\delta(at-|x-x_0|)$;

3) $\dfrac{1}{4}\,\theta(t-|x|)(t-|x|)^2 + \dfrac{1}{2}\,\theta(t-|x-3|) + \dfrac{1}{2}\,\delta(t-|x-2|)$;

4) $\dfrac{1}{2a}\,\theta(at-|x-x_0|)\left[1-\cos\left(t-\dfrac{|x-x_0|}{a}\right)\right] - \dfrac{1}{2a}\,\theta(at-|x|)$ (У к а з а н и е. $x\delta'(x) = -\delta(x)$.);

5) $\dfrac{1}{2a}\,\theta(at-|x|)\left[2+\sin\left(t-\dfrac{|x|}{a}\right)\right]$ (У к а з а н и е. $x^2\delta''(x) = 2\delta(x)$.);

6) $\dfrac{1}{2a\alpha}\,\theta(at-|x|)\big(e^{\alpha(t-|x|/a)}-1\big) + \dfrac{1}{2}\,\delta(at-|x+1|) + \dfrac{1}{2}\,\delta(at-|x-1|)$;

7) $\theta(t-|x-2|)\sqrt{1-|x-2|} + \dfrac{1}{2}\,\theta(t-|x+R|) + \dfrac{1}{2}\,\theta(t-|x-R|)$;

8) $\dfrac{1}{6}\,\theta(t-|x|)(t-|x|)^3 + C\theta(t) + \dfrac{1}{2}\,\theta(t-|x+R|) - \dfrac{1}{2}\,\theta(t-|x-R|)$ (У к а з а н и е. См. задачу 7.14, 1).);

9) $\frac{1}{2a}\,\theta(at-|x|)\Bigl(t-\frac{|x|}{a}\Bigr)\ln\Bigl[e^{-1}\Bigl(t-\frac{|x|}{a}\Bigr)\Bigr]+\frac{1}{2}\,\delta(at-|x|)$;

10) $\frac{1}{2}\,\theta(t-1-|x|)\Bigl(\operatorname{arctg}(t-|x|)-\frac{\pi}{4}\Bigr)+\frac{1}{2}\,\delta(t-|x+R|)-\frac{1}{2}\,\delta(t-|x-R|)$;

11) $\frac{1}{2}\,\theta(t)\,\delta(t+x+2)-\frac{1}{2}\,\theta(t)\,\delta(t-x-2)-\frac{1}{2}\,\theta(t)\,\delta(t+x-2)+$ $+\frac{1}{2}\,\theta(t)\,\delta(t-x+2)$ (Указание. См. задачи 7.14, 1) и 8.8, 2).);

12) $\frac{1}{2a}\,\theta(at-|x-1|)\ln\Bigl(1+t-\frac{|x-1|}{a}\Bigr)+\frac{1}{2a}\,\theta(at-|x-\pi|)$;

13) $\theta(at-|x|)\,\frac{a^2t^2-x^2}{4a^2}$;

14) $-\frac{1}{4}\,\theta(t-|x|)[\alpha(t-|x|)^2+2\beta(t-|x|)]-\theta(t)\,\delta(t+x)+\theta(t)\,\delta(t-x)$ (Указание. Воспользоваться $x\delta''(x)=-2\delta'(x)$ и задачей 8.8, 2).).

12.49. Указание. Воспользоваться формулами (10)–(13).

1) Решение. $u=V_1+V_1^{(1)}+V_1^{(0)}$; $V_1=0$. В силу формулы (11)

$$V_1^{(0)}=\frac{\theta(t)}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\theta(\xi)\,d\xi=\frac{\theta(t)}{2a}\left[\int\limits_0^{x+at}\theta(\xi)\,d\xi-\int\limits_0^{x-at}\theta(\xi)\,d\xi\right]=$$

$$=\frac{\theta(t)}{2a}\,[\theta(x+at)(\dot{x}+at)-\theta(x-at)(x-at)],$$

$$V_1^{(1)}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\theta(t)}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\theta(\xi)\,d\xi\right]=\frac{\theta(t)}{2a}\,(\theta(x+at)+\theta(x-at)];$$

2) $\theta(t)\Bigl(x+\frac{t^2}{2}\,(x-1)+\frac{|x+at|-|x-at|}{2a}\Bigr)$;

3) $\theta(t)\left[\frac{xt^3}{6}+\frac{1}{a}\,\theta(x+at)\sqrt{x+at}-\frac{1}{a}\,\theta(x-at)\sqrt{x-at}\right]$;

4) $\theta(t)\Bigl[(t+1)\ln(t+1)-t+\frac{1}{2}\,\theta(t-x)(t-x)+\frac{1}{2}\,\theta(-t-x)(t+x)\Bigr]$ $\Bigl($Указание. $V_1=\frac{1}{2}\,\theta(t-|x|)*\frac{\theta(t)}{t+1}\cdot 1(x).\Bigr)$;

5) $\theta(t-2)\Bigl(t^2\ln\sqrt{t}+(1-t)\ln 4-(1-t)^2+\frac{t^2}{4}\Bigr)+\frac{\theta(t)}{2}\,(|x+t|+|x-t|)$;

6) $\frac{\theta(t)}{2}\left[\frac{2t^{m+2}}{(m+1)(m+2)}+\theta(2-|x+at|)+\theta(2-|x-at|)\right]$;

7) $\frac{\theta(t)}{2}\,[te^{x+t}-e^x\operatorname{sh}t+\theta(x+t)(1-e^{-x-t})-\theta(x-t)(1-e^{t-x})]$;

8) $-\theta(t-\pi)(1+\cos t)+\frac{\theta(t)}{2}\,[\theta(x+3t-3)+\theta(x-3t-3)+2t]$;

9) $\frac{\theta(t)}{4}\,[\theta(x+t)(x+t)^2+\theta(x-t)(x-t)^2-2\theta(x)\,x^2]$;

10) $\dfrac{\theta(t)}{6}\left[\theta(x+t)(x+t)^3+\theta(x-t)(x-t)^3-2\theta(x)\,x^3+\dfrac{6}{\alpha}\,e^{\alpha x}\operatorname{sh}\alpha t\right]$, $\alpha\neq 0$;

11) $\dfrac{\theta(t-1)}{6}\,(3x+t+2)(t-1)^2+ +\dfrac{\theta(t)}{4}\,\left[\operatorname{sign}(x+t)(x+t)^2-\operatorname{sign}(x-t)(x-t)^2\right]$;

12) $\dfrac{\theta(t-2)}{6}\,(t+4)(t-2)^2+ +\dfrac{\theta(t)}{2}\,[\theta(x-1+t)\ln(x+t)+\theta(x-1-t)\ln(x-t)]$;

13) $\dfrac{\theta(t)}{2}\left[\theta(x+t)(x+t)^m\left(1+\dfrac{x+t}{m+1}\right)+\theta(x-t)(x-t)^m\left(1-\dfrac{x-t}{m+1}\right)\right]$;

14) $\dfrac{\theta(t)}{6}\,\left[8t^{3/2}+3\theta(x+t)\sin(x+t)-3\theta(x-t)\sin(x-t)\right]$;

15) $\theta(t)\left[\dfrac{4}{15}xt^{5/2}+\theta(-x-t)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{(x+t)^2}{4}\right)+\theta(-x+t)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{(-x+t)^2}{4}\right)\right]$;

16) $\dfrac{\theta(t)}{6}\left[6x^2t+2t^3+3\theta(x+t)\,e^{-\sqrt{x+t}}+3\theta(x-t)\,e^{-\sqrt{x-t}}\right]$;

17) $\dfrac{\theta(t)}{2}\,[\cos x\,\sin t+2\sin x\,\sin t-t\cos(x+t)]$;

18) $\dfrac{\theta(t)}{2}\,[\theta(1+x+t)(1+x+t)-\theta(1+x-t)(1+x-t)+ +\theta(-1+x-t)(-1+x-t)-\theta(-1+x+t)(-1+x+t)]$.

12.53. Указание. Воспользоваться формулами (10)–(13), задачей 12.50 и решением задачи 12.45, 1).

1) $\theta(t)\left(\dfrac{t^3}{6}+\dfrac{xt^2}{2}+e^{\alpha x}\operatorname{ch}\alpha a t\right)$;

2) $\theta(t)\left[t^3\left(\dfrac{1}{6}\ln t-\dfrac{5}{36}\right)+3^x\operatorname{ch}at\right]$ $\Big($Указание. $V_1=\dfrac{1}{2a}\times \theta(at-|x|)*\theta(t)\,t\ln t\cdot 1(x).\Big)$;

3) $\dfrac{\theta(t)}{12}\,\left[(1-a^2)\,t^4+6t^2x^2+6(x+at)^m+6(x-at)^m\right]$;

4) $\dfrac{\theta(t)}{12}\,\left[t^4+6t^2x^2+12\cos x\cdot(\sin t+\cos t)\right]$;

5) $\dfrac{\theta(t)}{18a}\,\left[3(x+at)^3\ln|x+at|-3(x-at)^3\ln|x-at|-6ax^2t-2a^3t^3\right]$;

6) $\dfrac{\theta(t)}{2}\left[t\sin(x+t)-\sin x\,\sin t+\dfrac{2^{x+1}-2^{x-t}}{\ln 2}\right]$;

7) $\theta(t)\left[t-\sin t+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2t}{1+x^2-t^2}\right]$;

8) $\theta(t)\left\{e^t-t-1+\dfrac{1}{2[1+(x+at)^2]}+\dfrac{1}{2[1+(x-at)^2]}\right\}$;

9) $\theta(t)\Big[\alpha(x^2+t^2)+\beta+\frac{3}{14}\left((x+t)^{7/3}-(x-t)^{7/3}\right)\Big]$;

10) $\frac{\theta(t)}{2}\left[\ln\left(1+e^{2x}+2e^x\operatorname{ch}t\right)+\int\limits_{x-t}^{x+t}e^{-z^2}dz\right]$;

11) $\theta(t)\left[\frac{xt^{m+2}}{(m+1)(m+2)}+\sin x\,\cos t+\frac{(x+t)^{m+1}-(x-t)^{m+1}}{2(m+1)}\right]$;

12) $\frac{\theta(t)}{2}\left\{(t^2-1)\operatorname{arctg}t+t-t\ln(t^2+1)+\ln\left[(t^2+x^2+1)^2-4t^2x^2\right]\right\}$;

13) $\frac{\theta(t)}{2}\left(\cos x\,\sin^2 t+\sqrt{1+(x+2t)^2}+\sqrt{1+(x-2t)^2}\right)$;

14) $\frac{\theta(t)}{2}\left[2x(t-\sin t)+(x+t)^2e^{-|x+t|}+(x-t)^2e^{-|x-t|}\right]$;

15) $$\theta(t)\Big\{e^{-x^2-4t^2}\operatorname{ch}4xt+ \\ +\frac{\sqrt{2}}{8}e^{-x}\left[e^{2t}\cos\left(x-2t-\frac{\pi}{4}\right)-e^{-2t}\cos\left(x+2t-\frac{\pi}{4}\right)\right]\Big\};$$

16) $$\theta(t)\Big[\sin^2 x\,\cos^2 t+\cos^2 x\,\sin^2 t+ \\ +\frac{1}{2}e^{-|x-t|}(1+|x-t|)-\frac{1}{2}e^{-|x+t|}(1+|x+t|)\Big];$$

17) $\theta(t)\left[x\left(t\operatorname{arctg}t-\ln\sqrt{1+t^2}\right)+\frac{1}{4-2\cos(x+t)}+\frac{1}{4-2\cos(x-t)}\right]$;

18) $\theta(t)\left[e^x\operatorname{sh}t+x(e^t-1)-xt-te^x+\frac{1}{2}\ln\frac{x+t+\sqrt{1+(x+t)^2}}{x-t+\sqrt{1+(x-t)^2}}\right]$.

12.54. Указание. Воспользоваться формулой (10) и задачей 11.15, 2).

1) $\frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a^2}\left(\ln\frac{at+\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}{|x|}+\frac{a}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}\right)+\frac{\partial\mathscr{E}_2(x,t)}{\partial t}$;

2) $$\frac{\theta(at-|x|)}{4\pi a^3}\left[\left(2at^2+\frac{|x|^2}{a}\right)\ln\frac{at+\sqrt{(at)^2-|x|^2}}{|x|}-3t\sqrt{(at)^2-|x|^2}\right]+ \\ +\mathscr{E}_2(x-x_0,t);$$

3) $\frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a}\int\limits_0^{t-|x|/a}\frac{\omega(\tau)\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x|^2}}+\mathscr{E}_2(x,t)$;

4) $$\frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a^2}\left[(\alpha t+\beta)\ln\frac{at+\sqrt{(at)^2-|x|^2}}{|x|}-\frac{\alpha}{a}\sqrt{(at)^2-|x|^2}\right]+ \\ +\mathscr{E}_2(x-x_0,t).$$

12.55. Указание. Воспользоваться формулой (10) и задачей 11.16, 1).

1) $\dfrac{\theta(at-|x|)}{4\pi a^2|x|}+\mathscr{E}_3(x,t)+\dfrac{\partial\mathscr{E}_3(x,t)}{\partial t}$, где $\mathscr{E}_3=\dfrac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\,\delta_{S_{at}}(x)$;

2) $\dfrac{\theta(a(t-t_0)-|x-x_0|)}{4\pi a^2|x-x_0|}+\mathscr{E}_3(x-x',t)$;

3) Решение. $u=V_3+V_3^{(0)}+V_3^{(1)}$. В силу 8.35, 1)

$$(V_3,\varphi)=(\mathscr{E}_3*\omega(t),\varphi)=\left(\frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x)\cdot\omega(\tau),\eta\left(a^2t^2-|x|^2\right)\varphi(x,t+\tau)\right)=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega(\tau)\left\{\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{|x|=at}\frac{\varphi(x,t+\tau)}{4\pi a^2 t}\,dS_x\,dt\right\}d\tau.$$

Так как $dS_x\,d(at)=dx$ — элемент объема в R^3, то

$$(V_3,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega(\tau)\left[\int\limits_{R^3}\frac{\varphi(x,\tau+|x|/a)}{4\pi a^2|x|}\,dx\right]d\tau=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{R^3}\frac{\omega(t-|x|/a)}{4\pi a^2|x|}\,\varphi(x,t)\,dx\,dt.$$

Следовательно,

$$V_3=\frac{\omega(t-|x|/a)}{4\pi a^2|x|},\qquad V_3^{(0)}=\frac{\partial\mathscr{E}_3(x,t)}{\partial x_k},\qquad V_3^{(1)}=2\,\frac{\partial\mathscr{E}_3(x,t)}{\partial t},$$

так как $|x|^2\,\dfrac{\partial^2\delta(x)}{\partial x_k^2}=2\delta(x)$;

4) $\theta(at-|x|)\,\dfrac{\sin(t-|x|/a)}{4\pi a^2|x|}+\dfrac{\partial^2\mathscr{E}_3(x,t)}{\partial x_k\,\partial t,}$ так как $e^{-|x|^2}\,\dfrac{\partial\delta(x)}{\partial x_k}=\dfrac{\partial\delta(x)}{\partial x_k}$.

12.59. Указание. Воспользоваться задачей **11.15**, формулами (10), (14_1), (14_3) и (15_1).

1) $\theta(t)\Big(\dfrac{t^2}{2}+Ct+C\Big)$;

2) $\theta(t)\Big[\dfrac{a^2t^4}{6}+\dfrac{2}{3}\,a^2t^3+2a^2t^2+|x|^2\Big(\dfrac{t^2}{2}+t+1\Big)\Big]$;

3) $\theta(t)\Big[\dfrac{t^4}{12}+\dfrac{2}{3}\,a^2t^3+t(1+|x|^2)\Big]$;

4) $\theta(t)\Big[\dfrac{2}{3}\,a^2t^3+(4a^2+|x|^2)(t-1+e^{-t})+1+|x|^2\Big]$.

12.60. Указание. Воспользоваться задачей **11.16** и формулами (10), (14_2), (14_4) и (15_2).

1) $\theta(t)\Big(\dfrac{|x|^2t^2}{2}+\dfrac{a^2t^4}{4}+|x|^2t+a^2t^3\Big)$;

2) $\theta(t)\Big(\dfrac{a^2t^6}{60}+\dfrac{|x|^2t^4}{12}+t+1\Big)$;

3) $\displaystyle\int_0^t \omega(\tau)(t-\tau)\,d\tau + \theta(t)(\alpha a^2 t^3 + \alpha|x|^2 t + \beta t)$;

4) $\displaystyle\frac{\theta(t)}{12}\left[\frac{(|x|+t)^3}{|x|}\ln(|x|+t) + \frac{(|x|-t)^3}{|x|}\ln(|x|-t) - 2|x|^2\ln|x| - 3t^2\right]$;

5) $\displaystyle\frac{\theta(t)}{2|x|}\left(|x|\,t^2 + \frac{|x|+at}{1+(|x|+at)^2} + \frac{|x|-at}{1+(|x|-at)^2}\right)$;

6) $$\frac{\theta(t)}{2|x|}\Big[(|x|+t)\sin(|x|+t)^2 + (|x|-t)\sin(|x|-t)^2 + {}$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{ch}(|x|+t)^2 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}(|x|-t)^2\Big];$$

7) $\displaystyle\frac{\theta(t)}{12}\left(2t^3 + 12|x|^2 + 36a^2t^2 + \frac{3}{a|x|}\ln\frac{1+(|x|+at)^2}{1+(|x|-at)^2}\right)$;

8) $$\theta(t)\Bigg[\frac{e^{-ikt}}{4\pi}\int\limits_{|z|<t}\frac{e^{ik|z|}\omega(x-z)}{|z|}\,dz + \frac{|x|+t}{2|x|}\sqrt{1+(|x|+t)^2} + {}$$
$$+ \frac{|x|-t}{2|x|}\sqrt{1+(|x|-t)^2}\Bigg];$$

9) $\displaystyle\frac{\theta(t)}{4|x|}\left[2e^{-|x|^2}\int_0^t e^{-\rho^2}\operatorname{sh}2\rho|x|\,d\rho + \sin(|x|+t)^2 - \sin(|x|-t)^2\right]$;

10) $$\frac{\theta(t)}{2|x|}\Big[(|x|+t)\ln(1+(|x|+t)^2) + {}$$
$$+ (|x|-t)\ln(1+(|x|-t)^2) + e^{-(|x|^2-t^2)}\operatorname{sh}2t|x|\Big];$$

11) $$\frac{\theta(t)}{8|x|}\Big\{8e^{-(|x|^2+t^2)}(|x|\operatorname{ch}2t|x| - t\operatorname{sh}2t|x|) + {}$$
$$+ \big[(|x|+t)^2\ln(|x|+t)^2 - (|x|-t)^2\ln(|x|-t)^2 - 4t|x|\big]\Big\};$$

12) $\displaystyle\theta(t)\left(t - \sin t + \frac{|x|+at}{2|x|}\cos(|x|+at)^2 + \frac{|x|-at}{2|x|}\cos(|x|-at)^2\right)$;

13) $\displaystyle\frac{\theta(t)\,c}{2|x|}\big[(|x|-at)\,\theta(R-||x|-at|) + (|x|+at)\,\theta(R-|x|-at)\big]$ (Указание. Решение зависит только от $|x|$ и t; подстановкой $u_1(r,t) = ru(r,t)$ свести задачу к задаче Коши для уравнения колебаний струны и воспользоваться формулой (12).);

14) $\displaystyle\theta(at-|x|)\,\frac{(a^2t^2-|x|^2)}{8a^2}$.

12.61. Указание. Воспользоваться формулой (10) и задачей 11.18.

1) Решение. $u_1 = V_1 + V_1^{(0)} + V_1^{(1)}$, где

$$V_1 = \mathscr{E} * f = \mathscr{E} * \theta(t) = \frac{\theta(at-|x|)}{b}\left[\exp\left(-\frac{b(x-at)}{2a^2}\right) - \exp\left(-\frac{b(x-|x|)}{2a^2}\right)\right];$$

$$V_1^{(0)} = \mathscr{E} * \left[u_1(x)\cdot\delta(t) - \frac{b}{a}u_0(x)\cdot\delta(t)\right] = \left(1 - \frac{b}{a}\right)\mathscr{E};$$

$$V_1^{(1)} = \mathscr{E} * [u_0(x)\cdot\delta'(t)] = \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} * [\delta(x)\cdot\delta(t)] = \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} = \\ = \frac{b}{2a}\,\mathscr{E} + \frac{\delta(at-|x|)}{2}\,\exp\left\{-\frac{b(x-at)}{2a^2}\right\},$$

где $\mathscr{E}(x,t)$ определяется формулой задачи 11.18;

2) $\theta(t)\Big[(e^t-1)(x+t-3)+3t-xt+\dfrac{t^2}{2}+ \\ +\theta(x+t)\,e^t-\theta(x-t)-\theta(t-|x|)\,e^{(t-x)/2}\Big];$

3) $\theta(t)\Big[e^t(-1+x+t)-x-\dfrac{t^2}{2}+2\Big];$

4) $\theta(t)\Big[\dfrac{a}{a-1}\,\big(e^t-ae^{t/a}+a-1\big)+\dfrac{a^2+a}{2a^2+1}\,e^{x+at+t/a}+\dfrac{a^2-a+1}{2a^2+1}\,e^{x-at}\Big],$
$a\neq 1$;

5) $\theta(t)\Big\{\dfrac{e^x}{b+2a^2}\Big[\dfrac{a^2}{b+a^2}\big(e^{(b+a^2)t/a}-1\big)+e^{-at}-1\Big]+\beta+ \\ +\alpha(x-at)+\dfrac{\alpha a^2}{b}\,\big(e^{bt/a}-1\big)\Big\}.$

12.62. Указание. Воспользоваться задачей 11.21.

1) $\dfrac{\theta(t-|x|)}{2}\Big[J_0\big(\sqrt{t^2-x^2}\big)-\dfrac{t}{\sqrt{t^2-x^2}}\,J_1\big(\sqrt{t^2-x^2}\big)\Big]+\dfrac{1}{2}\,\delta(t-|x|);$

2) $\dfrac{\theta(t-|x|)}{2}\displaystyle\int\limits_0^{t-|x|}\omega(\tau)\,J_0\big(\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\big)\,d\tau+ \\ +\dfrac{\theta(t)}{2}\displaystyle\int\limits_{x-t}^{x+t}\xi J_0\big(\sqrt{t^2-(x-\xi)^2}\big)\,d\xi;$

3) $\theta(t)\Big[2-\sin t-\cos t+\displaystyle\int\limits_0^t J_0\big(\sqrt{t^2-\xi^2}\big)\,d\xi-t\int\limits_0^t\dfrac{J_1\big(\sqrt{t^2-\xi^2}\big)}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\,d\xi\Big];$

4) $\dfrac{\theta(t)}{2}\Big[\theta(x+t)+\theta(x-t)+ \\ +\displaystyle\int\limits_{-t}^{t}\theta(x-\xi)\bigg(J_0\big(\sqrt{t^2-\xi^2}\big)-t\,\dfrac{J_1\big(\sqrt{t^2-\xi^2}\big)}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\bigg)\,d\xi\Big].$

12.63. Указание. Воспользоваться задачей 11.22.

1) $\dfrac{1}{2}\,e^{-t}\delta(t-|x|)+e^{-t}\theta(t-|x|)\Big[I_0\big(\sqrt{t^2-x^2}\big)+\dfrac{t}{2}\,\dfrac{I_1\big(\sqrt{t^2-x^2}\big)}{\sqrt{t^2-x^2}}\Big];$

2) $\dfrac{1}{2}\,\theta(t-|x|)\,e^{-t}\displaystyle\int\limits_0^{t-|x|}\omega(\tau)\,e^\tau J_0\big(i\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\big)\,d\tau;$

3) $\theta(t)\bigg(1+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{-t}^{t}\theta(x-\xi)\,e^{-t}J_0\big(\sqrt{t^2-\xi^2}\big)\,d\xi\bigg).$

§ 13. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Классической задачей Коши для уравнения теплопроводности называется задача о нахождении функции $u(x,t)$ класса $C^2(t>0)\cap C(t\geq 0)$, удовлетворяющей при $x\in R^n$, $t>0$ уравнению

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t) \tag{1}$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

где f и u_0 — заданные функции.

Если функция $f\in C^2(t\geq 0)$ и все ее производные до второго порядка включительно ограничены в каждой полосе $0\leq t\leq T$, а функция $u_0\in C(R^n)$ и ограничена, то решение задачи Коши (1), (2) в классе функций $u(x,t)$, ограниченных в каждой полосе $0\leq t\leq T$, существует, единственно и выражается формулой Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{R^n} u_0(\xi)\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}\right\}d\xi + \\ + \int\limits_0^t\int\limits_{R^n}\frac{f(\xi,\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n}\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}d\xi\,d\tau.$$

13.1. Пусть функция $u(x,t,t_0)$ принадлежит классу C^2 при $x\in R^n$, $t\geq t_0\geq 0$. Доказать, что функция $u(x,t,t_0)$ при каждом $t_0\geq 0$ является решением задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u, \qquad u|_{t=t_0} = f(x,t_0)$$

тогда и только тогда, когда функция

$$v(x,t,t_0) = \int\limits_{t_0}^t u(x,t,\tau)\,d\tau$$

при каждом $t_0\geq 0$ является решением задачи Коши

$$v_t = a^2\Delta v + f(x,t), \qquad v|_{t=t_0} = 0.$$

13.2. Пусть $u_k(x_k,t)$ — решение задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u, \qquad u|_{t=0} = f_k(x_k), \qquad k=1,2,\ldots,n.$$

Доказать, что функция $u(x,t) = \prod\limits_{k=1}^n u_k(x_k,t)$ является решением задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u, \qquad u|_{t=0} = \prod_{k=1}^n f_k(x_k).$$

13.3. Пусть функция $f(x,t)\in C^2(t\geq 0)$ является гармонической по x при каждом фиксированном $t\geq 0$. Доказать, что функция $u(x,t) = \int\limits_0^t f(x,\tau)\,d\tau$ является решением задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t), \qquad u|_{t=0} = 0.$$

13.4. Пусть $u_0 \in C^\infty(R^n)$, а ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!}\Delta^k u_0(x)$, $\delta > 0$, и все ряды, полученные из него почленным дифференцированием до второго порядка включительно, сходятся равномерно в каждой конечной области. Доказать, что функция

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2^k} t^k}{k!}\Delta^k u_0(x)$$

является решением задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u, \qquad 0 < t < \frac{\delta}{a^2}; \qquad u|_{t=0} = u_0(x).$$

Решения задач 13.5–13.8 можно находить по формуле Пуассона, но иногда удобнее применить метод разделения переменных или воспользоваться результатами задач 13.1–13.4.

13.5. Решить задачи ($n = 1$):

1) $u_t = 4u_{xx} + t + e^t, \qquad u|_{t=0} = 2;$

2) $u_t = u_{xx} + 3t^2, \qquad u|_{t=0} = \sin x;$

3) $u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x, \qquad u|_{t=0} = \cos x;$

4) $u_t = u_{xx} + e^t \sin x, \qquad u|_{t=0} = \sin x;$

5) $u_t = u_{xx} + \sin t, \qquad u|_{t=0} = e^{-x^2};$

6) $4u_t = u_{xx}, \qquad u|_{t=0} = e^{2x-x^2};$

7) $u_t = u_{xx}, \qquad u|_{t=0} = xe^{-x^2};$

8) $4u_t = u_{xx}, \qquad u|_{t=0} = \sin x\, e^{-x^2}.$

13.6. Решить задачи ($n = 2$):

1) $u_t = \Delta u + e^t, \qquad u|_{t=0} = \cos x \sin y;$

2) $u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y, \qquad u|_{t=0} = 1;$

3) $u_t = \Delta u + \cos t, \qquad u|_{t=0} = xye^{-x^2-y^2};$

4) $8u_t = \Delta u + 1, \qquad u|_{t=0} = e^{-(x-y)^2};$

5) $2u_t = \Delta u, \qquad u|_{t=0} = \cos xy.$

13.7. Решить задачи ($n = 3$):

1) $u_t = 2\Delta u + t\cos x, \qquad u|_{t=0} = \cos y \cos z;$

2) $u_t = 3\Delta u + e^t, \qquad u|_{t=0} = \sin(x-y-z);$

3) $4u_t = \Delta u + \sin 2z, \qquad u|_{t=0} = \frac{1}{4}\sin 2z + e^{-x^2}\cos 2y;$

4) $u_t = \Delta u + \cos(x-y+z), \qquad u|_{t=0} = e^{-(x+y-z)^2};$

5) $u_t = \Delta u, \qquad u|_{t=0} = \cos(xy)\sin z.$

13.8. Решить задачу Коши

$$u_t = \Delta u, \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in R^n$$

для следующих u_0:

1) $u_0 = \cos \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$; 2) $u_0 = e^{-|x|^2}$;

3) $u_0 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) e^{-|x|^2}$; 4) $u_0 = \left(\sin \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) e^{-|x|^2}$;

5) $u_0 = \exp\left\{-\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right\}$.

Если решение $u(x,t)$ классической задачи Коши (1), (2) и функцию $f(x,t) \in C$ продолжить нулем при $t < 0$, то и $u(x,t)$ удовлетворяет в R^{n+1} уравнению (в обобщенном смысле)

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x,t) + u_0(x) \cdot \delta(t). \tag{4}$$

Обобщенной задачей Коши для уравнения теплопроводности с источником $F(x,t) \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$, $F = 0$ при $t < 0$, называется задача о нахождении обобщенной функции $u \in \mathscr{D}'$, обращающейся в нуль при $t < 0$ и удовлетворяющей в R^{n+1} уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u + F(x,t). \tag{5}$$

Если существует свертка $\mathscr{E} * F$, где

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}$$

— фундаментальное решение оператора теплопроводности, то

$$u = \mathscr{E} * F$$

есть решение обобщенной задачи Коши (5). Это решение единственно в классе обобщенных функций $u(x,t)$, для которых существует свертка $\mathscr{E} * u$.

Свертка $V = \mathscr{E} * F$ называется обобщенным *тепловым потенциалом с плотностью F*.

В частности, если $F = u_0(x) \cdot \delta(t)$, где $u_0 \in \mathscr{D}'(R^n)$, то свертка

$$V^{(0)} = \mathscr{E}(x,t) * u_0(x) \cdot \delta(t) = \mathscr{E}(x,t) * u_0(x)$$

(если она существует) называется обобщенным *поверхностным тепловым потенциалом с плотностью u_0*.

Тепловой потенциал V удовлетворяет уравнению (5).

Обозначим через M класс всех функций, локально интегрируемых в R^{n+1}, равных нулю при $t < 0$ и ограниченных в каждой полосе $0 \le t \le T$, $x \in R^n$.

13.9. Найти решение обобщенной задачи Коши (5) для следующих F:

1) $\delta(t)\cdot\delta(x)$; 2) $\delta(t-t_0)\cdot\delta(x-x_0)$, $t_0 \geq 0$; 3) $\delta(t)\cdot\dfrac{\partial\delta(x)}{\partial x_k}$;

4) $\delta'(t)\cdot\delta(x)$; 5) $\delta(t-t_0)\cdot\dfrac{\partial^2\delta(x)}{\partial x_k^2}$, $t_0 \geq 0$; 6) $\delta'(t)\cdot\dfrac{\partial\delta(x)}{\partial x_k}$;

7) $\theta(t)\cdot\delta(x)$; 8) $\theta(t-t_0)\cdot\delta(x-x_0)$, $t_0 \geq 0$; 9) $\delta'(t)\cdot\delta(x-x_0)$;

10) $\omega(t)\cdot\delta(x)$, где $\omega \in C(t \geq 0)$, $\omega = 0$ при $t < 0$.

13.10. Пусть $f(x,t) \in M$. Показать, что свертка $V = \mathscr{E} * f$:

1) существует в M и представляется формулой

$$V(x,t) = \int_0^t\int_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\left[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right]^n} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\xi\, d\tau; \tag{6}$$

2) удовлетворяет оценке

$$|V(x,t)| \leq t \sup_{\substack{\xi \\ 0\leq\tau\leq t}} |f(\xi,\tau)|, \qquad t > 0;$$

3) представляет собой единственное в классе M решение (обобщенное) уравнения $V_t = a^2\Delta V + f(x,t)$.

13.11. Пусть $u_0(x)$ — ограниченная функция в R^n. Доказать, что свертка

$$V^{(0)} = \mathscr{E}(x,t) * u_0(x)\cdot\delta(t) = \mathscr{E}(x,t) * u_0(x):$$

1) существует в M и представляется формулой

$$V^{(0)}(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{R^n} u_0(\xi) \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right\} d\xi; \tag{7}$$

2) удовлетворяет оценке

$$\left|V^{(0)}(x,t)\right| \leq \sup_{\xi} |u_0(\xi)|, \qquad t > 0;$$

3) представляет собой единственное в классе M решение (обобщенное) уравнения $V_t^{(0)} = a^2\Delta V^{(0)} + u_0(x)\cdot\delta(t)$.

13.12. Доказать, что решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t) + u_0(x)\cdot\delta(t) \tag{8}$$

выражается классической формулой Пуассона

$$u(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{R^n} u_0(\xi) \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right\} d\xi + \\ + \int_0^t\int_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\left[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right]^n} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\xi\, d\tau, \tag{9}$$

если функция f локально интегрируема в R^{n+1} и равна нулю при $t < 0$, функция u_0 локально интегрируема в R^n и оба слагаемых в формуле (9) локально интегрируемы в R^{n+1}.

13.13. Доказать:

1) если $f \in C^2(t \geq 0)$ и все ее производные до второго порядка включительно принадлежат классу M, то $V = \mathscr{E} * f \in C^2(t > 0) \cap$ $\cap C^1(t \geq 0)$ удовлетворяет при $t > 0$ уравнению $V_t = a^2 \Delta V + f(x,t)$ и начальному условию $V\big|_{t=+0} = 0$;

2) если $u_0(x)$ — непрерывная и ограниченная функция, то

$$V^{(0)} = \mathscr{E} * u_0 = C^\infty(t > 0) \cap C(t \geq 0)$$

удовлетворяет уравнению $V_t^{(0)} = a^2 \Delta V^{(0)}$ и начальному условию $V^{(0)}\big|_{t=+0} = u_0(x)$;

3) при выполнении условий 1), 2) функция $u = V + V^{(0)}$, где $V, V^{(0)}$ определяются формулами (6) и (7), есть решение классической задачи Коши (1), (2).

Указание. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формулы (8).

13.14. Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = u_{xx} + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

для следующих u_0:

1) $\theta(x)$; 2) $\theta(1-x)$; 3) $\theta(1-|x|)$;
4) $\theta(x)\,e^{-x}$; 5) $\theta(x)(x+1)$; 6) $\theta(x-1)\,x$.

Показать, что найденные функции $u(x,t)$ при $t > 0$ принадлежат классу C^∞ и удовлетворяют уравнению $u_t = u_{xx}$, а при $t \longrightarrow +0$ непрерывны во всех точках непрерывности функции $u_0(x)$ и в этих точках удовлетворяют начальному условию $u|_{t=+0} = u_0(x)$.

13.15. Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = u_{xx} + f(x,t)$$

для следующих f:

1) $\theta(t-1)\,e^t$; 2) $\theta(t-\pi)\cos t$; 3) $\theta(t-1)\,x$;
4) $\theta(t-2)\,e^x$; 5) $\theta(t)\,\theta(x)$; 6) $\theta(t)\cdot\theta(1-|x|)$.

Показать, что найденные функции $u(x,t)$ принадлежат классу $C(R^2)$, удовлетворяют начальному условию $u|_{t=0} = 0$, а в точках непрерывности функции $f(x,t)$ принадлежат классу C^2.

13.16. Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности ($x \in R^1$) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениеями классической задачи Коши (1), (2):

1) $f = \theta(t)\,x$, $u_0 = x$;
2) $f = \theta(t)\,x^2$, $u_0 = x^2$;
3) $f = \theta(t)\,2xt$, $u_0 = x^3 + x^4$, $a = 1$;
4) $f = \theta(t)\,3x^2t^2$, $u_0 = e^x$, $a = 1$;

5) $f = \theta(t)\sqrt{t}$, $u_0 = \operatorname{sh} x$;

6) $f = \dfrac{\theta(t)}{\sqrt{t}}$; $u_0 = xe^x$;

7) $f = \theta(t)\ln t$, $u_0 = x\sin x$, $a = 1$;

8) $f = \theta(t)\,x\cos x$, $u_0 = x\cos x$, $a = 1$;

9) $f = \theta(t)\,e^x$, $u_0 = \theta(x)\,x$, $a = 1$;

10) $f = \theta(t)\,xe^x$, $u_0 = \theta(x)\,x^2$, $a = 1$.

13.17. Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности ($x \in R^2$) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (1), (2):

1) $f = \theta(t)\,xye^t$, $u_0 = x^2 - y^2$;

2) $f = \theta(t)(x^2+y^2)$, $u_0 = x^2+y^2$;

3) $f = \theta(t)\,4xy$, $u_0 = x^2y^2$, $a = 1$;

4) $f = \theta(t)\,e^x\cos y$, $u_0 = e^{x+y}$;

5) $f = 0$, $u_0 = x\cos y$;

6) $f = \theta(t)\,xy$, $u_0 = \cos y$.

13.18. Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности ($x \in R^3$) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (1), (2):

1) $f = \theta(t)\,xye^z$, $u_0 = xe^y\cos z$;

2) $f = \theta(t)\,xy\cos z$, $u_0 = (x^2+y^2)\cos z$, $a = 1$;

3) $f = \theta(t)\,xyz\cos t$, $u_0 = xy^2z^3$;

4) $f = \theta(t)(x^2-2y^2+z^2)\,e^t$, $u_0 = x+y^2+z^3$;

5) $f = \theta(t)\cos t\sin 3x\cos 4ye^{5z}$, $u_0 = \sin 3x\cos 4ye^{4z}$, $a = 1$.

13.19. Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности ($x \in R^n$) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (1), (2):

1) $f = \theta(t)|x|^2$, $u_0 = |x|^2$;

2) $f = \theta(t)\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3$, $u_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3$;

3) $f = \theta(t)\,e^t$, $u_0 = \exp\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right\}$;

4) $f = 0$, $u_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \exp\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right\}$;

5) $f = 0$, $u_0 = \left(\cos\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right\}$.

Уравнение $u_t - a^2u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t)$, где a, b, c — постоянные, заменой $v(y,t) = e^{-ct}u(y-bt,t)$ сводится к уравнению теплопроводности.

13.20. Найти решение задачи

$$u_t - a^2u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t), \qquad u|_{t=0} = u_0(x)$$

со следующими данными:

1) $f = 1,\quad u_0 = 1,\quad c = 1;$
2) $f = e^t,\quad u_0 = \cos x,\quad a = c = 1,\ b = 0;$
3) $f = e^t,\quad u_0 = \cos x,\quad a = \sqrt{2},\ c = 2,\ b = 0;$
4) $f = t\sin x,\quad u_0 = 1,\quad a = c = 1,\ b = 0;$
5) $f = 0,\quad u_0 = e^{-x^2};$
6) $f = w(t) \in C^1\,(t \geq 0),\quad u_0 \in C$ и ограничена.

13.21. Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t - a^2u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t) + u_0(x)\cdot\delta(t)$$

со следующими данными:

1) $f = \theta(t-1),\quad u_0 = \theta(x),\quad c \neq 0;$
2) $f = \theta(t-1),\quad u_0 = \theta(1-x),\quad c = 0;$
3) $f = \theta(t-1)\,e^t,\quad u_0 = \theta(1-|x|),\quad c \neq 1;$
4) $f = \theta(t-1)\,e^t,\quad u_0 = \theta(x)\,e^x,\quad c = 1;$
5) $f = \theta(t-1)\,e^x,\quad u_0 = x\theta(x),\quad a = 2,\ b = c = -2;$
6) $f = \theta(t)\,\theta(x),\quad u_0 = x.$

Исследовать гладкость полученных решений, как и в 13.14, 13.15.

13.22. Решить обобщенную задачу Коши

$$u_t - a^2u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t) + u_0(x)\cdot\delta(t)$$

с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши

$$u_t - a^2u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t), \qquad u|_{t=0} = u_0(x):$$

1) $f = \theta(t)\,x^2,\quad u_0 = x^2,\quad a = b = c = 1;$
2) $f = \dfrac{\theta(t)}{\sqrt{t}},\quad u_0 = e^x;$
3) $f = \theta(t)\,te^x,\quad u_0 = xe^x,\quad a = 2,\ b = -1,\ c = -2;$
4) $f = \theta(t)\,xe^x,\quad u_0 = xe^x + \operatorname{sh} x,\quad a = c = 1,\ b = -2;$
5) $f = \theta(t)\,e^x\cos t\,\sin x,\quad u_0 = e^x\cos x,\quad a = 1,\ b = -2,\ c = 2;$
6) $f = \theta(t)\,x,\quad u_0 = x\sin x,\quad a = b = c = 1.$

13.23. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u, \qquad u|_{t=0} = u_0(x),$$

где $u_0 \in C(R^n)$ и $|u_0(x)| \leq Me^{-\delta|x|^2}$, $\delta \geq 0$.

Доказать, что при всех $t \geq 0$, $x \in R^n$

$$|u(t,x)| \le M(1+4a^2\delta t)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{\delta|x|^2}{1+4a^2\delta t}\right\}.$$

13.24. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u, \qquad u|_{t=0} = u_0(x),$$

где $u_0(x)$ — финитная непрерывная функция. Доказать, что для любых $T > 0$, $\delta < \dfrac{1}{4a^2T}$ существует $M > 0$ такое, что

$$|u(x,t)| \le Me^{-\delta|x|^2}, \qquad x \in R^n, \qquad 0 \le t \le T.$$

13.25. Пусть $u_0 \in C(R^n)$ и $|u_0(x)| \le M_\delta e^{\delta|x|^2}$, где $\delta > 0$. Доказать, что при $0 < t < \dfrac{1}{4a^2\delta}$, $x \in R^n$, функция

$$u(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R^n} u_0(\xi) \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}\right\} d\xi \tag{10}$$

принадлежит классу C^∞ и является решением задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u, \qquad 0 < t < \frac{1}{4a^2\delta}; \qquad u|_{t=0} = u_0(x).$$

13.26. Доказать, что если условие задачи 13.25 выполняется для всех $\delta > 0$, то функция (10) принадлежит классу C^∞ при $t > 0$, $x \in R^n$ и является решением классической задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u, \qquad t > 0; \qquad u|_{t=0} = u_0(x).$$

13.27. Методом обобщенных функций решить задачу

$$u_t = a^2u_{xx}, \qquad t > 0, \qquad x > 0; \qquad u|_{t=0} = u_0(x),$$
$$u|_{x=0} = 0, \qquad \text{где} \qquad u_0(x) \in C(x \ge 0).$$

Ответы к § 13

13.5. 1) $1 + e^t + \frac{1}{2}t^2$; 2) $t^3 + e^{-t}\sin x$;

3) $(1+t)\,e^{-t}\cos x$; 4) $\operatorname{ch} t \sin x$;

5) $1 - \cos t + (1+4t)^{-1/2} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{1+4t}\right\}$;

6) $(1+t)^{-1/2} \exp\left\{\dfrac{2x - x^2 + t}{1+t}\right\}$;

7) $x(1+4t)^{-3/2} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{1+4t}\right\}$;

8) $(1+t)^{-1/2} \sin\dfrac{x}{1+t} \exp\left\{-\dfrac{4x^2+t}{4(1+t)}\right\}$.

13.6. 1) $e^t - 1 + e^{-2t}\cos x \sin y$;

2) $1 + \frac{1}{5}\sin x \sin y\,(2\sin t - \cos t + e^{-2t})$;

3) $\sin t + \dfrac{xy}{(1+4t)^3}\exp\left\{-\dfrac{x^2+y^2}{1+4t}\right\}$;

4) $\dfrac{t}{8} + \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\exp\left\{-\dfrac{(x-y)^2}{1+t}\right\}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cos\dfrac{xy}{1+t^2}\exp\left\{-\dfrac{t(x^2+y^2)}{2(1+t^2)}\right\}$.

13.7. 1) $\dfrac{1}{4}\cos x\left(e^{-2t}-1+2t\right)+\cos y\cos z e^{-4t}$;

2) $e^t - 1 + \sin(x-y-z)\,e^{-9t}$;

3) $\dfrac{1}{4}\sin 2z + \dfrac{\cos 2y}{\sqrt{1+t}}\exp\left\{-t-\dfrac{x^2}{1+t}\right\}$;

4) $\dfrac{1}{3}\cos(x-y+z)(1-e^{-3t}) + \dfrac{1}{\sqrt{1+12t}}\exp\left\{-\dfrac{(x+y-z)^2}{1+12t}\right\}$;

5) $\dfrac{\sin z}{\sqrt{1+4t^2}}\cos\dfrac{xy}{1+4t^2}\exp\left\{-t-\dfrac{t(x^2+y^2)}{1+4t^2}\right\}$.

13.8. 1) $e^{-nt}\cos\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$; 2) $(1+4t)^{-n/2}\exp\left\{-\dfrac{|x|^2}{1+4t}\right\}$;

3) $(1+4t)^{-(n+2)/2}\exp\left\{-\dfrac{|x|^2}{1+4t}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\right\}$;

4) $(1+4t)^{-n/2}\sin\left(\dfrac{1}{1+4t}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\exp\left\{-\dfrac{nt+|x|^2}{1+4t}\right\}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt{1+4nt}}\exp\left\{-\dfrac{1}{1+4nt}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)^2\right\}$.

13.9. 1) $\mathscr{E}(x,t)$; 2) $\mathscr{E}(x-x_0,t-t_0)$;

3) $-\dfrac{x_k}{2a^2t}\mathscr{E}(x,t)$; 4) $\left(\dfrac{|x|^2}{4a^2t^2}-\dfrac{n}{2t}\right)\mathscr{E}(x,t)+\delta(x,t)$;

5) $\dfrac{x_k^2-2a^2(t-t_0)}{4a^4(t-t_0)^2}\mathscr{E}(x,t-t_0)$;

6) $\dfrac{x_k}{4a^2t^2}\left(n+2-\dfrac{|x|^2}{2a^2t}\right)\mathscr{E}(x,t)+\dfrac{\partial\mathscr{E}(x,t)}{\partial x_k}$;

7) $\int\limits_0^t \mathscr{E}(x,\tau)\,d\tau$; 8) $\int\limits_0^{t-t_0}\mathscr{E}(x-x_0,\tau)\,d\tau$;

9) $\left[\dfrac{|x-x_0|^2}{4a^2t^2}-\dfrac{n}{2t}\right]\mathscr{E}(x-x_0,t)+\delta(x-x_0,t)$;

10) $\int\limits_0^t \omega(\tau)\,\mathscr{E}(x,t-\tau)\,d\tau$.

13.14. 1) $\theta(t)\,\Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{2t}}\right)$; 2) $\theta(t)\,\Phi\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2t}}\right)$;

3) $\theta(t)\left[\Phi\left(\frac{x+1}{\sqrt{2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-1}{\sqrt{2t}}\right)\right]$; 4) $\theta(t)\, e^{t-x}\Phi\left(\frac{x-2t}{\sqrt{2t}}\right)$;

5) $\theta(t)\left[\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) + (x+1)\,\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\right]$;

6) $\theta(t)\left[\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{4t}\right) + x\Phi\left(\frac{x-1}{\sqrt{2t}}\right)\right]$.

13.15. 1) $\theta(t-1)(e^t - e)$; 2) $\theta(t-\pi)\sin t$;

3) $\theta(t-1)(t-1)\,x$; 4) $\theta(t-2)\left(e^{t-2}-1\right)e^x$;

5) $\theta(t)\int\limits_0^t \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\right)d\tau$; 6) $\theta(t)\int\limits_0^t\left[\Phi\left(\frac{x+1}{2\sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x-1}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]d\tau$.

13.16. Указание. Для доказательства см. задачу 13.13, для нахождения решения см. текст перед задачей 13.5.

1) $\theta(t)(t+1)\,x$; 2) $\theta(t)\left(x^2 + x^2t + 2a^2t + a^2t^2\right)$;

3) $\theta(t)\left[x^3 + x^4 + 6t(x+2x^2) + t^2(12+x)\right]$;

4) $\theta(t)\left(x^2t^3 + \frac{1}{2}t^4 + e^{x+t}\right)$; 5) $\theta(t)\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + e^{a^2t}\operatorname{sh}x\right)$;

6) $\theta(t)\left(2\sqrt{t} + (x+2a^2t)\,e^{x+a^2t}\right)$;

7) $\theta(t)\left[t\ln t - t + (x\sin x + 2t\cos x)\,e^{-t}\right]$;

8) $\theta(t)\left[x\cos x + 2\sin x\left(e^{-t}-1\right)\right]$;

9) $\theta(t)\left[e^x(e^t-1) + \sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-x^2/(4t)} + x\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\right]$;

10) $\theta(t)\left[(2-x)\,e^x + (x+2t-2)\,e^{x+t} + x\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-x^2/(4t)} + (x^2+2t)\,\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\right]$.

13.17. Указание. См. указание в ответе к задаче 13.16.

1) $\theta(t)\left[x^2 - y^2 + xy(e^t-1)\right]$; 2) $\theta(t)\left[(x^2+y^2)(t+1) + 4a^2t + 2a^2t^2\right]$;

3) $\theta(t)\left(x^2y^2 + 2t(x+y)^2 + 4t^2\right)$; 4) $\theta(t)\left(te^x\cos y + e^{x+y+2a^2t}\right)$;

5) $\theta(t)\,xe^y\cos z$; 6) $\theta(t)\left(xyt + \cos y e^{-a^2t}\right)$.

13.18. Указание. См. указание в ответе к задаче 13.16.

1) $\theta(t)\left[xe^y\cos z + e^{-2}xye^z\left(e^{a^2t}-1\right)\right]$;

2) $\theta(t)\,\cos z\left[xy(1-e^{-t}) + (x^2+y^2+4t)\,e^{-t}\right]$;

3) $\theta(t)\left[xyz\sin t + x(y^2+2a^2t)(z^3+6a^2tz)\right]$;

4) $\theta(t)\left[x + y^2 + z^3 + 2a^2t(1+3z) + \left(x^2-2y^2+z^2\right)(e^t-1)\right]$;

5) $\theta(t)\left[\sin 3x\,\cos 4ye^{4z}\left(e^{-9t} + \sin te^z\right)\right]$.

13.19. Указание. См. указание в ответе к задаче 13.16.

1) $\theta(t)\big[(1+t)|x|^2 + na^2t(2+t)\big]$;

2) $\theta(t)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\big[(1+t)\,x_k^3 + 3a^2t(2+t)\,x_k\big]\right)$;

3) $\theta(t)\left[e^t - 1 + \exp\left(na^2t + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\right]$;

4) $\theta(t)\left[\left(2na^2t + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(na^2t + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\right]$;

5) $\theta(t)\left[\cos\left(2a^2nt + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\right]$.

13.20. 1) $2e^t - 1$; 2) $te^t + \cos x$;

3) $e^{2t} - e^t + e^{-2t}\cos x$; 4) $e^t + \frac{1}{2}t^2\sin x$;

5) $(1+4a^2t)^{-1/2}\exp\left[ct - \dfrac{(x+bt)^2}{1+4a^2t}\right]$;

6) $\int\limits_0^t \omega(t-\tau)\,e^{c\tau}d\tau + \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\exp\left[ct - \dfrac{(x-\xi+bt)^2}{4a^2t}\right]d\xi$.

13.21. 1) $\frac{1}{c}\,\theta(t-1)(e^{ct-c}-1) + \theta(t)\,e^{ct}\Phi\left(\dfrac{x+bt}{a\sqrt{2t}}\right)$;

2) $\theta(t-1)(t-1) + \theta(t)\,\Phi\left(\dfrac{1-x-bt}{a\sqrt{2t}}\right)$;

3) $\dfrac{\theta(t-1)}{1-c}\left(e^t - e^{ct-c+1}\right) + \theta(t)\,e^{ct}\left[\Phi\left(\dfrac{x+bt+1}{a\sqrt{2t}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x+bt-1}{a\sqrt{2t}}\right)\right]$;

4) $\theta(t-1)(t-1)\,e^t + \theta(t)\,e^{x+t(1+b+a^2)}\Phi\left(\dfrac{x+bt+2a^2t}{a\sqrt{2t}}\right)$;

5) $\theta(t-1)(t-1)\,e^x +$

$$+\,\theta(t)\,e^{-2t}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{(x-2t)^2}{16t}\right) + (x-2t)\,\Phi\left(\frac{x-2t}{2\sqrt{2t}}\right)\right];$$

6) $\theta(t)\left[(x+bt)\,e^{ct} + e^{ct}\int\limits_0^t \Phi\left(\dfrac{x+bt}{a\sqrt{2\tau}}\right)d\tau\right]$.

13.22. 1) $\theta(t)\big(2x - x^2 + 2\big[t - x + (x+t)^2\big]e^t\big)$;

2) $\theta(t)\left(e^{x+t(a^2+b+c)} + \int\limits_0^t \dfrac{1}{\sqrt{t-\tau}}\,e^{c\tau}\,d\tau\right)$;

3) $\theta(t)\big[(1+x+7t)\,e^{x+t} - (1+t)\,e^x\big]$;

4) $\theta(t)\big[x(t+1)\,e^x + e^{2t}\operatorname{sh}(x-2t)\big]$; 5) $\theta(t)(\cos x + \sin t\,\sin x)\,e^x$;

6) $\theta(t)\big[1 - x + (x+t-1)\,e^t + (x+t)\sin(x+t) + 2t\cos(x+t)\big]$.

13.27. $\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty u_0(y)\left[\exp\left(-\dfrac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\dfrac{(x+y)^2}{4a^2t}\right)\right]dy.$

§ 14. Задача Коши для других уравнений и задача Гурса

1. Задача Коши для уравнения Шрёдингера. Для уравнения Шрёдингера постановка классической задачи Коши

$$u_t = i\Delta u + f(x,t), \qquad u|_{t=0} = u_0(x) \tag{1}$$

и обобщенной задачи Коши

$$u_t = i\Delta u + F(x,t) \tag{2}$$

аналогична соответствующим постановкам для уравнения теплопроводности (см. с. 159 и 161).

Фундаментальным решением уравнения Шрёдингера является функция

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n}\exp\left(\frac{i|x|^2}{4t} - \frac{\pi n i}{4}\right).$$

Для задачи Коши (1) справедливы результаты, аналогичные тем, которые сформулированы в задачах 13.1–13.4.

Будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу $\mathscr{P}$, если она удовлетворяет оценке

$$|u(x,t)| \le c(1+|x|)^\lambda, \qquad x\in R^n, \qquad t\ge 0,$$

при некоторых c и λ.

14.1. Доказать, что если $u_0(x)\in\mathscr{S}(R^n)$, то функция

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n} e^{-it|y|^2 - i(x,y)}\int\limits_{R^n} u_0(\xi)\,e^{i(\xi,y)}\,d\xi\,dy \tag{3}$$

является решением задачи Коши

$$u_t = i\Delta u, \qquad u|_{t=0} = u_0(x); \tag{4}$$

$u(x,t)\in C^\infty\,(t\ge 0)$; $u(x,t)\in\mathscr{S}(R^n)$ при каждом фиксированном $t>0$; для любых α и β функции $x^\beta D^\alpha u(x,t)$ равномерно ограничены по $x\in R^n$, $t\ge 0$.

14.2. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши (4). Доказать, что для любого $T>0$ функция $v(x,t)=u(x,T-t)$ является решением задачи Коши

$$v_t = -i\Delta v, \qquad 0<t<T; \qquad v|_{t=T} = u_0(x).$$

14.3. Пусть $u(x,t)$ и $v(x,t)$ — решения задач

$$\begin{gathered} u_t = iu_{xx}, \qquad u|_{t=0} = u_0(x); \\ v_t = -iv_{xx}, \qquad 0<t<T, \qquad v|_{t=T} = v_0(x), \end{gathered} \tag{5}$$

причем $u(x,t) \in \mathscr{P}$, а функция $v(x,t)$ находится с помощью формул задач 14.1 и 14.2. Доказать, что

$$\int\limits_{R^1} u_0(x)\, v(x,0)\, dx = \int\limits_{R^1} u(x,T)\, v_0(x)\, dx.$$

Указание. В равенстве

$$\int\limits_0^T \int\limits_{-\delta}^{\delta} v(x,t)\, \varphi_\delta(x) \big[u_t(x,t) - iu_{xx}(x,t)\big]\, dx\, dt = 0,$$

где функция $\varphi_\delta(x)$ та же, что и в задаче 6.5, интегрированием по частям избавиться от производных функции $u(x,t)$ и перейти к пределу при $\delta \longrightarrow \infty$.

14.4. Доказать единственность решения задачи Коши (5) в классе $\mathscr{P}$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 14.3.

Решение задачи Коши (1) единственно в классе $\mathscr{P}$ (для $n = 1$ см. задачу 14.4). В задачах 14.5–14.10 рассматриваются решения только из этого класса, причем существования u_{tt} не требуется.

14.5. Пусть $u_0(x) \in C^{n+1}(R^n)$, $|x|^{n+3}|u_0(x)| \le M$, $|x|^{n+1}|D^\alpha u_0(x)| \le$ $\le M$ для всех α, $|\alpha| \le n+1$.

Доказать, что решение задачи Коши (4) существует и выражается формулой (3), которую можно записать в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp\left(-\frac{\pi n i}{4}\right) \int\limits_{R^n} u_0(\xi) \exp\left(\frac{i|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi.$$

14.6. Пусть $u_0(x) \in C^\alpha(R^1)$, $\alpha \ge 2$, $u_0(x) = 0$ при $|x| \ge 1$ и $\left|u_0^{(r)}(x)\right| \le M$, $r \le \alpha$.

Доказать, что решение задачи Коши (5) принадлежит классу $C^\infty(t > 0)$ и

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial x^r} u(x,t)\right| \le CM(1+|x|)^{2+r-\alpha}, \qquad r = 0, 1, \ldots, \alpha - 2,$$

для всех $x \in R^1$, $t \ge 0$.

14.7. Пусть $u_0(x) \in C^\alpha(R^1)$, $|u_0^{(r)}(x)| \le C(1+|x|)^\lambda$, $r \le \alpha$, $\alpha \ge 2$, $\lambda < \alpha - 5$. И пусть $u_k(x,t)$ — решение задачи Коши

$$u_t = iu_{xx}, \qquad u|_{t=0} = u_0(x)\, e(x-k),$$

где функция $e(x)$ та же, что и в задаче 6.4. Доказать, что решение задачи Коши (5) существует, выражается формулой

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(x,t)$$

и $|u(x,t)| \leq C_1(1+|x|)^{\alpha-2}$ для всех $x \in R^1$, $t \geq 0$.

Указание. Используя результат задачи 14.6, показать, что

$$|u_k(x,t)| \leq \frac{C_1(2+|k|)^\lambda}{(1+|x-k|)^{\alpha-2}} \leq \frac{C_1(1+|x|)^{\alpha-2}(2+|k|)^\lambda}{(1+|k|)^{\alpha-2}}.$$

14.8. Пусть $u_0(x) \in C^1(R^1)$ и $\int\limits_{R^1} |xu_0'(x)|\,dx < \infty$. Доказать, что решение задачи Коши (5) существует и выражается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(+\infty) + u_0(-\infty)\right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\pi i/4} \int\limits_{R^1} u_0'(\xi) \int\limits_0^{(x-\xi)/(2\sqrt{t})} e^{iy^2}\,dy\,d\xi.$$

14.9. Пусть $u_0(x) = e^{ia|x|^2}$, где a — действительное число, $x \in R^n$. Доказать, что при $a \geq 0$ существует решение задачи Коши (4), а при $a < 0$ решение существует только при $0 \leq t < -\dfrac{1}{4a}$. Найти это решение.

Результат этой задачи сравнить с результатом задачи 14.7 при $n = 1$ в случаях $a = 0, \pm 1$.

14.10. Решить задачи:

1) $u_t = iu_{xx} + tx^3$; $\quad u|_{t=0} = x^4$;

2) $u_t = iu_{xx}$, $\quad 0 < t < \dfrac{1}{4}$ $\quad u|_{t=0} = xe^{-ix^2}$;

3) $u_t = i\Delta u + x\cos t - y^2 \sin t$; $\quad u|_{t=0} = x^2 + y^2$;

4) $u_t = i\Delta u + 6x + y^2 + iz^3$; $\quad u|_{t=0} = i\left(x^3 + y^3 + z^3\right)$;

5) $u_t = i\Delta u$; $\quad u|_{t=0} = e^{-|x|^2}$, $x \in R^n$.

14.11. Найти решение обобщенной задачи Коши (2) для следующих $F \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$:

1) $\delta(t) \cdot \delta(x)$; $\quad$ 2) $\delta(t) \cdot \dfrac{\partial \delta(x)}{\partial x_k}$;

3) $\theta(t) \cdot \delta(x + x_0)$, $n = 1$; $\quad$ 4) $\theta(t - t_0) \cdot \delta(x)$, $n = 1$, $t_0 \geq 0$.

14.12. Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = iu_{xx} + f(x,t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

при $t > 0$ для следующих f и u_0 ($f = 0$ при $t < 0$ и задается только для $t > 0$):

1) $f = \theta(x)$, $\quad u_0 = \theta(x)$; $\quad$ 2) $f = \theta(t-1)$, $\quad u_0 = \theta(1-|x|)$;

3) $f = \theta(t-\pi)\sin t$, $\quad u_0 = x^2$; $\quad$ 4) $f = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $\quad u_0 = \cos x$;

5) $f = \theta(t-1)(e^t - e)$, $\quad u_0 = x\sin x$.

Доказать, что функции $u(x,t)$, найденные в задаче 14.12, 3), 4), 5), являются решением классической задачи Коши.

2. Задача Коши для уравнения $u_{tt} = -\Delta^2 u + f(x,t)$.

14.13. Пусть $u(x,t) \in C^4\,(t \geq 0)$. Доказать, что функция $u(x,t)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = 0$$

тогда и только тогда, когда функция

$$w(x,t) = u(x,t) + i\int\limits_0^t \Delta u(x,\tau)\,d\tau$$

является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \qquad w|_{t=0} = \varphi(x).$$

14.14. Пусть функция $w(x,t) \in C^4\,(t \geq 0)$ является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \qquad w|_{t=0} = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — действительная функция. Доказать, что функция $u(x,t) = \operatorname{Re} w(x,t)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = 0.$$

14.15. Пусть функция $f(x,t) \in C^4\,(t \geq 0)$ является бигармонической ($\Delta^2 f = 0$) при каждом $t \geq 0$. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u + f(x,t); \qquad u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0.$$

14.16. Пусть $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — бигармонические функции. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x).$$

14.17. Пусть функция $w(x,t) \in C^4\,(t \geq 0)$ является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \qquad w|_{t=0} = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — действительная функция. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \qquad u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = \varphi(x).$$

14.18. Пусть функция $w(x,t) \in C^4\,(t \geq 0)$ является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \qquad w|_{t=0} = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — чисто мнимая функция. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = 0.$$

14.19. Пусть $u_0(x) \in C^{n+3}(R^n)$, $|x|^{n+5}|u_0(x)| \leq M$, $|x|^{n+1}|D^\alpha u_0(x)| \leq M$, $|\alpha| \leq n+3$.

Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u, \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = 0$$

существует и выражается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int u_0(\xi) \cos\left(\frac{|x-\xi|^2}{4t} - \frac{\pi n}{4}\right) d\xi.$$

Указание. Воспользоваться результатами задач 14.5 и 14.14.

14.20. Решить задачи:

1) $u_{tt} = -\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6tx^3; \qquad u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = x^4;$

2) $u_{tt} = -\Delta^2 u + xye^t; \qquad u|_{t=0} = x^2y^2, \qquad u_t|_{t=0} = 0;$

3) $u_{tt} = -\Delta^2 u + 6x^2y^2z^2; \qquad u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0;$

4) $u_{tt} = -\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4},\ 0 < t < \dfrac{1}{4}; \qquad u|_{t=0} = \cos x^2, \qquad u_t|_{t=0} = 0.$

3. Задача Коши для уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = P\Big(i\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)u$. Классическая задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u, \qquad t > 0, \qquad x \in R^1, \tag{6}$$

где $P(\sigma) = a_0\sigma^N + a_1\sigma^{N-1} + \ldots + a_N$, $a_0 \neq 0$, $N \geq 2$, с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{7}$$

ставится в классе функций $u(x,t) \in C(t \geq 0)$, у которых при $t > 0$ существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^N u}{\partial x^N}$.

Задача Коши (6), (7) называется *поставленной корректно* в классе $\mathscr{S}$ (определение класса $\mathscr{S}$ см. § 9), если для каждой функции $u_0(x) \in \mathscr{S}$ существует единственное решение задачи (6), (7), которое при каждом $t > 0$ принадлежит классу $\mathscr{S}$ и убывает при $|x| \longrightarrow \infty$ вместе со своими производными, входящими в уравнение (6), быстрее любой степени $|x|^{-1}$ равномерно относительно t в каждом интервале $0 < t < T < \infty$.

14.21. Пусть задача Коши (6), (7) поставлена корректно в классе $\mathscr{S}$ и

$$v(\sigma,t) = F[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{ix\sigma}\, dx,$$

где $u(x,t)$ — решение задачи (6), (7). Доказать, что функция $v(\sigma,t)$ при каждом $t \geq 0$ принадлежит классу $\mathscr{S}$ и является решением задачи

$$\frac{dv}{dt} = P(\sigma)\, v, \qquad v|_{t=0} = F[u_0(x)]. \tag{8}$$

14.22. Пусть $u_0(x) \in \mathscr{S}$ и

$$\operatorname{Re} P(\sigma) \le C < \infty \tag{A}$$

при всех действительных σ. Доказать, что функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tP(\sigma) - ix\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\, e^{i\sigma\xi}\, d\xi\, d\sigma \tag{9}$$

является решением задачи (6), (7), принадлежит классу $C^\infty\,(t \ge 0)$ и при $|x| \longrightarrow \infty$ убывает вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$ равномерно относительно $t \ge 0$.

14.23. Доказать, что условие (A) является необходимым и достаточным для корректности постановки задачи Коши (6), (7) в классе $\mathscr{S}$.

Указание. Для доказательства необходимо показать, что если условие (A) не выполнено, то существует такая функция $u_0(x) \in \mathscr{S}$, для которой решение задачи (8) не принадлежит классу $\mathscr{S}$.

14.24. Пусть задача Коши (6), (7) поставлена корректно в классе $\mathscr{S}$. Доказать, что ее решение выражается формулой (9), которую можно записать в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\, G(x-\xi, t)\, d\xi, \tag{10}$$

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tP(\sigma) - ix\sigma}\, d\sigma. \tag{11}$$

Указание. Воспользоваться оценкой $|G(x,t)| \le Ct^{-1/N}$.

14.25. Пусть условие (A) выполнено, $u_0(x) \in C^{N+2}(R^1)$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| u_0^{(k)}(x) \right| dx < \infty, \qquad k = 0, 1, \ldots, N+2.$$

Доказать, что решение задачи (6), (7) существует, выражается формулой (9) (или формулами (10), (11)) и функция $u(x,t)$ ограничена при $t \ge 0$ вместе со своими производными, входящими в уравнение (6).

4. Задача Коши для уравнения первого порядка.

14.26. Решить задачи:

1) $u_t + 2u_x + 3u = 0, \qquad u|_{t=0} = x^2;$

2) $u_t + 2u_x + u = xt, \qquad u|_{t=0} = 2 - x;$

3) $2u_t = u_x + xu, \qquad u|_{t=0} = 1;$

4) $2u_t = u_x - xu, \qquad u|_{t=0} = 2xe^{x^2/2};$

5) $u_t + (1+x^2)\,u_x - u = 0, \qquad u|_{t=0} = \operatorname{arctg} x;$

6) $u_t + (1+t^2)\,u_x + u = 1, \qquad u|_{t=0} = e^{-x};$

7) $u_t = u_x + \dfrac{2x}{1+x^2}u$, $\qquad u|_{t=0} = 1$;

8) $2tu_t + xu_x - 3x^2u = 0$, $\qquad u|_{t=1} = 5x^2$.

5. Задача Гурса. Формулировку постановки задачи Гурса см. в книге: Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — 5-е изд. — М.: Наука, 1985.

14.27. Доказать, что задача Гурса

$$u_{xy} = 0, \qquad 0 < y < \alpha x, \qquad x > 0, \qquad y > 0;$$

$$u|_{y=0} = f(x), \qquad u|_{y=\alpha x} = g(x)$$

имеет единственное решение

$$u(x,y) = f(x) + g\left(\frac{y}{\alpha}\right) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ и $f(0) = g(0)$.

14.28. Доказать, что задача Гурса

$$u_{xy} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad u|_{y=0} = f(x), \quad u|_{x=0} = g(y)$$

имеет единственное решение $u(x,y) = f(x) + g(y) - f(0)$, если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу

$$C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0) \quad \text{и} \quad f(0) = g(0).$$

14.29. Доказать, что решение задачи Гурса

$$u_{xy} = 0, \qquad y > \alpha x, \qquad x > 0, \qquad \alpha < 0;$$

$$u|_{y=\alpha x} = 0, \qquad u|_{x=0} = 0$$

не единственно. Показать, что множество всех решений этой задачи имеет вид

$$u(x,y) = f(x) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

где $f(x)$ — любая функция из класса $C^2(R^1)$, равная нулю при $x \leq 0$.

14.30. Доказать, что задача Гурса

$$u_{xy} = 0, \qquad 0 < y < \varphi(x), \qquad x > 0;$$

$$u|_{y=0} = f(x), \qquad u|_{y=\varphi(x)} = g(x)$$

имеет единственное решение

$$u(x,y) = f(x) + g\left(\varphi^{-1}(y)\right) - f\left(\varphi^{-1}(y)\right),$$

если функции $f(x), g(x), \varphi(x)$ принадлежат классу $C^2(x>0) \cap C(x \geq 0)$, $f(0) = g(0)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $\varphi(x)$.

14.31. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат классу $C^2(x > 0) \cap$ $\cap C(x \geq 0)$ и $\varphi(0) = \psi(0)$. При каких действительных значениях a задача Гурса

$$au_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad x > 0, \qquad y > 0,$$
$$u|_{y=0} = \varphi(x), \qquad u|_{x=0} = \psi(y)$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

14.32. Для каких положительных значений параметра b задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \qquad 0 < t < bx, \qquad x > 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \qquad u|_{t=bx} = 0$$

имеет только нулевое решение?

В задачах 14.33–14.55 требуется найти решение поставленной задачи Гурса и доказать единственность этого решения.

14.33. $$u_{xy} + u_x = x, \qquad x > 0, \qquad y > 0;$$
$$u|_{x=0} = y^2, \qquad u|_{y=0} = x^2.$$

14.34. $$u_{xy} + x^2 y u_x = 0, \qquad x > 0, \qquad y > 0;$$
$$u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{y=0} = x.$$

14.35. $$u_{xy} + u_y = 1, \qquad x > 0, \qquad y > 0;$$
$$u|_{x=0} = \varphi(y), \qquad u|_{y=0} = \psi(x),$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат классу $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ и $\varphi(0) = \psi(0)$.

14.36. $$u_{xy} + xu_x = 0, \qquad x > 0, \qquad y > 0;$$
$$u|_{x=0} = \varphi(y), \qquad u|_{y=0} = \psi(x),$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат классу $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ и $\varphi(0) = \psi(0)$.

14.37. $$2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, \qquad y > |x|;$$
$$u|_{y=x} = 1, \qquad u|_{y=-x} = (x+1)\,e^x.$$

14.38. $$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0, \qquad -\frac{1}{2}x < y < x, \qquad x > 0;$$
$$u|_{y=x} = 1 + 3x, \qquad u|_{y=-x/2} = 1.$$

14.39. $$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0, \qquad x < y < 5x, \qquad x > 0;$$
$$u|_{y=x} = \varphi(x), \qquad u|_{y=5x} = \psi(x),$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат классу $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ и $\varphi(0) = \psi(0)$.

14.40. $$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0, \qquad -\frac{1}{4}x^2 < y < 0, \qquad x > 0;$$
$$u|_{y=0} = 0, \qquad u|_{y=-x^2/4} = x^2.$$

14.41. $$u_{xy} - e^x u_{yy} = 0, \qquad y > e^{-x}, \qquad x > 0;$$
$$u|_{x=0} = y^2, \qquad u|_{y=-e^x} = 1 + x^2.$$

14.42. $yu_{xx} + (x-y)\,u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad 0 < y < x, \quad x > 0;$

$$u|_{y=0} = 0, \qquad u|_{y=x} = 4x^4.$$

14.43. $xu_{xx} + (x-y)\,u_{xy} - yu_{yy} = 0, \quad 0 < y < x, \quad x > 0;$

$$u|_{y=0} = 0, \qquad u|_{y=x} = x.$$

14.44. $y^2u_{xx} + u_{xy} = 0, \quad y^3 - 8 < 3x < y^3, \quad 0 < y < 2;$

$$u|_{y=2} = 3x + 8, \qquad u|_{3x=y^3} = 2y^3.$$

14.45. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0, \quad y > x, \quad x > 1;$

$$u|_{x=1} = 1, \qquad u|_{y=x} = x.$$

14.46. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} + xu_x - yu_y = 0, \quad \frac{1}{x} < y < x, \quad x > 1;$

$$u|_{y=x} = x, \qquad u|_{y=1/x} = 1 + \ln x.$$

14.47. $3x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0, \quad x < y < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad 0 < x < 1;$

$$u|_{x=y} = y, \qquad u|_{xy^3=1} = y^2.$$

14.48. $3x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0, \quad 1 < y < x, \quad x > 1;$

$$u|_{y=x} = 0, \qquad u|_{y=1} = \cos\frac{\pi x}{2}.$$

14.49. $$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0,$$

$$|y - \cos x| < x, \qquad x > 0;$$

$$u|_{y=x+\cos x} = \cos x, \qquad u|_{y=-x+\cos x} = \cos x.$$

14.50. $u_{xy} - \frac{1}{x-y}(u_x - u_y) = 1, \quad y < -x, \quad x > 2;$

$$u|_{y=-x} = 0, \qquad u|_{x=2} = 2 + 2y + \frac{1}{2}y^2.$$

14.51. $$u_{xx} - u_{yy} + \frac{2}{x}u_x = 0, \qquad y > 1 + |x|;$$

$$u|_{y=x+1} = 1 - x, \qquad u|_{y=1-x} = 1 + x.$$

14.52. $u_{xx} - u_{yy} + \frac{4}{x}u_x + \frac{2}{x^2}u = 0, \quad y > x, \quad x > 1;$

$$u|_{y=x} = 1, \qquad u|_{x=1} = y.$$

14.53. $u_{xy} = 1, \quad \alpha x < y < \beta x, \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < \beta;$

$$u|_{y=\alpha x} = 0, \qquad u|_{y=\beta x} = 0.$$

14.54. $$u_{xy} = 0, \qquad x^2 < y < 2x^2, \qquad x > 0;$$

$$u|_{y=x^2} = x^4, \qquad u|_{y=2x^2} = x^2.$$

14.55. $u_{xy} = 0, \quad x^4 < y < x^2, \quad 0 < x < 1;$

$$u|_{y=x^2} = 0, \qquad u|_{y=x^4} = x(1-x).$$

6. Задача Коши для квазилинейных уравнений.

14.56. Найти решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = 0, \qquad t > 0; \qquad u|_{t=0} = \operatorname{sign} x,$$

непрерывное для $t \geq 0$, $|x| + t \neq 0$ и непрерывно дифференцируемое при $t \neq |x|$.

14.57. Найти решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = 0, \qquad t > 0; \qquad u|_{t=0} = \begin{cases} \alpha & \text{при} \quad x < 0, \\ \beta & \text{при} \quad x > 0, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta (\geq \alpha)$ — постоянные, непрерывное для $t \geq 0$, $|x| + t \neq 0$ и непрерывно дифференцируемое вне прямых $t = x/\alpha$, $t = x/\beta$.

14.58. Доказать, что задача Коши для уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = a^2 u_{xx}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x)$$

подстановкой $u = -2a^2 \dfrac{v_x}{v}$ сводится к задаче Коши

$$v_t = a^2 v_{xx}, \qquad v|_{t=0} = \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^x u_0(\xi)\,d\xi\right\}.$$

14.59. Пусть u — решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \qquad u|_{t=0} = \operatorname{sign} x,$$

непрерывное при $t \geq 0$, $|x| + t \neq 0$ и непрерывно дифференцируемое при $t > 0$. Доказать, что это решение при $\varepsilon \longrightarrow +0$ стремится к решению задачи 14.56 (теорема Э. Хопфа).

14.60. Проверить, что решением уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

является функция

$$u(x,t) = \frac{a}{2\operatorname{ch}^2\left[\frac{\sqrt{a}}{2}(x - x_0 - at)\right]}, \qquad a > 0,$$

описывающая «уединенную волну» (солитонное решение). Показать, что это решение с конечной энергией

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + u_x^2)\,dx < \infty.$$

14.61. Для уравнения Лиувилля

$$u_{tt} - u_{xx} = ge^u, \qquad g > 0,$$

проверить следующие утверждения:

1) функция

$$u(x,t) = \ln \frac{\alpha^2(1-a^2)}{2g\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{\alpha}{2}(x-x_0-at)\right]}, \qquad 0 \le a \le 1,$$

является решением при всех x и t;

2) функция

$$u(x,t) = \ln \frac{8\varphi'(x+t)\,\psi'(x-t)}{g[\varphi(x+t)-\psi(x-t)]^2}$$

является решением при любых φ и ψ таких, что $\varphi, \psi \in C^3$, $\varphi'\psi' > 0$;

3) функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] - \ln\left\{\cos^2\left[\sqrt{\frac{g}{8}} \int\limits_{x-t}^{x+t} e^{u_0(\xi)/2} d\xi\right]\right\}$$

является решением задачи Коши с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = 0,$$

если

$$\left|\sqrt{\frac{g}{8}} \int\limits_{x-t}^{x+t} e^{u_0(\xi)/2} d\xi\right| < \frac{\pi}{2}.$$

14.62. Проверить, что для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = -g \sin u, \qquad g > 0$$

функция

$$u(x,t) = 4 \operatorname{arctg} \exp\left\{\pm \frac{\sqrt{g}\,(x-x_0-at)}{\sqrt{1-a^2}}\right\}, \qquad 0 \le a < 1,$$

является решением с конечной энергией

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(u_t^2 + u_x^2\right) dx < \infty.$$

14.63. Проверить, что решением нелинейного уравнения Шрёдингера

$$iu_t + u_{xx} + \nu|u|^2 u = 0, \qquad \nu > 0,$$

является функция

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\nu}}\, \frac{\exp\left\{i\left[\frac{a}{2}x - \left(\frac{a^2}{4} - \alpha\right)t\right]\right\}}{\mathrm{ch}\left[\sqrt{\alpha}\,(x-x_0-at)\right]}, \qquad \alpha \ge 0.$$

Ответы к § 14

14.9. $(1+4at)^{-n/2} \exp\left\{\dfrac{ia|x|^2}{1+4at}\right\}$.

14.10. 1) $x^4 + t^2\left(\dfrac{1}{2}x^3 - 12\right) + itx\left(12x + t^2\right)$;

2) $\dfrac{x}{(1-4t)^{3/2}} \exp\left\{-\dfrac{ix^2}{1-4t}\right\}$;

3) $x\sin t + x^2 + y^2\cos t + 2i(t+\sin t)$;

4) $i\left(x^3+y^3+z^3\right) - t\left(6y+6z-y^2-iz^3\right) + t^2(i-3z)$;

5) $\left(\sqrt{1+4it}\right)^{-n}\exp\left\{-\dfrac{|x|^2}{1+4it}\right\}$, $0 \le \arg\sqrt{1+4it} < \dfrac{\pi}{2}$.

14.11. 1) $\mathscr{E}(x,t)$; 2) $\dfrac{ix_k}{2t}\,\mathscr{E}(x,t)$;

3) $\displaystyle\int_0^t \mathscr{E}(x+x_0,\tau)\,d\tau$; 4) $\displaystyle\int_0^{t-t_0} \mathscr{E}(x,\tau)\,d\tau$.

14.12. 1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\pi i/4}\left(\int_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})} e^{iy^2}\,dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{x/(2\sqrt{\tau})} e^{iy^2}\,dy\,d\tau\right)$;

2) $\displaystyle\theta(t-1)(t-1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\pi i/4}\int_{(x-1)/(2\sqrt{t})}^{(x+1)/(2\sqrt{t})} e^{iy^2}\,dy$;

3) $x^2 + 2it - \theta(t-\pi)(1+\cos t)$;

4) $2\sqrt{t} + \cos x e^{-it}$;

5) $\theta(t-1)(e^t - e - te) + (x\sin x + 2it\cos x)\,e^{-it}$.

14.15. $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)\,f(x,\tau)\,d\tau$.

14.16. $u_0(x) + tu_1(x)$.

14.17. $\displaystyle\operatorname{Re}\int_0^t w(x,\tau)\,d\tau$.

14.18. $i\operatorname{Im} w(x,t)$.

14.20. 1) $tx^4 + t^3\left(x^3-4\right)$; 2) $x^2y^2 - 4t^2 + xy(e^t - 1 - t)$;

3) $3x^2y^2z^2t^2 - 2\left(x^2+y^2+z^2\right)t^4$;

4) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+4t}}\cos\dfrac{x^2}{1+4t} + \dfrac{1}{\sqrt{1-4t}}\cos\dfrac{x^2}{1-4t}\right)$.

14.26. 1) $(x-2t)^2e^{-3t}$; 2) $4 - x - 2t + xt - 2e^{-t}$;

3) $\exp\left\{\dfrac{t}{8}(4x+t)\right\}$; 4) $(2x+t)\exp\left\{\dfrac{1}{2}x^2\right\}$;

5) $(\operatorname{arctg} x - t)\,e^t$; 6) $1 - e^{-t} + \exp\left\{-x + \dfrac{1}{3}t^3\right\}$;

7) $\dfrac{1+(x+t)^2}{1+x^2}$; 8) $\dfrac{5x^2}{t}\exp\left\{\dfrac{3x^2(t-1)}{2t}\right\}$.

14.31. $\varphi(x-ay) - \varphi(-ay) + \psi(y)$, $a \le 0$.

14.32. $b \le \dfrac{1}{a}$.

14.33. $y^2 + \frac{1}{2}x^2(1+e^{-y})$.

14.34. $\int\limits_0^x \exp\left\{-\frac{1}{2}\xi^2 y^2\right\} d\xi$.

14.35. $y + \psi(x) + [\varphi(y) - \varphi(0) - y]\,e^{-x}$.

14.36. $\varphi(y) + \int\limits_0^x \psi'(\xi)\,e^{-\xi y}\,d\xi$.

14.37. $\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\exp\left\{\frac{1}{2}(x-y)\right\}$.

14.38. $1 + (x+2y)\exp\left\{\frac{1}{3}(y-x)\right\}$.

14.39. $\varphi\left(\frac{5x-y}{4}\right) + \psi\left(\frac{y-x}{4}\right) - \varphi(0)$.

14.40. $2x\sqrt{-y}$.

14.41. $x^2 + (y - 1 + e^x)^2$.

14.42. $xy(x+y)^2$.

14.43. y.

14.44. $3x + y^3$.

14.45. x.

14.46. $\sqrt{xy} + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}$.

14.47. $\sqrt[4]{\frac{y^5}{x}}$.

14.48. $y\cos\frac{\pi x}{2y}$.

14.49. $-1 + 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y-\cos x}{2}$.

14.50. $\frac{1}{2}(x+y)^2$. Указание. Сделать замену $u = \frac{1}{x-y}v$.

14.51. $2 - y$. Указание. Сделать замену $u = \frac{1}{x}v$.

14.52. $\frac{y}{x}$. Указание. Сделать замену $u = \frac{1}{x^2}v$.

14.53. $\frac{1}{\alpha+\beta}(y - \alpha x)(\beta x - y)$.

14.54. $\frac{4}{3}x^4 - x^2 + y - \frac{1}{3}y^2$.

14.55. $x - \sqrt{y}$.

14.56. -1 при $x \le -t$; $+1$ при $x \ge t$; $\frac{x}{t}$ при $x \le t$.

Указание. Искать решение в виде $f\left(\frac{x}{t}\right)$.

14.57. α при $x \le t\alpha$; β при $x \ge t\beta$; $\frac{x}{t}$ при $t\alpha \le x \le t\beta$.

Глава V

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть S — гладкая поверхность, ограничивающая область $G \in R^n$, и $\boldsymbol{n}_x$ — внешняя нормаль к S в точке $x \in S$. Функция u имеет *правильную нормальную производную* $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ на S изнутри S, если существует

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ x' \in G \cap (-\boldsymbol{n}_x)}} \frac{\partial u(x')}{\partial \boldsymbol{n}_x} = \frac{\partial u(x)}{\partial \boldsymbol{n}_x} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$$

равномерно по всем $x \in S$.

I. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа: найти гармоническую в $G \subset R^3$ функцию $u \in C(\overline{G})$, принимающую на S заданные (непрерывные) значения u_0^-.

II. Внешняя задача Дирихле: найти гармоническую в области $G_1 = R^3 \backslash \overline{G}$ функцию $u \in C(\overline{G}_1)$, $u(\infty) = 0$, принимающую на S заданные (непрерывные) значения u_0^+.

III. Внутренняя задача Неймана: найти гармоническую в $G \subset R^3$ функцию $u \in C(\overline{G})$, имеющую на S заданную (непрерывную) правильную нормальную производную u_1^-.

IV. Внешняя задача Неймана: найти гармоническую в G_1 функцию $u \in C(\overline{G}_1)$, $u(\infty) = 0$, имеющую на S заданную (непрерывную) правильную нормальную производную u_1^+.

Задачи I, II и IV однозначно разрешимы. Решение задачи III определено с точностью до произвольной постоянной, причем

$$\int_S u_1^- \, dS = 0$$

— условие ее разрешимости.

Аналогично ставятся задачи I–IV в R^2, за исключением того, что для внешних задач от решения требуется лишь ограниченность при $|x| \longrightarrow \infty$. Задачи I и II однозначно разрешимы. Решения задач III и IV определены с точностью до произвольных постоянных, причем

$$\int_S u_1^{\mp} \, dS = 0$$

— условие их разрешимости.

§ 15. Задача Штурма–Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu \equiv -(p(x)\,y'(x))' + q(x)\,y(x) = f(x), \tag{1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$, $p \in C^1([a,b])$, $p(x) \neq 0$, $q \in C([a,b])$, $f \in C(a,b) \cap L_2(a,b)$.

Обычно в физических задачах выполняются условия

$$\alpha_1\alpha_2 \geq 0, \qquad \beta_1\beta_2 \geq 0, \qquad p(x) > 0, \qquad q(x) \geq 0.$$

Область определения M_L оператора L состоит из функций $y(x)$ класса $C^2(a,b) \cap C^1([a,b])$, $y'' \in L_2(a,b)$, удовлетворяющих граничным условиям (2).

Задача о нахождении тех значений λ (собственных значений оператора L), при которых уравнение $Ly = \lambda y$ имеет ненулевые решения $y(x)$ из области определения M_L (собственные функции, соответствующие этим собственным значениям), называется *задачей Штурма–Лиувилля*.

Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение оператора L, то решение краевой задачи (I) в классе M_L единственно и выражается формулой

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi,$$

где $G(x,\xi)$ — функция Грина краевой задачи (1)–(2) или оператора L.

Функция $G(x,\xi)$ представляется в виде

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{k}\begin{cases} y_1(x)\,y_2(\xi), & a \leq x \leq \xi, \\ y_1(\xi)\,y_2(x), & \xi \leq x \leq b, \end{cases}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — ненулевые решения уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму граничному условию (2),

$$k = p(x)\,w(x) = p(a)\,w(a) \neq 0, \qquad x \in [a,b],$$

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

— определитель Вронского.

Краевая задача

$$Ly = \lambda y + f,$$

где $f \in C(a,b) \cap L_2(a,b)$ при условии, что $\lambda = 0$ не есть собственное значение оператора L, эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi + \int\limits_a^b G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi.$$

Этот метод иногда можно применять и к задачам с вырождением, когда $p(x)$ обращается в нуль или бесконечность или $q(x)$ обращается в бесконечность на одном из концов отрезка $[a,b]$.

15.1. Найти функцию Грина оператора L на интервале $(0,1)$ в следующих случаях:

1) $Ly = -y''$, $\quad y(0) = y(1) = 0$;
2) $Ly = -y''$, $\quad y'(0) = y(0)$, $\quad y'(1) + y(1) = 0$;
3) $Ly = -y''$, $\quad y(0) = hy'(0)$, $\quad h \geq 0$, $\quad y(1) = 0$;
4) $Ly = -y'' - y$, $\quad y(0) = y(1) = 0$;
5) $Ly = -y'' - y$, $\quad y(0) = y'(0)$, $\quad y(1) = y'(1)$;
6) $Ly = -y'' + y$, $\quad y(0) = y(1) = 0$;
7) $Ly = -y'' + y$, $\quad y'(0) = y'(1) = 0$.

15.2. Найти функцию Грина оператора L на интервале $(1,2)$ в следующих случаях:

1) $Ly = -x^2y'' - 2xy'$, $\quad y'(1) = 0$, $\quad y(2) = 0$;
2) $Ly = -xy'' - y'$, $\quad y'(1) = 0$, $\quad y(2) = 0$;
3) $Ly = -x^3y'' - 3x^2y - xy$, $\quad y(1) = 0$, $\quad y(2) + 2y'(2) = 0$;
4) $Ly = -x^4y'' - 4x^3y' - 2x^2y$, $\quad y(1) + y'(1) = 0$, $\quad y(2) + 3y'(2) = 0$.

15.3. Найти функцию Грина оператора L на интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ в следующих случаях:

1) $Ly = -(\cos^2 x \cdot y')'$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$;
2) $Ly = -\left(\dfrac{y'}{\cos x}\right)'$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$;
3) $Ly = -\cos^2 x \cdot y'' + \sin 2x \cdot y'$, $\quad y(0) = y'(0)$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

15.4. Найти функцию Грина оператора L на интервале $(0,1)$ в следующих случаях:

1) $Ly = -(1 + x^2)\, y'' - 2xy'$, $\quad y(0) = y'(0)$, $\quad y(1) = 0$;
2) $Ly = -(1 + x^2)\, y'' - 2xy'$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y(1) + y'(1) = 0$;
3) $Ly = -(3 + x^2)\, y'' - 2xy'$, $\quad y(0) = y'(0)$, $\quad y(1) = 0$;
4) $Ly = -(x+1)^2y'' - 2(x+1)\, y' + 2y$, $\quad y(0) = y(1) = 0$;
5) $Ly = -\left(\dfrac{y'}{x-2}\right)' + \dfrac{3y}{(x-2)^3}$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y(1) = 0$;
6) $Ly = -(4 - x^2)\, y'' + 2xy'$, $\quad y(0) = y(1) = 0$;
7) $Ly = -(xy')' + \dfrac{4}{x}\, y$, $\quad y(0) = y(1) = 0$;
8) $Ly = -\dfrac{1}{x^2}\, y'' + \dfrac{2}{x^3}\, y' - \dfrac{2}{x^4}\, y$, $\quad y'(0) = y(1) = 0$.

15.5. Найти функцию Грина оператора L на интервале $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ при условии $|y(0)| < \infty$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ в следующих случаях:

1) $Ly = -(\mathrm{tg}^2 x \cdot y')'$; 2) $Ly = -(\mathrm{tg}\, x \cdot y')'$.

15.6. Найти функцию Грина оператора L на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ в следующих случаях:

1) $Ly = -\cos^2 x \cdot y'' + \sin 2x \cdot y'$, $y(0) = 0$, $\left|y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < \infty$;

2) $Ly = -\sin^2 x \cdot y'' - \sin 2x \cdot y'$, $|y(0)| < \infty$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

3) $Ly = -\sin^2 x \cdot y'' - \sin 2x \cdot y'$, $|y(0)| < \infty$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

15.7. Найти функцию Грина оператора L на интервале $(0, 1)$ при условии $|y(0)| < \infty$ в следующих случаях:

1) $Ly = -x^2 y'' - 2xy + 6y$, $y'(1) + 3y(1) = 0$;
2) $Ly = -y'' + \frac{2}{x^2}\, y$, $y(1) = 0$;
3) $Ly = -x^2 y'' - 2xy' + 2y$, $y'(1) = 0$;
4) $Ly = -(xy')'$, $y(1) = 0$;
5) $Ly = -xy'' - y'$, $y'(1) + y(1) = 0$;
6) $Ly = -x^2 y'' - 2xy' + 2y$, $y(1) + y'(1) = 0$;
7) $Ly = -x^2 y'' - 2xy' + 2y$, $2y(1) + y'(1) = 0$;
8) $Ly = -y'' + \frac{a(a-1)}{x^2}\, y$, $a > 1$, $y(1) = 0$;
9) $Ly = -(xy')' + (1 + x)\, y$, $y(1) = 0$.

15.8. Найти функцию Грина оператора $Ly = -x^4 y'' - 4x^3 y' - 2x^2 y$ на интервале $(1, 3)$, если $y(1) + y'(1) = 0$, $2y(3) + 3y'(3) = 0$.

15.9. Найти функцию Грина оператора L на интервале $(0, 1)$ в следующих случаях:

1) $Ly = -\left(e^{-x^2/2} y'\right)' + e^{-x^2/2} y$, $y(0) = y(1) = 0$;
2) $Ly = -e^{x^2} y'' - 2xe^{x^2} y'$, $y(0) = 2y'(0)$, $y(1) = 0$;
3) $Ly = -y'' + (1 + x^2)\, y$, $y(0) = y'(1) = 0$.

Указание. Частное решение уравнения $-y'' + (1 + x^2)\, y = 0$ можно искать в виде $y = e^{z(x)}$.

15.10. Найти функцию Грина оператора $Ly = -\left(\sqrt{x} y'\right)' + 3x^{-3/2} y$ на интервале $(0, 2)$, если $|y(0)| < \infty$, $y(2) = 0$.

15.11. Найти функцию Грина оператора $Ly = -(x+1)\, y'' - y'$, если $|y(-1)| < \infty$, $y(0) = 0$.

15.12. Найти функцию Грина оператора $Ly = -x^2 y'' - xy' + n^2 y$, если $|y(0)| < \infty$, $y(1) = 0$.

15.13. Найти функцию Грина оператора $Ly = -[(x^2 - 1)\, y']' + 2y$, если $|y(1)| < \infty$, $y(2) = 0$.

15.14. Свести задачу Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению в следующих случаях:

1) $Ly \equiv -(1+e^x)\,y'' - e^x y' = \lambda x^2 y,\ 0 < x < 1,\ y(0) - 2y'(0) = 0,$ $y'(1) = 0;$

2) $Ly \equiv -(x^2+1)\,y'' - 2xy' + 2y = \lambda y,\ 0 < x < 1,\ y'(0) = 0,$ $y(1) - y'(1) = 0;$

3) $Ly \equiv -\sqrt{1+e^{2x}}\,y'' - \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,y' = \lambda xy,\ 0 < x < 1,\ y(0) =$ $= \sqrt{2}y'(0),\ y'(1) = 0;$

4) $Ly \equiv -(1-x^2)\,y'' + 2xy' - 2y = \lambda y,\ 0 < x < 1,\ y'(0) = 0,$ $|y(1)| < \infty;$

5) $Ly \equiv -\cos^4 x \cdot y'' + 4\sin x\cos^3 x \cdot y' = \lambda xy,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ 2y(0)-$ $-y'(0) = 0,\ \left|y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right| < \infty;$

6) $Ly \equiv -x^2 y'' - 2xy' + (2\cos^2 x + 1)\,y = \lambda y\cos 2x,\ 1 < x < 2,\ y(1) = 0,$ $y'(2) = 0;$

7) $Ly \equiv -y'' = \lambda y,\ 0 < x < 1,\ y'(0) = y'(1) = 0.$

15.15. Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения
$$-2xy'' - y' = 2\lambda\sqrt{x}\,y, \qquad 0 < x < 1,$$
при граничных условиях $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x}\cdot y') = 0,\quad y(1) = 0.$

15.16. Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения $-xy'' + y' = \lambda y,\ 1 < x < 2,$ при граничных условиях $y(1) =$ $= y'(2) = 0.$

15.17. Свести к интегральному уравнению нахождение решений каждого из следующих уравнений при указанных граничных условиях:

1) $-(1+x^2)\,y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y'(1) = 0;$

2) $-e^x y'' - e^x y' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0,\ \ y(1) + y'(1) = 0;$

3) $-y'' + \lambda y = f(x), \qquad y(0) = hy'(0),\ \ h \ge 0,\ \ y(1) = 0;$

4) $-xy'' - y' + \lambda xy = 0, \qquad |y(0)| < \infty,\ \ y(1) = 0.$

15.18. С помощью функции Грина решить следующие задачи:

1) $-\dfrac{xy''}{1+x} - \dfrac{y'}{(1+x)^2} = f(x),\ 1 < x < e,\ y(1) = 0,\ y(e) - ey'(e) = 0,$ где e — основание натуральных логарифмов;

2) $-x^4 y'' - 4x^3 y' - 2x^2 y = f(x),\ 1 < x < 2,\ y(1) = 0,\ y(2) + y'(2) = 0;$

3) $-\dfrac{x}{1-x}\,y'' - \dfrac{1}{(1-x)^2}\,y' = f(x),\ -1 < x < 0,\ 2y(-1) + y'(-1) = 0,$ $|y(0)| < \infty;$

4) $-(1+\cos x)\,y'' + \sin x \cdot y' = f(x),\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ y(0) - 2y'(0) = 0,$ $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$

5) $-y'' + \dfrac{2}{x^2}\,y = f(x),\ 1 < x < 2,\ 2y(1) = y'(1),\ y(2) + 2y'(2) = 0.$

15.19. Доказать, что краевая задача

$$-y'' + q(x)\,y = f(x), \qquad y'(a) - hy(a) = c_1, \qquad y'(b) + Hy(b) = c_2$$

эквивалентна трем задачам Коши:

1) $g' + g^2 = q(x),\ g(a) = -h;$

2) $Y' - g(x)\,Y = -f(x),\ Y(a) = c_1;$

3) $y' + g(x)\,y = Y(x),\ y(b) = \dfrac{c_2 - Y(b)}{H - g(b)}.$

Указание. Факторизовать оператор

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q = -\left(\frac{d}{dx} - g\right)\left(\frac{d}{dx} + g\right).$$

Ответы к § 15

15.1. 1) $\begin{cases} x(1-\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$ 2) $\dfrac{1}{3}\begin{cases} (x+1)(2-\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ (\xi+1)(2-x), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

3) $-\dfrac{1}{h+1}\begin{cases} (x+h)(\xi-1), & 0 \le x \le \xi, \\ (\xi+h)(x-1), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

4) $\dfrac{1}{\sin 1}\begin{cases} \sin x\,\sin(1-\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \sin(1-x)\,\sin\xi, & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

5) $\dfrac{1-\mathrm{ctg}\,1}{2}\begin{cases} (\sin x + \cos x)\left(\dfrac{\mathrm{ctg}\,1+1}{\mathrm{ctg}\,1-1}\,\sin\xi + \cos\xi\right), & 0 \le x \le \xi, \\ \left(\dfrac{\mathrm{ctg}\,1+1}{\mathrm{ctg}\,1-1}\,\sin x + \cos x\right)(\sin\xi + \cos\xi), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

6) $\dfrac{1}{\mathrm{sh}\,1}\begin{cases} \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,(1-\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{sh}\,(1-x), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

7) $\dfrac{1}{2(e^2-1)}\begin{cases} (e^x + e^{-x})(e^\xi + e^{2-\xi}), & 0 \le x \le \xi, \\ (e^\xi + e^{-\xi})(e^x + e^{2-x}), & \xi \le x \le 1. \end{cases}$

15.2. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\xi}, & 1 \le x \le \xi, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}, & \xi \le x \le 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \ln\dfrac{2}{\xi}, & 1 \le x \le \xi, \\ \ln\dfrac{2}{x}, & \xi \le x \le 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{-\ln x}{x\xi}, & 1 \le \xi \le 2, \\ \dfrac{-\ln\xi}{x\xi}, & \xi \le x \le 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\xi^2} - \dfrac{2}{\xi}\right), & 1 \le x \le \xi, \\ \dfrac{1}{\xi}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\right), & \xi \le x \le 2. \end{cases}$

15.3. 1) $\begin{cases} \mathrm{tg}\,x(1-\mathrm{tg}\,\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \mathrm{tg}\,\xi(1-\mathrm{tg}\,x), & \xi \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -\sin x\left(\sqrt{2}\sin\xi - 1\right), & 0 \le x \le \xi, \\ -\sin\xi\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right), & \xi \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

3) $\dfrac{1}{4}\begin{cases} (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg}\xi - 3), & 0 \le x \le \xi, \\ (\operatorname{tg}\xi + 1)(\operatorname{tg} x - 3), & \xi \le x \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

15.4. 1) $\begin{cases} \dfrac{4}{\pi+4}\,(1 + \operatorname{arctg} x)\left(\operatorname{arctg}\xi - \dfrac{\pi}{4}\right), & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{4}{\pi+4}\,(1 + \operatorname{arctg}\xi)\left(\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{4}\right), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \operatorname{arctg} x\left(-\dfrac{4}{\pi+2}\operatorname{arctg}\xi + 1\right), & 0 \le x \le \xi, \\ \operatorname{arctg}\xi\left(-\dfrac{4}{\pi+2}\operatorname{arctg} x + 1\right), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

3) $\dfrac{2}{\pi + 2\sqrt{3}}\begin{cases} \left(1 + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{\pi}{6} - \operatorname{arctg}\dfrac{\xi}{\sqrt{3}}\right), & 0 \le x \le \xi, \\ \left(1 + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\xi}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{\pi}{6} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{21}\left[\dfrac{1}{(1+x)^2} - (x+1)\right]\left[\dfrac{8}{(\xi+1)^2} - (\xi+1)\right], & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{1}{21}\left[\dfrac{1}{(\xi+1)^2} - (\xi+1)\right]\left[\dfrac{8}{(x+1)^2} - (x+1)\right], & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

5) $\dfrac{1}{60}\begin{cases} \left[(x-2)^3 - \dfrac{16}{x-2}\right]\left[\dfrac{1}{\xi-2} - (\xi-2)^3\right], & 0 \le x \le \xi, \\ \left[(\xi-2)^3 - \dfrac{16}{\xi-2}\right]\left[\dfrac{1}{x-2} - (x-2)^3\right], & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} -\dfrac{1}{4\ln 3}\ln\dfrac{2+x}{2-x}\left(\ln\dfrac{2+\xi}{2-\xi} - \ln 3\right), & 0 \le x \le \xi, \\ -\dfrac{1}{4\ln 3}\ln\dfrac{2+\xi}{2-\xi}\left(\ln\dfrac{2+x}{2-x} - \ln 3\right), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}\left(\dfrac{1}{\xi^2} - \xi^2\right), & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{\xi^2}{4}\left(\dfrac{1}{x^2} - x^2\right), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2(\xi - \xi^2), & 0 \le x \le \xi, \\ \xi^2(x - x^2), & \xi \le x \le 1. \end{cases}$

15.5. 1) $\begin{cases} -\operatorname{ctg}\xi - \xi + \left(1 + \dfrac{\pi}{4}\right), & 0 \le x \le \xi, \\ -\operatorname{ctg} x - x + \left(1 + \dfrac{\pi}{4}\right), & \xi \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \ln\left(\sqrt{2}\sin\xi\right), & 0 \le x \le \xi, \\ \ln\left(\sqrt{2}\sin x\right), & \xi \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

15.6. 1) $\begin{cases} -\operatorname{tg} x, & 0 \le x \le \xi, \\ -\operatorname{tg} \xi, & \xi \le x \le \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{ctg} \xi, & 0 \le x \le \xi, \\ \operatorname{ctg} x, & \xi \le x \le \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \operatorname{ctg} \xi + 1, & 0 \le x \le \xi, \\ \operatorname{ctg} x + 1, & \xi \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

15.7. 1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5\xi^3}, & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{\xi^2}{5x^3}, & \xi \le x \le 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}\left(\dfrac{1}{\xi} - \xi^2\right), & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{\xi^2}{3}\left(\dfrac{1}{x} - x^2\right), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}\left(2\xi + \dfrac{1}{\xi^2}\right), & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{\xi}{3}\left(2x + \dfrac{1}{x^2}\right), & \xi \le x \le 1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -\ln \xi, & 0 \le x \le \xi, \\ -\ln x, & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 1 - \ln \xi, & 0 \le x \le \xi, \\ 1 - \ln x, & \xi \le x \le 1. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{x}{6}\,(\xi + 2\xi^{-2}), & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{\xi}{6}\,(x + 2x^{-2}), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}\, x\xi^{-2}, & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{1}{3}\, \xi x^{-2}, & \xi \le x \le 1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dfrac{1}{1-2a}\, x^a(\xi^a - \xi^{1-a}), & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{1}{1-2a}\, \xi^a(x^a - x^{1-a}), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} e^{x+\xi} \displaystyle\int_{\xi}^{1} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt, & 0 \le x \le \xi, \\ e^{x+\xi} \displaystyle\int_{x}^{1} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt, & \xi \le x \le 1. \end{cases}$

15.8. $\begin{cases} \dfrac{1}{x\xi^2}, & 1 \le x \le \xi, \\ \dfrac{1}{\xi x^2}, & \xi \le x \le 3. \end{cases}$

15.9. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{\Phi(0) - \Phi(1)}\, e^{(x^2+\xi^2)/2}(\Phi(x) - \Phi(0))(\Phi(\xi) - \Phi(1)), & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{1}{\Phi(0) - \Phi(1)}\, e^{(x^2+\xi^2)/2}(\Phi(\xi) - \Phi(0))(\Phi(x) - \Phi(1)), & \xi \le x \le 1, \end{cases}$

где $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2/2} d\xi$;

2) $\begin{cases} -\left(2 + \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2} dt\right)^{-1} \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt + 2\right) \displaystyle\int_1^{\xi} e^{-t^2} dt, & 0 \le x \le \xi, \\ -\left(2 + \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2} dt\right)^{-1} \left(\displaystyle\int_0^{\xi} e^{-t^2} dt + 2\right) \displaystyle\int_1^{x} e^{-t^2} dt, & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} Ky_1(x)\,y_2(\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ Ky_1(\xi)\,y_2(x), & \xi \le x \le 1, \end{cases}$ где $K = \left(e^{-1} + \int\limits_0^1 e^{-t^2}\,dt\right)^{-1}$,

$$y_1(x) = e^{x^2/2}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt, \quad y_2(x) = e^{x^2/2}\left(e^{-1} + \int\limits_x^1 e^{-t^2}\,dt\right).$$

15.10. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{28\sqrt{2}}\left(\xi^2 - 8\sqrt{2}\xi^{-3/2}\right), & 0 \le \xi \le x, \\ \dfrac{\xi^2}{28\sqrt{2}}\left(x^2 - 8\sqrt{2}x^{-3/2}\right), & \xi \le x \le 2. \end{cases}$

15.11. $\begin{cases} -\ln(\xi+1), & -1 \le x \le \xi, \\ -\ln(x+1), & \xi \le x \le 0. \end{cases}$

15.12. $\begin{cases} \dfrac{x^n}{2n}(\xi^{-n} - \xi^n), & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{\xi^n}{2n}(x^{-n} - x^n), & \xi \le x \le 1. \end{cases}$

15.13. $\begin{cases} x\left[1 + \dfrac{\xi}{2}\ln\dfrac{\xi-1}{\xi+1} + \dfrac{\xi}{2}(\ln 3 - 1)\right], & 1 \le x \le \xi, \\ \xi\left[1 + \dfrac{x}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x}{2}(\ln 3 - 1)\right], & \xi \le x \le 2. \end{cases}$

15.14. 1) $y(x) = \lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi)\,\xi^2 y(\xi)\,d\xi,$

где $G(x,\xi) = \begin{cases} x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2, & 0 \le x \le \xi, \\ \xi - \ln(1+e^\xi) + 1 + \ln 2, & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

2) $y(x) = \lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi,$ где $G(x,\xi) = \begin{cases} -\xi(1 + x\,\mathrm{arctg}\,x), & 0 \le x \le \xi, \\ -x(1 + \xi\,\mathrm{arctg}\,\xi), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

3) $y(x) = \lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi)\,\xi y(\xi)\,d\xi,$

где $G(x,\xi) = \begin{cases} -\ln\left(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}\right) + 1 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right), & 0 \le x \le \xi, \\ -\ln\left(e^{-\xi} + \sqrt{1+e^{-2\xi}}\right) + 1 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

4) $y(x) = \lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi,$ где $G(x,\xi) = \begin{cases} \xi\left(\dfrac{x}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - 1\right), & 0 \le x \le \xi, \\ x\left(\dfrac{\xi}{2}\ln\dfrac{1+\xi}{1-\xi} - 1\right), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

5) $y(x) = \lambda\int\limits_0^{\pi/2} G(x,\xi)\,\xi y(\xi)\,d\xi,$ где $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \mathrm{tg}\,x + \dfrac{1}{2}, & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{\mathrm{tg}^3 \xi}{3} + \mathrm{tg}\,\xi + \dfrac{1}{2}, & \xi \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

6) $y(x) = (\lambda - 1) \int\limits_1^2 G(x,\xi) \cos 2\xi \, y(\xi)\, d\xi,$

$$\text{где } G(x,\xi) = \frac{1}{15} \begin{cases} (x - x^{-2})(\xi + 4\xi^{-2}), & 1 \le x \le \xi, \\ (\xi - \xi^{-2})(x + 4x^{-2}), & \xi \le x \le 2; \end{cases}$$

7) $y(x) = (\lambda - a) \int\limits_0^1 G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi,$

где $G(x,\xi) = -\dfrac{1}{\sqrt{a}\sin\sqrt{a}} \begin{cases} \cos\sqrt{a}x \cdot \cos\sqrt{a}(\xi - 1), & 0 \le x \le \xi, \\ \cos\sqrt{a}\xi \cdot \cos\sqrt{a}(x - 1), & \xi \le x \le 1, \end{cases}$ $a > 0$, $a \ne (\pi n)^2$, n целое.

15.15. $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi$, где $G(x,\xi) = \begin{cases} 2(-1+\sqrt{\xi}), & 0 \le x \le \xi, \\ 2(-1+\sqrt{x}), & \xi \le x \le 1. \end{cases}$

15.16. $y(x) = \lambda \int\limits_1^2 G(x,\xi) \dfrac{y(\xi)}{\xi^2}\, d\xi$, где $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x^2 - 1), & 1 \le x \le \xi, \\ \dfrac{1}{2}(\xi^2 - 1), & \xi \le x \le 2. \end{cases}$

15.17. 1) $y(x) = -\lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi$, где $G(x,\xi) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & 0 \le x \le \xi, \\ \operatorname{arctg} \xi, & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

2) $y(x) = -\lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi$, где $G(x,\xi) = \begin{cases} (-e^{-x}+1)\, e^{-\xi}, & 0 \le x \le \xi, \\ (-e^{-\xi}+1)\, e^{-x}, & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

3) $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^1 G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi,$

$$\text{где } G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{-\xi + 1}{h+1}(x + h), & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{-x + 1}{h+1}(\xi + h), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$$

4) $y(x) = -\lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi)\, \xi y(\xi)\, d\xi$, где $G(x,\xi) = \begin{cases} \ln \xi, & 0 \le x \le \xi, \\ \ln x, & \xi \le x \le 1. \end{cases}$

15.18. 1) $y(x) = \int\limits_1^e G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi,$

$$\text{где } G(x,\xi) = \begin{cases} (x + \ln x - 1)(\xi + \ln \xi), & 0 \le x \le \xi, \\ (\xi + \ln \xi - 1)(x + \ln x), & \xi \le x \le 1; \end{cases}$$

2) $y(x) = \int\limits_1^2 G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$, где $G(x,\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{1}{\xi^2}, & 1 \le x \le \xi, \\ \left(\dfrac{1}{\xi} - \dfrac{1}{\xi^2}\right)\dfrac{1}{x^2}, & \xi \le x \le 1; \end{cases}$

3) $y(x) = \int\limits_{-1}^{0} G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$, где $G(x,\xi) = \begin{cases} \ln|x| - x, & -1 \le x \le \xi, \\ \ln|\xi| - \xi, & \xi \le x \le 0; \end{cases}$

4) $y(x) = \int\limits_{0}^{\pi/2} G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$,

$$\text{где}\quad G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\right), & 0 \le x \le \xi, \\ \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\xi}{2} + 1\right)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right), & \xi \le x \le \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

5) $y(x) = \int\limits_{1}^{2} G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$, где $G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{x^2}{3\xi}, & 1 \le x \le \xi, \\ \frac{\xi^2}{3x}, & \xi \le x \le 2. \end{cases}$

§ 16. Метод разделения переменных для уравнений Лапласа и Пуассона

1. Краевые задачи на плоскости. Решение краевых задач в случае простейших областей (круг, круговое кольцо, прямоугольник и др.) можно получить методом разделения переменных.

Изложим этот метод решения задачи Дирихле для круга: найти функцию $u = u(r, \varphi)$, удовлетворяющую внутри круга уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

и принимающую заданные значения на границе круга, т. е.

$$u|_{r=R} = f(\varphi). \tag{2}$$

Уравнение (1) в полярных координатах (r, φ) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{3}$$

Ищем частные решения уравнения (3) вида

$$u = Z(r)\,\Phi(\varphi). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \tag{5}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dZ}{dr}\right) - \lambda Z = 0. \tag{6}$$

Так как $u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$, то $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, и из (5) находим $\sqrt{\lambda} = n$ (n целое), а

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

Тогда из (6), полагая $Z(r) = r^\alpha$, получаем $\alpha^2 = n^2$, $\alpha = \pm n\,(n > 0)$ и, следовательно,

$$Z_n(r) = ar^n + br^{-n}.$$

При $n = 0\,(\lambda = 0)$ из (6) находим $Z(r) = C_0 \ln r + C$.

Для решения внутренней задачи Дирихле нужно положить $Z_n(r) = ar^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $Z_0(r) = C$, так как $r^{-n} \longrightarrow \infty$ и $\ln r \longrightarrow -\infty$ при $r \longrightarrow +0$. Решение внутренней задачи Дирихле ищем в виде ряда

$$u(r,\varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n}\,(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \tag{7}$$

где коэффициенты A_n и B_n определяются из краевого условия (2):

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos n\psi\,d\psi, \qquad C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\,d\psi, \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin n\psi\,d\psi.$$

Суммируя ряд (7), получаем решение внутренней задачи Дирихле внутри круга в виде интеграла Пуассона

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\,\frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + R^2}\,d\psi.$$

Решение внешней задачи Дирихле ищем в виде ряда

$$u(r,\varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{r^n}\,(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Наконец, решение уравнения (1) в области $R_1 < r < R_2$ при заданных краевых условиях на окружностях $r = R_1$ и $r = R_2$ ищем в виде ряда

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{C_n}{r^n}\right)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n r^n + \frac{D_n}{r^n}\right)\sin n\varphi + a\ln r + b.$$

16.1. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = f(\varphi)$, где:

1) $f(\varphi) = \cos^2\varphi$; 2) $f(\varphi) = \sin^3\varphi$;

3) $f(\varphi) = \cos^4\varphi$; 4) $f(\varphi) = \sin^6\varphi + \cos^6\varphi$.

16.2. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат и такую, что:

1) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = A\cos\varphi$; 2) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = A\cos 2\varphi$; 3) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \sin^3\varphi$.

16.3. Найти стационарное распределение температуры $u(r,\varphi)$ внутри бесконечного цилиндра радиуса R, если:

1) на его поверхности поддерживается температура

$$u(r,\varphi)|_{r=R} = A\sin\varphi;$$

2) на одной половине поверхности цилиндра ($0 \le \varphi < \pi$) поддерживается температура $-T_0$, а на другой половине ($-\pi \le \varphi < 0$) — температура T_0.

16.4. Найти функцию, гармоническую в кольце $1<r<2$ и такую, что

$$u|_{r=1} = f_1(\varphi), \qquad u|_{r=2} = f_2(\varphi),$$

где:

1) $f_1(\varphi) = u_1 = \text{const}, \qquad f_2(\varphi) = u_2 = \text{const};$

2) $f_1(\varphi) = 1 + \cos^2\varphi, \qquad f_2(\varphi) = \sin^2\varphi.$

16.5. Найти решение уравнения $\Delta u = A$ в кольце $R_1 < r < R_2$, если $u|_{r=R_1} = u_1$, $u|_{r=R_2} = u_2$ (A, u_1, u_2 — заданные числа).

16.6. Найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -Axy \qquad (A = \text{const})$$

в круге радиуса R с центром в начале координат, если $u|_{r=R} = 0$.

16.7. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в прямоугольнике $0 < x < a$, $0 < y < b$, если на границе этого многоугольника $u(x, y)$ принимает следующие значения:

$$u|_{x=0} = A\sin\frac{\pi y}{b}, \qquad u|_{x=a} = 0,$$

$$u|_{y=0} = B\sin\frac{\pi x}{a}, \qquad u|_{y=b} = 0.$$

16.8. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри прямоугольника $[0 < x < a,\ 0 < y < b]$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника, лежащей на оси Oy, равен v_0, а три другие стороны прямоугольника заземлены. Предполагается, что внутри прямоугольника нет электрических зарядов.

16.9. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри коробки прямоугольного сечения $-a < x < a$, $-b < y < b$, две противоположные грани которой ($x = a$ и $x = -a$) имеют потенциал v_0, а две другие ($y = b$, $y = -b$) заземлены.

16.10. Найти стационарное распределение температуры $u(x, y)$ в прямоугольной однородной пластинке $0 < x < a$, $0 < y < b$, если ее стороны $x = a$ и $y = b$ покрыты тепловой изоляцией, две другие стороны ($x = 0$, $y = 0$) поддерживаются при нулевой температуре, а в пластинке выделяется тепло с постоянной плотностью q.

2. Краевые задачи в пространстве. Нахождение решений задач 16.11, 16.12 методом разделения переменных требует применения бесселевых функций (см. с. 247).

16.11. Найти стационарную температуру $u(r, z)$ внутренних точек цилиндра с радиусом основания R и высотой h, если:

1) температура нижнего основания и боковой поверхности цилиндра равна нулю, а температура верхнего основания зависит только от r (расстояние от оси цилиндра);

2) температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность цилиндра покрыта непроницаемым для теплоты чехлом, а температура верхнего основания есть функция от r;

3) температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность цилиндра свободно охлаждается в воздухе нулевой температуры, а температура верхнего основания есть функция от r;

4) температура верхнего и нижнего оснований равна нулю, а температура в каждой точке боковой поверхности зависит только от расстояния этой точки до нижнего основания (т. е. от z);

5) основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности есть заданная функция от z.

16.12. Найти стационарное распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму цилиндра с радиусом основания R и высотой h, если:

1) к нижнему основанию $z = 0$ подводится постоянный тепловой поток q, а боковая поверхность $r = R$ и верхнее основание $z = h$ поддерживаются при нулевой температуре;

2) к нижнему основанию $z = 0$ подводится постоянный тепловой поток q, верхнее основание поддерживается при нулевой температуре, а на боковой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

Применим метод разделения переменных к уравнению Лапласа в пространстве для шара радиуса R в случае, когда решение u не зависит от угла φ, т. е. $u = u(r, \theta)$. Тогда

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{8}$$

Полагая

$$u = Z(r)\,W(\theta), \tag{9}$$

из (8) получаем

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = \lambda, \tag{10}$$

$$\frac{1}{W\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dW}{d\theta}\right) = -\lambda. \tag{11}$$

Вводя в (10) и (11) вместо λ новую произвольную постоянную ν, где $\lambda = \nu(\nu+1)$, запишем уравнение (10) в следующем виде:

$$r^2\frac{d^2Z}{dr^2} + 2r\frac{dZ}{dr} - \nu(\nu+1)\,Z = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) имеет частные решения вида $Z = r^\alpha$, где $\alpha_1 = \nu$ и $\alpha_2 = -(\nu+1)$. Следовательно,

$$Z(r) = C_1 r^\nu + C_2 r^{-(\nu+1)}. \tag{13}$$

Уравнение (11) заменой независимой переменной по формуле $\xi = \cos\theta$ приводится к виду

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dy}{d\xi}\right]+\nu(\nu+1)\,y=0, \tag{14}$$

где $y=W(\arccos\xi)$. Уравнение (14) называется уравнением Лежандра; оно имеет ограниченные на отрезке $[-1,1]$ решения в том и только в том случае, когда $\nu=n$ ($n\geq 0$ целое).

Решениями уравнения (14) при $\nu=n$ являются полиномы Лежандра

$$y=P_n(\xi)=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(\xi^2-1)^n}{d\xi^n}.$$

Приведем формулы для $P_n(\xi)$ при $n=0,1,2,3,4$:

$$P_0(\xi)=1,\qquad P_1(\xi)=\xi,\qquad P_2(\xi)=\frac{1}{2}(3\xi^2-1),$$

$$P_3(\xi)=\frac{1}{2}(5\xi^3-3\xi),\qquad P_4(\xi)=\frac{1}{8}(35\xi^4-30\xi^2+3).$$

Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему в $L_2(-1,1)$, т. е.

$$\int_{-1}^{1}P_n(\xi)\,P_m(\xi)\,d\xi=0\qquad(n\neq m)$$

и, кроме того,

$$\|P_n\|^2=\int_{-1}^{1}P_n^2(\xi)\,d\xi=\frac{2}{2n+1}.$$

Отметим еще, что всякая функция $f\in L_2(-1,1)$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра

$$f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\,(f,P_n)\,P_n(\xi),$$

сходящийся в $L_2(-1,1)$.

Из (13), (14) находим частные решения уравнения (8) вида (9)

$$u_n(r,\theta)=\left[A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta),$$

где $P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра.

Функции $u_n(r,\theta)$ удобно использовать для нахождения решения уравнения Лапласа в случае, когда краевые условия заданы на сфере (внутренняя и внешняя задачи) или на границе шарового слоя ($R_1<r<R_2$).

Решение внутренней задачи Дирихле (и других внутренних задач для уравнения Лапласа) в случае, когда краевые условия заданы на сфере $r=R$ и зависят только от θ, следует искать в виде

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta),$$

а решение внешней задачи — в виде

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nr^{-(n+1)}P_n(\cos\theta).$$

Если краевые условия заданы на границе шарового слоя $R_1 < r < R_2$ и зависят только от θ, то решение нужно искать в виде

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta).$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются из краевых условий.

16.13. Найти функцию u, гармоническую внутри шара радиуса R с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=R} = f(\theta),$$

где:

1) $f(\theta) = \cos\theta$; 2) $f(\theta) = \cos^2\theta$;

3) $f(\theta) = \cos 2\theta$; 4) $f(\theta) = \sin^2\theta$.

16.14. Найти функцию, гармоническую внутри шара радиуса R и такую, что

$$(u + u_r)|_{r=R} = 1 + \cos^2\theta.$$

16.15. Найти функцию, гармоническую вне шара радиуса R и такую, что:

1) $u_r|_{r=R} = \sin^2\theta$; 2) $(u - u_r)|_{r=R} = \sin^2\theta$; 3) $u_r|_{r=R} = A\cos\theta$.

16.16. Выяснить, разрешима ли внутренняя задача Неймана для шара радиуса R, если:

1) $u_r|_{r=R} = A\cos\theta$; 2) $u_r|_{r=R} = \sin\theta$.

Найти соответствующее решение.

16.17. Найти гармоническую внутри шарового слоя $1 < r < 2$ функцию такую, что

$$u|_{r=1} = f_1(\theta), \qquad u|_{r=2} = f_2(\theta),$$

если:

1) $f_1 = \cos^2\theta$, $f_2 = \frac{1}{8}(\cos^2\theta + 1)$;

2) $f_1 = \cos^2\theta$, $f_2 = 4\cos^2\theta - \frac{4}{3}$;

3) $f_1 = 1 - \cos 2\theta$, $f_2 = 2\cos\theta$;

4) $f_1 = \frac{1}{2}\cos\theta$, $f_2 = 1 + \cos 2\theta$;

5) $f_1 = 9\cos 2\theta$, $f_2 = 3(1 - 7\cos^2\theta)$.

16.18. Найти стационарную температуру внутренних точек полусферы радиуса R, если сферическая поверхность поддерживается при постоянной температуре T_0, а основание полусферы — при нулевой температуре.

16.19. Найти стационарную температуру внутри однородного изотропного шара радиуса R, если на поверхности шара поддерживается температура

$$u|_{r=R} = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}, \\ u_2 & \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi. \end{cases}$$

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах (r, φ, θ) имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{15}$$

Будем находить решения уравнения (15) методом разделения переменных. Полагая $u(r,\theta,\varphi) = Z(r)\,Y(\theta,\varphi)$, из (15) находим

$$r^2 Z'' + 2rZ' - \lambda Z = 0, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0. \tag{17}$$

Потребовав, чтобы функция $Y(\theta,\varphi)$ была ограничена на единичной сфере, и учитывая, что $Y(\theta,\varphi+2\pi) = Y(\theta,\varphi)$, будем искать решения уравнения (17), полагая $Y(\theta,\varphi) = W(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$. Мы получим

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0, \qquad \Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi), \tag{18}$$

откуда $\mu = m^2$ (m целое) и

$$\Phi_m(\varphi) = C_m\cos m\varphi + D_m\sin m\varphi \tag{19}$$

— решения задачи (18).

Функция $W(\theta)$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dW}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)W = 0, \tag{20}$$

она должна быть ограничена при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Полагая в (20) $\xi = \cos\theta$ и обозначая $W(\theta) = X(\cos\theta) = X(\xi)$, запишем уравнение (20) в следующем виде:

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dX}{d\xi}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right)X = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) имеет ограниченные на отрезке $[-1,1]$ решения лишь при $\lambda = n(n+1)$, где n — целое. Частными решениями уравнения (21) при $\lambda = n(n+1)$ являются функции

$$P_n^{(m)}(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(\xi)}{d\xi^n},$$

где $P_n(\xi)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — полиномы Лежандра.

Возвращаясь к переменному θ, найдем искомые частные решения уравнения (20):

$$P_n^{(m)}(\cos\theta) = \sin^m\theta\,\frac{d^m}{d\cos\theta^m}[P_n(\cos\theta)], \tag{22}$$

причем $P_n^{(m)}(\cos\theta) = 0$ при $m > n$. Функции $P_n^{(m)}(\cos\theta)$, определяемые формулой (22), называются присоединенными полиномами Лежандра.

Таким образом, частные решения уравнения (17), ограниченные на единичной сфере, имеют вид

$$Y_n(\theta,\varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)\, P_n^{(k)}(\cos\theta). \qquad (23)$$

Так как общее решение уравнения (16) имеет вид

$$Z_n(r) = A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}},$$

то искомые частные решения уравнения (15) таковы:

$$u_n(r,\theta,\varphi) = Z_n(r)\, Y_n(\theta,\varphi) = \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) Y_n(\theta,\varphi),$$

здесь $Y_n(\theta,\varphi)$ определяется формулой (23).

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для сферы радиуса R с центром в начале координат: найти решение уравнения (15) при условии, что

$$u|_{r=R} = f(\theta,\varphi). \qquad (24)$$

Решение этой задачи (и других внутренних задач) следует искать в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k Y_k(\theta,\varphi), \qquad (25)$$

причем в случае задачи (15), (24) в качестве функций $Y_k(\theta,\varphi)$ в (25) нужно взять те и только те функции, которые присутствуют в разложении $f(\theta,\varphi)$ в ряд по сферическим функциям $Y_k(\theta,\varphi)$

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta,\varphi).$$

Решение задачи (15), (24) в точке $M_0(r_0,\theta_0,\varphi_0)$ можно представить *интегралом Пуассона*

$$u(r_0,\theta_0,\varphi_0) = \frac{1}{4\pi R} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\, \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 - 2Rr_0\cos\gamma + r_0^2)^{3/2}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

где $\cos\gamma = \cos\theta\,\cos\theta_0 + \sin\theta\,\sin\theta_0\,\cos(\varphi - \varphi_0)$.

Решение внешней задачи Дирихле для сферы радиуса R (и других внешних задач) следует искать в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} Y_k(\theta,\varphi).$$

Наконец, функцию, гармоническую в сферическом слое $R_1 < r < R_2$ и принимающую заданные значения на границе этого слоя, нужно искать в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R_2}\right)^k Y_k(\theta,\varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{k+1} \widetilde{Y}_k(\theta,\varphi),$$

где $\widetilde{Y}_k(\theta,\varphi)$ — сферическая функция вида (23).

Выпишем несколько присоединенных полиномов Лежандра и функций $Y_k(\theta,\varphi)$ в явном виде для $k = 0, 1, 2, 3$:

$$P_1^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta; \qquad P_3^{(2)}(\cos\theta) = 15\sin^2\theta\cos\theta;$$
$$P_2^{(1)}(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta; \qquad P_3^{(3)}(\cos\theta) = 15\sin^3\theta;$$
$$P_3^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta\,\frac{15\cos^2\theta - 3}{2}; \qquad P_n^{(n)}(\cos\theta) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta;$$

$$Y_0(\theta,\varphi) = a_0,$$
$$Y_1(\theta,\varphi) = a_1\cos\theta + (b_1\cos\varphi + c_1\sin\varphi)\sin\theta,$$
$$Y_2(\theta,\varphi) = a_2(3\cos^2\theta - 1) + (b_2\cos\varphi + c_2\sin\varphi)\sin\theta\,\cos\theta + (d_2\cos 2\varphi + e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta,$$
$$Y_3(\theta,\varphi) = a_3(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + (b_3\cos\varphi + c_3\sin\varphi)\sin\theta\,(15\cos^2\theta - 3) + (d_3\cos 2\varphi + e_3\sin 2\varphi)\sin^2\theta\cos\theta + (f_3\cos 3\varphi + g_3\sin 3\varphi)\sin^3\theta.$$

16.20. Найти функцию, гармоническую внутри единичной сферы и такую, что:

1) $u|_{r=1} = \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta$;

2) $u|_{r=1} = (\sin\theta + \sin 2\theta)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $u|_{r=1} = \sin\theta\,(\sin\varphi + \sin\theta)$;

4) $u_r|_{r=1} = \sin^{10}\theta\,\sin 10\varphi, \quad u|_{r=0} = 1$.

16.21. Найти функцию, гармоническую внутри сферы радиуса R с центром в начале координат и такую, что:

1) $u|_{r=R} = \sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\sin^2\theta\,\cos\theta$;

2) $u|_{r=R} = \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sin^3\theta$;

3) $u|_{r=R} = \sin^2\theta\,\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\theta\,\sin\varphi$;

4) $(u + u_r)|_{r=R} = \sin^2\theta\left[\sqrt{2}\cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos^2\varphi\right]$;

5) $(u + u_r)|_{r=R} = \sin\theta\,(\sin\varphi + \cos\varphi\,\cos\theta + \sin\theta)$.

16.22. Найти функцию, гармоническую вне единичной сферы и такую, что:

1) $u_r|_{r=1} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\sin\theta$; 2) $u|_{r=1} = \cos^2\theta\,\sin\theta\,\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$.

16.23. Найти функцию, гармоническую вне сферы радиуса R с центром в начале координат и такую, что:

1) $u|_{r=R} = \sin^3\theta\,\cos\theta\,\cos\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $u|_{r=R} = \sin 100\varphi\,\sin^{100}\theta$;

3) $(u - u_r)|_{r=R} = \sin\theta\,\cos^2\frac{\theta}{2}\,\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$.

16.24. Найти функцию, гармоническую внутри сферического слоя $1 < r < 2$ и такую, что $u|_{r=1} = f_1(\theta,\varphi)$, $u|_{r=2} = f_2(\theta,\varphi)$, где:

1) $f_1 = \sin\theta\,\sin\varphi$, $f_2 = 0$;
2) $f_1 = 3\sin 2\varphi\,\sin^2\theta$, $f_2 = 3\cos\theta$;
3) $f_1 = 7\sin\theta\,\cos\varphi$, $f_2 = 7\cos\theta$;
4) $f_1 = \sin^2\theta\,(3 - \sin 2\varphi)$, $f_2 = 4f_1$;
5) $f_1 = 12\sin\theta\,\cos^2\dfrac{\theta}{2}\,\cos\varphi$, $f_2 = 0$;
6) $f_1 = \sin 2\varphi\,\sin^2\theta$, $f_2 = \cos 2\varphi\,\sin^2\theta$;
7) $f_1 = \cos\varphi\,\sin 2\theta$, $f_2 = \sin\varphi\,\sin 2\theta$;
8) $f_1 = 31\sin 2\theta\,\sin\varphi$, $f_2 = 31\sin^2\theta\,\cos 2\varphi$;
9) $f_1 = \cos\theta$, $f_2 = \cos\varphi\,(12\sin\theta - 15\sin^3\theta)$.

16.25. Найти функцию, гармоническую внутри сферического слоя $1 < r < 2$ и такую, что:

1) $(3u + u_r)|_{r=1} = 5\sin^2\theta\,\sin 2\varphi$, $u|_{r=2} = -\cos\theta$;
2) $u|_{r=1} = \sin\theta\,\sin\varphi\,(5 + 6\cos\theta)$, $u_r|_{r=2} = 12\sin 2\theta\,\sin\varphi$;
3) $u|_{r=1} = 1$, $u_r|_{r=2} = 15\cos\varphi\,(\cos^2\theta\,\sin\theta + \sin\varphi\sin^2\theta\,\cos\theta)$.

16.26. Найти функцию, гармоническую внутри сферического слоя $1/2 < r < 1$ и такую, что:

1) $u|_{r=1/2} = 0$, $u|_{r=1} = 6\cos^2\varphi\,\sin^2\theta$;
2) $u|_{r=1/2} = 30\cos^2\varphi\,\sin^2\theta\,\cos\theta$, $u|_{r=1} = 0$.

Ответы к § 16

16.1. 1) $\dfrac{1}{2}(1 + r^2\cos 2\varphi)$; 2) $\dfrac{r}{4}(3\sin\varphi - r^2\sin 2\varphi)$;
3) $\dfrac{3}{8} + \dfrac{r^2}{2}\cos 2\varphi + \dfrac{r^4}{8}\cos 4\varphi$; 4) $\dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}r^4\cos 4\varphi$.

16.2. 1) $Ar\cos\varphi + C$; 2) $\dfrac{A}{2R}r^2\cos 2\varphi + C$;
3) $\dfrac{1}{4}\left(3r\sin\varphi - \dfrac{r^3}{3R^2}\sin 3\varphi\right) + C$.
Здесь C — произвольная постоянная.

16.3. 1) $\dfrac{Ar}{R}\sin\varphi$;
2) $-\dfrac{4T_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{r}{R}\right)^{2n+1}\dfrac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} = \dfrac{2T_0}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{R^2 - r^2}{2rR\sin\varphi} - T_0$.

16.4. 1) $u_1 + (u_2 - u_1)\dfrac{\ln r}{\ln 2}$; 2) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{\ln r}{\ln 2} + \left(\dfrac{2}{3r^2} - \dfrac{1}{6}r^2\right)\cos 2\varphi$.

16.5. $u_2 + \dfrac{A}{4}(r^2 - R_2^2) + \dfrac{u_1 - u_2 + A(R_2^2 - R_1^2)/4}{\ln R_2 - \ln R_1}\ln\dfrac{R_2}{r}$.

16.6. $\dfrac{Ar^2}{24}(R^2 - r^2)\sin 2\varphi$.

Указание. $u = v + w$, где $v = -\dfrac{Axy}{12}(x^2 + y^2) = -\dfrac{Ar^4 \sin 2\varphi}{24}$ — частное решение уравнения Пуассона, а w — решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условию $w|_{r=R} = \dfrac{A}{24} R^4 \sin 2\varphi$.

16.7. $A \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}} \sin \dfrac{\pi y}{b} + B \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}} \sin \dfrac{\pi x}{a}$.

Указание. Решение искать в виде $u = v + w$, где v и w — гармонические функции такие, что $v|_{x=0} = A \sin \dfrac{\pi y}{b}$, $v|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0$, $w|_{x=0} = w|_{x=a} = w|_{y=b} = 0$, $w|_{y=0} = B \sin \dfrac{\pi x}{a}$.

16.8. $\dfrac{4v_0}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)(a-x)\pi}{b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1)\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi a}{b}}$.

16.9. $\dfrac{4v_0}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi x}{2b} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b}}{(2n+1)\operatorname{ch}\frac{2n+1}{2b}\pi a}$.

16.10. $\dfrac{16qa^2}{k\pi^3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^3} \left[1 - \dfrac{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi(b-y)}{2a}}{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}\right] \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{2a}$,

k — коэффициент внутренней теплопроводности.

Указание. Задача сводится к решению уравнения $\Delta u = -\dfrac{q}{k}$ при условиях $u|_{x=0} = u|_{y=0} = 0$, $u_x|_{x=a} = u_y|_{y=b} = 0$.

16.11. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_n h}{R}} J_0\left(\mu_n \dfrac{r}{R}\right)$, где μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, $a_n = \dfrac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \displaystyle\int_0^R r u_0(r) J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right) dr$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_n h}{R}} J_0\left(\mu_n \dfrac{r}{R}\right)$, где μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$, $a_n = \dfrac{2}{R^2 J_0^2(\mu_n)} \displaystyle\int_0^R r u_0(r) J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right) dr$ (Указание. Краевые условия имеют вид $|u|_{r=0}| < \infty$, $u|_{z=0} = 0$, $u_r|_{r=R} = 0$, $u|_{z=h} = u_0(r)$.);

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_n h}{R}} J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)$, где μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $\mu J_1(\mu) - h_1 R J_0(\mu) = 0$, $a_n = \dfrac{2}{R^2}\left(1 + \dfrac{h_1^2 R^2}{\mu_n^2}\right)^{-1} \times$

$\times [J_0(\mu_n)]^{-2} \int\limits_0^R r u_0(r)\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr$ (Указание. Краевые условия имеют вид $|u|_{r=0}| < \infty$, $u|_{z=0} = 0$, $(u_r + h_1 u)|_{r=R} = 0$, $u|_{z=h} = u_0(r)$.);

4) $\frac{2}{h} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[J_0\left(\frac{\pi n R}{h} i\right)\right]^{-1} \left(\int\limits_0^h f(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{h}\, d\xi\right) \sin\frac{\pi n z}{h}\, J_0\left(\frac{\pi n r}{h} i\right)$, где $J_0(ix)$ — функция Бесселя нулевого порядка от чисто мнимого аргумента;

5) $\frac{2}{h} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[J_0\left(\frac{\pi n R}{h} i\right)\right]^{-1} \left(\int\limits_0^h f(\xi) \cos\frac{\pi n \xi}{h}\, d\xi\right) \cos\frac{\pi n z}{h}\, J_0\left(\frac{\pi n r}{h} i\right)$ (Указание. Краевые условия имеют вид $u_z|_{z=0} = u_z|_{z=h} = 0$, $u|_{r=R} = f(z)$.).

16.12. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_n(h-z)}{R}}{\operatorname{ch}\frac{\mu_n h}{R}} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$, где μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, $a_n = \frac{2aq}{k\mu_n^2 J_1(\mu_n)}$, k — коэффициент теплопроводности (Указание. Задача сводится к решению уравнения $\Delta u = 0$ при краевых условиях $-ku_z|_{z=0} = q$, $u|_{r=R} = u|_{z=h} = 0$.);

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_n(h-z)}{R}}{\operatorname{ch}\frac{\mu_n h}{R}} J_0\left(\frac{\mu_n r}{a}\right)$, где μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $\mu J_1(\mu) - Rh_1 J_0(\mu) = 0$, h_1 — коэффициент теплообмена, $a_n = 2h_1^2 R^3 q k^{-1} (R^2 h_1^2 + \mu_n^2)^{-1} [J_1(\mu_n)]^{-1} \mu_n^{-2}$ (Указание. Краевые условия имеют вид $(u_r + h_1 u)|_{r=R} = 0$, $-ku_z|_{z=0} = q$, $u|_{z=h} = 0$.).

16.13. 1) $\frac{r}{R}\cos\theta$; 2) $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{r^2}{R^2}\cos^2\theta$;

3) $\frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2(\cos\theta) - \frac{1}{3}$; 4) $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2(\cos\theta)$.

16.14. $\frac{4}{3} + \frac{2r^2}{3R(R+2)} P_2(\cos\theta)$.

16.15. 1) $-\frac{2R^2}{3r} + \frac{R^4}{9r^3}(3\cos^2\theta - 1) + C$, где C — произвольная постоянная;

2) $C + \left(\frac{2}{3} - C\right)\frac{R^2}{r(R+1)} - \frac{R^4}{(R+3)\,r^3}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)$, где C — произвольная постоянная;

3) $C - \frac{A}{2} \cdot \frac{R^3}{r^2}\cos\theta$, где C — произвольная постоянная.

16.16. 1) Задача разрешима: $u = Ar\cos\theta$, где C — произвольная постоянная;

2) задача не имеет решения.

16.17. 1) $\dfrac{1}{3r}+\dfrac{3\cos^2\theta-1}{3r^3}$; 2) $\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{2}{r}-1+r^2(3\cos^2\theta-1)\right]$;

3) $\dfrac{8}{3r}-\dfrac{4}{3}+\left(\dfrac{8}{7}r-\dfrac{8}{7r^2}\right)P_1(\cos\theta)+\left(\dfrac{4}{93}r^2-\dfrac{128}{93r^3}\right)P_2(\cos\theta)$;

4) $\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{1}{14}\left(\dfrac{8}{r^2}-r\right)P_1(\cos\theta)+\dfrac{32}{93}\left(r^2-\dfrac{1}{r^3}\right)P_2(\cos\theta)$;

5) $\dfrac{2}{r}-5+4\left(\dfrac{4}{r^3}-r^2\right)P_2(\cos\theta)$.

16.18. $T_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n+2)}(4n+3)\left(\dfrac{r}{R}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta)$, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$.

16.19. $\dfrac{u_1+u_2}{2}+\dfrac{u_1-u_2}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3\cdot5\cdot7\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n+2)}(4n+3)\times$

$\times P_{2n+1}(\cos\theta)\left(\dfrac{r}{R}\right)^{2n+1}$.

16.20. 1) $r^2\cos\left(2\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta$; 2) $(r\sin\theta+r^2\sin2\theta)\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)$;

3) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{r^2}{6}(3\cos2\theta+1)+r\sin\theta\sin\varphi$; 4) $1+\dfrac{r^{10}}{10}\sin^{10}\theta\sin10\varphi$.

16.21. 1) $\left(\dfrac{r}{R}\right)^3\sin\left(2\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin^2\theta\cos\theta$; 2) $\left(\dfrac{r}{R}\right)^3\sin\left(3\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin^3\theta$;

3) $\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\sin^2\theta\cos\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{r}{R}\sin\theta\sin\varphi$;

4) $\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\left[-\dfrac{R}{3(2+R)}(3\cos^2\theta-1)+\dfrac{R}{2+R}(2\cos2\varphi-\sin2\varphi)\sin^2\theta\right]$

(У к а з а н и е. $(u_r+u)|_{r=R}=\dfrac{1}{3}P_2^{(2)}(\cos\theta)(2\cos2\varphi-\sin2\varphi)+\dfrac{2}{3}-$ $-\dfrac{2}{3}P_2(\cos\theta)$, $u=A+Br^2P_2(\cos\theta)+r^2(C\cos2\varphi+D\sin2\varphi)\times$ $\times P_2^{(2)}(\cos\theta)$.);

5) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{r}{R+1}\sin\varphi\sin\theta+\dfrac{r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi}{R(R+2)}-\dfrac{r^2}{3}\cdot\dfrac{3\cos^2\theta-1}{R(R+2)}$ (У к а з а н и е. $(u+u_r)|_{r=R}=\sin\varphi P_1^{(1)}(\cos\theta)+\dfrac{1}{3}\cos\varphi P_2^{(1)}(\cos\theta)+\dfrac{2}{3}-$ $-\dfrac{2}{3}P_2(\cos\theta)$, $u=A+B\left(\dfrac{r}{R}\right)\sin\varphi\sin\theta+C\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\cos\varphi P_2^{(1)}(\cos\theta)+$ $+D\left(\dfrac{r}{R}\right)^2P_2(\cos\theta)$.).

16.22. 1) $-\dfrac{1}{2r^2}\sin\theta\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)$;

2) $\left[\dfrac{2}{15r^4}P_3^{(1)}(\cos\theta)+\dfrac{1}{5r^2}P_1^{(1)}(\cos\theta)\right]\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

16.23. 1) $\left(\dfrac{R}{r}\right)^5\sin^3\theta\cos\theta\cos\left(3\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $\left(\dfrac{R}{r}\right)^{101}\sin100\varphi\sin^{100}\theta$;

3) $\left[\frac{R}{2+R}\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1^{(1)}(\cos\theta) + \frac{6}{6(R+3)}\left(\frac{R}{r}\right)^3 P_2^{(1)}(\cos\theta)\right]\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$

$\Bigl($Указание. $(u-u_r)|_{r=R} = \left[\frac{1}{2}P_1^{(1)}(\cos\theta)+\frac{1}{6}P_2^{(1)}(\cos\theta)\right]\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$, $u = \left[A\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1^{(1)}(\cos\theta) + B\left(\frac{R}{r}\right)^3 P_2^{(1)}(\cos\theta)\right]\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right).\Bigr)$.

16.24. 1) $\frac{1}{7}\left(-r+\frac{8}{r^2}\right)\sin\varphi\,\sin\theta$;

2) $\frac{12}{7}\left(r-\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta + \left(\frac{96}{31r^2}-\frac{3r^2}{31}\right)\sin 2\varphi\,\sin^2\theta$;

3) $4\left(r-\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta + \left(\frac{8}{r^2}-r\right)\sin\theta\,\cos\varphi$;

4) $\left(14-\frac{12}{r}\right)P_0(\cos\theta) + r^2(1-3\cos^2\theta-\sin^2\theta\cdot\sin 2\varphi)$;

5) $\frac{12}{7}\cos\varphi\,\sin\theta\left(\frac{4}{r^2}-\frac{r}{2}\right) + \frac{12}{31}\left(\frac{8}{r^3}-\frac{r^2}{4}\right)\cos\varphi\,\sin 2\theta$;

6) $\left[\left(\frac{8}{31}\cos 2\varphi - \frac{1}{31}\sin 2\varphi\right)r^2 + \frac{1}{r^3}\left(-\frac{8}{31}\cos 2\varphi + \frac{32}{31}\sin 2\varphi\right)\right]\sin^2\theta$;

7) $\left[r^2\left(-\frac{1}{31}\cos\varphi + \frac{8}{31}\sin\varphi\right) + \frac{1}{r^3}\left(\frac{32}{31}\cos\varphi - \frac{8}{31}\sin\varphi\right)\right]\sin 2\theta$;

8) $\left(\frac{32}{r^3}-r^2\right)\sin 2\theta\,\sin\varphi + \left(8r^2-\frac{8}{r^3}\right)\sin^2\theta\,\cos 2\varphi$;

9) $\frac{1}{7}\left(\frac{8}{r^2}-r\right)\cos\theta + \frac{32}{127}\left(r^3-\frac{1}{r^4}\right)\frac{12\sin\theta-15\sin^3\theta}{2}\cos\varphi$.

16.25. 1) $\left(\frac{4}{r^2}-r\right)\cos\theta + \left(r^2-\frac{32}{r^3}\right)\sin^2\theta\,\sin 2\varphi$;

2) $\left(r+\frac{4}{r^2}\right)\sin\theta\,\sin\varphi + 3r^2\sin 2\theta\,\sin\varphi$;

3) $1+\frac{12}{5}\left(r-\frac{1}{r^2}\right)P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi + \frac{16}{97}\left(r^3-\frac{1}{r^4}\right)\cos\varphi\,P_3^{(1)}(\cos\theta) + \frac{4}{97}\left(r^3-\frac{1}{r^4}\right)\sin 2\varphi\,P_3^{(2)}(\cos\theta)$ $\Bigl($Указание. $u_r|_{r=2} = 2P_3^{(1)}(\cos\theta)\times\cos\varphi + \frac{1}{2}P_3^{(2)}(\cos\theta)\sin 2\varphi + 3P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi$, $u = \left(ar+\frac{b}{r^2}\right)\times\sin\theta\cos\varphi + C + \frac{d}{r} + \left(fr^3+\frac{h}{r^4}\right)P_3^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi + \left(lr^3+\frac{m}{r^4}\right)\times P_3^{(2)}(\cos\theta)\sin 2\varphi.\Bigr)$.

16.26. 1) $4-\frac{2}{r}+\frac{2}{31}\left(\frac{1}{r^3}-32r^2\right)P_2(\cos\theta)+\frac{1}{31}\left(32r^2-\frac{1}{r^3}\right)P_2^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi$ (Указание. $u|_{r=1} = 2-2P_2(\cos\theta)+P_2^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi.$);

2) $\frac{12}{7}\left(\frac{1}{r^2}-r\right)\cos\theta+\frac{8}{127}\left(\frac{1}{r^4}-r^3\right)P_3^{(2)}(\cos\theta)\,\cos 2\varphi+\frac{48}{127}\left(r^3-\frac{1}{r^4}\right)\times$ $\times P_3(\cos\theta)$ $\Big($У к а з а н и е. $u|_{r=1/2} = -6P_3(\cos\theta)+6P_1(\cos\theta)+$ $+P_3^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi$, $u=\left(ar+\frac{b}{r^2}\right)P_1(\cos\theta)+\left(cr^3+\frac{d}{r^4}\right)P_3^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi+$ $+\left(gr^3+\frac{h}{r^4}\right)P_3(\cos\theta).\Big)$.

§ 17. Функция Грина оператора Лапласа

Функцией Грина (внутренней) *задачи Дирихле* для области $G \in R^3$ называется функция $\mathscr{G}(x,y)$, $x \in \overline{G}$, $y \in G$, обладающая свойствами:

1) $\mathscr{G}(x,y) = \dfrac{1}{4\pi|x-y|} + g(x,y)$, где функция g — гармоническая в G и непрерывная в $\overline{G}$ по x, при каждом $y \in G$;

2) $\mathscr{G}(x,y)|_{x\in S} = 0$ при каждом $y \in G$, где S — граница области G. Для неограниченных областей G требуем, чтобы $g(x,y) \longrightarrow 0$ при $|x| \longrightarrow \infty$.

Если G — ограниченная область и S — достаточно гладкая поверхность, то $\mathscr{G}$ существует, единственна, имеет правильную нормальную производную $\dfrac{\partial \mathscr{G}}{\partial n_x}$ на S при каждом $y \in G$ и симметрична, т. е. $\mathscr{G}(x,y) = \mathscr{G}(y,x)$, $x \in G$, $y \in G$; $g(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных (x,y) в $\overline{G} \times G$.

Если решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = -f(x)$, $u|_S = u_0(x)$, где $f \in C(\overline{G})$ и $u_0 \in C(S)$, имеет правильную нормальную производную на S, то оно определяется формулой

$$u(x) = -\int\limits_S \frac{\partial \mathscr{G}(x,y)}{\partial n_y}\, u_0(y)\, ds_y + \int\limits_G \mathscr{G}(x,y)\, f(y)\, dy. \tag{1}$$

Для ряда областей функцию Грина можно найти *методом отражений.*

17.1. Построить функцию Грина для следующих областей в R^3:
1) полупространство $x_3 > 0$;
2) двугранный угол $x_2 > 0$, $x_3 > 0$;
3) октант $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.

17.2. Построить функцию Грина для следующих областей в R^3:
1) шар $|x| < R$;
2) полушар $|x| < R$, $x_3 > 0$;
3) четверть шара $|x| < R$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$;
4) восьмая часть шара $|x| < R$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.

17.3. Пользуясь методом отражений, построить функцию Грина для части пространства, заключенного между двумя параллельными плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$.

Ниже даны краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона, решения которых могут быть найдены с помощью соответствующей функции Грина из задач 17.1–17.3 и формулы (1).

17.4. Найти решение задачи Дирихле
$$\Delta u = -f(x), \qquad x_3 > 0; \qquad u|_{x_3=0} = u_0(x),$$
для следующих f и u_0:

1) f, u_0 — непрерывны и ограничены;

2) $f = 0$, $\qquad u_0 = \cos x_1 \cos x_2$;

3) $f = e^{-x_3} \sin x_1 \cos x_2$, $\qquad u_0 = 0$;

4) $f = 0$, $\qquad u_0 = \theta(x_2 - x_1)$;

5) $f = 0$, $\qquad u_0 = \left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^{-1/2}$;

6) $f = 2\left[x_1^2 + x_2^2 + (x_3+1)^2\right]^{-2}$, $\qquad u_0 = \left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^{-1}$;

7) $f = 0$, $\qquad u_0 = \begin{cases} -1, & x_1 < 0, \\ +1, & x_1 > 0. \end{cases}$

17.5. Найти решение задачи Дирихле
$$\Delta u = 0, \qquad x_2 > 0, \qquad x_3 > 0, \qquad u|_S = u_0(x),$$
u_0 — кусочно непрерывна и ограничена.

17.6. Решить задачу 17.5 со следующими u_0:

1) $u_0|_{x_2=0} = 0$, $\quad u_0|_{x_3=0} = e^{-4x_1} \sin 5x_2$;

2) $u_0|_{x_2=0} = 0$, $\quad u_0|_{x_3=0} = x_2 \left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^{-3/2}$;

3) $u_0|_{x_2=0} = 0$, $\quad u_0|_{x_3=0} = \theta(x_2 - |x_1|)$.

17.7. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$:
$$\Delta u = -f(x), \qquad |x| < R, \qquad u\big|_{|x|=R} = u_0(x).$$

17.8. Решить задачу 17.7 для следующих f и u_0:

1) $f = a = \text{const}$, $\qquad u_0 = 0$;

2) $f = |x|^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\qquad u_0 = a$;

3) $f = e^{|x|}$, $\qquad u_0 = 0$.

17.9. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа для полушара $|x| < R$, $x_3 > 0$.

17.10. Найти решение уравнения Пуассона $\Delta u = -f(|x|)$, $f \in C(a \le |x| \le b)$ в шаровом слое $a < |x| < b$, удовлетворяющее краевым условиям
$$u\big|_{|x|=a} = 1, \qquad u\big|_{|x|=b} = 0.$$

Функцией Грина задачи Дирихле для области $G \subset R^2$ является
$$\mathscr{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + g(z, \zeta),$$
где $z = x + iy \in \overline{G}$, $\zeta = \xi + i\eta \in G$. $\mathscr{G}(z,\zeta)$ обладает всеми свойствами функции Грина в R^3 (см. начало § 17). Решение задачи Дирихле $\Delta u = -f(z)$, $z \in G$; $u|_S = u_0(z)$ в R^2 (если оно существует) опре-

деляется формулой, соответствующей формуле (1) в R^2. В случае, когда область G — односвязная с достаточно гладкой границей S и известна некоторая функция $w = w(z)$, конформно отображающая G на единичный круг $|w| < 1$, функция Грина находится по формуле

$$\mathscr{G}(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\omega(z,\zeta)|}, \qquad \omega(z,\zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\,\overline{w(\zeta)}}.$$

17.11. Найти функцию Грина для областей:

1) полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$;
2) четверть плоскости $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$;
3) круг $|z| < R$;
4) полукруг $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$;
5) четверть круга $|z| < 1$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$;
6) полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$;
7) полуполоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$.

17.12. Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \qquad y > 0; \qquad u|_{y=0} = u_0(x)$$

для следующих $u_0(x)$:

1) $u_0(x)$ кусочно непрерывна и ограничена;

2) $u_0(x) = \theta(x - a)$; 3) $u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b], \\ 0, & x \bar{\in} [a,b]; \end{cases}$

4) $u_0(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; 5) $u_0(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

6) $u_0(x) = \dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$; 7) $u_0(x) = \cos x$.

17.13. Найти решение уравнения $\Delta u = 0$ в первом квадранте $x > 0$, $y > 0$ со следующими краевыми условиями:

1) $u|_S = u_0(x,y)$ — кусочно непрерывная, ограниченная функция, где S состоит из полупрямых $\{x = 0,\ y \geq 0\}$ и $\{y = 0,\ x \geq 0\}$;

2) $u|_{x=0} = 0$, $u|_{y=0} = 1$; 3) $u|_{x=0} = a$, $u|_{y=0} = b$;

4) $u|_{x=0} = 0$, $u|_{y=0} = \theta(x-1)$; 5) $u|_{x=0} = 0$, $u|_{y=0} = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$;

6) $u|_{x=0} = \sin y$, $u|_{y=0} = \sin x$.

17.14. Найти решение задачи Дирихле для уравнения $\Delta u = 0$, $0 < y < \pi$ со следующими краевыми условиями:

1) $u|_S = u_0(x,y)$ — кусочно непрерывная, ограниченная функция, где S — граница полосы $0 < y < \pi$;

2) $u|_{y=0} = \theta(x)$, $u|_{y=\pi} = 0$; 3) $u|_{y=0} = \theta(x)$, $u|_{y=\pi} = \theta(x)$,

4) $u|_{y=0} = \theta(x)$, $u|_{y=\pi} = -\theta(x)$; 5) $u|_{y=0} = \theta(x)$, $u|_{y=\pi} = \theta(-x)$,

6) $u|_{y=0} = \cos x$, $u|_{y=\pi} = 0$.

17.15. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в полуполосе $0 < y < \pi$, $x > 0$, со следующими краевыми условиями:

1) $u|_{x=0} = 1, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0;$

2) $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = \sin x, \quad u|_{y=\pi} = 0;$

3) $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = \operatorname{th} x, \quad u|_{y=\pi} = \operatorname{th} x;$

4) $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = \operatorname{th} x.$

17.16. Найти решение уравнения Пуассона $\Delta u = -f(z)$ в круге $|z| < R$ при краевом условии $u|_{|z|=R} = u_0(z)$ для следующих f и u_0:

1) f, u_0 — непрерывные функции; 2) $f = a$, $u_0 = b$;
3) $f = |z|^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $u_0 = 0$; 4) $f = \sin|z|$, $u_0 = 0$;
5) $f = 0$, $u_0 = \cos\varphi$, где $\varphi = \arg z$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

17.17. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в полукруге $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, при условии $u|_S = u_0(z)$, где S — граница полукруга, для следующих $u_0(z)$:

1) $u_0(z)$ — кусочно непрерывная функция;

2) $u_0|_{r=1} = \sin\varphi, \quad u_0|_{\varphi=0} = 0, \quad u_0|_{\varphi=\pi} = 0,$ где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $0 \le \varphi < 2\pi$;

3) $u_0|_{r=1} = 0, \quad u_0|_{\varphi=0} = 1, \quad u_0|_{\varphi=\pi} = 1;$

4) $u_0|_{r=1} = \cos\dfrac{\varphi}{2}, \quad u_0|_{\varphi=0} = \sqrt{r}, \quad u_0|_{\varphi=\pi} = 0.$

17.18. Найти решение задачи Дирихле $\Delta u = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$, $|z-5| > 3$; $u|_{\operatorname{Re} z=0} = 0$, $u|_{|z-5|=3} = 1$.

Ответы к § 17

В ответах к задачам 17.1–17.10 введены обозначения

$$y_{mnk} = \big((-1)^m y_1, (-1)^n y_2, (-1)^k y_3\big).$$

17.1. 1) $\dfrac{1}{4\pi} \sum\limits_{k=0}^{1} \dfrac{(-1)^k}{|x - y_{00k}|}$; 2) $\dfrac{1}{4\pi} \sum\limits_{n,k=0}^{1} \dfrac{(-1)^{n+k}}{|x - y_{0nk}|}$;

3) $\dfrac{1}{4\pi} \sum\limits_{m,n,k=0}^{1} \dfrac{(-1)^{m+n+k}}{|x - y_{mnk}|}$.

17.2. 1) $\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{|x-y|} - \dfrac{R}{|y||x-y^*|}\right)$, где, как и всюду в задаче 17.2, $y^*_{mnk} = \dfrac{R^2}{|y|^2} y_{mnk}$, $|y_{mnk}||y^*_{mnk}| = R^2$;

2) $\dfrac{1}{4\pi} \sum\limits_{k=0}^{1} (-1)^k \left(\dfrac{1}{|x - y_{00k}|} - \dfrac{R}{|y||x - y^*_{00k}|}\right)$;

3) $\dfrac{1}{4\pi} \sum\limits_{n,k=0}^{1} (-1)^{n+k} \left(\dfrac{1}{|x - y_{0nk}|} - \dfrac{R}{|y||x - y^*_{0nk}|}\right)$;

4) $\dfrac{1}{4\pi} \sum\limits_{m,n,k=0}^{1} (-1)^{m+n+k} \left(\dfrac{1}{|x - y_{mnk}|} - \dfrac{R}{|y||x - y^*_{mnk}|}\right)$.

17.3. $$\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-(2n+y_3))^2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-(2n-y_3))^2}}\right).$$

Указание (к задаче 17.4 и ниже). В случае, когда f и u_0 кусочно непрерывны и ограничены, а поверхность S кусочно гладкая, постановка задачи Дирихле может быть обобщена таким образом, чтобы решение ее также определялось формулой (1).

17.4. 1) $$\frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{y_3=0}\frac{u_0(y)}{|x-y|^3}\,dS_y+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{y_3>0}f(y)\left(\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|x-y_{001}|}\right)dy;$$

2) $e^{-\sqrt{2}x_3}\cos x_1\cos x_2$; 3) $\left(e^{-\sqrt{2}x_3}-e^{-x_3}\right)\sin x_1\cos x_2$;

4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}x_3}$; 5) $\left[x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right]^{-1/2}$;

6) $\left[x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right]^{-1}$; 7) $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_3}$.

17.5. $$\frac{x_2}{2\pi}\int\limits_{\substack{y_2=0\\ y_3\ge 0}}u_0(y)\left(\frac{1}{|x-y|^3}-\frac{1}{|x-y_{001}|^3}\right)dS_y+$$
$$+\frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{\substack{y_2\ge 0\\ y_3=0}}u_0(y)\left(\frac{1}{|x-y|^3}-\frac{1}{|x-y_{010}|^3}\right)dS_y.$$

17.6. 1) $e^{-4x_1-3x_3}\sin 5x_2$; 2) $x_2\left[x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right]^{-3/2}$;

3) $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_2+x_1}{x_3\sqrt{2}}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_2-x_1}{x_3\sqrt{2}}$.

17.7. $$\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}u_0(y)\,dS_y+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|y|\le R}\left(\frac{1}{|x-y|}-\frac{R}{|y||x-y^*|}\right)f(y)\,dy,$$

где $y^*=yR^2/|y|^2$ — точка, симметричная точке y относительно сферы $|y|=R$.

17.8. 1) $\frac{a}{6}\left(R^2-|x|^2\right)$; 2) $a+\frac{R^{n+2}-|x|^{n+2}}{(n+2)(n+3)}$;

3) $e^R-e^{|x|}-\frac{2}{R}\left(e^R-1\right)+\frac{2}{|x|}\left(e^{|x|}-1\right)$.

17.9. $$u(x)=\frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{\substack{|y|\le R\\ y_3=0}}u_0(y_1,y_2)\left(\frac{1}{|x-y|^3}-\frac{R^3}{|y|^3|x-y^*|^3}\right)dy_1\,dy_2+$$
$$+\frac{R^2-|x|^2}{4\pi R}\int\limits_{\substack{|y|=R\\ y_3>0}}u_0(y)\left(\frac{1}{|x-y|^3}-\frac{1}{|x-y^{**}|^3}\right)dS_y,$$

где $|x|<R$, $x_3>0$; y^* и y^{**} — точки, симметричные точке y относительно сферы $|y|=R$ и плоскости $y_3=0$ соответственно.

17.10. $\dfrac{a(b-|x|)}{|x|(b-a)}-\dfrac{1}{|x|}\displaystyle\int_0^{|x|}(|x|-\rho)\rho f(\rho)\,d\rho+\dfrac{b-|x|}{|x|(b-a)}\int_0^a(a-\rho)\rho f(\rho)\,d\rho-$

$$-\frac{a-|x|}{|x|(b-a)}\int_0^b(b-\rho)\,\rho f(\rho)\,d\rho.$$

17.11. 1) $\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{|z-\bar\zeta|}{|z-\zeta|}$, где $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$;

2) $\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{|z^2-\bar\zeta^2|}{|z^2-\zeta^2|}$; 3) $\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{|R^2-z\bar\zeta|}{R|z-\zeta|}$;

4) $\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{|z-\bar\zeta|\,|R^2-z\bar\zeta|}{|z-\zeta||R^2-z\zeta|}$; 5) $\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{|z^2-\bar\zeta^2|\,|R^4-(z\bar\zeta)^2|}{|z^2-\zeta^2||R^4-(z\zeta)^2|}$;

6) $\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{|e^z-e^{\bar\zeta}|}{|e^z-e^{\zeta}|}$; 7) $\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{|\operatorname{ch}z-\operatorname{ch}\bar\zeta|}{|\operatorname{ch}z-\operatorname{ch}\zeta|}$.

17.12. 1) $\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{u_0(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}$; 2) $\dfrac12+\dfrac1\pi\operatorname{arctg}\dfrac{x-a}{y}$;

3) $\dfrac12-\dfrac1\pi\operatorname{arctg}\dfrac{y^2+(x-a)(x-b)}{y(b-a)}$; 4) $\dfrac{y+1}{x^2+(y+1)^2}$;

5) $\dfrac{x}{x^2+(y+1)^2}$; 6) $\dfrac{x^2-(y+1)^2}{[x^2+(y+1)^2]^2}$; 7) $e^{-y}\cos x$.

17.13. 1) $\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty u_0(\xi,0)\left[\dfrac{1}{(x-\xi)^2+y^2}-\dfrac{1}{(x+\xi)^2+y^2}\right]d\xi+$

$$+\frac{x}{\pi}\int_0^\infty u_0(0,\eta)\left[\frac{1}{x^2+(y-\eta)^2}-\frac{1}{x^2+(y+\eta)^2}\right]d\eta;$$

2) $\dfrac2\pi\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; 3) $\dfrac2\pi\left(a\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+b\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\right)$;

4) $\dfrac12-\dfrac1\pi\operatorname{arctg}\dfrac{y^2-x^2+1}{2xy}$; 5) $\dfrac{x(y+1)}{[x^2+(y+1)^2]^2}$;

6) $e^{-y}\sin x+e^{-x}\sin y$.

17.14. 1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\frac1\pi e^x\sin y\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_0(\xi,k\pi)\,e^{-\xi}}{e^{2(x-\xi)}-2e^{x-\xi}\cos(y-k\pi)+1}\,d\xi$;

2) $\dfrac12-\dfrac1\pi\operatorname{arctg}\dfrac{e^{-x}-\cos y}{\sin y}$; 3) $\dfrac12+\dfrac1\pi\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{sh}x}{\sin y}$;

4) $\dfrac2\pi\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}y-\dfrac1\pi\operatorname{arctg}\dfrac{\sin 2x}{e^{2x}-\cos 2y}$; 5) $\dfrac12+\dfrac1\pi\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{th}x}{\operatorname{tg}y}$;

6) $\dfrac{\cos x\operatorname{sh}(\pi-y)}{\operatorname{sh}\pi}$.

17.15. 1) $\dfrac12+\dfrac1\pi\operatorname{arctg}\dfrac{\sin^2y-\operatorname{sh}^2x}{2\sin y\operatorname{sh}x}$; 2) $\dfrac{\sin x\operatorname{sh}(\pi-y)}{\operatorname{sh}\pi}$;

3) $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + \sin y}$; 4) $\dfrac{x \sin 2y + y \operatorname{sh} 2x - \pi \sin y \operatorname{sh} x}{\pi (\operatorname{ch} 2x + \cos 2y)}$.

17.16. 1) $\dfrac{1}{2\pi R} \displaystyle\int\limits_{|\zeta|=R} u_0(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{|z-\zeta|^2} dS_\zeta + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta| \le R} f(\zeta) \ln \frac{|\zeta||z-\zeta^*|}{R|z-\zeta|} d\xi \, d\eta$,

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\zeta^* = \dfrac{\zeta R^2}{|\zeta|^2}$;

2) $\dfrac{a}{4}(R^2 - r^2) + b$; 3) $\dfrac{R^{n+2} - r^{n+2}}{(n+2)^2}$;

4) $\sin r - \sin R + \displaystyle\int\limits_r^R \frac{\sin \rho}{\rho} d\rho$; 5) $\dfrac{r}{R} \cos \varphi$.

Указание. В задачах 17.16, 2)–5) воспользоваться формулой задачи 17.16, 1), где перейти к полярным координатам $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = \rho e^{i\theta}$, $0 < \varphi$, $\theta < 2\pi$.

17.17. 1) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\substack{|\xi|=1 \\ \operatorname{Im} \xi \ge 0}} u_0(\zeta) \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z-\zeta|^2} - \frac{|z|^2 - 1}{|z - \bar{\zeta}|^2} \right) d\xi \, d\eta +$

$$+ \frac{y}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} u_0(\xi, 0) \left(\frac{1}{|z-\xi|^2} - \frac{1}{|\xi z - 1|^2} \right) d\xi,$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$;

2) $r \sin \varphi$; 3) $\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{2r \sin \varphi}{r^2 - 1}$; 4) $\sqrt{r} \cos \dfrac{\varphi}{2}$.

17.18. $\dfrac{1}{\ln 3} \ln \dfrac{|z+4|}{|z-4|}$.

§ 18. Метод потенциалов

Пусть $\rho \in \mathscr{D}'(R^n)$. Свертка $V_n = \dfrac{1}{|x|^{n-2}} * \rho$, $n \ge 3$, называется *ньютоновым потенциалом*, а $V_2 = \ln \dfrac{1}{|x|} * \rho$, $n = 2$, — *логарифмическим потенциалом* с плотностью ρ (определение свертки см. в § 8).

Потенциал V_n удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V_n = -(n-2)\,\sigma_n \rho, \qquad n \ge 3; \qquad \Delta V_2 = -2\pi\rho.$$

Если ρ — финитная абсолютно интегрируемая функция в R^n, то соответствующий ньютонов (логарифмический) потенциал V_n называется *объемным потенциалом* (*потенциалом площади*).

Пусть S — ограниченная кусочно гладкая двусторонняя поверхность в R^n, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к S и $\mu\delta_S$ и $-\dfrac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$ — простой и двойной слои на S с плотностями μ и ν (определение слоев см. в § 6 и § 7). Свертки

$$V_n^{(0)} = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \mu\delta_S \quad \text{и} \quad V_n^{(1)} = -\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \qquad n \ge 3,$$

называются поверхностными *потенциалами простого и двойного слоя* с плотностями μ и ν. Свертки

$$V_2^{(0)} = \ln\frac{1}{|x|} * \mu\delta_S \quad \text{и} \quad V_2^{(1)} = -\ln\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \qquad n=2,$$

называются, соответственно, *логарифмическими потенциалами простого и двойного слоя.*

Если S — поверхность Ляпунова и $\nu \in C(S)$, то в R^3 предельные значения потенциала двойного слоя $V_+^{(1)}$ и $V_-^{(1)}$ извне и изнутри S выражаются формулами

$$V_\pm^{(1)}(x) = \pm 2\pi\nu(x) + V^{(1)}x = \pm 2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y)\frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y, \tag{1}$$

где φ_{xy} — угол между вектором $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ и нормалью $\boldsymbol{n}_y$ в точке $y\in S$.

Если $\mu \in C(S)$, то потенциал простого слоя имеет правильные нормальные производные $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_+$ и $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_-$ на S извне и изнутри S (см. определение в начале гл. V), причем на S

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_\pm(x) = \mp 2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}x}{\partial n} = \mp 2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y)\frac{\cos\psi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y, \tag{2}$$

где ψ_{xy} — угол между вектором $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ и нормалью $\boldsymbol{n}_x$.

Аналогичные формулы для $V_\pm^{(1)}(x)$ и $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_\pm(x)$ справедливы и в R^2 с заменой 2π на π и $|x-y|^2$ на $|x-y|$.

18.1. Пусть ρ — абсолютно интегрируемая функция, $\rho = 0$ вне $\overline{G} \subset R^n$. Доказать:

а) объемный потенциал выражается формулой

$$V_n(x) = \int_G \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy, \qquad n \geq 3; \tag{3}$$

б) V_n — гармоническая функция вне $\overline{G}$;

в) $V_3(x) = \frac{1}{|x|}\int_G \rho(y)\,dy + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \longrightarrow \infty.$

Выяснить физический смысл этих потенциалов.

18.2. Пусть ρ — абсолютно интегрируемая функция, $\rho = 0$ вне $\overline{G} \subset R^2$. Доказать:

а) потенциал площади выражается формулой

$$V_2(x) = \int_G \rho(y)\ln\frac{1}{|x-y|}\,dy; \tag{4}$$

б) V_2 — гармоническая функция вне $\overline{G}$;

в) $V_2(x) = \ln \frac{1}{|x|} \int\limits_G \rho(y)\,dy + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \longrightarrow \infty.$

Выяснить физический смысл этих потенциалов.

18.3. Пусть S — ограниченная кусочно гладкая двусторонняя поверхность и $\mu, \nu \in C(S)$. Доказать:

а) потенциалы простого и двойного слоя выражаются формулами

$$
\begin{gathered}
V_3^{(0)}(x) = \int\limits_S \frac{\mu(y)}{|x-y|}\,dS_y, \\
V_3^{(1)}(x) = \int\limits_S \nu(y)\,\frac{\partial}{\partial n_y}\,\frac{1}{|x-y|}\,dS_y = \int\limits_S \nu(y)\,\frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y,
\end{gathered} \tag{5}
$$

где угол φ_{xy} определен в начале § 18;

б) $V_3^{(0)}$ и $V_3^{(1)}$ — гармонические функции вне S;

в) $V_3^{(0)}(x) = \frac{1}{|x|} \int\limits_S \mu(y)\,dS + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ и $V_3^{(1)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$, $|x| \longrightarrow \infty.$

Выяснить физический смысл этих потенциалов.

18.4. Пусть S — ограниченная кусочно гладкая кривая и $\mu, \nu \in C(S)$. Доказать:

а) логарифмические потенциалы простого и двойного слоя выражаются формулами

$$
\begin{gathered}
V_2^{(0)}(x) = \int\limits_S \mu(y)\,\ln\frac{1}{|x-y|}\,dS_y, \\
V_2^{(1)}(x) = \int\limits_S \nu(y)\,\frac{\partial}{\partial n_y}\,\ln\frac{1}{|x-y|}\,dS_y = \int\limits_S \nu(y)\,\frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|}\,dS_y,
\end{gathered} \tag{6}
$$

где угол φ_{xy} определен в тексте;

б) $V_2^{(0)}$ и $V_2^{(1)}$ — гармонические функции вне S;

в) $V_2^{(0)}(x) = \ln\frac{1}{|x|} \int\limits_S \mu(\zeta)\,ds + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $V_2^{(1)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $|x| \longrightarrow \infty.$

Выяснить физический смысл этих потенциалов.

18.5. 1) Вычислить ньютонов потенциал V_3 с плотностью δ_{S_R};
2) вычислить логарифмический потенциал V_2 с плотностью δ_{S_R}.

18.6. Вычислить объемный потенциал V_3 для шара $|x| < R$ со следующими плотностями:

1) $\rho = \rho(|x|) \in C$; 2) $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$; 3) $\rho = |x|$;
4) $\rho = |x|^2$; 5) $\rho = \sqrt{|x|}$; 6) $\rho = e^{-|x|}$;
7) $\rho = \frac{1}{1+|x|^2}$; 8) $\rho = \sin|x|$; 9) $\rho = \cos|x|$;
10) $\rho = \ln\left(1 + \frac{|x|}{R}\right)$.

18.7. Для сферического слоя $R_1 < |x| < R_2$ вычислить объемный потенциал V_3 масс, распределенных с плотностями:

1) $\rho = \rho_0 = \text{const}$; 2) $\rho = \rho(|x|) \in C(R_1 \le |x| \le R_2)$.

18.8. Пусть масса распределена в шаре $r < R$ с плотностью ρ. Найти объемный потенциал V_3 в точке, лежащей на оси $\theta = 0$ $(0 \le \theta \le \pi)$ для следующих плотностей:

1) ρ пропорциональна квадрату расстояния от плоскости $\theta = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\rho = \cos\theta$; 3) $\rho = \sin\varphi$;

4) $\rho = \rho(\varphi)$ — непрерывная, 2π-периодическая функция; $0 \le \varphi < 2\pi$.

18.9. Пусть масса распределена с постоянной плотностью ρ_0 в цилиндре $\{x_1^2 + x_2^2 < R^2,\ 0 < x_3 < H\}$. Найти объемный потенциал в точках оси $x_3 \ge H$.

118.10. Найти потенциал площади для круга $r < R$ со следующими плотностями:

1) $\rho = \rho(r) \in C([0,R])$; 2) $\rho = \rho_0 = \text{const}$; 3) $\rho = r$;

4) $\rho = r^2$; 5) $\rho = e^{-r}$; 6) $\rho = \dfrac{1}{1+r^2}$;

7) $\rho = \sqrt{r}$; 8) $\rho = \sin r$; 9) $\rho = \cos r$;

10) $\rho = \sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$; 11) $\rho = \cos\varphi$;

12) $\rho = \rho(\varphi)$ — непрерывная, 2π-периодическая функция.

18.11. Найти логарифмический потенциал площади для кольца $R_1 < r < R_2$ со следующими плотностями:

1) $\rho = \rho_0 = \text{const}$; 2) $\rho = \rho(r) \in C([R_1, R_2])$.

18.12. Пусть $f(|y|)$ непрерывна при $|y| \le R$ и $f(|y|) = 0$ при $|y| > R$, $y \in R^3$. Доказать:

а) объемный потенциал $V_3(x)$ с плотностью $f(|y|)$ зависит только от $|x|$ и

$$V_3(x) = \frac{1}{|x|} \int\limits_{|y|<R} f(|y|)\, dy, \qquad |x| > R;$$

б) для того чтобы $V_3(x)$ обратился в нуль при $|x| > R$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int f(|y|)\, dy = 0; \tag{$*$}$$

в) при условии $(*)$ справедливо равенство

$$\int V_3(x)\, dx = -\frac{2\pi}{3} \int f(|y|)|y|^2 dy.$$

Дать физическую интерпретацию полученных равенств.

18.13. Доказать: если функции $f_1(x)$ и $f_2(|x|)$ непрерывны при $|x| \le R$; $x \in R^3$, обращаются в нуль при $|x| > R$ и удовлетворяют уравнению

$$\Delta f_1(x) = D^\alpha f_2(|x|),$$

то потенциал $V_3(x)$ с плотностью $f_2(|x|)$ обращается в нуль при $|x| > R$.

18.14. Доказать результаты, аналогичные результатам задач 18.12 и 18.14 для потенциала площади, а именно:

1) $V_2(x) = \ln \dfrac{1}{|x|} \displaystyle\int\limits_{|y|<R} f(|y|)\,dy, \ |y| > R;$

2) $\displaystyle\int V_2(x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\int f(|y|)|y|^2 dy,$ если $\displaystyle\int f(|y|)\,dy = 0.$

18.15. Распространить задачи 18.12–18.14 на случай, когда плотность f есть обобщенная функция. Под «интегралом» $\int f(x)\,dx$ для финитной $f \in \mathscr{D}'$ следует понимать число (f, η), где $\eta \in \mathscr{D}$, $\eta \equiv 1$ в окрестности носителя f (это число не зависит от выбора вспомогательной функции η).

18.16. Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью μ_0 на сфере $|x| = R$.

18.17. В точке, лежащей на оси $\theta = 0$ $(0 \le \theta \le \pi)$, найти потенциал простого слоя, распределенного на сфере $r = R$ со следующими плотностями:

1) μ пропорциональна квадрату расстояния от плоскости $\theta = \pi/2$;

2) $\mu = \sin \dfrac{\theta}{2}$;

3) $\mu = e^{\varphi}, \ \ 0 \le \varphi \le \pi,$ и $\mu = e^{2\pi-\varphi}, \ \ \pi \le \varphi < 2\pi.$

18.18. На круглом диске радиуса R распределен простой слой с плотностью μ. Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска для следующих плотностей:

1) $\mu = \mu_0 = \text{const}$; 2) $\mu = r$; 3) $\mu = r^2$;

4) $\mu = \mu(\varphi)$ — непрерывная 2π-периодическая функция.

18.19. Найти потенциал простого слоя, распределенного с плотностью μ на цилиндре

$$\{x_1^2 + x_2^2 = R^2,\ 0 \le x_3 \le H\}$$

в точке, лежащей на оси x_3 для следующих плотностей:

1) $\mu = \mu_0 = \text{const}$;

2) $\mu = \mu(\varphi)$ — непрерывная 2π-периодическая функция.

18.20. Найти потенциал двойного слоя с постоянной плотностью ν_0 для сферы $|x| = R$.

18.21. На сфере $r = R$ распределены диполи с плотностью момента ν, ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси $\theta = 0$ $(0 \le \theta \le \pi)$, для следующих плотностей:

1) $\nu = \cos\theta$; 2) $\nu = \sin \dfrac{\theta}{2}$;

3) $\nu = e^{\varphi}, \ 0 \le \varphi \le \pi,$ и $\nu = e^{2\pi-\varphi}, \ \pi \le \varphi < 2\pi;$

4) $\nu = \nu(\varphi)$ — непрерывная 2π-периодическая функция;

5) ν равна квадрату расстояния от плоскости $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

18.22. На круглом диске радиуса R распределены диполи с плотностью момента ν, ориентированные вдоль нормали, направленной в сторону отрицательных x_3. Найти потенциал двойного слоя в точке, лежащей на оси диска, для следующих плотностей:

1) $\nu = \mathrm{const}$; 2) $\nu = \nu(r) \in C([0, R])$;

3) $\nu = \nu(\varphi)$ — непрерывная, 2π-периодическая функция;

4) $\nu = r + \varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$, и $\nu = r + 2\pi - \varphi$, $\pi \le \varphi < 2\pi$.

18.23. Найти логарифмический потенциал простого слоя для окружности радиуса R со следующими плотностями:

1) $\mu = \mu_0 = \mathrm{const}$; 2) $\mu = \cos^2\varphi$, $R = 2$.

18.24. Найти логарифмический потенциал двойного слоя для окружности радиуса R со следующими плотностями:

1) $\nu = \mathrm{const}$; 2) $\nu = \sin\varphi$.

18.25. Найти логарифмический потенциал простого слоя для отрезка $-a \le x \le a$, $y = 0$ со следующими плотностями:

1) $\mu = \mathrm{const}$;

2) $\mu = -\mu_0$, $-a \le x < 0$, и $\mu = \mu_0$, $0 < x \le a$;

3) $\mu = x$.

18.26. Найти логарифмический потенциал двойного слоя для отрезка $-a \le x \le a$, $y = 0$ со следующими плотностями:

1) $\nu = \mathrm{const}$;

2) $\nu = -\nu_0$, $-a \le x < 0$, и $\nu = \nu_0$, $0 < x \le a$;

3) $\nu = x$; 4) $\nu = x^2$.

Пусть $\rho(x)$ — финитная обобщенная функция. **Свертки** $V = -4\pi\mathscr{E} * \rho$ и $\overline{V} = -4\pi\overline{\mathscr{E}} * \rho$, где

$$\mathscr{E} = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \qquad \overline{\mathscr{E}} = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$$

— фундаментальные решения оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ в R^3, являются аналогами ньютонова потенциала. Потенциалы V и $\overline{V}$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = -4\pi\rho$.

Так же определяются аналоги потенциалов простого и двойного слоев.

То же для оператора $\Delta - k^2$. Здесь аналогом ньютонова потенциала является $V_* = -4\pi\mathscr{E}_* * \rho$, где $\mathscr{E}_* = -\dfrac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}$ — фундаментальное решение оператора $\Delta - k^2$ в R^3.

18.27. Пусть ρ — абсолютно интегрируемая функция и $\rho(x) = 0$, $x \in G_1 = R^3 \backslash \overline{G}$. Доказать:

1) $V, \overline{V}$ и V_* выражаются формулами

$$V(x) = \int\limits_G \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\,\rho(y)\,dy, \qquad \overline{V}(x) = \int\limits_G \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}\,\rho(y)\,dy,$$
$$V_*(x) = \int\limits_G \frac{e^{-k|x-y|}}{|x-y|}\,\rho(y)\,dy; \tag{7}$$

2) $V, \overline{V}$ и $V_* \subset C^1(R^3) \cap C^\infty(G_1)$ удовлетворяют в области G_1 однородным уравнениям $\Delta u + k^2 u = 0$ и $\Delta u - k^2 u = 0$ соответственно;

3) V и $\overline{V}$ удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда

$$u(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} \mp iku(x) = o\left(|x|^{-1}\right),$$
$$|x| \longrightarrow \infty \qquad \text{и} \qquad V_*(x) \longrightarrow 0, \qquad |x| \longrightarrow \infty. \tag{8}$$

18.28. Для оператора $\Delta + k^2$ вычислить потенциал V для шара $|x| < R$ со следующими плотностями:

1) $\rho = \rho(|x|) \in C(\overline{U}_R)$; 2) $\rho = \rho_0 = \text{const}$; 3) $\rho = e^{-|x|}$.

18.29. Для оператора $\Delta + k^2$ вычислить потенциал V для сферического слоя $R_1 < |x| < R_2$ с постоянной плотностью ρ_0.

18.30. 1) Для оператора $\Delta + k^2$ вычислить потенциал простого слоя $V^{(0)}$, распределенного с постоянной плотностью μ_0 на сфере;

2) для оператора $\Delta + k^2$ вычислить потенциал двойного слоя $V^{(1)}$, распределенного с постоянной плотностью ν_0 на сфере.

18.31. Для оператора $\Delta - k^2$ вычислить потенциал V_* для шара $r < R$ со следующими плотностями:

1) $\rho = \rho(|x|) \in C(\overline{U}_R)$; 2) $\rho = \rho_0 = \text{const}$; 3) $\rho = e^{-|x|}$.

18.32. 1) Для оператора $\Delta - k^2$ вычислить потенциал простого слоя $V_*^{(0)}$, распределенного с постоянной плотностью μ_0 на сфере;

2) для оператора $\Delta - k^2$ вычислить потенциал двойного слоя $V_*^{(1)}$, распределенного с постоянной плотностью ν_0 на сфере.

18.33. 1) Предполагая границу S области $G \subset R^3$ поверхностью Ляпунова, доказать, что

$$V_3^{(1)}(x) = \int\limits_S \frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y = \begin{cases} -4\pi, & x \in G, \\ -2\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in R^3 \backslash \overline{G}, \end{cases} \tag{9}$$

где угол φ_{xy} определен в начале параграфа;

2) предполагая границу S области $G \subset R^2$ кривой Ляпунова, доказать, что

$$V_2^{(1)}(x) = \int\limits_S \frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|}\,dS_y = \begin{cases} -2\pi, & x \in G, \\ -\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in R^2 \backslash \overline{G}. \end{cases} \tag{9_1}$$

18.34. Доказать:

1) подстановка $u = v + V_3$, где

$$V_3(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_G \frac{f(y)}{|x-y|}\,dy, \qquad x \in R^3,$$

сводит внутренние краевые задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = -f$ к соответствующим внутренним краевым задачам для уравнения Лапласа, если $f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$;

2) то же справедливо и для внешних задач при дополнительном условии, что f — финитная функция.

18.35. С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

18.36. Найти стационарное распределение температуры внутри и вне бесконечного цилиндра радиуса R при условии, что на границе поддерживается следующая температура u_0:

1) $u_0 = \text{const}$; 2) $u_0 = \sin\varphi$; 3) $u_0 = \cos\varphi$;

4) $u_0 = C = \text{const}$ при $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, и $u_0 = 0$ при $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$.

18.37. Найти стационарное распределение температуры внутри неограниченного круглого цилиндра $0 \le r < R$ при условии, что в цилиндре выделяется тепло с плотностью $f(r,\varphi)$ и на границе $r = R$ поддерживается температура $u_0^-(R,\varphi)$ для следующих f и u_0^-:

1) $f = f_0 = \text{const}$, $u_0^- = 0$; 2) $f = r$, $u_0^- = 0$;

3) $f = r^2$, $u_0^- = a$; 4) $f = e^{-r}$, $u_0^- = \sin\varphi$;

5) $f = \sin r$, $u_0^- = \cos\varphi$; 6) $f = \sin\varphi$, $u_0^- = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$;

7) $f = \cos\varphi$, $u_0^- = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$.

18.38. С помощью потенциала простого слоя решить задачу Неймана для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

18.39. Найти плотность диффундирующего вещества при стационарном процессе $U(r,\varphi,z)$ внутри и вне бесконечного цилиндра радиуса R при условии, что источники вещества отсутствуют и коэффициент диффузии $D = \text{const}$, а на границе поддерживается заданный поток диффузии u_1 для следующих u_1:

1) $u_1 = \text{const}$; 2) $u_1 = \sin\varphi$; 3) $u_1 = \cos\varphi$.

18.40. Найти стационарное распределение температуры внутри неограниченного круглого цилиндра радиуса R при условии, что в цилиндре выделяется тепло с плотностью $f(r,\varphi)$ и на границе поддерживается заданный поток тепла $u_1^-(R,\varphi)$ для следующих f и u_1^-:

1) $f = f_0 = \text{const}$, $u_1^- = -\dfrac{f_0 R}{2k}$;

2) $f = r$, $u_1^- = -\dfrac{R^3}{3}$, коэффициент теплопроводности $k = 1$;

3) $f = \dfrac{1}{1+r^2}$, $u_1^- = \dfrac{\ln(1+R^2)}{R}$, $k = 1$;

4) $f = \sin\varphi$, $u_1^- = \sin\varphi$, $k = 1$;

5) $f = \cos\varphi$, $u_1^- = \cos\varphi$, $k = 1$.

18.41. С помощью потенциалов простого и двойного слоя найти стационарную температуру точек полуплоскости $y > 0$, если:

1) на границе $y = 0$ поддерживается заданная температура $u_0(x)$;

2) на $y = 0$ поддерживается заданный поток тепла, т. е.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=0} = u_1(x).$$

Источников тепла нет.

18.42. Найти распределение потенциала электростатического поля внутри двугранного угла при условии, что его граница заряжена до потенциала $V_0 = \text{const}$ для следующих случаев:

1) $x>0,\ y>0,\ -\infty<z<\infty$; 2) $0<\varphi<\varphi_0,\ \varphi_0<\dfrac{\pi}{2},\ 0\le r<\infty$.

18.43. С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара $|x| < R$.

18.44. Найти стационарное распределение температуры в шаре $r < R$ при условии, что в шаре выделяется тепло с плотностью f и на границе $r = R$ поддерживается температура u_0^- для следующих f и u_0^-:

1) $f = f_0 = \text{const}$, $u_0^- = 0$;

2) $f = r$, $u_0^- = a$;

3) $f = \sqrt{r}$, $u_0^- = \dfrac{2}{7} R^{5/2}$, $k = 1$.

18.45. Доказать, что решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа для шара $r < R$ определяется формулой

$$U(r,\theta,\varphi) = -R\int_0^r u(\rho,\theta,\varphi)\,\frac{d\rho}{\rho},$$

где u — интеграл Пуассона для шара, т. е.

$$u(\rho,\theta,\varphi) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_0^-(R,\theta_1,\varphi_1)\,\frac{R^2-\rho^2}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma)^{3/2}}\,\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1,$$

где γ — угол между радиусами-векторами точек (ρ,θ,φ) и (R,θ_1,φ_1) и $u_0^- = \left.\dfrac{\partial U}{\partial n}\right|_{r=R} = u|_{\rho=R}$.

У к а з а н и е. Доказать, что если $u(\rho,\theta,\varphi)$, $u(0) = 0$ — гармоническая функция в области, содержащей начало координат, то и функция $U(r,\theta,\varphi) = -R\displaystyle\int_0^r u(\rho,\theta,\varphi)\,\frac{d\rho}{\rho}$ является гармонической. Далее воспользоваться условием разрешимости задачи, а именно $\displaystyle\int_{r=R} u_0^- dS = 0$.

18.46. Доказать, что решение внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа для шара определяется формулой

$$U(r,\theta,\varphi) = R\int_\infty^r u(\rho,\theta,\varphi)\,\frac{d\rho}{\rho},$$

где $u(\rho,\theta,\varphi)$ — решение внешней задачи Дирихле для шара, т. е.

$$u(\rho,\theta,\varphi) = \frac{R}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} u_0^+(R,\theta_1,\varphi_1)\,\frac{\rho^2 - R^2}{(\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\gamma)^{3/2}}\,\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1;$$

$$u_0^+ = \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{r=R} = u|_{\rho=R}.$$

Указание. См. указание к задаче 18.45.

18.47. Решить внутреннюю и внешнюю задачи Неймана для $r < R$ для $u_0^- = u_0^+ = a = \text{const}$.

18.48. С помощью поверхностных потенциалов решить задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа для полупространства $x_3 > 0$.

18.49. Найти $u(x_1,x_2,x_3)$ — плотность диффундирующего вещества при стационарном процессе при условии, что источники вещества отсутствуют и коэффициент диффузии $D = \text{const}$ для следующих областей G и граничных условий $u|_S$:

1) $x_3 > 0,\quad u|_{x_3=0} = u_0 = \text{const};$

2) $x_3 > 0,\quad u|_{x_3=0} = \begin{cases} -1, & x_1 < 0, \\ +1, & x_1 > 0; \end{cases}$

3) $x_2, x_3 > 0,\ -\infty < x_1 < \infty,\ u|_S = u_0 = \text{const}.$

Краевые задачи для уравнений Гельмгольца $\Delta u + k^2u = -f(x)$ и $\Delta u - k^2u = -f(x)$ в пространстве ставятся так же, как и для уравнения Пуассона. При этом решения внешних задач на бесконечности должны удовлетворять условию излучения (см. формулу (8)) для уравнения $\Delta u + k^2u = -f$ и обращаться в нуль для $\Delta u - k^2u = -f$.

18.50. Решить задачу Дирихле для уравнения $\Delta u + k^2u = 0$ внутри и вне сферы $|x| = R$ при условии $u|_{|x|=R} = a$.

18.51. Решить задачу Неймана для уравнения $\Delta u + k^2u = 0$ внутри и вне сферы $|x| = R$ при условии $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = a$.

18.52. Решить задачу

$$\Delta u + k^2u = -f(x), \qquad u|_{|x|=R} = u_0^-(x)$$

внутри сферы $|x| = R$ для следующих f и u_0^-:

1) $f = f_0 = \text{const},\qquad u_0^- = 0,\qquad k = R = 1;$

2) $f = 1,\qquad u_0^- = \sqrt{2}e^{i(1-\pi/4)}\sin 1 - 1,\qquad k = R = 1.$

18.53. Решить задачу Дирихле для уравнения $\Delta u - k^2u = 0$ внутри и вне сферы $|x| = R$ при условии $u|_{|x|=R} = a$.

18.54. Решить задачу Дирихле для уравнения $\Delta u - k^2u = 0$ внутри и вне сферы $|x| = R$ при условии $u|_{|x|=R} = a\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$.

18.55. Решить задачу Неймана для уравнения $\Delta u - k^2u = 0$ внутри и вне сферы $|x| = R$ при условии $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=R} = a$.

18.56. Решить задачу

$$\Delta u - k^2 u = -f(x), \qquad u|_{|x|=R} = u_0^-(x)$$

внутри сферы $|x| = R$ для следующих f и u_0^-:

1) $f = f_0 = \text{const}$, $\quad u_0^- = 0$, $\quad k = R = 1$;

2) $f = 1$, $\quad u_0^- = 1 - 2e^{-1}\operatorname{sh} 1$, $\quad k = R = 1$.

18.57. Найти стационарное распределение концентрации неустойчивого газа внутри бесконечного цилиндра радиуса R, если на поверхности цилиндра поддерживается постоянная концентрация u_0.

Ответы к § 18

18.3. Р е ш е н и е. В силу формулы (7) из § 8 и определения простого слоя из § 6

$$\left(V_3^{(0)}, \varphi\right) = \left(\frac{1}{|\xi|} \cdot \mu(y)\,\delta_S(y), \eta(y)\,\varphi(\xi + y)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{|\xi|}, (\mu(y)\,\delta_S(y), \eta(y)\,\varphi(\xi + y))\right) =$$

$$= \int\limits_{R^3} \frac{1}{|\xi|}\left(\int\limits_S \mu(y)\,\varphi(\xi + y)\,dS_y\right) d\xi = \int\limits_{R^3} \left(\int\limits_S \frac{\mu(y)}{|x - y|}\,dS_y\right) \varphi(x)\,dx.$$

18.5. 1) В силу формулы (5): $4\pi R$, $|x| \le R$; $4\pi R^2/|x|$, $|x| \ge R$;

2) $-2\pi \ln R$, $|x| \le R$; $-2\pi \ln |x|$, $|x| \ge R$.

18.6. У к а з а н и е. Воспользоваться формулой (3) и ввести сферические координаты.

1) $\dfrac{4\pi}{|x|} \displaystyle\int_0^R \rho(r)\,r^2\,dr$, $|x| \ge R$; $\dfrac{4\pi}{|x|} \displaystyle\int_0^{|x|} \rho(r)\,r^2\,dr + 4\pi \int_{|x|}^R \rho(r)\,r\,dr$, $|x| \ge R$;

2) $\dfrac{4\pi R^3 \rho_0}{3|x|}$, $\quad |x| \ge R$; $\quad 2\pi R^2 \rho_0 - \dfrac{2}{3}\pi |x|^2 \rho_0$, $\quad |x| \le R$;

3) $\dfrac{\pi R^4}{|x|}$, $\quad |x| \ge R$; $\quad \dfrac{\pi}{3}(4R^3 - |x|^3)$, $\quad |x| \le R$;

4) $\dfrac{4\pi R^5}{5|x|}$, $\quad |x| \ge R$; $\quad \pi\left(R^4 - \dfrac{|x|^4}{5}\right)$, $\quad |x| \le R$;

5) $\dfrac{8\pi R^{7/2}}{7|x|}$, $\quad |x| \ge R$; $\quad \dfrac{8\pi}{35}(7R^{5/2} - 2|x|^{5/2})$, $\quad |x| \le R$;

6) $\dfrac{4\pi}{|x|}\left[2 - e^{-R}(2 + 2R + R^2)\right]$, $\quad |x| \ge R$;

$$4\pi \left[\frac{2(1 - e^{-|x|})}{|x|} - e^{-R}(1 + R) - e^{-|x|}\right], \quad |x| \le R;$$

7) $\dfrac{4\pi}{|x|}(R - \operatorname{arctg} R)$, $|x| \ge R$; $4\pi\left(1 - \dfrac{\operatorname{arctg}|x|}{|x|} + \ln\sqrt{\dfrac{1 + R^2}{1 + |x|^2}}\right)$, $|x| \le R$;

8) $\dfrac{4\pi}{|x|}\left[(2-R^2)\cos R - 2(1-R\sin R)\right], \quad |x| \ge R;$

$$4\pi\left[\frac{2}{|x|}(\cos|x|-1)+\sin|x|+\sin R - R\cos R\right], \quad |x|\le R;$$

9) $\dfrac{4\pi}{|x|}\left[2R\cos R + (R^2-2)\sin R\right], \quad |x|\ge R;$

$$4\pi\left(\cos|x| - \frac{2\sin|x|}{|x|} + R\sin R + \cos R\right), \quad |x|\le R;$$

10) $\dfrac{2\pi R^3}{9|x|}(12\ln 2 - 5), \quad |x|\ge R;$

$$\frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{2R^3}{|x|}+3R^2-|x|^2\right)\ln\left(1+\frac{|x|}{R}\right)^2+\frac{5}{3}|x|^2+2|x|(R-3)-R^2\right], \quad |x|\le R.$$

18.7. 1) $2\pi(R_2^2-R_1^2)\rho_0$, $|x|\le R_1$; $\quad 2\pi R_2^2\rho_0 - \dfrac{2}{3}\pi\rho_0\left(|x|^2+\dfrac{2R_1^3}{|x|}\right),$

$$R_1\le|x|\le R_2; \quad \frac{4\pi\rho_0}{3|x|}(R_2^3-R_1^3), \ |x|\ge R_2;$$

2) $4\pi\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\rho(r)\,r\,dr$, $|x|\le R_1$; $\quad \dfrac{4\pi}{|x|}\displaystyle\int_{R_1}^{|x|}\rho(r)\,r^2\,dr + 4\pi\int_{|x|}^{R_2}\rho(r)\,r\,dr,$

$$R_1\le|x|\le R_2; \quad \frac{4\pi}{|x|}\int_{R_1}^{R_2}\rho(r)\,r^2\,dr, \ |x|\ge R_2.$$

18.8. 1) $\dfrac{4}{15}\pi R^4 C\left(\dfrac{R}{r}+\dfrac{2}{7}\dfrac{R^3}{r^3}\right)$, $r\ge R$; $\quad 2\pi C\left(\dfrac{R^4}{6}+\dfrac{2}{15}R^2r^2-\dfrac{9}{70}r^4\right),$
$r\le R$, C — коэффициент пропорциональности;

2) $\dfrac{\pi R^4}{3r^2}$, $r\ge R$; $\dfrac{4}{3}\pi Rr - \pi r^2$, $r\le R$;

3) 0;

4) $\dfrac{2R^3}{3r}\displaystyle\int_0^{2\pi}\rho(\varphi)\,d\varphi$, $r\ge R$; $\left(R^2-\dfrac{r^2}{3}\right)\displaystyle\int_0^{2\pi}\rho(\varphi)\,d\varphi$, $r\le R$.

18.9. $\pi\Big[(H-x_3)\sqrt{R^2+(H-x_3)^2}+x_3\sqrt{R^2+x_3^2}+H^2-2Hx_3+$

$$+R^2\ln\left(H-x_3+\sqrt{R^2+(H-x_3)^2}\right)-R^2\ln\left(-x_3+\sqrt{R^2+x_3^2}\right)\Big].$$

18.10. 1) $\displaystyle\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho(r_1)\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\varphi_1-\varphi)}}\,r_1\,dr_1\,d\varphi;$

2) $-\pi R^2\rho_0\ln r$, $r\ge R$; $\quad -\pi\rho_0\left(R^2\ln R - \dfrac{R^2-r^2}{2}\right)$, $r\le R$.

Р е ш е н и е. Пусть $r\ge R$. Тогда

$$V_2(r,\varphi)=\rho_0\int_0^R r_1\,dr_1\int_0^{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r}+\ln\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r_1}{r}\right)^2-2\frac{r_1}{r}\cos(\varphi_1-\varphi)}}\right]d\varphi_1 =$$

$$= -\pi\rho_0R^2\ln r,$$

так как

$$\int\limits_0^{2\pi} \ln\left[1+\lambda^2-2\lambda\cos(\varphi_1-\varphi)\right]d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\lambda}\frac{2\lambda-2\cos(\varphi_1-\varphi)}{1+\lambda^2-2\lambda\cos(\varphi_1-\varphi)}\,d\lambda\right]d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\lambda}-\frac{2}{\lambda}\operatorname{Re}\frac{\lambda e^{i(\varphi_1-\varphi)}}{1-\lambda e^{i(\varphi_1-\varphi)}}\,d\lambda\right]d\varphi =$$

$$= -2\int\limits_0^{2\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\cos n(\varphi_1-\varphi)\right]d\varphi_1 = 0,$$

где $\lambda = \dfrac{r_1}{r} < 1$;

3) $-\dfrac{2}{3}\pi R^2\ln r,\quad r \ge R;\qquad \dfrac{2\pi}{9}\left[R^3(1-3\ln R)-r^3\right],\quad r\le R;$

4) $-\dfrac{\pi}{2}R^4\ln r,\quad r\ge R;\qquad \dfrac{\pi}{8}\left[R^4(1-4\ln R)-r^4\right],\quad r\le R;$

5) $-2\pi\left[1-(1+R)e^{-R}\right]\ln r,\quad r\ge R;$

$$-2\pi\left[e^{-r}-e^{-R}+\ln r-(1+R)e^{-R}\ln R+\int\limits_r^R\frac{e^{-r_1}}{r_1}\,dr_1\right],\quad r\le R;$$

6) $-2\pi\ln r\ln\sqrt{1+R^2},\quad r\ge R;$

$$-2\pi\left[\ln R\ln\sqrt{1+R^2}-\frac{1}{2}\int\limits_r^R\frac{\ln(1+r_1^2)}{r_1}\,dr_1\right],\quad r\le R;$$

7) $-\dfrac{4}{5}\pi R^{5/2}\ln r,\ r\ge R;\ -\dfrac{4}{5}\pi\left[R^{5/2}\ln R+\dfrac{2}{5}\left(r^{5/2}-R^{5/2}\right)\right],\quad r\le R;$

8) $2\pi(R\cos R-\sin R)\ln r,\quad r\ge R;$

$$2\pi\left(R\ln R\cos R-\ln R\sin R+\sin r-\sin R+\int\limits_r^R\frac{\sin r_1}{r_1}\,dr_1\right),\quad r\le R;$$

9) $2\pi\ln r(1-R\sin R-\cos R),\quad r\ge R;$

$$2\pi\left[\ln r-\ln R(R\sin R+\cos R)+\cos r-\cos R+\int\limits_r^R\frac{\cos r_1}{r_1}\,dr_1\right],\ r\le R;$$

10) $\dfrac{\pi R^3\sin\varphi}{3r},\quad r\ge R;\qquad \pi\left(rR-\dfrac{2r^2}{3}\right)\sin\varphi,\quad r\le R;$

11) $\dfrac{\pi R^3\cos\varphi}{3r},\quad r\ge R;\qquad \pi\left(rR-\dfrac{2r^2}{3}\cos\varphi\right),\quad r\le R;$

12) $-\dfrac{\pi R^2}{2}\ln r\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\rho(\varphi)\,d\varphi,\ r\ge R;\ \left(\dfrac{R^2-r^2}{4}-\dfrac{R^2}{2}\ln R\right)\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\rho(\varphi)\,d\varphi,\ r\le R.$

18.11. Указание. См. решение задачи 18.10, 2).

1) $\pi\rho_0(R_1^2 - R_2^2)\ln r, \quad r \ge R_2; \quad \pi\rho_0\left(R_1^2\ln r - R_2^2\ln R_2 + \frac{R_2^2 - r^2}{2}\right),$
$R_1 \le r \le R_2; \quad \pi\rho_0\left(R_1^2\ln R_1 - R_2^2\ln R_2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2}\right), \quad r \le R_1;$

2) $-2\pi\ln r\int\limits_{R_1}^{R_2}\rho(x)\,dx, \ r \ge R_2; \ -2\pi\left(\ln r\int\limits_{R_1}^{r}\rho(x)\,x\,dx + \int\limits_{r}^{R_2}\rho(x)\,x\ln x\,dx\right),$
$R_1 \le r \le R_2; \ -2\pi\int\limits_{R_1}^{R_2}\rho(x)\,x\ln x\,dx, \ r \le R_1.$

18.16. $\frac{4\pi\mu_0 R^2}{|x|}, \quad |x| \ge R; \quad 4\pi\mu_0 R, \quad |x| \le R.$

Указание. Воспользоваться формулой (5).

18.17. 1) $\frac{4\pi R^2 C}{3r}\left(1 + \frac{2R^2}{5r^2}\right), \ r \ge R; \ \frac{4}{3}\pi RC\left(1 + \frac{2r^2}{5R^2}\right), \ r \le R,$
C — коэффициент пропорциональности;

2) $\frac{\pi R}{r}\left(r + R - \frac{(r-R)^2}{2\sqrt{rR}}\ln\frac{\sqrt{r}+\sqrt{R}}{\sqrt{r}-\sqrt{R}}\right), \quad r \ge R,$
$$\frac{\pi R}{r}\left(r + R - \frac{(r-R)^2}{2\sqrt{rR}}\ln\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}}\right), \quad r \le R;$$

3) $\frac{2R^2}{r}(e^\pi - 1), \ r \ge R; \ 2R(e^\pi - 1), \quad r \le R.$

18.18. 1) $2\pi\mu_0\left(\sqrt{x_3^3 + R^2} - x_3\right);$

2) $\pi R\sqrt{x_3^2 + R^2} - \pi x_3^2\ln\frac{R + \sqrt{x_3^2 + R^2}}{|x_3|};$

3) $\frac{4\pi}{3}\left[x_3^3 + \left(\frac{R^2}{2} - x_3^2\right)\sqrt{x_3^2 + R^2}\right]; \quad$ 4) $\left(\sqrt{x_3^2 + R^2} - |x_3|\right)\int\limits_0^{2\pi}\mu(\varphi)\,d\varphi.$

18.19. 1) $2\pi R\mu_0\ln\frac{H - x_3 + \sqrt{R^2 + (H - x_3)^2}}{-x_3 + \sqrt{R^2 + x_3^2}};$

2) $R\left[\ln\left(H - x_3 + \sqrt{R^2 + (H - x_3)^2}\right) - \ln\left(-x_3 + \sqrt{R^2 + x_3^2}\right)\right]\int\limits_0^{2\pi}\mu(\varphi)\,d\varphi.$

18.20. $0, \quad |x| > R; \quad -4\pi\nu_0, \quad |x| < R; \quad -2\pi\nu_0, \quad |x| = R.$

Указание. Воспользоваться формулой (5).

18.21. 1) $\frac{4\pi R^2}{3r^2}, \ r > R; \ -\frac{8\pi r}{3R}, \ r < R; \ -\frac{2\pi}{3}, \ r = R;$

2) $\frac{\pi}{2r}\left[R - 3r + (R + 3r)\left(\sqrt{\frac{r}{R}} - \sqrt{\frac{R}{r}}\right)\ln\frac{\sqrt{r}+\sqrt{R}}{\sqrt{r}-\sqrt{R}}\right], \quad r > R;$
$$\frac{\pi}{2r}\left[R - 3r + (R + 3r)\left(\sqrt{\frac{r}{R}} - \sqrt{\frac{R}{r}}\right)\ln\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}}\right], \quad r < R;$$

3) $0, \quad r > R; \quad -4(e^\pi - 1), \quad r < R; \quad -2(e^\pi - 1), \quad r = R;$

4) $0, \quad r > R; \quad -2\int\limits_0^{2\pi} \nu(\varphi)\,d\varphi, \quad r < R; \quad -\int\limits_0^{2\pi} \nu(\varphi)\,d\varphi, \quad r = R;$

5) $\dfrac{16\pi R^5}{15r^3}, \quad r > R; \quad -\dfrac{4\pi R^2}{3}\left(1 + \dfrac{6r^2}{5R^2}\right), \quad r < R; \quad -2\pi, \quad r = R.$

18.22. 1) $2\pi\nu_0 x_3\left(\dfrac{1}{\sqrt{R^2+x_3^2}} - \dfrac{1}{|x_3|}\right), \quad x_3 \neq 0;$

2) $-2\pi x_3 \int\limits_0^R \dfrac{\nu(r)\,r\,dr}{(x_3^2+r^2)^{3/2}}, \quad x_3 \neq 0;$

3) $x_3\left(\dfrac{1}{\sqrt{R^2+x_3^2}} - \dfrac{1}{|x_3|}\right)\int\limits_0^{2\pi} \nu(\varphi)\,d\varphi, \quad x_3 \neq 0;$

4) $\pi x_3\left(\dfrac{\pi+2R}{\sqrt{R^2+x_3^2}} - \dfrac{\pi}{|x_3|} - 2\ln\dfrac{R+\sqrt{R^2+x_3^2}}{|x_3|}\right), \quad x_3 \neq 0.$

18.23. 1) $-2\pi R\mu_0 \ln R, \quad r \leq R; \quad -2\pi R\mu_0 \ln r, \quad r \geq R;$

2) $-2\pi\ln 2 + \dfrac{\pi}{8} r^2\cos 2\varphi, \quad r \leq 2; \quad -2\pi\ln r + \dfrac{2\pi}{r^2}\cos 2\varphi, \quad r \geq R.$

18.24. 1) $0,\ r > R;\ -\pi\nu_0,\ r = R;\ -2\pi\nu_0,\ r < R;$

2) $$V_2^{(1)}(r,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{r^2-R^2}{2Rr}\left[-\pi\sin\varphi + \dfrac{R^2+r^2}{r^2-R^2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{R+r}{r-R}\,2\operatorname{ctg}\varphi\right)\right], & r > R; \\ \dfrac{r^2-R^2}{2Rr}\left[-\pi\sin\varphi + \dfrac{R^2+r^2}{R^2-r^2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{R+r}{R-r}\,2\operatorname{ctg}\varphi\right)\right], & r < R; \\ 0, & r = R. \end{cases}$$

18.25. 1) $$\mu_0\left[2a - y\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2} - \frac{(a+x)}{2}\ln\left((a+x)^2+y^2\right) - \frac{(a-x)}{2}\ln\left((a-x)^2+y^2\right)\right];$$

2) $$\mu_0\left[\frac{a+x}{2}\ln\left((a+x)^2+y^2\right) - \frac{a-x}{2}\ln\left((a-x)^2+y^2\right) - x\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{2x(a^2-x^2)}{y(x^2+y^2-a^2)}\right];$$

3) $$\frac{a^2-x^2+y^2}{4}\ln\frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2} - xy\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

18.26. 1) $-\nu_0\left[\operatorname{arctg}\dfrac{a-x}{y} + \operatorname{arctg}\dfrac{a+x}{y}\right],\ y \neq 0;\ 0$ при $y = 0;$

$\lim V_2^{(1)} = \mp\nu_0\pi,\ y \longrightarrow \pm 0,\ -a < x < a;$

2) $-\nu_0\left[2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} - \operatorname{arctg}\dfrac{a+x}{y} + \operatorname{arctg}\dfrac{a-x}{y}\right], \quad y \neq 0; \quad 0$ при $y = 0;$

$\lim V_2^{(1)} = \mp\nu_0\pi,\ y \longrightarrow \pm 0,\ 0 < x < a;\ \lim V_2^{(1)} = \pm\nu_0\pi,\ y \longrightarrow \pm 0,\ -a < x < 0;$

3) $-x\left[\operatorname{arctg}\dfrac{a-x}{y}+\operatorname{arctg}\dfrac{a+x}{y}\right]+\dfrac{y}{2}\ln\dfrac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2},\ y\neq 0;$

0 при $y=0$; $\lim V_2^{(1)}(x,y)=\mp x\pi,\ y\longrightarrow \pm 0,\ -a<x<a;$

4) $(y^2-x^2)\left(\operatorname{arctg}\dfrac{a-x}{y}+\operatorname{arctg}\dfrac{a+x}{y}\right)+xy\ln\dfrac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2},\quad y\neq 0;$

0 при $y=0$; $\lim V_2^{(1)}(x,y)=\mp x^2\pi,\ y\longrightarrow \pm 0,\ -a<x<a.$

18.28. 1) $\dfrac{4\pi}{k|x|}e^{ik|x|}\displaystyle\int_0^R r\rho(r)\sin kr\,dr,\ |x|\geq R;$

$$\frac{4\pi}{k|x|}\left(e^{ik|x|}\int_0^{|x|} r\rho(r)\sin kr\,dr+\sin k|x|\int_{|x|}^R r\rho(r)\,e^{ikr}\,dr\right),\ |x|\leq R;$$

2) $\dfrac{4\pi\rho_0}{k^2|x|}e^{ik|x|}\left(-R\cos kR+\dfrac{\sin kR}{k}\right),\quad |x|\geq R;$

$$\frac{4\pi\rho_0}{k^2|x|}\left[\sin k|x|\left(-iR+\frac{1}{k}\right)e^{ikR}-|x|\right],\quad |x|\leq R;$$

3) $\dfrac{4\pi\rho_0}{k|x|}e^{ik|x|}\left\{-\dfrac{Re^{-R}}{k^2+1}(\sin k+k\cos k)+\right.$

$$\left.+\frac{1}{(1+k^2)^2}\left[2k\left(1-e^{-R}\cos k\right)-(1-k^2)\,e^{-R}\sin k\right]\right\},\ |x|\geq R;$$

$$-\frac{2\pi\rho_0 i}{|x|}\left[e^{-1}\cos(1-|x|)-2e^{-1}\sin(1-|x|)+ie^{i|x|}-\sqrt{5}e^{i(|x|+1+i+\operatorname{arctg}2)}\right],$$

$|x|\leq 1,\ k=R=1.$

18.29. $\dfrac{4\pi\rho_0}{k^2|x|}e^{ik|x|}\left(R_1\cos kR_1-R_2\cos kR_2+\dfrac{\sin kR_2-\sin kR_1}{k}\right),\ |x|\geq R_2;$

$$\frac{4\pi\rho_0}{k^2|x|}\sin k|x|\left[-iR_2e^{ikR_2}+iR_1e^{ikR_1}+\frac{1}{k}\left(e^{ikR_2}-e^{ikR_1}\right)\right],\quad |x|\leq R_1;$$

$$\frac{4\pi\rho_0}{k^2|x|}\left[e^{ik|x|}\left(R_1\cos kR_1-|x|\cos k|x|-\frac{\sin kR_1}{k}+i|x|\sin k|x|\right)+\right.$$

$$\left.+e^{ikR_2}\left(\frac{\sin k|x|}{k}-iR_2\sin k|x|\right)\right],\ R_1\leq |x|\leq R_2.$$

18.30. 1) $\dfrac{4\pi R\mu_0}{k|x|}e^{ik|x|}\sin kR,\ |x|\geq R;\ \dfrac{4\pi R\mu_0}{k|x|}e^{ikR}\sin k|x|,\ |x|\leq R;$

2) $\dfrac{4\pi\nu_0}{R}e^{ik|x|}\left(R\cos kR-\dfrac{1}{k}\sin kR\right),\quad |x|>R;$

$$\frac{4\pi\nu_0}{R}e^{ikR}\left(iR\sin k|x|-\frac{1}{k}\sin k|x|\right),\quad |x|<R;$$

$$\frac{4\pi\nu_0}{R}e^{ikR}\left(\frac{iR}{2}\sin kR+\frac{R}{2}\cos kR-\frac{1}{k}\sin kR\right),\quad |x|=R.$$

18.31. 1) $\dfrac{4\pi e^{-k|x|}}{k|x|}\displaystyle\int_0^R r\rho(r)\operatorname{sh}kr\,dr,\ |x|\ge R;$

$$\frac{4\pi}{k|x|}\left(e^{-k|x|}\int_0^{|x|} r\rho(r)\operatorname{sh}kr\,dr+\operatorname{sh}k|x|\int_{|x|}^R r\rho(r)\,e^{-kr}\,dr\right),\quad |x|\le R;$$

2) $\dfrac{4\pi\rho_0}{k^2|x|}\,e^{-k|x|}\Big(R\operatorname{ch}kR-\dfrac1k\operatorname{sh}kR\Big),\quad |x|\ge R;$

$$\frac{4\pi\rho_0}{k^2|x|}\left[|x|-\Big(R+\frac1k\Big)\,e^{-kR}\operatorname{sh}k|x|\right],\quad |x|\le R;$$

3) $\dfrac{4\pi}{k|x|}\left[\dfrac{R}{k^2-1}\,e^{-(R+k|x|)}(k\operatorname{ch}kR+\operatorname{sh}kR)+\dfrac{\operatorname{sh}R}{(k+1)^2}\,e^{-k(R+|x|)}\right],$

$$|x|\ge R,\ k\ne -1.$$

18.32. 1) $\dfrac{4\pi R\mu_0}{k|x|}\,e^{-k|x|}\operatorname{sh}kR,\ |x|\ge R;\quad \dfrac{4\pi R\mu_0}{k|x|}\,e^{-kR}\operatorname{sh}k|x|,\ |x|\le R;$

2) $\dfrac{4\pi\nu_0}{|x|}\,e^{-k|x|}\Big(R\operatorname{ch}kR-\dfrac1k\operatorname{sh}kR\Big),\quad |x|>R;$

$$\frac{4\pi\nu_0}{2R}\,e^{-kR}\left[R\operatorname{ch}kR-\Big(R+\frac2k\Big)\operatorname{sh}kR\right],\quad |x|=R;$$

$$-\frac{4\pi\nu_0}{|x|}\,e^{-kR}\Big(R+\frac1k\Big)\operatorname{sh}k|x|,\quad |x|<R.$$

18.35. Указание. Воспользоваться формулами (1), (9_1) и (4) из § 8.

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{|y|=R}u_0^-(y)\,\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^2}\,dS_y,\ |x|<R;\quad \frac{1}{2\pi R}\int_{|y|=R}u_0^+(y)\,\frac{|x|^2-R^2}{|x-y|^2}\,dS_y,\ |x|>R.$$

18.36. Указание. Воспользоваться задачей 18.35.

1) $u_0,\ r\le R;\ u_0,\ r\ge R;$ 2) $\dfrac{r}{R}\sin\varphi,\ r\le R;\ \dfrac{R}{r}\sin\varphi,\ r\ge R;$

3) $\dfrac{r}{R}\cos\varphi,\ r\le R;\ \dfrac{R}{r}\cos\varphi,\ r\ge R;$

4) $\dfrac{c}{2}\Big(1+\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{Rr\cos\varphi}{R^2-r^2}\Big),\ r\le R;\quad \dfrac{c}{2}\Big(1+\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{Rr\cos\varphi}{r^2-R^2}\Big),\ r\ge R.$

18.37. 1) Решение. Задача $\Delta u(x)=-\dfrac{f_0}{k}$, $|x|<R$; $u|_{|x|=R}=u_0^-=0$, где $x=(x_1,x_2)$ и k — коэффициент теплопроводности, подстановкой $u=v+V_2$, где

$$V_2(x)=\frac{1}{2\pi k}\int_{|y|\le R} f_0\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}\,dy_1\,dy_2,$$

сводится к задаче $\Delta v(x)=0$, $|x|<R$; $v|_{|x|=R}=(u-V_2)|_{|x|=R}$. В силу задачи 18.11, 2) имеем

$$V_2(r,\varphi) = \frac{f_0}{2k}\left(\frac{R^2 - r^2}{2} - R^2 \ln R\right),$$

где (r,φ) — полярные координаты точки x. Тогда из формулы задачи 18.35 следует $V(r,\varphi) = \dfrac{f_0}{2k} R^2 \ln R$. Итак, $u(r,\varphi) = v + V_2 = \dfrac{f_0}{4k} \times$ $\times (R^2 - r^2)$;

2) $\dfrac{R^3 - r^3}{9k}$; 3) $a + \dfrac{R^4 - r^4}{16k}$;

4) $\dfrac{r}{R}\sin\varphi + \dfrac{1}{k}\left(e^{-R} - e^{-r} + \ln R - \ln r - \int\limits_r^R \dfrac{e^{-\rho}}{\rho}\,d\rho\right)$;

5) $\dfrac{r}{R}\cos\varphi + \dfrac{1}{k}\left(\sin r - \sin R + \int\limits_r^R \dfrac{\sin\rho}{\rho}\,d\rho\right)$;

6) $\dfrac{r}{R}\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right) + \left(\dfrac{rR}{2k} - \dfrac{r^2}{3k}\right)\sin\varphi$;

7) $\dfrac{r}{R}\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right) + \left(\dfrac{rR}{2k} - \dfrac{r^2}{3k}\right)\cos\varphi$.

18.38. Указание. Решение искать в виде потенциала простого слоя (см. формулу (6)). Затем воспользоваться формулой (2) и условием разрешимости задачи $\int\limits_{r=R} u_1^-(y)\,dS_y = 0$.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|y|=R} u_1^-(y)\ln\frac{1}{|x-y|}\,dS_y + \text{const}, \qquad |x| \le R; \qquad x = (x_1, x_2);$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|y|=R} u_1^+(y)\ln|x-y|\,dS_y + \text{const}, \qquad |x| \ge R.$$

18.39. Указание. Воспользоваться формулами задачи 18.38.

1) Неразрешима, так как $\int\limits_{r=R} u_1\,dS \ne 0$;

2) $r\sin\varphi + \text{const}$, $r < R$; $-\dfrac{R^2}{r}\sin\varphi + \text{const}$, $r > R$;

3) $r\cos\varphi + \text{const}$, $r < R$; $-\dfrac{R^2}{r}\cos\varphi + \text{const}$, $r > R$.

18.40. Указание. Задача $\Delta u = -\dfrac{f}{k}$, $r \le R$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = u_1^-$ подстановкой $u = v + V_2$ (см. решение задачи 18.37) сводится к краевой задаче $\Delta v = 0$, $r < R$, $\left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{r=R} = \left.\dfrac{\partial(u - V_2)}{\partial n}\right|_{r=R}$.

1) $\dfrac{f_0}{2k}\left(\dfrac{R^2 - r^2}{2} - R^2\ln R\right) + \text{const}$; 2) $\dfrac{1}{9}\left(R^3 - r^3 - 3R^2\ln R\right) + \text{const}$;

3) $\ln R \ln\sqrt{1 + R^2} - \dfrac{1}{2}\int\limits_r^R \dfrac{\ln(1+\rho^2)}{\rho}\,d\rho + \text{const}$;

4) $\left(r+\frac{2}{3}rR-\frac{r^2}{3}\right)\sin\varphi+\text{const}$; 5) $\left(r+\frac{2}{3}rR-\frac{r^2}{3}\right)\cos\varphi+\text{const}$.

18.41. 1) $\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u_0(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}$; 2) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_1(\xi)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}}\,d\xi$.

18.42. 1) $\frac{2v_0}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]$;

2) $\frac{v_0}{2\pi}\left(\pi+\frac{\sin\varphi_0}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$ при $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi_0$;

$\frac{v_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{(y^2-x^2)\sin\varphi_0+2xy\cos\varphi_0}{(y^2-x^2)\cos\varphi_0-2xy\sin\varphi_0}=\frac{v_0}{\pi}F(x,y,\varphi_0)$ при $\frac{y}{x}<\operatorname{tg}\varphi_0$;

$\frac{v_0}{\pi}(\pi+F(x,y,\varphi_0))$ при $\frac{y}{x}>\operatorname{tg}\varphi_0$.

18.43. $\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}u_0^-(y)\,dS_y,\quad |x|<R;$

$\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|y|=R}\frac{|x|^2-R^2}{|x-y|^3}u_0^+(y)\,dS_y,\quad |x|>R.$

18.44. См. указания к задаче 18.37 и результаты задачи 18.6.

1) $\frac{f_0}{6k}(R^2-r^2)$; 2) $a+\frac{R^3-r^3}{12k}$; 3) 0.

18.47. Указание. Воспользоваться результатами задач 18.45 и 18.46.

$-\frac{R^2a}{r}$, $r>R$; в области $r<R$ задача неразрешима.

18.48. $\frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{y_3=0}\frac{u_0(y)}{|x-y|^3}\,dS_y$; $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{y_3=0}\frac{u_1(y)}{|x-y|}\,dS_y$.

18.49. 1) u_0; 2) $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_3}$; 3) $\frac{u_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}+\operatorname{arctg}\frac{x_3}{x_2}\right)$.

18.50. $\frac{aR}{|x|}\frac{\sin k|x|}{\sin kR}$, $|x|\le R$; $\frac{aR}{|x|}\frac{e^{ik|x|}}{e^{ikR}}$, $|x|\ge R$.

Указание. Решения задач ищем в виде потенциалов двойного слоя

$$u(x)=V^{(1)}(x)=\int\limits_{r=R}\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\,dS_y. \qquad (*)$$

Искомая плотность находится из интегральных уравнений

$$u|_{r=R}=V_{\pm}^{(1)}(x)=\mp2\pi\nu(x)+\int\limits_{r=R}\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\,dS_y=a,\quad x\in\{r=R\}.$$

Имеем $\nu(x)=\frac{akR}{4\pi(kR+i)\sin kR}$ для внутренней задачи и $\nu(x)=\frac{ae^{-ikR}}{4\pi\left(\cos kR-\frac{1}{kR}\sin kR\right)}$ для внешней.

18.51. Указание. Решение искать в виде потенциала простого слоя.

$$\frac{aR^2}{|x|}\frac{\sin k|x|}{(kR\cos kR-\sin kR)},\ |x|\le R;\quad \frac{aR^2}{|x|}\frac{e^{ik|x|}}{(ikR-1)},\ |x|\ge R.$$

18.52. См. указания к задаче 18.37 и результаты задачи 18.28, 2).

1) $\dfrac{f_0}{|x|}\left(\dfrac{\sin|x|}{\sin 1}-|x|\right)$; 2) $\sqrt{2}e^{i(1-\pi/4)}\dfrac{\sin|x|}{|x|}-1$.

18.53. См. указания к задаче 18.50.

$$\frac{aR}{|x|}\frac{\operatorname{sh}k|x|}{\operatorname{sh}kR},\ |x|\le R;\quad \frac{aR}{|x|}\frac{e^{-k|x|}}{e^{-kR}},\ |x|\ge R.$$

18.54. $a\left(\dfrac{R}{|x|}\right)^2\dfrac{k|x|\operatorname{ch}k|x|-\operatorname{sh}k|x|}{kR\operatorname{ch}kR-\operatorname{sh}kR}\cos\theta,\quad |x|\le R;$

$$a\left(\frac{R}{|x|}\right)^3\frac{k|x|+1}{kR+1}\cdot\frac{\operatorname{ch}k|x|-\operatorname{sh}k|x|}{\operatorname{ch}kR-\operatorname{sh}kR}\cos\theta,\quad |x|\ge R.$$

18.55. $\dfrac{aR^2}{|x|}\dfrac{\operatorname{sh}k|x|}{kR\operatorname{ch}kR-\operatorname{sh}kR},\ |x|\le R;\qquad -\dfrac{aR^2}{|x|}\dfrac{e^{k(R-|x|)}}{1+kR},\ |x|\ge R.$

18.56. 1) $f_0\left(1-\dfrac{\operatorname{sh}|x|}{|x|\operatorname{sh}1}\right)$; 2) $1-2e^{-1}\dfrac{\operatorname{sh}|x|}{|x|}$.

18.57. $u(x,y)=u_0\dfrac{J_0(kr)}{J_0(kR)}$.

Указание. u есть решение задачи $\Delta u-k^2u=0$, $r<R$, $u|_{r=R}=u_0$.

§ 19. Вариационные методы

Пусть в ограниченной области $Q\subset R^n$ задано уравнение Пуассона

$$-\Delta u=f, \tag{1}$$

а на гладкой границе Γ — одно из граничных условий

$$u|_\Gamma=g, \tag{I}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=g, \tag{II}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\right|_\Gamma=g, \tag{III}$$

где $\sigma\in C(\Gamma)$. Функция $u\in H^1(Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (1) при граничном условии (I), если ее след на Γ равен g и она удовлетворяет при всех $v\in \mathring{H}^1(Q)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_Q(\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v)\,dx=\int\limits_Q fv\,dx. \tag{2}$$

Считаем, что функция g является следом на Γ некоторой функции из $H^1(Q)$, а $f\in L_2(Q)$. Функция $u\in H^1(Q)$ называется *обобщенным* *решением краевой задачи* (1) при граничном условии (III) (или условии (II)), где $g \in L_2(\Gamma)$ и $f \in L_2(Q)$, если при всех $v \in H^1(Q)$ она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)\, dx + \int\limits_\Gamma \sigma u v\, dS = \int\limits_Q f v\, dx + \int\limits_\Gamma g v\, dS. \qquad (3)$$

Если функции f, g, σ достаточно гладкие (например, непрерывно дифференцируемые), то обобщенные решения являются классическими решениями соответствующих задач.

Важную роль при исследовании обобщенных решений краевых задач играет следующая

Теорема Рисса. *Пусть на гильбертовом пространстве H задан линейный ограниченный функционал $l(u)$. Существует единственный элемент $h \in H$ такой, что $l(u) = (h, u)$ (здесь через (h, u) обозначается скалярное произведение в H элементов h, u).*

19.1. Пусть $u(x)$ — классическое решение задачи (1), (I). Показать, что если $u \in C^1(\overline{Q})$, то $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1), (I).

19.2. Пусть $u(x)$ — классическое решение задачи (1), (III) (или (II)). Показать, что если $u \in C^1(\overline{Q})$, то $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1), (III) (или (II)).

19.3. Если $u(x)$ — обобщенное решение задачи (1), (I) и $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, то $u(x)$ является классическим решением этой задачи.

19.4. Если $u(x)$ — обобщенное решение задачи (1), (III) (или (II)) и $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, то $u(x)$ является классическим решением этой задачи.

19.5. Доказать единственность обобщенного решения задачи (1), (I) при $g = 0$.

19.6. Показать, что если функция g является следом на Γ некоторой функции из $H^1(Q)$ (в частности, $g \in C^1(\Gamma)$), то обобщенное решение задачи (1), (I) существует.

19.7. Пусть в области Q задано эллиптическое уравнение

$$L(u) = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q(x)\, u = f(x), \qquad (4)$$

где $p \in C^1(\overline{Q})$, $\min p(x) = p_0 > 0, q \in C(\overline{Q})$, $f \in L_2(Q)$. Принадлежащая пространству $H^1(Q)$ функция $u(x)$ называется обобщенным решением задачи (4), (I), если при всех $v(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q (p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + q u v)\, dx = \int\limits_Q f v\, dx$$

и след ее на Γ равен g. Доказать, что принадлежащее $H^1(Q)$ классическое решение задачи (4), (I) является обобщенным.

19.8. Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (4), (I) при $q \geq 0$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 4.106.

19.9. Пусть в области Q задано эллиптическое уравнение

$$L(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + q(x)\,u = f(x), \tag{5}$$

где вещественные функции $p_{ij} \in C^1(\bar{Q})$, $p_{ij}(x) = p_{ji}(x)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ и для всех $x \in \bar{Q}$ и любых вещественных $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ справедливо неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \gamma_0|\xi|^2$ с постоянной $\gamma_0 > 0$, $q \in C(\bar{Q})$, $f \in L_2(Q)$. Принадлежащая пространству $H^1(Q)$ функция $u(x)$ называется обобщенным решением задачи (5), (I), если при всех $v(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \left(\sum p_{ij}(x)\,u_{x_i}v_{x_j} + quv\right)dx = \int_Q fv\,dx$$

и ее след на Γ равен g. Доказать, что принадлежащее $H^1(Q)$ классическое решение задачи (5), (I) является обобщенным.

19.10. Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (5), (I), если $q \geq 0$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 4.112.

19.11. Обобщенным решением задачи (4), (III) (или (II)) называется принадлежащая $H^1(Q)$ функция $u(x)$, удовлетворяющая при всех $v(x) \in \in H^1(Q)$ интегральному тождеству

$$\int_Q (p\,\mathrm{grad}\,u\,\mathrm{grad}\,v + quv)\,dx + \int_\Gamma p\sigma uv\,ds = \int_Q fv\,dx + \int_\Gamma pgv\,ds.$$

Доказать, что принадлежащее $C^1(\bar{Q})$ классическое решение задачи (4), (III) (или (II)) является обобщенным.

19.12. Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (4), (III) (или (II)) в предположении, что $f \in L_2(Q)$, $g \in L_2(\Gamma)$, $\sigma(x) \geq 0$ на Γ, $q(x) \geq 0$ в Q, причем либо $\sigma(x) \not\equiv 0$, либо $q(x) \not\equiv 0$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 4.117.

19.13. Пусть $\widetilde{L}_2(Q)$ и $\widetilde{H}^1(Q)$ — подпространства пространств $L_2(Q)$ и $H^1(Q)$, состоящие из тех функций из $L_2(Q)$ и $H^1(Q)$ соответственно, для которых $\int\limits_Q f\,dx = 0$. Доказать, что при $g(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$, $f \in \widetilde{L}_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи (4), (II), принадлежащее $\widetilde{H}^1(Q)$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 4.121.

Пусть $p \in C(\overline{Q})$, $q \in C(Q)$, $\sigma \in C(\Gamma)$, $\min p(x) = p_0 > 0$, $\sigma(x) \geq 0$, $q(x) \geq 0$ и или $q(x) \not\equiv 0$, или $\sigma(x) \not\equiv 0$. Тогда (см. задачи 4.105 и 4.113) в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ и $H^1(Q)$ можно ввести скалярные произведения, эквивалентные обычным, следующими способами:

$$(f,g)_{\overset{\circ}{H}{}^1} = \int\limits_Q [p(x)(\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) + q(x)\, fg]\, dx, \qquad (*)$$

$$(f,g)_{H^1} = \int\limits_Q [p(x)(\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) + qfg]\, dx + \int\limits_\Gamma p\sigma fg\, dS. \qquad (**)$$

Функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, на которой функционал

$$E(v) = \|v\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1} - 2(f,v)_{L_2},$$

рассматриваемый для $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, достигает своего минимального значения, есть обобщенное решение задачи (4), (I) при $g \equiv 0$, если норма порождается скалярным произведением $(*)$.

Функция $u \in H^0(Q)$, на которой функционал

$$E(v) = \|v\|^2_{H^1} - 2(f,v)_{L_2},$$

рассматриваемый для $v \in H^1(Q)$, достигает своего минимального значения, есть обобщенное решение задачи (4), (III), при $g(x) = 0$, если норма $\|v\|_{H^1}$ порождается скалярным произведением $(**)$.

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ расположенные в порядке неубывания собственные значения, а через $u_1, \ldots, u_m, \ldots$ — соответствующие собственные функции задачи

$$-\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u) + q(x)\,u = \lambda u, \qquad x \in Q, \qquad u|_\Gamma = 0.$$

Аналогично через $\mu_1, \ldots, \mu_m, \ldots$ и $v_1, \ldots, v_m, \ldots$ обозначим собственные функции задачи

$$-\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u) + q(x)\,u = \mu u, \qquad x \in Q, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_\Gamma = 0.$$

Тогда

$$\inf_{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} = \lambda_1 \quad \text{и} \quad \inf_{f \in H^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{H^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} = \mu_1.$$

Кроме того, при любом $m \geq 1$

$$\inf_{\substack{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q) \\ (f,u_i)_{L_2(Q)}=0}} \frac{\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} = \lambda_{m+1} \quad \text{и} \quad \inf_{\substack{f \in H^1(Q) \\ (f,v_i)_{L_2(Q)}=0}} \frac{\|f\|^2_{H^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} = \mu_{m+1}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

19.14. Рассмотрим при $f \in L_2(Q)$ функционал

$$E_1(v) = \int\limits_Q (\operatorname{grad} v)^2 dx - 2\int\limits_Q fv\, dx$$

на множестве функций $v \in H^1(Q)$, для которых $v|_\Gamma = g$, где функция $g(x)$ является следом на Γ некоторой функции из $H^1(Q)$. Показать, что функция $u(x)$, на которой функционал $E(v)$ достигает минимального значения, есть обобщенное решение задачи (1), (I).

19.15. Рассмотрим при $f \in L_2(Q)$, $p \in C(\overline{Q})$, $q \in C(\overline{Q})$, $\min p(x) = p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$ функционал

$$E_1(v) = \int\limits_Q p|\operatorname{grad} v|^2 dx + \int\limits_Q q(x)\, v^2 dx - 2\int\limits_Q fv\, dx$$

на множестве функций $v \in H^1(Q)$, для которых $v|_\Gamma = g$, где функция $g(x)$ является следом на Γ некоторой функции из $H^1(Q)$. Показать, что функция $u(x)$, на которой функционал достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (4), (I).

19.16. Пусть p_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$, q, f — функции, введенные в задаче 19.9. Рассмотрим функционал

$$E_2(v) = \int\limits_Q \left[\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} v_{x_i} v_{x_j}\right] dx + \int\limits_Q qv^2 dx - 2\int\limits_Q fv\, dx$$

на множестве функций $v \in H^1(Q)$, для которых $v|_\Gamma = g$, где функция $g(x)$ является следом на Γ некоторой функции из $H^1(Q)$. Показать, что функция $u(x)$, на которой функционал $E_2(v)$ достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (5), (I).

19.17. Рассмотрим при $f \in L_2(Q)$, $g(x) \in L_2(\Gamma)$, $\sigma \in C(\Gamma)$, $\sigma \geq 0$ на Γ, $\sigma(x) \not\equiv 0$, функционал

$$\widetilde{E}_1(v) = \int\limits_Q |\operatorname{grad} v|^2 dx + \int\limits_\Gamma \sigma v^2 dS - 2\int\limits_Q fv\, dx - 2\int\limits_\Gamma gv\, dS, \qquad v \in H^1(Q).$$

Показать, что функция $u(x)$, на которой функционал $\widetilde{E}_1(v)$ достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (1), (III).

19.18. Пусть $f \in L_2(Q)$, $g(x) \in L_2(\Gamma)$, $p \in C(\overline{Q})$, $q \in C(\overline{Q})$, $\sigma \in C(\Gamma)$, $\min p(x) = p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $\sigma(x) \geq 0$ и или $q(x) \not\equiv 0$, или $\sigma(x) \not\equiv 0$. Рассмотрим на $H^1(Q)$ функционал

$$E_2(v) = \int\limits_Q p|\operatorname{grad} v|^2 dx + \int\limits_Q qv^2 dx + \int\limits_\Gamma \sigma p v^2 dS - 2\int\limits_Q fv dx - 2\int\limits_\Gamma pgv\, dS.$$

Показать, что функция $u(x)$, на которой этот функционал достигает минимального значения, есть обобщенное решение задачи (4), (III) (или (II)).

Указание. См. задачу 4.117.

19.19. Рассмотрим при $f \in \widetilde{L}_2(Q)$, $\int\limits_Q f\, dx = 0$, $p \in C(\overline{Q})$, $\min p(x) = p_0 > 0$ функционал

$$E_1(v) = \int\limits_Q p|\operatorname{grad} v|^2 dx - 2\int\limits_Q fv\, dx$$

на подпространстве $\widetilde{H}^1(Q)$ (определения множеств $\widetilde{L}_2(Q)$ и $\widetilde{H}^1(Q)$ см. в задаче 19.13; см. также задачи 4.118–4.120) пространства $H^1(Q)$. Показать, что функция $u \in \widetilde{H}^1(Q)$, на которой этот функционал достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (4), (II).

19.20. Найти функцию v_0, реализующую минимум функционала $\int\limits_0^1 \left(v'^2 + v^2\right) dx + 2\int\limits_0^1 v\,dx$ в классе $\overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$.

19.21. Доказать, что для всех $v \in C^1([0,1])$ справедливо неравенство $\int\limits_0^1 \left(v'^2 + 2xv\right) dx + v^2(0) + v^2(1) \geq -\frac{41}{270}$. Имеет ли место знак равенства для какой-либо функции?

19.22. Доказать, что для всех функций $v \in C^1[0,1]$, $v(1) = 0$ имеет место неравенство $\int\limits_0^1 v\,dx \leq \frac{5}{24} + \frac{v^2(0)}{4} + \frac{1}{4}\int\limits_0^1 v'^2 dx$. Найти функцию из этого класса, для которой достигается равенство.

19.23. Найти $\inf\limits_{v \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \left\{ \int\limits_Q \left[(\operatorname{grad} v)^2 + 2\sin x_1 \sin x_2\, v\right] dx \right\}$, где $Q = \{0 \leq x_1 \leq \pi,\ 0 \leq x_2 \leq \pi\}$.

19.24. Найти $\inf\limits_{v \in \overset{\circ}{H}{}^1(|x|<1)} \left\{ \int\limits_{|x|<1} \left[(\operatorname{grad} v)^2 + 2|x|^2 v\right] dx \right\}$, где $x = (x_1, x_2)$.

19.25. Найти $\inf\limits_{v \in H^1(|x|<1)} \int\limits_{|x|<1} |\operatorname{grad} v|^2 dx$, где $x = (x_1, x_2)$, $x_1 = |x| \cos\varphi$, $x_2 = |x| \sin\varphi$, $v|_{|x|=1} = \varphi(\pi - \varphi)(2\pi - \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

19.26. Найти $\inf \int\limits_{|x|<1} |\operatorname{grad} v|^2\, dx$ на множестве функций $v \in H^1(|x| < 1)$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 = |x| \cos\varphi$, $x_2 = |x| \sin\varphi$, удовлетворяющих условию $v|_{|x|=1} = \varphi^2$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

19.27. Может ли заданная на окружности $|x| = 1$, $x_1 = \cos\varphi$, $x_2 = \sin\varphi$, функция $\psi(\varphi)$ быть граничным значением какой-либо функции из $H^1(|x| < 1)$, если:

а) $\psi(\varphi) = \operatorname{sign}\varphi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$; б) $\psi(\varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos 2^{2n}\varphi$;

в) $\psi(\varphi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^4 \varphi}{n^5}$.

19.28. Пусть Q — квадрат $\{0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$. Доказать, что для любой $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_Q f^2 dx \le \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx,$$

и установить, что постоянная в неравенстве точная.

19.29. Пусть Q — куб $\{0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1,\ 0 < x_3 < 1\}$. Доказать, что для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{3\pi^2} \|\operatorname{grad} f\|_{L_2}^2.$$

19.30. Пусть Q — кольцо $\{1 < |x| < 2\}$. Найти

$$\inf_{\substack{f \in H^1(Q)\\ f|_{|x|=1}=0}} \left\{ \int\limits_{1<|x|<2} \left[(\operatorname{grad} f)^2 + 4f\right] dx + \int\limits_{|x|=2} f^2 ds \right\}, \qquad x = (x_1, x_2).$$

19.31. Пусть Q — квадрат $\{0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$. Найти функцию, дающую минимум функционалу

$$\inf_{u \in H^1} \left\{ \int\limits_Q \left[(\operatorname{grad} u)^2 + 4 \sin x_1 \sin x_2 u\right] dx + 2 \int\limits_0^\pi \sin x_1 u(x_1, \pi)\, dx_1 \right\}$$

в классе функций $u \in H^1(Q)$, $u|_{x_2=0} = u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\pi} = 0$.

19.32. Пусть Q — круг $\{|x| < 1\}$, $x = (x_1, x_2)$. Доказать, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{H}(Q)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{2\pi^2} \|\operatorname{grad} u\|_{L_2}^2.$$

19.33. Доказать, что для всех функций $u \in C^1(0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_2=0} = 0, \qquad u|_{x_1=1} = x_2, \qquad u|_{x_2=1} = x_1,$$

справедливо неравенство

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (\operatorname{grad} u)^2 dx_1\, dx_2 \ge \frac{2}{3}.$$

Имеет ли место равенство для какой-нибудь из этих функций?

19.34. Доказать, что для всех функций $u \in \overset{\circ}{C}{}^1(|x| < 1)$, $x = (x_1, x_2)$ имеет место неравенство

$$2 \int\limits_{|x|<1} x_1 x_2 u(x)\, dx \le \frac{\pi}{1152} + \int\limits_{|x|<1} (\operatorname{grad} u)^2 dx.$$

19.35. Доказать, что для всех функций $u \in \overset{\circ}{C}{}^1(|x| < 1)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{|x|<1} \left[(\operatorname{grad} u)^2 + u\right] dx \ge -\frac{\pi}{45}.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

19.36. Показать, что для всех функций $v \in C^1(|x| \le 1)$, $x_1 = |x|\cos\varphi$, $x_2 = |x|\sin\varphi$, удовлетворяющих условию $v|_{|x|=1} = \sin\varphi$, где $x = (x_1, x_2)$, справедливо неравенство

$$\int\limits_{|x|<1} \left[2|x|^2 v + (\operatorname{grad} v)^2\right] dx \ge \frac{63}{64}\pi.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

19.37. Доказать, что для всех функций $u \in C^1(0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1,\ 0 < x_3 < 1)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$u|_{x_1=0} = x_2x_3, \qquad u|_{x_2=0} = x_1x_3, \qquad u|_{x_3=0} = x_1x_2,$$
$$u|_{x_1=1} = x_2 + x_3 + x_2x_3, \qquad u|_{x_2=1} = x_1 + x_3 + x_1x_3,$$
$$u|_{x_3=1} = x_1 + x_2 + x_1x_2,$$

справедливо неравенство

$$\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 |\operatorname{grad} u|^2\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \ge \frac{7}{2}.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

19.38. Показать, что для всех функций $v \in C^1(|x| \le 1)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = |x|\cos\varphi\sin\theta$, $x_2 = |x|\sin\varphi\sin\theta$, $x_3 = |x|\cos\theta$, удовлетворяющих условию $v|_{|x|=1} = \cos\theta$, справедливо неравенство

$$\int\limits_{|x|<1} \left[2v + (\operatorname{grad} v)^2\right] dx \ge \frac{56\pi}{45}.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

19.39. Пусть Q — квадрат $\{0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$. Доказать, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_Q \sin\pi x_1 \sin\pi x_2 v(x)\, dx = 0,$$

справедливо неравенство

$$\|v\|^2_{L_2} \le \frac{1}{5\pi^2}\|\operatorname{grad} v\|^2_{L_2}.$$

19.40. Пусть Q — куб $\{0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1,\ 0 < x_3 < 1\}$. Доказать, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_Q \sin\pi x_1 \sin\pi x_2 \sin\pi x_3 v(x)\, dx = 0,$$

справедливо неравенство $\|v\|^2_{L_2} \le \dfrac{1}{6\pi^2}\|\operatorname{grad} v\|^2_{L_2}$.

19.41. Пусть Q — куб $\{0 < x_1 < \pi,\ 0 < x_2 < \pi,\ 0 < x_3 < \pi\}$. Среди функций $u \in H^1(Q)$, принимающих граничные значения

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_2=0} = u|_{x_3=0} = u|_{x_1=\pi} = u|_{x_2=\pi} = 0,$$

найти ту, которая дает минимум функционалу

$$E(u) = \int_Q (\operatorname{grad} u)^2\, dx + \int_0^\pi \int_0^\pi \sin x_1 \sin x_2 u(x_1, x_2, \pi)\, dx_1\, dx_2.$$

19.42. Пусть Q — шаровой слой $\{1 < |x| < 2\}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Среди функций $u \in H^1(Q)$, принимающих граничные значения $u|_{|x|=2} = 0$, найти ту, которая дает минимум функционалу

$$E(u) = \int_Q [(\operatorname{grad} u)^2 + 2u]\, dx + \int_{|x|=1} u^2\, dS.$$

Ответы к § 19

19.20. $-1 + \dfrac{2\sqrt{e}}{e+1} \operatorname{ch}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.

19.21. Да, для $\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{2}{9}(x+1)$.

19.22. $-x^2 + \dfrac{x+1}{2}$.

19.23. $-\dfrac{\pi^2}{8}$.

19.24. $-\dfrac{\pi}{64}$.

19.25. $144\pi \sum\limits_1^\infty k^{-5}$.

19.26. $16\pi \sum\limits_1^\infty k^{-3}$.

19.27. а) Нет; б) нет; в) да.

19.30. $\dfrac{\pi}{2(1+\ln 4)}(51 - 94\ln 2)$.

19.31. $-\sin x_1 \sin x_2 - 2\dfrac{\sin x_1 \operatorname{ch} x_2}{\operatorname{sh}\pi}$.

19.33. Да.

19.35. Да, для функции $\dfrac{|x|^2 - 1}{12}$.

19.36. Да, для $r\sin\varphi + \dfrac{r^4 - 1}{16}$.

19.37. Да, для $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

19.38. Да, для $r\cos\theta + \dfrac{r^2 - 1}{6}$.

19.41. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)} \sin x_1 \sin x_2 \operatorname{sh}(\sqrt{2}x_3)$.

19.42. $\dfrac{|x|^2}{6} + \dfrac{5}{9|x|} - \dfrac{17}{18}$.

Глава VI

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА

§ 20. Метод разделения переменных

1. Уравнения гиперболического типа. Изложим кратко существо метода Фурье или метода разделения переменных, рассматривая задачу о колебаниях струны, закрепленной на концах. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x) \tag{2}$$

и граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0. \tag{3}$$

Будем сначала искать частные решения уравнения (1), не равные тождественно нулю и удовлетворяющие условиям (3), в виде

$$u(x,t) = X(x)\,T(t). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), приходим к уравнениям

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{5}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{6}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$, причем для получения нетривиальных (не равных тождественно нулю) решений вида (4) необходимо найти нетривиальные решения, удовлетворяющие условиям

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0. \tag{7}$$

Мы приходим к задаче Штурма–Лиувилля (6), (7) (см. с. 184).

Собственными значениями этой задачи являются числа

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

(и только они), этим собственным значениям соответствуют (нормированные) собственные функции

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin\frac{\pi k x}{l}.$$

При $\lambda = \lambda_k$ уравнение (5) имеет общее решение

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l},$$

поэтому функция

$$u_k(x,t) = X_k(x)\,T_k(t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (3) при любых a_k и b_k.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3), ищем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{8}$$

Если этот ряд сходится равномерно и его можно дважды почленно дифференцировать, то сумма ряда будет удовлетворять уравнению (1) и граничным условиям (3).

Определяя постоянные a_k и b_k так, чтобы сумма ряда (8) удовлетворяла и начальным условиям (2), приходим к равенствам

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{9}$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l}\, b_k \sin\frac{k\pi x}{l}; \tag{10}$$

формулы (9), (10) дают разложение функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,l)$. Коэффициенты этих разложений вычисляются по известным формулам

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\,\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \qquad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l u_1(x)\,\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

В задачах 20.1, 20.2 нужно найти с помощью метода Фурье колебания струны, предполагая, что внешние силы отсутствуют.

20.1. Решить задачу о колебании струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение u_0 имеет форму:

1) синусоиды $u_0(x) = A\sin\dfrac{\pi nx}{l}$ (n целое);

2) параболы, осью симметрии которой служит прямая $x = \dfrac{l}{2}$, а вершиной — точка $M\left(\dfrac{l}{2}, h\right)$;

3) ломаной OAB, где $O(0,0)$, $A(c,h)$, $B(l,0)$, $0 < c < l$. Рассмотреть случай $c = \dfrac{l}{2}$.

20.2. Решить задачу о колебании струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если в начальном положении струна находится в покое ($u_0 = 0$), а начальная скорость u_1 задается формулой:

1) $u_1(x) = v_0 = \text{const}, \;\; x \in [0, l]$;

2) $u_1(x) = \begin{cases} v_0, & \text{если } \;\; x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & \text{если } \;\; x \bar{\in} [\alpha, \beta], \end{cases}$ где $0 \le \alpha < \beta \le l$;

3) $u_1(x) = \begin{cases} A \cos \dfrac{\pi(x - x_0)}{2\alpha}, & \text{если } \;\; x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \\ 0, & \text{если } \;\; x \bar{\in} [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \end{cases}$

где $0 \le x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \le l$.

Уравнение (1) описывает свободные продольные колебания стержня. В задачах 20.3, 20.4 требуется найти продольные колебания стержня, применяя метод разделения переменных.

20.3. Решить задачу о продольных колебаниях однородного стержня при произвольных начальных данных в каждом из следующих случаев:

1) один конец стержня ($x = 0$) жестко закреплен, а другой конец ($x = l$) свободен;

2) оба конца стержня свободны;

3) один конец стержня ($x = l$) закреплен упруго, а другой конец ($x = 0$) свободен.

20.4. Найти продольные колебания стержня, если один его конец ($x = 0$) жестко закреплен, а к другому концу ($x = l$) приложена сила P (в момент времени $t = 0$ сила перестает действовать).

20.5. Найти силу тока $i(x, t)$ в проводе длины l, по которому течет переменный ток, если утечка тока отсутствует и омическим сопротивлением можно пренебречь. Предполагается, что начальный ток в проводе (при $t = 0$) равен нулю, а начальное напряжение задается формулой $v|_{t=0} = E_0 \sin \dfrac{\pi x}{2l}$. Левый конец провода ($x = 0$) изолирован, а правый конец ($x = l$) заземлен.

Задача о нахождении вынужденных колебаний однородной струны $0 < x < l$, жестко закрепленной на концах, под действием внешней силы с плотностью p приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t) \tag{11}$$

($g = p/\rho$, где ρ — линейная плотность струны) при граничных условиях (3) и начальных условиях (2).

Решение задачи (11), (2), (3) ищут в виде суммы

$$u = v + w,$$

где v — решение неоднородного уравнения (11), удовлетворяющее граничным условиям (3) и нулевым начальным условия

$$v|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

а w есть решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (3) и начальным условиям (2).

Решение v представляет вынужденные колебания струны (эти колебания совершаются под действием внешней возмущающей силы при отсутствии начальных возмущений), а решение w представляет свободные колебания струны (они обусловлены начальными возмущениями).

Функцию v отыскиваем в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{12}$$

по собственным функциям задачи (6), (7).

Подставляя (12) в (11), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t)\right] \sin \frac{k\pi x}{l} = g(x,t). \tag{13}$$

Разлагая функцию $g(x,t)$ в интервале $(0,l)$ в ряд Фурье по синусам

$$g(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{14}$$

и сравнивая (13) и (14), находим дифференциальные уравнения

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = g_k(t), \tag{15}$$

где

$$g_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l g(\xi,t) \sin \frac{k\pi\xi}{l}\, d\xi \qquad (k = 1,2,\ldots).$$

Решая уравнения (15) при нулевых начальных условиях

$$T_k(0) = 0, \qquad T_k'(0) = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots), \tag{16}$$

находим $T_k(t)$, а затем определяем v с помощью формулы (12). Заметим, что решения $T_k(t)$ уравнений (15) при условиях (16) можно представить в виде

$$T_k(t) = \frac{2}{k\pi a}\int_0^t \left[\int_0^l g(\xi,\tau) \sin \frac{k\pi a}{l}(t-\tau) \sin \frac{k\pi\xi}{l}\, d\xi\right] d\tau. \tag{17}$$

Решение задачи (11), (2), (3) представляется в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где функции $T_k(x)$ определяются формулой (17), а коэффициенты a_k и b_k — формулами

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx, \qquad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx.$$

20.6. Решить методом разделения переменных следующие смешанные задачи:

1) $u_{tt} = u_{xx} + 2b$ ($b = \text{const}$, $0 < x < l$), $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$;

2) $u_{tt} = u_{xx} + \cos t$ $(0 < x < \pi)$, $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$, $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$.

20.7. Решить задачу о колебаниях однородной струны ($0 < x < l$), закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$, под действием внешней непрерывно распределенной силы с плотностью $\rho(x,t) = A\rho \sin \omega t$, $\omega \neq \dfrac{k\pi a}{l}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Начальные условия — нулевые.

20.8. Решить задачу о продольных колебаниях стержня, подвешенного за конец $x = 0$ (конец $x = l$ свободен), совершаемых под влиянием силы тяжести.

Задача о вынужденных колебаниях ограниченной струны под действием внешней силы в случае, когда концы струны двигаются по некоторому закону, приводится к решению уравнения (11) при граничных условиях вида

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \qquad u|_{x=l} = \mu_2(t) \tag{18}$$

и начальных условиях (2). Решение задачи (11), (2), (18) ищем в виде

$$u = v + w,$$

где $w = \mu_1(t) + \dfrac{x}{l}\,(\mu_2(t) - \mu_1(t))$ — функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям (18).

Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям $v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0$, уравнению $v_{tt} - a^2 v_{xx} = g_1$, где $g_1(x,t) = g(x,t) - (w_{tt} - a^2 w_{xx})$, и следующим начальным условиям:

$$v|_{t=0} = u_0(x) - w|_{t=0}, \qquad v_t|_{t=0} = u_1(x) - w_t|_{t=0}. \tag{19}$$

Мы пришли к задаче типа (11), (2), (3) для функции v.

Замечание. Иногда удается найти функцию v, удовлетворяющую неоднородному уравнению (11) и заданным граничным условиям (18). Тогда, отыскивая решение задачи (11), (2), (18) в виде $u = v + w$, находим, что функция w удовлетворяет однородному уравнению (1), нулевым граничным и начальным условиям (19).

20.9. Решить следующие смешанные задачи:

1) $u_{xx} = u_{tt}$, $0 < x < l$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = t$, $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$;

2) $u_{xx} = u_{tt}$, $0 < x < 1$, $u|_{x=0} = t + 1$, $u|_{x=1} = t^3 + 2$, $u|_{t=0} = x + 1$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

20.10. Решить задачу о вынужденных поперечных колебаниях струны, закрепленной на одном конце ($x = 0$) и подверженной на другом конце ($x = l$) действию возмущающей силы, которая вызывает смещение, равное $A\sin\omega t$, где $\omega \neq \dfrac{k\pi a}{l}$ ($k = 1, 2, \ldots$). В момент времени $t = 0$ смещения и скорости равны нулю.

20.11. Пусть стержень длиной l, конец которого $x = 0$ жестко закреплен, находится в состоянии покоя. В момент $t = 0$ к его свободному концу $x = l$ приложена сила $Q = \mathrm{const}$, действующая вдоль стержня. Найти смещение $u(x,t)$ стержня.

20.12. Решить задачу о продольных колебаниях однородного цилиндрического стержня, один конец которого заделан, а к другому концу приложена сила $Q = A\sin\omega t$, направление которой совпадает с осью стержня $\left(\omega \neq \dfrac{a\pi(2k+1)}{2l},\ k = 0, 1, 2, \ldots\right)$.

20.13. Решить задачу о свободных колебаниях однородной струны длиной l, закрепленной на концах и колеблющейся в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. Начальные условия нулевые.

20.14. Решить следующие смешанные задачи:

1) $u_{tt} = u_{xx} - 4u$ $(0 < x < 1)$; $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$; $u|_{t=0} = x^2 - x$, $u_t|_{t=0} = 0$;

2) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$ $(0 < x < \pi)$; $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$; $u|_{t=0} = \pi x - x^2$, $u_t|_{t=0} = 0$;

3) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$ $(0 < x < \pi)$; $u_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=\pi} = 0$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = x$;

4) $u_{tt} + u_t = u_{xx}$ $(0 < x < 1)$; $u|_{x=0} = t$, $u|_{x=1} = 0$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 1 - x$;

5) $u_{tt} = u_{xx} + u$ $(0 < x < 2)$; $u|_{x=0} = 2t$, $u|_{x=2} = 0$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$;

6) $u_{tt} = u_{xx} + u$ $(0 < x < l)$; $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = t$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = \dfrac{x}{l}$.

20.15. Решить следующие смешанные задачи:

1) $u_{tt} = u_{xx} + x$ $(0 < x < \pi)$; $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$; $u|_{t=0} = \sin 2x$, $u_t|_{t=0} = 0$;

2) $u_{tt} + u_t = u_{xx} + 1$ $(0 < x < 1)$; $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$.

20.16. Решить следующие смешанные задачи:

1) $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t\cos x$ $(0 < x < \pi/2)$; $u_x|_{x=0} = 2t$, $u|_{x=\pi/2} = \pi t$; $u|_{t=0} = \cos x$, $u_t|_{t=0} = 2x$;

2) $u_{tt} - u_{xx} - 2u_t = 4t(\sin x - x)$ $(0 < x < \pi/2)$; $u|_{x=0} = 3$, $u_x|_{x=\pi/2} = t^2 + t$; $u|_{t=0} = 3$, $u_t|_{t=0} = x + \sin x$;

3) $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u - x(4+t) + \cos\dfrac{3x}{2}$ $(0 < x < \pi)$; $u_x|_{x=0} = t+1$, $u|_{x=\pi} = \pi(t+1)$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = x$;

4) $u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x}\sin 3x$ $(0<x<\pi)$; $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=\pi} = \pi t$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = x$;

5) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1-4t) + \cos 3x$ $(0<x<\pi/2)$; $u_x|_{x=0} = t$, $u|_{x=\pi/2} = \dfrac{\pi t}{2}$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = x$;

6) $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2 x$ $(0 < x < \pi)$; $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$;

7) $u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2\sin 2x\cos x$ $(0<x<\pi/2)$; $u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi/2} = 0$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$;

8) $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t$ $(0 < x < \pi)$; $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=\pi} = \pi t$; $u|_{t=0} = e^{-x}\sin x$, $u_t|_{t=0} = x$.

В задачах 20.17–20.20 требуется применять метод разделения переменных для изучения колебаний мембраны. Задача о колебаниях однородной мембраны сводится к решению уравнения $u_{tt} = a^2\Delta u + f$ при некоторых начальных и граничных условиях (см. с. 14–16).

В частности, задача о свободных колебаниях прямоугольной мембраны $(0 < x < p,\ 0 < y < q)$, закрепленной по контуру, сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = u|_{x=p} = u|_{y=0} = u|_{y=q} = 0$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_0(x,y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x,y).$$

20.17. Решить задачу о свободных колебаниях квадратной мембраны $(0 < x < p,\ 0 < y < p)$, закрепленной вдоль контура, если $u|_{t=0} = A\sin\dfrac{\pi x}{p}\sin\dfrac{\pi y}{p}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

20.18. Решить следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} = \Delta u \qquad (0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi),$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 3\sin x\sin 2y, \qquad u_t|_{t=0} = 5\sin 3x\sin 4y.$$

20.19. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны $(0 < x < p,\ 0 < y < q)$, закрепленной вдоль контура, если $u|_{t=0} = Axy(x-p)(y-q)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

Задача о свободных колебаниях круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краю, приводится к решению уравнения

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \tag{20}$$

при граничном условии

$$u|_{r=R} = 0 \tag{21}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_0(r,\varphi), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(r,\varphi). \tag{22}$$

Применяя метод разделения переменных, положим

$$u(r,\varphi,t) = T(t)\,v(r,\varphi). \tag{23}$$

Подставив (23) в (20), получим уравнение для $T(t)$

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0 \tag{24}$$

и следующую краевую задачу для $v(r,\varphi)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 v = 0. \tag{25}$$

Из физического смысла задачи вытекает, что функция $v(r,\varphi)$ является 2π-периодической функцией от φ, т. е.

$$v(r,\varphi) = v(r,\varphi+2\pi), \tag{26}$$

и что эта функция ограничена в центре круга, т. е.

$$\left|v|_{r=0}\right| < \infty. \tag{27}$$

Кроме того, из условия (21) следует, что

$$v|_{r=R} = 0. \tag{28}$$

Применяя метод разделения переменных к задаче (25)–(28) положим

$$v(r,\varphi) = \Phi(\varphi)\,Z(r) \tag{29}$$

и из (25) найдем, что

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2\Phi(\varphi) = 0, \tag{30}$$

$$Z''(r) + \frac{1}{r}Z'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)Z(r) = 0, \tag{31}$$

причем в силу (27) и (28) должны выполняться условия

$$Z(R) = 0, \tag{32}$$

$$|Z(0)| < \infty. \tag{33}$$

Из (30) и (26) находим ($\nu = n$ целое):

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi. \tag{34}$$

Уравнение (31) подстановкой $\lambda r = x(Z(r) \equiv y(x))$ приводится к уравнению Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0,$$

общее решение которого имеет следующий вид:

$$y_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x),$$

где $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го родов ν-го порядка.

Свойства функций $J_\nu(x)$:

1) корни уравнения

$$J_\nu(\mu) = 0 \tag{35}$$

при $\nu > -1$ — вещественные и простые (кроме, быть может, корня $\mu = 0$); они симметрично расположены на оси μ относительно точки $\mu = 0$ и не имеют конечных предельных точек;

2) $$\int\limits_0^R xJ_\nu\left(\frac{\mu_i x}{R}\right) J_\nu\left(\frac{\mu_j x}{R}\right) dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \dfrac{R^2}{2}\,[J'_\nu(\mu_i)]^2 = \dfrac{R^2}{2}\,J^2_{\nu+1}(\mu_i), & i = j, \end{cases} \tag{36}$$

где μ_i и μ_j — различные положительные корни уравнения (35);

3) функция $f(x)$ при некоторых условиях разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по системе функций $J_\nu(\mu_k x/R)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — положительные корни уравнения (35).

Вернемся к уравнению (31); его общее решение при $\nu = n$ имеет вид

$$Z_n(r) = C_n J_n(\lambda r) + D_n Y_n(\lambda r).$$

Так как в окрестности точки $x = 0$ функция $J_n(x)$ ограничена, а функция $Y_n(x)$ является неограниченной, то в силу (33) $D_n = 0$, т. е.

$$Z_n(r) = C_n J_n(\lambda r). \tag{37}$$

Из условия (32) находим $J_n(\lambda R) = 0$. Полагая

$$\lambda R = \mu, \tag{38}$$

приходим к уравнению (35); пусть $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots$ — его положительные корни, т. е.

$$J_n\left(\mu_m^{(n)}\right) = 0, \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{39}$$

Тогда из (37)–(39) получаем, что функции

$$Z_{nm}(r) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{R}\right) \tag{40}$$

являются решениями задачи (31)–(33).

Функции

$$u_{nm}(r, \varphi, t) = \left[\left(A_{nm}\cos\frac{a\mu_m^{(n)} t}{R} + B_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)} t}{R}\right)\cos n\varphi + \right.$$
$$\left. + \left(C_{nm}\cos\frac{a\mu_m^{(n)} t}{R} + D_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)} t}{R}\right)\sin n\varphi\right] J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{R}\right) \tag{41}$$

в силу (23), (24), (29), (34), (38), (40) являются частными решениями уравнения (20) и удовлетворяют граничному условию (21).

Решение задачи (20)–(22) ищем в виде формального ряда

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{nm}(r,\varphi,t),$$

где функции u_{nm} определяются формулами (41).

Задача сводится к разложению некоторых функций в ряд по системе функций $J_n\big(\mu_m^{(n)}r/R\big)$ $(m=1,2,\ldots)$.

В силу (36) коэффициенты a_m разложения

$$g(r)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{R}\right)$$

определяются формулами

$$a_m=\frac{2}{R^2J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})}\int_0^R rg(r)\,J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{R}\right)dr.$$

20.20. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краю, в следующих случаях:

1) начальное отклонение определяется равенством $u|_{t=0}=AJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$, где μ_k — положительный корень уравнения $J_0(\mu)=0$; начальная скорость равна нулю;

2) начальное отклонение и начальная скорость зависят только от r, т. е.

$$u|_{t=0}=f(r),\qquad u_t|_{t=0}=F(r);$$

3) начальное отклонение имеет форму параболоида вращения, а начальная скорость равна нулю.

20.21. Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt}=u_{xx}+\frac{1}{x}u_x+f(t)\,J_0(\mu_k x),$$

где μ_k — положительный корень уравнения $J_0(\mu)=0,\ 0<x<1,$

$$u|_{x=1}=u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0,\qquad \big|u|_{x=0}\big|<\infty,$$

если:

1) $f(t)=t^2+1;$ 2) $f(t)=\sin t+\cos t.$

20.22. Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt}=u_{xx}+\frac{1}{x}u_x,\qquad 0<x<1,$$

$$\big|u|_{x=0}\big|<\infty,\qquad u|_{x=1}=g(t),\qquad u|_{t=0}=u_0(x),\qquad u_t|_{t=0}=u_1(x),$$

если:

1) $g(t)=\sin^2 t,\qquad u_0(x)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{J_0(2x)}{J_0(2)}\right],\qquad u_1(x)=0;$

2) $g(t)=\cos 2t,\qquad u_0(x)=\frac{J_0(2x)}{J_0(2)},\qquad u_1(x)=0;$

3) $g(t) = t - 1, \qquad u_0(x) = J_0(\mu_1 x) - 1$, где μ_1 — положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0,\ u_1(x) = 1$.

20.23. Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} + f(t) = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x, \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = g(t), \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

если:

1) $f(t) = \cos t, \qquad u_0(x) = 1 - \dfrac{J_0(x)}{J_0(1)}, \qquad u_1(x) = 0;$

2) $f(t) = \sin 3t, \qquad g(t) = u_0(x) = 1, \qquad u_1(x) = \dfrac{1}{3}\left[1 - \dfrac{J_0(3x)}{J_0(3)}\right];$

3) $f(t) = -2\cos 2t, \quad g(t) = u_1(x) = 0, \qquad u_0(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{J_0(2x)}{J_0(2)} - 1\right] +$ $+ J_0(\mu_1 x)$, где μ_1 — положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

20.24. Решить смешанную задачу

$$u_{xx} + \frac{1}{x} u_x = u_{tt} + u, \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = \cos 2t + \sin 3t,$$

$$u|_{t=0} = \frac{J_0\left(x\sqrt{3}\right)}{J_0\left(\sqrt{3}\right)}, \qquad u_t|_{t=0} = \frac{3J_0\left(2x\sqrt{2}\right)}{J_0\left(2\sqrt{2}\right)}.$$

20.25. Решить задачу о колебаниях однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краю, если эти колебания вызваны равномерно распределенным давлением $p = p_0 \sin \omega t$, приложенным к одной стороне мембраны. Предполагается, что среда не оказывает сопротивления и что $\omega \neq \dfrac{a\mu_n}{R}$, где μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$ (нет резонанса).

20.26. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{u}{x^2}, \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

если:

1) $u_0(x) = J_1(\mu_k x) + J_1(\mu_m x), \qquad u_1(x) = 0;$

2) $u_0(x) = J_1(\mu_k x), \qquad u_1(x) = J_1(\mu_m x).$

Здесь μ_k и μ_m — два различных положительных корня уравнения $J_1(\mu) = 0$.

20.27. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{u}{x^2} + e^t J_1(\mu_k x),$$

где μ_k — положительный корень уравнения $J_1(\mu) = 0,\ 0 < x < 1,$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

20.28. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}\,u_x - \frac{u}{x^2}, \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = \sin 2t\,\cos t, \qquad u|_{t=0} = 0,$$

$$u_t|_{t=0} = \frac{J_1(x)}{2J_1(1)} + \frac{3}{2}\,\frac{J_1(3x)}{J_1(3)}.$$

20.29. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}\,u_x - \frac{4u}{x^2}, \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

если:

1) $u_0(x) = u_1(x) = J_2(\mu_k x)$;

2) $u_0(x) = \dfrac{1}{2}\,J_2(\mu_k x), \qquad u_1(x) = \dfrac{3}{2}\,J_2(\mu_k x).$

Здесь μ_k — положительный корень уравнения $J_2(\mu) = 0$.

20.30. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}\,u_x - \frac{4u}{x^2} + f(t)\,J_2(\mu_1 x), \qquad 0 < x < 1,$$

где μ_1 — положительный корень уравнения $J_2(\mu) = 0$,

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,$$

если:

1) $f(t) = t$; 2) $f(t) = \cos t$.

20.31. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}\,u_x - \frac{9u}{x^2}, \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = J_3(\mu_1 x),$$

где μ_1 — положительный корень уравнения

$$J_3(\mu) = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0(x),$$

если:

1) $u_0(x) = 0$; 2) $u_0(x) = J_3(\mu_1 x)$.

20.32. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}\,u_x - \frac{9u}{x^2} + f(t)\,J_3(\mu_k x), \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,$$

где μ_k — положительный корень уравнения $J_3(\mu) = 0$, если:

1) $f(t) = e^{-t}$; 2) $f(t) = t - t^2$.

20.33. Решить смешанную задачу

$$(xu_x)_x = u_{tt}, \qquad 0 < x < \frac{1}{4},$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1/4} = 0, \qquad u|_{t=0} = J_0\left(2\mu_1\sqrt{x}\right), \qquad u_t|_{t=0} = 0,$$

где μ_1 — положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

20.34. Тяжелая однородная нить длиной l, подвешенная за один из своих концов $(x = l)$, выводится из положения равновесия и отпускается без начальной скорости. Изучить колебания нити, которые она совершает под действием силы тяжести; предполагается, что среда не оказывает сопротивления.

20.35. Тяжелая однородная нить длиной l, закрепленная верхним концом $(x = l)$ на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Найти отклонение $u(x,t)$ нити от положения равновесия.

20.36. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = (xu_x)_x, \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u_x|_{x=1} = 0, \qquad u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = J_0\left(\mu_k\sqrt{x}\right),$$

где μ_k — положительный корень уравнения $J_1(\mu) = 0$.

20.37. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = xu_{xx} + u_x + f(t)\, J_0\left(\mu_1\sqrt{x}\right), \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,$$

где μ_1 — положительный корень уравнения $J_1(\mu) = 0$, если:

1) $f(t) = t$; 2) $f(t) = \sin t$.

20.38. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = xu_{xx} + u_x - \frac{u}{x}, \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = 0, \qquad u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = J_2\left(\mu_k\sqrt{x}\right),$$

где μ_k — положительный корень уравнения $J_2(\mu) = 0$.

20.39. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = xu_{xx} + u_x - \frac{9u}{4x}, \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = 0, \qquad u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = J_3\left(\mu_1\sqrt{x}\right),$$

где μ_1 — положительный корень уравнения $J_3(\mu) = 0$.

2. Уравнения параболического типа.

а) Задача о распространении тепла в тонком однородном стержне $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована, а концы $x = 0$ и $x = l$ поддерживаются при нулевой температуре, приводится к решению уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{3}$$

Применяя метод разделения переменных, ищем частные решения уравнения (1) в виде

$$u(x,t) = X(x)\,T(t). \tag{4}$$

Подставляя u из (4) в (1), получаем два уравнения

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{5}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{6}$$

Для нахождения нетривиальных решений уравнений (1) вида (4), удовлетворяющих граничным условиям (2), нужно найти нетривиальные решения уравнения (6), удовлетворяющие условиям (2).

Для значений λ, равных (см. § 20, п. 1)

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

и только для этих значений, существуют нетривиальные решения $X_n(x)$ задачи (6), (2) и при этом

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Значениям $\lambda = \lambda_n$ соответствуют следующие решения уравнения (5):

$$T_n(t) = a_n e^{-(\pi n a/l)^2 t}.$$

Тогда функции

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = a_n e^{-(\pi n a/l)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) при любых постоянных a_n.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3), ищем в виде формального ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\pi n a/l)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{7}$$

Из (7) и (3) находим

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad \text{где} \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

б) Задача о температуре однородного стержня длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована, а на концах его происходит конвективный теплообмен со средами, имеющими соответственно постоянные температуры u_1 и u_2, сводится к решению уравнения (1) при начальном условии (3) и граничных условиях вида

$$u_x|_{x=0} - h_1 \left[u|_{x=0} - u_1\right] = 0,$$
$$u_x|_{x=l} + h_2 \left[u|_{x=l} - u_2\right] = 0, \tag{8}$$

где $h_1 > 0$, $h_2 > 0$.

Если $h_1 = h_2 = 0$, то условия (8) принимают вид

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0. \tag{9}$$

Условия (9) означают, что концы стержня теплоизолированы.

Решение задачи (1), (3), (8) ищем в виде

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t),$$

где $v(x)$ — решение уравнения (1) ($v''(x) = 0$), удовлетворяющее граничным условиям (8). Уравнение $v''(x) = 0$ имеет общее решение

$$v(x) = C_1 x + C_2. \tag{10}$$

Определяя C_1 и C_2 из условий (8), получаем

$$C_1 = \frac{h_1(u_2 - u_1)}{h_1 + h_2 + h_1 h_2 l}, \qquad C_2 = u_1 + \frac{C_1}{h_1}. \tag{11}$$

Функция $w(x,t)$ удовлетворяют уравнению (1), начальному условию

$$w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = u_0(x) - v(x) = \widetilde{u}_0(x), \tag{12}$$

где $v(x)$ определяется из формул (10), (11), и следующим однородным граничным условиям:

$$(w_x - h_1 w)_{x=0} = (w_x + h_2 w)_{x=l} = 0. \tag{13}$$

Решая задачу (1), (12), (13) методом разделения переменных, получаем

$$w_n(x,t) = A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} X_n(x),$$

где $\lambda_n^2 = \frac{\mu_n^2}{l^2}$, μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{l(h_1 + h_2)} \left(\mu - \frac{h_1 h_2 l^2}{\mu}\right),$$

$$X_n(x) = \frac{\mu_n}{l} \cos \frac{\mu_n}{l} x + h_1 \sin \frac{\mu_n}{l} x.$$

Тогда

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} X_n(x),$$

где коэффициенты A_n находим из начального условия (12), используя ортогональность функций $X_n(x)$ на $[0, l]$:

$$A_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_0^l \widetilde{u}_0(x) \left(\frac{\mu_n}{l} \cos \frac{\mu_n}{l} x + h_1 \sin \frac{\mu_n}{l} x\right) dx,$$

$$\|\Phi_n\|^2 = \int_0^l \left(\frac{\mu_n}{l} \cos \frac{\mu_n}{l} x + h_1 \sin \frac{\mu_n}{l} x\right)^2 dx.$$

20.40. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если:

1) концы стержня $x = 0$ и $x = l$ поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура $u|_{t=0} = u_0(x)$; рассмотреть случаи:

а) $u_0(x) = A = \mathrm{const}$, б) $u_0(x) = Ax(l-x)$, $A = \mathrm{const}$;

2) конец $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре, а на конце $x = l$ происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, начальная температура стержня $u|_{t=0} = u_0(x)$;

3) на обоих концах стержня ($x = 0$ и $x = l$) происходит теплообмен с окружающей средой, а начальная температура стержня $u|_{t=0} = u_0(x)$;

4) концы стержня ($x = 0$ и $x = l$) теплоизолированы, а начальная температура $u|_{t=0} = u_0 = \mathrm{const}$;

5) концы стержня теплоизолированы, а начальное распределение температуры задается формулой

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_0 = \mathrm{const}, & \text{если } 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ 0, & \text{если } \dfrac{l}{2} < x < l; \end{cases}$$

изучить поведение $u(x,t)$ при $t \longrightarrow \infty$;

6) концы стержня теплоизолированы, а

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \dfrac{2u_0}{l}\, x, & \text{если } 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{2u_0}{l}\,(l-x), & \text{если } \dfrac{l}{2} \le x < l, \end{cases}$$

где $u_0 = \mathrm{const}$; найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

20.41. Решить следующие смешанные задачи:

1) $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $u_x|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=1} = 0$, $u|_{t=0} = x^2 - 1$;

2) $u_{xx} = u_t + u$, $0 < x < l$, $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = 1$;

3) $u_t = u_{xx} - 4u$, $0 < x < \pi$, $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$, $u|_{t=0} = x^2 - \pi x$.

20.42. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если:

1) концы стержня поддерживаются при постоянных температурах $u|_{x=0} = u_1$, $u|_{x=l} = u_2$, а начальная температура равна $u|_{t=0} = u_0 = \mathrm{const}$; найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$;

2) концы стержня имеют постоянную температуру $u|_{x=0} = u|_{x=l} = u_1$, а начальная температура задается формулой

$$u|_{t=0} = u_0(x) = Ax(l-x),$$

где $A = \mathrm{const}$; найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$;

3) левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре $u|_{x=l} = u_2$, начальная температура равна $u|_{t=0} = \dfrac{A}{l}\,x$, где $A = \text{const}$;

4) левый конец стержня поддерживается при заданной постоянной температуре $u|_{x=0} = u_1$, а на правый конец подается извне заданный постоянный тепловой поток; начальная температура стержня $u|_{t=0} = u_0(x)$.

20.43. Дан тонкий однородный стержень длины l, с боковой поверхности которого происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, имеющую нулевую температуру; левый конец стержня поддерживается при постоянной температуре $u|_{x=0} = u_1$. Определить температуру $u(x,t)$ стержня, если:

1) правый конец стержня $x = l$ поддерживается при температуре $u|_{x=l} = u_2 = \text{const}$, а начальная температура равна $u|_{t=0} = u_0(x)$;

2) на правом конце происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю; начальная температура равна нулю.

В задаче о распространении тепла в стержне, концы которого поддерживаются при заданных температурах, зависящих, вообще говоря, от t, граничные условия имеют вид

$$u|_{x=0} = \alpha_1(t), \qquad u|_{x=l} = \alpha_2(t). \tag{8a}$$

В этом случае решение задачи (1), (3), (8a) можно искать в виде $u = v + w$, где функция w определяется формулой $w = \alpha_1(t) + \dfrac{x}{l} \times (\alpha_2(t) - \alpha_1(t))$.

20.44. Найти распределение температуры в стержне $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его правом конце $x = l$ поддерживается температура, равная нулю, а на левом конце температура равна $u|_{x=0} = At$, где $A = \text{const}$. Начальная температура стержня равна нулю.

20.45. Решить следующие смешанные задачи:

1) $u_t = u_{xx}$, $0 < x < l$, $u_x|_{x=0} = 1$, $u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = 0$;

2) $u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x$, $0 < x < \pi/2$, $u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = u|_{t=0} = 0$;

3) $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t$, $0 < x < 1$, $u|_{x=0} = u|_{x=l} = t$, $u|_{t=0} = e^x \sin \pi x$;

4) $u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x$, $0 < x < \pi/2$, $u|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=\pi/2} = 1$, $u|_{t=0} = x$;

5) $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x$, $0 < x < \pi$, $u_x|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=\pi} = 2\pi t$, $u|_{t=0} = 0$;

6) $u_t-u_{xx}+2u_x-u=e^x\sin x-t,\ 0<x<\pi,\ u|_{x=0}=1+t,\ u|_{x=\pi}=$ $=1+t,\ u|_{t=0}=1+e^x\sin 2x.$

20.46. Решить следующие смешанные задачи:

1) $u_t-u_{xx}-u=xt(2-t)+2\cos t,\ 0<x<\pi,\ u_x|_{x=0}=t^2,\ u_x|_{x=\pi}=$ $=t^2,\ u|_{t=0}=\cos 2x;$

2) $u_t-u_{xx}-9u=4\sin^2 t\cos 3x-9x^2-2,\ 0<x<\pi,\ u_x|_{x=0}=0,$ $u_x|_{x=\pi}=2\pi,\ u|_{t=0}=x^2+2;$

3) $u_t=u_{xx}+6u+2t(1-3t)-6x+2\cos x\cos 2x,\ 0<x<\pi/2,$ $u_x|_{x=0}=1,\ u|_{x=\pi/2}=t^2+\pi/2,\ u|_{t=0}=x;$

4) $u_t=u_{xx}+6u+x^2(1-6t)-2(t+3x)+\sin 2x,\ 0<x<\pi,$ $u_x|_{x=0}=1,\ u_x|_{x=\pi}=2\pi t+1,\ u|_{t=0}=x;$

5) $u_t=u_{xx}+4u_x+x-4t+1+e^{-2x}\cos^2\pi x,\ 0<x<1,\ u|_{x=0}=t,$ $u|_{x=1}=2t,\ u|_{t=0}=0.$

Задача о распространении тепла в однородном шаре радиуса R с центром в начале координат в случае, когда температура любой точки шара зависит только от расстояния этой точки от центра шара, приводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{14}$$

при начальном условии

$$u|_{t=0}=u_0(r). \tag{15}$$

Если на поверхности шара происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, то граничное условие имеет вид

$$(u_r+hu)|_{r=R}=0. \tag{16}$$

Полагая $v=ru$, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \tag{17}$$

$$v|_{r=0}=0, \qquad \left[v_r+\left(h-\frac{1}{R}\right)v\right]\Big|_{r=R}=0, \tag{18}$$

$$v|_{t=0}=ru_0(r). \tag{19}$$

Таким образом, задача (14)–(16) приводится к задаче (17)–(19) о распространении тепла в стержне, один конец которого ($r=0$) поддерживается при нулевой температуре, а на другом конце ($r=R$) происходит теплообмен с окружающей средой (см. задачу 20.43).

20.47. Дан однородный шар радиуса R с центром в начале координат. Определить температуру внутри шара, если:

1) внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура зависит только от расстояния от центра шара, т. е. $u|_{t=0}=u_0(r)$;

2) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру, а $u|_{t=0} = u_0(r)$;

3) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру $u_1 = \text{const}$, а $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$;

4) внутрь шара, начиная с момента $t = 0$, через его поверхность подается постоянный тепловой поток плотности $q = \text{const}$, а начальная температура $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$.

20.48. Дана тонкая квадратная пластинка $(0 < x < l,\ 0 < y < l)$, для которой известно начальное распределение температуры $u|_{t=0} = u_0(x, y)$. Боковые стороны $x = 0$, $x = l$ и стороны оснований $y = 0$, $y = l$ во все время наблюдения удерживаются при нулевой температуре. Найти температуру любой точки пластинки в момент времени $t > 0$.

Нахождение решений задач 20.48–20.52 требует применения бесселевых функций (см. с. 249).

В частности, задача о радиальном распространении тепла в бесконечном круговом цилиндре радиуса R, боковая поверхность которого поддерживается при нулевой температуре, приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \tag{20}$$

при граничном условии

$$u|_{r=R} = 0 \tag{21}$$

и начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0(r). \tag{22}$$

Применяя метод разделения переменных, найдем, что решение задачи (20)–(22) можно получить в виде

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) e^{-(a\mu_n/R)^2 t},$$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а коэффициенты a_n определяются из начального условия (22).

20.49. Дан неограниченный круговой цилиндр радиуса R. Найти распределение температуры внутри цилиндра в момент времени t, если:

1) на поверхности цилиндра поддерживается все время нулевая температура, а температура внутри цилиндра в начальный момент равна $u|_{t=0} = AJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$, где μ_k — положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$;

2) поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре u_0, а начальная температура внутри цилиндра равна нулю;

3) с поверхности цилиндра происходит лучеиспускание в окружающую среду, температура которой равна нулю, а начальная температура равна $u|_{t=0} = u_0(r)$.

20.50. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}\,u_x - \frac{1}{x^2}\,u + f(t)\,J_1(\mu_k x),$$

где μ_k — положительный корень уравнения $J_1(\mu) = 0$, $0 < x < 1$,

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = 0, \qquad u|_{t=0} = 0,$$

если:

1) $f(t) = \sin t$; 2) $f(t) = e^{-t}$.

20.51. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + tJ_0(\mu_1 r),$$

где μ_1 — положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$, $0 < r < 1$,

$$|u|_{r=0}| < \infty, \qquad u|_{r=1} = 0, \qquad u|_{t=0} = 0.$$

20.52. Решить следующие смешанные задачи:

1) $u_t = xu_{xx} + u_x - \dfrac{1}{4x}\,u + tJ_1\left(\mu_k\sqrt{x}\right)$,

где μ_k — положительный корень уравнения $J_1(\mu) = 0$, $0 < x < 1$,

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = 0, \qquad u|_{t=0} = 0.$$

2) $u_t = xu_{xx} + u_x - \dfrac{9}{4x}\,u$, $0 < x < 1$,

$$|u|_{x=0}| < \infty, \qquad u|_{x=1} = 0, \qquad u|_{t=0} = J_3\left(\mu_k\sqrt{x}\right),$$

где μ_k — положительный корень уравнения $J_3(\mu) = 0$.

Ответы к § 20

20.1. 1) $A\sin\dfrac{\pi n x}{l}\cos\dfrac{\pi n a t}{l}$;

2) $\dfrac{32h}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}\sin\dfrac{(2k+1)\,\pi x}{l}\cos\dfrac{(2k+1)\,\pi a t}{l}$ $\Big($У к а з а н и е. $u_0(x) = \dfrac{4h}{l^2}\,x(l-x).\Big)$;

3) $\dfrac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\sin\dfrac{k\pi c}{l}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\cos\dfrac{k\pi a t}{l}$; $\dfrac{8h}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\times$ $\times\sin\dfrac{(2k+1)\,\pi x}{l}\cos\dfrac{(2k+1)\,\pi a t}{l}$ $\left(\text{при } c = \dfrac{l}{2}\right)$ $\Big($У к а з а н и е. $u_0(x) = \dfrac{hx}{c}$ при $0 \le x \le c$; $u_0(x) = \dfrac{h(l-x)}{l-c}$ при $c \le x \le l.\Big)$.

20.2. 1) $\dfrac{4lv_0}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\sin\dfrac{(2k+1)\,\pi x}{l}\sin\dfrac{(2k+1)\,\pi at}{l}$;

2) $\dfrac{2lv_0}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{k\pi\alpha}{l}-\cos\frac{k\pi\beta}{l}}{k^2}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k\pi at}{l}$;

3) $\dfrac{8A\alpha}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{\pi k\alpha}{l}\sin\frac{\pi k x_0}{l}}{k[1-(2\alpha k)^2/l^2]}\sin\dfrac{\pi kx}{l}\sin\dfrac{\pi kat}{l}$.

20.3. 1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[a_k\cos\dfrac{(2k+1)\,\pi at}{2l}+b_k\sin\dfrac{(2k+1)\,\pi at}{2l}\right]\sin\dfrac{(2k+1)\,\pi x}{2l}$,

где $a_k = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l u_0(x)\sin\dfrac{(2k+1)\,\pi x}{2l}\,dx$, $b_k = \dfrac{4}{\pi a(2k+1)}\displaystyle\int_0^l u_1(x)\,\times$ $\times\sin\dfrac{(2k+1)\,\pi x}{2l}\,dx$ (Указание. $u|_{x=0}=0$, $u_x|_{x=l}=0$, $u|_{t=0} =$ $= u_0(x)$, $u_t|_{t=0}=u_1(x)$.);

2) $\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l[u_0(\xi)+tu_1(\xi)]\,d\xi+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\dfrac{k\pi at}{l}+b_k\sin\dfrac{k\pi at}{l}\right)\cos\dfrac{k\pi x}{l}$,

где $a_k=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l u_0(x)\cos\dfrac{k\pi x}{l}\,dx$, $b_k=\dfrac{2}{\pi ak}\displaystyle\int_0^l u_1(x)\cos\dfrac{k\pi x}{l}\,dx$ (Указание. $u_x|_{x=0}=u_x|_{x=l}=0$, $u|_{t=0}=u_0(x)$, $u_t|_{t=0}=u_1(x)$.);

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n at + b_n\sin\lambda_n at)\cos\lambda_n x$, где λ_n $(n = 1,2,\ldots)$ — собственные значения, а $X_n(x) = \cos\lambda_n x$ — собственные функции краевой задачи: $X''(x)+\lambda^2X=0$, $X'(0)=0$, $X'(l)+hX(l)=0$ (λ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\lambda l = h/\lambda$),

$$a_n=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l u_0(x)\cos\lambda_n x\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{\|X_n\|^2 a\lambda_n}\int_0^l u_1(x)\cos\lambda_n x\,dx,$$

$$\|X_n\|^2=\frac{l}{2}\left[1+\frac{h}{l(\lambda_n^2+h^2)}\right]$$

(Указание. $u_x|_{x=0}=0$, $u_x|_{x=l}=-hu|_{x=l}$, $h=\dfrac{k}{E\sigma}$, где E — модуль Юнга, σ — площадь поперечного сечения стержня, k — коэффициент, характеризующий жесткость закрепления; $u|_{t=0}=u_0(x)$, $u_t|_{t=0}=u_1(x)$.).

20.4. $u(x,t)=\dfrac{8Pl}{E\sigma\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{\sin\frac{(2k+1)\,\pi x}{2l}\cos\frac{(2k+1)\,\pi at}{2l}}{(2k+1)^2}$, где σ — площадь поперечного сечения стержня, E — модуль Юнга.

Указание. $u|_{x=0}=0$, $u_x|_{x=l}=0$, $u|_{t=0}=\dfrac{Px}{E\sigma}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$.

20.5. $i(x,t) = -E_0\sqrt{\dfrac{C}{L}}\cos\dfrac{\pi x}{2l}\sin\dfrac{\pi a t}{2l}$, $a = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Указание. Сила тока $i(x,t)$ удовлетворяет уравнению $LCi_{tt} = i_{xx}$, где L — самоиндукция, C — емкость, отнесенная к единице длины провода. Начальные условия имеют вид $i|_{t=0} = 0$, $i_t|_{t=0} = -\dfrac{E_0\pi}{2lL}\cos\dfrac{\pi x}{2l}$, а граничные условия таковы: $i_x|_{x=0} = 0$, $i|_{x=l} = 0$.

20.6. 1) $bx(l-x) + \dfrac{4l^2 b}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi}{l}t}{k^2}$ (Указание. Решение можно искать в виде $u = v + w$, где функция $v = bx(l-x)$ удовлетворяет неоднородному уравнению и нулевым граничным условиям, а функция w удовлетворяет однородному уравнению, нулевым граничным и следующим начальным условиям: $v|_{t=0} = bx(x-l)$, $v_t|_{t=0} = 0$.);

2) $\dfrac{2}{\pi}t\sin t\sin x + \sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{4}{k\pi(1-k^2)}(\cos t - \cos kt)\sin kx$.

20.7. $\dfrac{4A}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(2k+1)\sin\omega t - \frac{l\omega}{a\pi}\sin\frac{(2k+1)\pi a t}{l}}{(2k+1)^2(\mu_k^2 - \omega^2)}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{l}$, где $\omega_k = \dfrac{(2k+1)\pi a}{l}$.

20.8. $u(x,t) = \dfrac{gx(2l-x)}{2a^2} - \dfrac{16gl^2}{\pi^3 a^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{(2k+1)\pi a t}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{(2k+1)^3}$.

Указание. Задача сводится к решению уравнения $u_{tt} = a^2u_{xx} + g$, где g — ускорение силы тяжести, при следующих условиях: $u|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$. Решение этой задачи можно искать в виде $u = v + w$, где $u = Ax^2 + Bx + C$ (A, B, C выбрать так, чтобы функция удовлетворяла неоднородному уравнению и заданным граничным условиям).

20.9. 1) $\dfrac{xt}{l} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k 2l}{(k\pi)^2}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k\pi t}{l}$;

2) $t + 1 + x(t^3 - t + 1) +$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{(\pi k)^2}\left[\frac{6(-1)^{k+1}}{(\pi k)^2} - 1\right]\sin\pi kt + \frac{(-1)^k 12t}{\pi^3k^3}\right\}\sin\pi kx.$$

20.10. $A\dfrac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\omega t + \dfrac{2A\omega a}{l}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}\sin\frac{k\pi a t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}}{\omega^2 - (k\pi a/l)^2}$.

Указание. Задача сводится к решению уравнения $u_{tt} = a^2u_{xx}$ при нулевых начальных и следующих граничных условиях: $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = A\sin\omega t$. Решение этой задачи искать в виде $u = v + w$, где

$v = X(x)\sin\omega t$. Функцию v подобрать так, чтобы она удовлетворяла уравнению и заданным граничным условиям.

20.11. $u(x,t) = \dfrac{Q}{E\sigma}x - \dfrac{8Ql}{\pi^2 E\sigma}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\dfrac{(2k+1)\pi a t}{2l}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2l}$,

где E — модуль упругости, σ — площадь поперечного сечения стержня.

Указание. Задача сводится к решению уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ при нулевых начальных и следующих граничных условиях: $u|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=l} = \dfrac{Q}{E\sigma}$. Положить $u = v + w$, где $v = Ax$ (A выбрать так, чтобы функция v удовлетворяла заданным граничным условиям).

20.12. $$u(x,t) = \frac{Aa}{E\sigma\omega}\,\frac{\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t}{\cos\frac{\omega l}{a}} +$$

$$+\frac{2Aa\omega}{E\sigma l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2l}{(2k+1)\pi}\,\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x}{\omega^2 - [(2k+1)\pi a/(2l)]^2}\sin a\frac{(2k+1)\pi t}{2l}.$$

Указание. Задача сводится к решению уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ при нулевых начальных и следующих граничных условиях: $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = \dfrac{A}{E\sigma}\sin\omega t$. Решение этой задачи можно искать в виде $u = v + w$, где $v = f(x)\sin\omega t$; $f(x)$ выбрать так, чтобы функция v удовлетворяла уравнению и заданным граничным условиям.

20.13. $u(x,t) = e^{-\alpha t}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\mu_k t + b_k\sin\mu_k t)\sin\dfrac{k\pi x}{l}$, где

$$\mu_k = \sqrt{\frac{a^2\pi^2k^2}{l^2} - \alpha^2},$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx, \qquad b_k = \frac{\alpha}{\mu_k}a_k + \frac{2}{l\mu_k}\int_0^l u_1(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Указание. Задача сводится к решению уравнения $u_{tt} + 2\alpha u_t = a^2 u_{xx}$ ($\alpha > 0$ мало) при следующих условиях: $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = u_0(x)$, $u_t|_{t=0} = u_1(x)$.

20.14. 1) $-\dfrac{8}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^3}\cos\left(\sqrt{(2k+1)^2\pi^2+4}\,t\right)$;

2) $-\dfrac{8e^{-t}}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}\left[\cos(2k+1)t + \dfrac{1}{2k+1}\sin(2k+1)t\right]\sin(2k+1)x$;

3) $8e^{-t}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\left[(-1)^k - \dfrac{2}{\pi(2k+1)}\right]\sin\dfrac{2k+1}{2}t\cos\dfrac{2k+1}{2}x$;

4) $t(1-x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-t/2}\dfrac{1}{(k\pi)^3}\left[2\cos\lambda_k t + \dfrac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t - 2\right]\sin\pi k x$,

$$\lambda_k = \sqrt{(k\pi)^2 - \frac{1}{4}};$$

5) $(2-x)\,t+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4t}{k\pi\lambda_k^2}-\frac{k\pi}{\lambda_k^3}\sin\lambda_k t\right)\sin\frac{k\pi x}{2}, \qquad \lambda_k=\sqrt{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2-1};$

6) $\frac{xt}{l}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi\lambda_k^2}\left(t-\frac{\sin\lambda_k t}{\lambda_k}\right)\sin\frac{k\pi x}{l},\ \ \lambda_k=\sqrt{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-1}.$

20.15. 1) $\sin 2x\cos 2t+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{k^3}(1-\cos kt)\sin kx;$

2) $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\left[-1+e^{-t/2}\left(\cos\mu_k t+\frac{1}{2\mu_k}\sin\mu_k t\right)\right]\sin(2k+1)\pi x,$ где

$$c_k=\frac{4}{(2k+1)^3\pi^3}, \qquad \mu_k=\sqrt{(2k+1)^2\pi^2-\frac{1}{4}}.$$

Указание. Искать решение в виде ряда $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k(t)\times\sin k\pi x$.

Замечание к 2). Можно искать решение в виде суммы $u=v+w$, где функция $v=\frac{1}{2}x(1-x)$ удовлетворяет уравнению и заданным граничным условиям. Тогда

$$u(x,t)=\frac{x(1-x)}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\cos\mu_k t+\frac{1}{2\mu_k}\sin\mu_k t\right)e^{-t/2}\sin(2k+1)\pi x.$$

20.16. 1) $2xt+(2e^t-e^{-t}-3te^{-t})\cos x;$

2) $3+x(t+t^2)+(5te^t-8e^t+4t+8)\sin x;$

3) $x(t+1)+\left(\frac{1}{5}e^{5t/2}-e^{t/2}+\frac{4}{5}\right)\cos\frac{3}{2}x;$

4) $xt+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{6}e^{2t}+\frac{1}{15}e^{5t}\right)e^{-x}\sin 3x;$

5) $xt+(1-e^{-t}-te^{-t})\cos 3x;$

6) $\frac{1}{8}(e^{2t}+e^{-2t})-\frac{1}{4}-\frac{t^2}{2}\cos 2x;$

7) $\frac{1}{9}\sin x(\operatorname{ch}3t-1)+\sin 3x(\operatorname{ch}t-1);$

8) $xt+(2e^t-e^{2t})e^{-x}\sin x.$

20.17. $A\cos\frac{a\pi\sqrt{2}}{p}t\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{p}.$

20.18. $3\cos\sqrt{5}\,t\sin x\sin 2y+\sin 5t\sin 3x\sin 4y.$

20.19. $\frac{16Ap^2q^2}{\pi^6}\sum\limits_{k,l=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{p}\sin\frac{(2l+1)\pi y}{q}}{(2k+1)^3(2l+1)^3}\cos\pi a\mu_{k,l}t,$ где

$$\mu_{k,l}=\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{p^2}+\frac{(2l+1)^2}{q^2}}.$$

20.20. 1) $A\cos\frac{a\mu_k t}{R}\,J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\mu_n}{R}\,at+b_n\sin\frac{\mu_n}{R}\,at\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$, где

$$a_n=\frac{2}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int\limits_0^R rf(r)\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr,\qquad b_n=\frac{2}{a\mu_n RJ_1^2(\mu_n)}\int\limits_0^R rF(r)\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr$$

(μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$);

3) $$u(r,t)=8A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^3J_1(\mu_n)}\cos\frac{a\mu_n t}{R},\qquad(*)$$

где μ_n $(n=1,2,\ldots)$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$. (Указание. Задача приводится к решению уравнения $u_{rr}+\frac{1}{r}\,u_r=\frac{1}{a^2}\,u_{tt}$ при условиях $u|_{r=R}=0$, $|u|_{r=0}|<\infty$; $u|_{t=0}=A\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$, $A=\mathrm{const}$, $u_t|_{t=0}=0$. При вычислении коэффициентов ряда (*) воспользоваться следующими формулами: $\int\limits_0^x\xi J_0(\xi)\,d\xi=xJ_1(x)$, $\int\limits_0^x\xi^3J_0(\xi)\,d\xi=2x^2J_0(x)+(x^3-4x)\,J_1(x)$.)

20.21. 1) $u(x,t)=\left[\mu_k^{-4}(2-\mu_k^2)\cos\mu_k t+\mu_k^{-2}t^2+\mu_k^{-4}(\mu_k^2-2)\right]J_0(\mu_k x)$ (Указание. Решение можно искать в виде $u=v+w$, где $v=(at^2+c)\,J_0(\mu_k x)$ — частное решение неоднородного уравнения, w — решение однородного уравнения, $w|_{t=0}=-v|_{t=0}$, $w_t|_{t=0}=-v_t|_{t=0}$.);

2) $u(x,t)=(\mu_k^2-1)^{-1}(\cos t+\sin t-\cos\mu_k t-\mu_k^{-1}\sin\mu_k t)\,J_0(\mu_k x)$ (Указание. Решение можно искать в виде $u=v+w$, где $v=(a\sin t+b\cos t)\,J_0(\mu_k x)$ — частное решение неоднородного уравнения, $w=(A\cos\mu_k t+B\sin\mu_k t)\,J_0(\mu_k x)$ — решение однородного уравнения, $w|_{t=0}=-v|_{t=0}$, $w_t|_{t=0}=-v_t|_{t=0}$.).

20.22. 1) $\frac{1}{2}\left[1-\frac{J_0(2x)}{J_0(2)}\cos 2t\right]$; 2) $\frac{J_0(2x)}{J_0(2)}\cos 2t$;

3) $t-1+J_0(\mu_1 x)\cos\mu_1 t$.

20.23. 1) $\left[1-\frac{J_0(x)}{J_0(1)}\right]\cos t$; 2) $1+\frac{1}{9}\sin 3t\left[1-\frac{J_0(3x)}{J_0(3)}\right]$;

3) $\frac{1}{2}\left[\frac{J_0(2x)}{J_0(2)}-1\right]\cos 2t+J_0(\mu_1 x)\cos\mu_1 t$.

20.24. $\frac{J_0\left(x\sqrt{3}\right)}{J_0\left(\sqrt{3}\right)}\cos 2t+\frac{J_0\left(2x\sqrt{2}\right)}{J_0\left(2\sqrt{2}\right)}\sin 3t$.

20.25. $\dfrac{p_0}{\omega^2\rho}\left[\dfrac{J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)}-1\right]\sin\omega t+\dfrac{2p_0\omega R^3}{a\rho}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)\sin\frac{a\mu_n t}{R}}{\mu_n^2(\omega^2R^2-a^2\mu_n^2)\,J_1(\mu_n)}$,
где ρ — поверхностная плотность мембраны.

Указание. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}=u_{rr}+r^{-1}u_r+\rho^{-1}\sin\omega t,\qquad 0<r<R,$$
$$|u|_{r=0}|<\infty,\qquad u|_{r=R}=0,\qquad u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0.$$

20.26. 1) $J_1(\mu_k x)\cos\mu_k t+J_1(\mu_m x)\cos\mu_m t$;
2) $J_1(\mu_k x)\cos\mu_k t+\mu_m^{-1}J_1(\mu_m x)\sin\mu_m t$.

20.27. $(1+\mu_k^2)^{-1}(e^t-\cos\mu_k t-\mu_k^{-1}\sin\mu_k t)\,J_1(\mu_k x)$.

20.28. $\dfrac{1}{2J_1(1)}J_1(x)\sin t+\dfrac{1}{2J_1(3)}J_1(3x)\sin 3t$.

20.29. 1) $(\cos\mu_k t+\mu_k^{-1}\sin\mu_k t)\,J_2(\mu_k x)$;
2) $\left(\dfrac{1}{2}\cos\mu_k t+\dfrac{3}{2}\mu_k^{-1}\sin\mu_k t\right)J_2(\mu_k x)$.

20.30. 1) $\left(\mu_1^{-2}t-\mu_1^{-3}\sin\mu_1 t\right)J_2(\mu_1 x)$;
2) $(\mu_1^2-1)^{-1}(\cos t-\cos\mu_1 t)\,J_2(\mu_1 x)$.

20.31. 1) $\mu_1^{-1}J_3(\mu_1 x)\sin\mu_1 t$; 2) $(\cos\mu_1 t+\mu_1^{-1}\sin\mu_1 t)\,J_3(\mu_1 x)$.

20.32. 1) $[\mu_k(1+\mu_k^2)]^{-1}(\sin\mu_k t-\mu_k\cos\mu_k t+\mu_k e^{-t})\,J_3(\mu_k x)$;
2) $\mu_k^{-2}\left(2\mu_k^{-2}+t-t^2-\mu_k^{-1}\sin\mu_k t-2\mu_k^{-2}\cos\mu_k t\right)J_3(\mu_k x)$.

20.33. $J_0\left(2\mu_1\sqrt{x}\right)\cos\mu_1 t$.

Указание. Полагая $u=X(x)\,T(t)$, получить уравнения

$$X''+\frac{X'}{x}+\frac{\lambda^2}{x}X=0, \tag{$*$}$$
$$T''+\lambda^2T=0.$$

Уравнение ($*$) подстановкой $\eta=2\lambda\sqrt{x}$ свести к уравнению Бесселя

$$X''(\eta)+\frac{1}{\eta}X'(\eta)+X(\eta)=0,$$

имеющему общее решение $X(\eta)=aJ_0(\eta)+bY_0(\eta)$.

20.34. $\dfrac{1}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\dfrac{J_0\left(\mu_n\sqrt{x/l}\right)}{J_1^2(\mu_n)}\cos\dfrac{\mu_n at}{2\sqrt{l}}$, где $A_n=\int\limits_0^l u_0(x)\times$ $\times J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)dx$, μ_n $(n=1,2,\ldots)$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

Указание. Задача приводится к решению уравнения $u_{tt} = a^2(xu_x)_x$, $0 < x < l$, $a = \sqrt{g}$, при условиях $|u|_{x=0}| < \infty$, $u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = u_0(x)$, $u_t|_{t=0} = 0$.

20.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t)\, J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$, где

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{\mu_n^2}{4l} - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}, \qquad A_n = \frac{1}{lJ_1^2(\mu_n)} \int\limits_0^l u_0(x)\, J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$

$$B_n = \frac{1}{a\lambda_n l J_1^2(\lambda_n)} \int\limits_0^l u_1(x)\, J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$

μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание. Задача приводится к решению уравнения $u_{tt} = a^2(xu_x)_x + \omega^2 u$, $0 < x < l$, $a = \sqrt{g}$, при условиях $|u|_{x=0}| < \infty$, $u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = u_0(x)$, $u_t|_{t=0} = u_1(x)$.

20.36. $\frac{2}{\mu_k} J_0(\mu_k\sqrt{x}) \sin \frac{\mu_k}{2} t$.

20.37. 1) $\left(4\mu_1^{-2}t - 8\mu_1^{-3} \sin \frac{\mu_1}{2} t\right) J_0(\mu_1\sqrt{x})$;

2) $4(\mu_1^2 - 4)^{-1} \left(\sin t - 2\mu_1^{-1} \sin \frac{\mu_1 t}{2}\right) J_0(\mu_1\sqrt{x})$.

20.38. $\frac{2}{\mu_k} \sin \frac{\mu_k}{2} t J_2(\mu_k\sqrt{x})$.

20.39. $\frac{2}{\mu_1} \sin \frac{\mu_1}{2} t J_3(\mu_1\sqrt{x})$.

20.40. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right\} \sin \frac{\pi n x}{l}$, где $a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx$;

если $u_0(x) = A = \mathrm{const}$, то

$$u(x,t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\left\{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l}\right)^2 t\right\} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l},$$

если $u_0(x) = Ax(x-l)$, то

$$u(x,t) = \frac{8Al^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \exp\left\{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l}\right)^2 t\right\} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l};$$

2) $\frac{2}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sigma^2 + \mu_n^2}{\sigma(\sigma+1) + \mu_n^2} \exp\left\{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t\right\} \sin \frac{\mu_n x}{l}$, где $a_n = \int\limits_0^l u_0(x) \times$ $\times \sin \frac{\mu_n x}{l}\, dx$, μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{\sigma}$, $\sigma = hl > 0$ (Указание. Граничные условия имеют вид $u|_{x=0} = 0$, $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$.);

3) $\frac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left\{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t\right\} \frac{\mu_n \cos\frac{\mu_n x}{l}+\sigma\sin\frac{\mu_n x}{l}}{\sigma(\sigma+2)+\mu_n^2}$, где $b_n = \int\limits_0^l u_0(x) \times$ $\times \left(\mu_n \cos\frac{\mu_n x}{l}+\sigma\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)dx$, μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg}\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{\mu}\right)$, $\sigma = hl$, $u_0(x) = u|_{t=0}$ (Указание. Граничные условия имеют вид $(u_x - hu)|_{x=0} = (u_x + hu)|_{x=l} = 0$.);

4) u_0 (Указание. Граничные условия имеют вид $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$.);

5) $\frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}\exp\left\{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l}\right)^2 t\right\}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}$,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{u_0}{2};$$

6) $\frac{u_0}{2} - \frac{4u_0}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\exp\left\{-\left(\frac{2(2k+1)\pi a}{l}\right)^2 t\right\}\cos\frac{2(2k+1)\pi x}{l}$,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{u_0}{2}.$$

20.41. 1) $\frac{32}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\exp\left\{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 t\right\}\cos\frac{2n+1}{2}\pi x$;

2) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\exp\left\{-\left[\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}\right)^2+1\right]t\right\}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$;

3) $-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\exp\left\{-(2k+1)^2\right\}\sin(2k+1)x$.

20.42. 1) $u_1 + \frac{u_2-u_1}{l}x + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{(u_0-u_1)[1-(-1)^n] + \right.$

$$\left. + (-1)^n(u_2-u_0)\right\}\exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right\}\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_1 + (u_2-u_1)\frac{x}{l};$$

2) $u_1 + \frac{8Al^2}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\exp\left\{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l}\right)^2 t\right\}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l} -$

$$- 4u_1\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l}\right)^2 t\right\}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}, \qquad \lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_1;$$

3) $u_2 + \frac{4(A-u_2)}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\left\{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t\right\}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l} -$

$$- \frac{8A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\exp\left\{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t\right\}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l};$$

4) $\dfrac{qx}{k}+u_1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[a_n-\dfrac{4}{\pi^2}\,\dfrac{(2n+1)\,\pi u_1+lq/k}{(2n+1)^2}\right]\exp\left\{-\left(\dfrac{(2n+1)\,\pi a}{2l}\right)^2 t\right\}\times$ $\times\sin\dfrac{(2n+1)\,\pi x}{2l}$, где $a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l u_0(x)\sin\dfrac{(2n+1)\,\pi x}{2l}\,dx$ (Указание. Граничные условия имеют вид $u|_{x=0}=u_1$, $ku_x|_{x=l}=q$.).

20.43. 1) $\dfrac{u_2\operatorname{sh}\dfrac{h}{a}\,x-u_1\operatorname{sh}\dfrac{h}{a}\,(x-l)}{\operatorname{sh}\dfrac{h}{a}\,l}+\dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\pi n}{l}\cdot\dfrac{(-1)^n u_2-u_1}{\lambda_n^2}+a_n\right)\times$ $\times\exp\left\{-(a\lambda_n)^2 t\right\}\sin\dfrac{\pi nx}{l}$, где $\lambda_n^2=\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2+\left(\dfrac{h}{a}\right)^2$, $a_n=\displaystyle\int_0^l u_0(x)\times$ $\times\sin\dfrac{\pi nx}{l}\,dx$ (Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$u_t=a^2u_{xx}-h^2u \qquad (*)$$

при граничных условиях $u|_{x=0}=u_1$, $u|_{x=l}=u_2$ и начальном условии $u|_{t=0}=u_0(x)$. Решение этой задачи искать в виде $u(x,t)=v(x)+$ $+w(x,t)$, где v — решение уравнения $a^2v''(x)-h^2v=0$, удовлетворяющее заданным граничным условиям, а $w(x,t)$ — решение уравнения $(*)$ при нулевых граничных условиях и начальном условии $w|_{t=0}=u_0(x)-v(x)$.);

2) $u_1\,\dfrac{h\operatorname{ch}\dfrac{h}{a}\,(l-x)+h_1a\operatorname{sh}\dfrac{h}{a}\,(l-x)}{h\operatorname{ch}\dfrac{hl}{a}+h_1a\operatorname{sh}\dfrac{hl}{a}}-2u_1a^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mu_n\,(\mu_n^2+h_1^2)}{(a^2\mu_n^2+h^2)}\times$ $\times\dfrac{1}{[l(\mu_n^2+h_1^2)+h_1]}\exp\left\{-\left(a^2\mu_n^2+h^2\right)t\right\}\sin\mu_nx$, где μ_n $(n=1,2,\ldots)$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}l\mu=-\dfrac{\mu}{h_1}$ (Указание. Граничные условия имеют вид $u|_{x=0}=u_1$, $(u_x+h_1u)|_{x=l}=0$. Решение искать в виде $u(x,t)=v(x)+w(x,t)$, где $v(x)$ — решение уравнения $a^2v''(x)-h^2v=0$, удовлетворяющее краевым условиям $v|_{x=0}=u_1$, $(v_x+h_1v)|_{x=l}=0$, а $w(x,t)$ — решение уравнения $(*)$ (см. задачу 40.43, 1)) при условиях $w|_{x=0}=0$, $(w_x+hw)|_{x=l}=0$, $w|_{t=0}=-v(x)$.).

20.44. $At\,\dfrac{l-x}{l}-\dfrac{2Al^2}{\pi^3a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}\left\{1-\exp\left(-\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2t\right)\right\}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$.

20.45. 1) $x-l+\dfrac{8l}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda_k^2 t}}{(2k+1)^2}\cos\lambda_kx$, $\lambda_k=\dfrac{\pi(2k+1)}{2l}$;

2) $t\cos x+\dfrac{1}{8}\left(e^{-8t}-1\right)\cos 3x$; 3) $xt+\sin\pi x\,e^{x-t-\pi^2t}$;

4) $x+t\sin x+\dfrac{1}{8}\left(1-e^{-8t}\right)\sin 3x$; 5) $tx^2+\dfrac{1}{4}\left(e^{4t}-1\right)+t\cos 2x$;

6) $t+1+\left(1-e^{-t}\right)e^x\sin x+e^{x-4t}\sin 2x$.

20.46. 1) $xt^2+e^t+\sin t-\cos t+e^{-3t}\cos 2x$;

2) $x^2+2e^{9t}+(2t-\sin 2t)\cos 3x$;

3) $x + t^2 + \frac{1}{5}(e^{5t} - 1)\cos x + \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})\cos 3x$;

4) $x^2 t + x + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{C_{2k-1}}{(2k-1)^2 - 6}\left\{1 - e^{-6(2k-1)^2 t}\right\}\sin(2k-1)x$,
$$C_{2k-1} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-3}\right);$$

5) $t(x+1) + e^{-2x}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{k^2\pi^2 + 4}\left[1 - e^{-(k^2\pi^2+4)t}\right]\sin k\pi x$,
$$C_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 2m, \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2m-1} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m-3}\right), & \text{если } k = 2m-1. \end{cases}$$

20.47. 1) $\frac{2}{Rr}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\pi n a/R)^2 t}\sin\frac{\pi n r}{R}$, $a_n = \int\limits_0^R r u_0(r)\sin\frac{\pi n r}{R}\,dr$;

2) $\frac{2}{Rr}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sigma^2 + \mu_n^2}{\sigma(\sigma+1) + \mu_n^2}\, e^{-(\mu_n a/R)^2 t}\sin\frac{\mu_n r}{R}$, $a_n = \int\limits_0^R r u_0(r)\sin\frac{\mu_n r}{R}\,dr$, μ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{\sigma}$, $\sigma = hR - 1$ $(\sigma > -1)$;

3) $u_1 + 2(u_1 - u_0)\frac{hR^2}{r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n e^{-(a\mu_n/R)^2 t}\sin\frac{\mu_n r}{R}$, μ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{\sigma}$, $\sigma = hR - 1$ $(\sigma > -1)$, h — коэффициент теплообмена в краевом условии $[u_r + h(u - u_1)]|_{r=R} = 0$, $a_n = \frac{\sqrt{\mu_n^2 + \sigma^2}}{\mu_n[\mu_n^2 + \sigma(\sigma+1)]}$;

4) $u_0 + \frac{q}{k}\left(\frac{3a^2}{R}t + \frac{5r^2 - 3R^2}{10R} - \frac{2R^2}{r}\right)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(a\mu_n/R)^2 t}}{\mu_n^3\cos\mu_n}\sin\frac{\mu_n r}{R}$, μ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = \mu$ (Указание. Задача приводится к решению уравнения (14) (с. 258) при граничных условиях $|u|_{r=0}| < \infty$, $u_r|_{r=R} = \frac{q}{k}$.).

20.48. $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk} e^{-(a\pi/l)^2(j^2+k^2)t}\sin\frac{j\pi x}{l}\sin\frac{k\pi y}{l}$,
$$a_{jk} = \frac{4}{l^2}\int\limits_0^l\int\limits_0^l u_0(x,y)\sin\frac{j\pi x}{l}\sin\frac{k\pi y}{l}\,dx\,dy.$$

Указание. Применить метод разделения переменных для уравнения $u_t = a^2\Delta u$ при условиях $u|_{x=0} = u|_{x=l} = u|_{y=0} = u|_{y=l} = 0$, $u|_{t=0} = u_0(x,y)$.

20.49. 1) $Ae^{-(a\mu_k/R)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$;

2) $u_0\left[1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n r/R)}{\mu_n J_0'(\mu_n)}\, e^{-(a\mu_n/R)^2 t}\right]$, где μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$;

3) $\dfrac{2}{R^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n\mu_n^2}{\mu_n^2+h^2R^2}\,e^{-(a\mu_n/R)^2t}J_0\Bigl(\dfrac{\mu_n r}{R}\Bigr)$, $\quad a_n=\dfrac{1}{J_0^2(\mu_n)}\int\limits_0^R ru_0(r)\times$ $\times J_0\Bigl(\dfrac{\mu_n r}{R}\Bigr)dr$, где μ_n $(n=1,2,3,\ldots)$ — положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu)+hRJ_0(\mu)=0$ (Указание. Граничные условия имеют вид $|u|_{r=0}|<\infty$, $(u_r+hu)|_{r=R}=0$.).

20.50. 1) $(1+\mu_k^4)^{-1}\bigl(e^{-\mu_k^2t}+\mu_k^2\sin t-\cos t\bigr)\,J_1(\mu_k x)$;

2) $(\mu_k^2-1)^{-1}\bigl(e^{-t}-e^{-\mu_k^2t}\bigr)\,J_1(\mu_k x)$.

20.51. $\bigl[\mu_1^{-2}t+\mu_1^{-4}\bigl(e^{-\mu_1^2t}-1\bigr)\bigr]\,J_0(\mu_1 r)$.

20.52. 1) $\bigl(16\mu_k^{-4}e^{-\mu_k^2t/4}+4\mu_k^{-2}t-16\mu_k^{-4}\bigr)\,J_1\bigl(\mu_k\sqrt{x}\bigr)$;

2) $e^{-\mu_k^2t/4}J_3\bigl(\mu_k\sqrt{x}\bigr)$.

§ 21. Другие методы

21.1. Доказать, что задача

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\qquad t>0,\qquad x>0;$$
$$u|_{t=0}=0,\qquad u_t|_{t=0}=0,\qquad u|_{x=0}=g(t)$$

имеет единственное решение

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & x\ge at,\\ g\Bigl(t-\dfrac{x}{a}\Bigr), & x<at,\end{cases}$$

если $g\in C^2\,(t\ge 0)$, $g(0)=g'(0)=g''(0)=0$.

21.2. Доказать, что задача

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\qquad t>0,\qquad x>0;$$
$$u|_{t=0}=u_0(x),\qquad u_t|_{t=0}=u_1(x),\qquad u|_{x=0}=0$$

имеет единственное решение

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac12\,[u_0(x+at)+u_0(x-at)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}u_1(\xi)\,d\xi, & x\ge at,\\[2ex] \dfrac12\,[u_0(x+at)-u_0(at-x)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{at+x}u_1(\xi)\,d\xi, & x<at,\end{cases}$$

если $u_0\in C^2\,(x\ge 0)$, $u_1\in C^1\,(x\ge 0)$, $u_0(0)=u_0''(0)=u_1(0)=0$. Показать, что это решение можно получить из формулы Даламбера (с. 137), если функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ продолжить нечетным образом для $x<0$.

21.3. Доказать, что задача

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\qquad t>0,\qquad x>0;$$
$$u|_{t=0}=0,\qquad u_t|_{t=0}=0,\qquad u_x|_{x=0}=g(t)$$

имеет единственное решение

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \ge at, \\ -a \int\limits_0^{t-x/a} g(\tau)\,d\tau, & x < at, \end{cases}$$

если $g \in C^1\,(t \ge 0)$, $g(0) = g'(0) = 0$.

21.4. Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0, \qquad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x), \qquad u_x|_{x=0} = 0$$

имеет единственное решение

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi, & x \ge at, \\ \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(at-x)\right] + \\ \qquad + \frac{1}{2a}\left[\int\limits_0^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^{at-x} u_1(\xi)\,d\xi\right], & x < at, \end{cases}$$

если $u_0 \in C^2\,(x \ge 0)$, $u_1 \in C^1\,(x \ge 0)$, $u_0'(0) = u_1'(0) = 0$. Показать, что это решение можно получить из формулы Даламбера, если функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ продолжить четным образом для $x < 0$.

21.5. Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0, \qquad 0 < x < l;$$
$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad u|_{x=0} = g(t), \qquad u|_{x=l} = 0$$

имеет единственное решение

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\widetilde{g}\left(t - \frac{x}{a} - \frac{2nl}{a}\right) - \widetilde{g}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2(n+1)\,l}{a}\right)\right],$$

$$\widetilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & t \ge 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

если $g \in C^2\,(t \ge 0)$, $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$.

21.6. Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0, \qquad 0 < x < l;$$
$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x), \qquad u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0$$

имеет единственное решение

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{u}(x+at) + \widetilde{u}_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \widetilde{u}_1(\xi)\,d\xi,$$

где функции $\widetilde{u}_0(x)$, $\widetilde{u}_1(x)$ — нечетные, $2l$-периодические и совпадающие с функциями $u_0(x)$, $u_1(x)$ при $0 \le x \le l$, если $u_0 \in C^2\,[0,l]$, $u_1 \in C^1\,[0,l]$, $u_0(0) = u_0(l) = u_1(0) = u_1(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = 0$.

В задачах 21.7–21.23 требуется доказать, что существует единственное решение поставленной задачи; найти это решение.

21.7. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ x > 0;$

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad (u_x - \beta u)|_{x=0} = g(t),$$
$$g \in C^1\,(t \ge 0), \qquad g(0) = g'(0) = 0.$$

21.8. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ x > 0;$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad (u_x - \beta u)|_{x=0} = 0,$$
$$u_0 \in C^2\,(x \ge 0), \qquad u_0'(0) - \beta u_0(0) = 0.$$

21.9. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ 0 < x < l;$

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad u_x|_{x=0} = g(t), \qquad u_x|_{x=l} = 0,$$
$$g \in C^1\,(t \ge 0), \qquad g(0) = g'(0) = 0.$$

21.10. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ 0 < x < l;$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x), \qquad u_x|_{x=0} = 0, \qquad u_x|_{x=l} = 0,$$
$$u_0 \in C^2\,([0,l]), \qquad u_1 \in C^1\,([0,l]),$$
$$u_0'(0) = u_1'(0) = u_0'(l) = u_1'(l) = 0.$$

21.11. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ 0 < x < l;$

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad u|_{x=0} = g(t), \qquad u_x|_{x=l} = 0,$$
$$g \in C^2\,(t \ge 0), \qquad g(0) = g'(0) = g''(0) = 0.$$

21.12. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ 0 < x < l;$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x), \qquad u|_{x=0} = 0, \qquad u_x|_{x=l} = 0,$$
$$u_0 \in C^2\,([0,l]), \qquad u_1 \in C^1\,([0,l]),$$
$$u_0(0) = u_0''(0) = u_1(0) = u_0'(l) = u_1'(l) = 0.$$

21.13. $u_{tt} = u_{xx}, \ t > 0, \ x > 0;$

$$u|_{t=0} = x^2, \qquad u_t|_{t=0} = x, \qquad u|_{x=0} = t^2.$$

21.14. $u_{tt} = 4u_{xx} + 16t^2, \ t > 0, \ x > 0;$

$$u|_{t=0} = \frac{1}{6}x^4, \qquad u_t|_{t=0} = 2\sin x, \qquad u|_{x=0} = 4t^4.$$

21.15. $9u_{tt} = u_{xx}, \ t > 0, \ x > 0;$

$$u|_{t=0} = 27x^3, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad u|_{x=0} = t^3.$$

21.16. $u_{tt} = u_{xx} + 2, \ t > 0, \ x > 0;$

$$u|_{t=0} = x + \cos x, \qquad u_t|_{t=0} = 1, \qquad u_x|_{x=0} = 1.$$

21.17. $u_{tt} = u_{xx}, \ t > 0, \ x > 0;$

$$u|_{t=0} = x, \qquad u_t|_{t=0} = 1, \qquad u_x|_{x=0} = \cos t.$$

21.18. $u_{tt} = 9u_{xx} + e^t,\ t > 0,\ x > 0;$

$$u|_{t=0} = 1 + x, \qquad u_t|_{t=0} = 4 - 3\cos\frac{x}{3}, \qquad u_x|_{x=0} = 2 - \cos t.$$

21.19. $u_{tt} = 3u_{xx} + 2(1 - 6t^2)\,e^{-2x},\ t > 0,\ x > 0;$

$$u|_{t=0} = 1, \qquad u_t|_{t=0} = x, \qquad (u_x - 2u)|_{x=0} = -2 + t - 4t^2.$$

21.20. $u_{tt} = u_{xx},\ t > 0,\ x > 0;$

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad (u_x + u)|_{x=0} = 1 - \cos t.$$

21.21. $u_{tt} = u_{xx} + 4,\ t > 0,\ x > 0;$

$$u|_{t=0} = 1 - x, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad (u_x + u)|_{x=0} = \frac{3}{2}\,t^2.$$

21.22. $u_{tt} = u_{xx},\ t > 0,\ x > 0;$

$$u|_{t=0} = x^2, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad (u_t - u)|_{x=0} = 2t - t^2.$$

21.23. 1) $u_{tt} = u_{xx} - 6,\ t > 0,\ x > 0;$

$$u|_{t=0} = x^2, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad (u_t + 2u_x)|_{x=0} = -4t;$$

2) $u_{tt} = 4u_{xx} + 2,\ t > 0,\ x > 0;$

$$u|_{t=0} = 2 - x, \qquad u_t|_{t=0} = 2, \qquad (u_t + 3u_x)|_{x=0} = 3t - e^t.$$

21.24. Найти наибольшую область, в которой поставленная задача имеет единственное решение, и найти это решение:

1) $u_{tt} = u_{xx};$

$$u|_{t=0} = x^3, \qquad u_t|_{t=0} = 0 \qquad 0 \le x \le 2, \qquad u|_{x=0} = t^3, \qquad 0 \le t \le 2;$$

2) $u_{tt} = u_{xx};$

$$u|_{t=0} = 2x^3, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad 0 \le x \le 4, \qquad u|_{t=3x} = 0, \qquad 0 \le x \le 1.$$

21.25. Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \qquad t > 0, \qquad |x| > 1, \qquad x \in R^3,$$
$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad u|_{|x|=1} = g(t)$$

имеет единственное решение

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & |x| \ge 1 + at, \\ \dfrac{1}{|x|}\, g\Big(t + \dfrac{1 - |x|}{a}\Big), & 1 < |x| < 1 + at, \end{cases}$$

если $g \in C^2\,(t \ge 0)$, $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$. Показать, что если $g(t)$ — финитная функция, то $u(x,t) = 0$ для любого фиксированного x, $|x| \ge 1$, при достаточно больших t. В случае, когда $g(t) \ne 0$ при $0 < t < T$, $g(t) = 0$ при $t \ge T$, найти момент времени t_x, в который через точку x, $|x| > 1$ пройдет задний фронт волны.

21.26. Найти решение задачи

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \qquad t > 0, \qquad |x| > 1, \qquad x \in R^3;$$
$$u|_{t=0} = \alpha(|x|), \qquad u_t|_{t=0} = \beta(|x|), \qquad u|_{|x|=1} = 0,$$

где $\alpha(r) \in C^2\,(r \geq 1)$, $\beta(r) \in C^1\,(r \geq 1)$, $\alpha(1) = 0$, $\alpha''(1) + 2\alpha'(1) = 0$, $\beta(1) = 0$. Доказать, что если функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ финитные, то $u(x,t) = 0$ для любого фиксированного x, $|x| \geq 1$, при достаточно больших t.

21.27. Найти решение задачи

$$u_{tt} = \Delta u, \qquad t > 0, \qquad |x| > 1, \qquad x \in R^3;$$
$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=1} = g(t),$$

где $g \in C^1\,(t \geq 0)$, $g(0) = g'(0) = 0$.

Доказать, что если $g(t)$ — финитная функция, то существует такая функция $c(x)$, что $|u(x,t)| \leq c(x)\,e^{-t}$, а для того чтобы $u(x,t) = 0$ для каждого фиксированного x, $|x| \geq 1$, при достаточно больших t, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_0^\infty e^t g(t)\,dt = 0$.

21.28. Найти решение задачи

$$u_{tt} = \Delta u, \qquad t > 0, \qquad |x| > 1, \qquad x \in R^3;$$
$$u|_{t=0} = \alpha(|x|), \qquad u_t|_{t=0} = \beta(|x|), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=1} = 0,$$

где $\alpha \in C^2\,(r \geq 1)$, $\beta \in C^1\,(r \geq 1)$, $\alpha'(1) = \beta'(1) = 0$.

Доказать, что если функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ финитные, то существует такая функция $c(x)$, что $|u(x,t)| \leq c(x)\,e^{-t}$, а для того чтобы $u(x,t) = 0$ для каждого фиксированного x, $|x| \geq 1$, при достаточно больших t, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_0^\infty re^r[\alpha(r) - \beta(r)]\,dr = 0$.

21.29. Решить задачу

$$u_{tt} = \Delta u, \qquad t > 0, \qquad |x| > 1, \qquad x \in R^3;$$
$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad \left.\left(ku + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{|x|=1} = g(t), \qquad k = \mathrm{const}.$$

Решить задачи 21.30–21.36.

21.30. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $t > 0$, $x > 0$;

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u|_{x=0} = 0.$$

21.31. $u_t = a^2 u_{xx}$, $t > 0$, $x > 0$;

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u|_{x=0} = g(t).$$

21.32. $u_t = a^2 u_{xx}$, $t > 0$, $x > 0$;

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_x|_{x=0} = 0.$$

21.33. $u_t = a^2 u_{xx}$, $t > 0$, $x > 0$;

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_x|_{x=0} = g(t).$$

21.34. $u_t = u_{xx},\ t > 0,\ x > 0;$

$$u|_{t=0} = 0, \qquad (u - u_x)|_{x=0} = g(t).$$

21.35. $u_t = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ x > 0;$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad (u_x - hu)|_{x=0} = 0, \qquad h \geq 0.$$

21.36. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,\ t > 0,\ x > 0;$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad u|_{x=0} = g(t), \qquad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0.$$

21.37. Решить задачу

$$u_t = \alpha^2(x)\, u_{xx}, \qquad t > 0, \qquad x \neq 0,$$

где $\alpha(x) = a$ при $x < 0$, $\alpha(x) = b$ при $x > 0$;

$$u|_{t=0} = \theta(x), \qquad u|_{x=-0} = u|_{x=+0}, \qquad u_x|_{x=-0} = k u_x|_{x=+0}.$$

Ответы к § 21

21.7. 0 при $x \geq at$; $-ae^{\beta(x-at)} \displaystyle\int_0^{t-x/a} e^{a\beta\tau} g(\tau)\, d\tau$ при $x < at$.

21.8. $\dfrac{1}{2}\,[u_0(x+at) + u_0(x-at)]$ при $x \geq at$;

$\dfrac{1}{2}\,[u_0(x+at) + u_0(at-x)] - \beta e^{\beta(x-at)} \displaystyle\int_0^{at-x} u_0(\xi)\, e^{\beta\xi}\, d\xi$ при $x < at$.

21.9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left[f\left(t - \frac{x}{a} - \frac{2nl}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2(n+1)\,l}{a}\right)\right]$, где $f(x) = 0$ при $x \leq 0$, $f(x) = -a \displaystyle\int_0^x g(\tau)\, d\tau$ при $x > 0$.

21.10. $\dfrac{1}{2}\,[\widetilde{u}_0(x+at) + \widetilde{u}_0(x-at)] + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \widetilde{u}_1(\xi)\, d\xi$, где функции $\widetilde{u}_0(x)$, $\widetilde{u}_1(x)$ четные, $2l$-периодические и совпадающие с функциями $u_0(x)$, $u_1(x)$ при $0 \leq x \leq l$.

21.11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\widetilde{g}\left(t - \frac{x}{a} - \frac{2ln}{a}\right) + \widetilde{g}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2l(n+1)}{a}\right)\right]$, $\widetilde{g}(t) = 0$, $t < 0$, $\widetilde{g}(t) = g(t)$, $t \geq 0$.

21.12. $\dfrac{1}{2}\,[\widetilde{u}_0(x+at) + \widetilde{u}_0(x-at)] + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \widetilde{u}_1(\xi)\, d\xi$, где функции $\widetilde{u}_0(x)$, $\widetilde{u}_1(x)$ нечетные, совпадающие с функциями $u_0(x)$, $u_1(x)$ при $0 \leq x \leq l$, а $\widetilde{u}_0(x-l)$, $\widetilde{u}_1(x-l)$ —четные функции.

21.13. $x^2 + xt + t^2$.

21.14. $4t^4 + 4t^2x^2 + \dfrac{1}{6}x^4 + \sin 2t \sin x$.

21.15. $9xt^2 + 27x^3$ при $x \geq \dfrac{1}{3}t$; $t^3 + 27tx^2$ при $x < \dfrac{1}{3}t$.

21.16. $x + t + t^2 + \cos x \cos t$.

21.17. $x + t$ при $x \geq t$; $2t + \sin(x - t)$ при $x < t$.

21.18. $x + 3t + e^t - 3\sin t \cos\dfrac{x}{3}$ при $x \geq 3t$;

$2x + e^t - 3\cos t \sin\dfrac{x}{3}$ при $x < 3t$.

21.19. $1 + xt + t^2e^{-2x}$.

21.20. 0 при $x \geq t$; $1 - \dfrac{1}{2}e^{t-x} - \dfrac{1}{2}[\sin(x-t) + \cos(x-t)]$ при $x < t$.

21.21. $1 - x + 2t^2$ при $x \geq t$; $2t^2 - t - \dfrac{1}{2}(x-t)^2 + e^{t-x}$ при $x < t$.

21.22. $x^2 + t^2$.

21.23. 1) $x^2 - 2t^2$;

2) $2 + 2t - x + t^2$ при $x \geq 2t$; $xt - \dfrac{1}{4}x^2 + 2e^{t-x/2}$ при $x < 2t$.

21.24. 1) $x^3 + 3xt^2$ при $0 \leq x + t \leq 2$, $0 \leq x - t \leq 2$; $3x^2t + t^3$ при $0 \leq x + t \leq 2$, $-2 \leq x - t \leq 0$;

2) $2x^3 + 6xt^2$ при $0 \leq x + t \leq 4$, $0 \leq x - t \leq 4$; $(x+t)^3 + 8(x-t)^3$ при $0 \leq x + t \leq 4$, $-2 \leq x - t \leq 0$.

21.25. $t_x = T + \dfrac{|x| - 1}{a}$.

21.26.
$$\frac{1}{2|x|}\left[(|x| + at)\,\alpha(|x| + at) + (|x| - at)\,\alpha(|x| - at)\right] + \frac{1}{2a|x|}\int\limits_{|x|-at}^{|x|+at} \xi\beta(\xi)\,d\xi \quad \text{при} \quad |x| \geq 1 + at;$$
$$\frac{1}{2|x|}\left[(|x| + at)\,\alpha(|x| + at) - (2 - |x| + at)\,\alpha(2 - |x| + at)\right] + \frac{1}{2a|x|}\int\limits_{2-|x|+at}^{|x|+at} \xi\beta(\xi)\,d\xi \quad \text{при} \quad 1 < |x| < 1 + at.$$

21.27. 0 при $|x| \geq 1 + t$;
$$\frac{1}{|x|}e^{|x|-t-1}\int\limits_0^{t+1-|x|} e^{\tau}g(\tau)\,d\tau \quad \text{при} \quad 1 < |x| < 1 + t.$$

21.28.
$$\frac{1}{2|x|}\left[(|x| + t)\,\alpha(|x| + t) + (|x| - t)\,\alpha(|x| - t)\right] + \frac{1}{2|x|}\int\limits_{|x|-t}^{|x|+t} \xi\beta(\xi)\,d\xi \quad \text{при} \quad |x| \geq 1 + t;$$
$$\frac{1}{2|x|}\left[(|x|+t)\,\alpha(|x|+t) + (2-|x|+t)\,\alpha(2-|x|+t)\right] + \frac{1}{2|x|}\int\limits_{2-|x|+t}^{|x|+t} \xi\beta(\xi)\,d\xi - \frac{1}{|x|}e^{|x|-t-2}\int\limits_1^{2-|x|+t} \xi e^{\xi}[\alpha(\xi) - \beta(\xi)]\,d\xi \quad \text{при} \quad 1 < |x| < 1 + t.$$

21.29. 0 при $|x| \geq 1+t$;

$$\frac{1}{|x|}\, e^{(k+1)(|x|-t-1)} \int\limits_0^{t+1-|x|} e^{(k+1)\tau} g(\tau)\, d\tau \quad \text{при} \quad 1 < |x| < 1+t.$$

21.30. $$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty u_0(\xi) \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right)\right\} d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right\} d\xi\, d\tau.$$

21.31. $$\frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{g(t-\tau)}{\tau^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right\} d\tau.$$

21.32. $$\frac{x}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty u_0(\xi) \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right]\right\} d\xi.$$

21.33. $$-\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right\} d\tau.$$

21.34. $$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}}\, e^{-x^2/(4\tau)}\, d\tau +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^x \int\limits_0^t g(t-\tau)\, e^\tau \int\limits_{\sqrt{\tau}+x/(2\sqrt{\tau})}^\infty e^{-\alpha^2}\, d\alpha\, d\tau.$$

21.35. $$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty u_0(\xi) \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) -\right.$$
$$\left. - 2h \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t} - h\eta\right) d\eta \right\} d\xi.$$

21.36. $$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty u_0(\xi) \left\{ \cos\left[\frac{(x-\xi)^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right] - \cos\left[\frac{(x+\xi)^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right]\right\} d\xi +$$
$$+ \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{g(t-\tau)}{\tau^{3/2}} \cos\left(\frac{x^2}{4\tau} - \frac{\pi}{4}\right) d\tau.$$

21.37. $$\frac{2ka}{(b+ka)\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x/(2a\sqrt{t})}^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi \quad \text{при} \quad x < 0;$$
$$\frac{ka}{b+ka} \left\{ 1 + \frac{2b}{ka\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x/(2b\sqrt{t})} e^{-\xi^2}\, d\xi \right\} \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Дополнение

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Метод характеристик

Задача 1. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$y^2 u_{xy} + u_{yy} - \frac{2}{y} u_y = 0 \qquad (1)$$

в полуплоскости $y > 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=1} = 1 - x, \qquad u_y|_{y=1} = 3. \qquad (2)$$

Решение. Сначала найдем общее решение уравнения (1) в полуплоскости $y > 0$. Для этого приведем уравнение (1) к каноническому виду. Характеристическое уравнение $-y^2\,dx\,dy + (dx)^2 = 0$ распадается на два уравнения $dx = 0$, $-y^2 dy + dx = 0$, для которых $x = C$, $3x - y^3 = C$ являются общими интегралами. Следовательно, в уравнении (1) нужно сделать замену переменных $\xi = x$, $\eta = 3x - y^3$. Тогда $u_y = -3y^2 u_\eta$, $u_{xy} = -3y^2 u_{\xi\eta} - 9y^2 u_{\eta\eta}$, $u_{yy} = 9y^4 u_{\eta\eta} - 6y u_\eta$ и уравнение (1) приводится к каноническому виду $u_{\xi\eta} = 0$. Интегрируя это уравнение, находим $u = f(\xi) + g(\eta) = f(x) + g(3x - y^3)$.

Теперь воспользуемся начальными условиями (2):

$$f(x) + g(3x - 1) = 1 - x,$$

$$-3g'(3x - 1) = 3.$$

Решая эту систему, получаем $f(x) = 2x + C$, $g(x) = -x - C$. Следовательно, решением задачи (1), (2) является функция

$$u(x, y) = 2x + C + (-3x + y^3 - C), \quad \text{т.е.} \quad u(x, y) = y^3 - x.$$

Задача 2. Найти решение задачи Гурса для уравнения

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0 \qquad (1)$$

во всей плоскости, удовлетворяющее условиям

$$u|_{y=4x} = 5x + e^x, \qquad u|_{y=-x} = 1. \qquad (2)$$

Решение. Найдем общее решение уравнения (1). Характеристическое уравнение $(dy)^2 - 3dx\,dy - 4(dx)^2 = 0$ распадается на два уравнения $dy + dx = 0$, $dy - 4dx = 0$, для которых $y + x = C$,

$y - 4x = C$ являются общими интегралами. Заменой переменных $\xi = y + x$, $\eta = y - 4x$ уравнение (1) приводится к каноническому виду $u_{\xi\eta} - \dfrac{1}{5}\,u_\eta = 0$. Интегрируя это уравнение, находим

$$u = f(\eta)\,e^{-\xi/5} + g(\xi) = f(y-4x)\,e^{-(y+x)/5} + g(y+x).$$

Воспользуемся условиями (2):

$$\begin{aligned} f(0)\,e^{-x} + g(5x) &= 5x + e^x,\\ f(-5x) + g(0) &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Решая эту систему, получаем $f(x) = 1 - g(0)$, $g(x) = x + e^{x/5} - f(0)\,e^{-x/5}$. Следовательно,

$$u(x,y) = [1 - g(0)]\,e^{-(x+y)/5} + x + y + e^{(x+y)/5} - f(0)\,e^{-(x+y)/5}.$$

Учитывая, что из системы (3) при $x = 0$ следует равенство $f(0) + g(0) = 1$, окончательно находим решение задачи (1), (2): $u(x,y) = x + y + e^{(x+y)/5}$.

Задача 3. Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 6xt \tag{1}$$

в области $x > 0$, $t > 0$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{t=0} = x^3, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad u|_{x=0} = t^3. \tag{2}$$

Решение. Общее решение уравнения (1) имеет вид $u(x,t) = f(x+2t) + g(x-2t) + xt^3$. Из условий (2) получаем

$$\begin{aligned} &f(x) + g(x) = x^3, && x \ge 0,\\ &f'(x) - g'(x) = 0, && x \ge 0,\\ &f(2t) + g(-2t) = t^3, && t \ge 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Из первых двух уравнений этой системы находим $f(x) = \dfrac{1}{2}\,x^3 + C$, $g(x) = \dfrac{1}{2}\,x^3 - C$, $x \ge 0$. Подставляя найденную функцию $f(x)$ в третье уравнение системы (3), получаем $g(x) = \dfrac{3}{8}\,x^3 - C$, $x \le 0$. Следовательно, решением задачи (1), (2) является функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,(x+2t)^3 + \dfrac{1}{2}\,(x-2t)^3 + xt^3, & x \ge 2t,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\,(x+2t)^3 + \dfrac{3}{8}\,(x-2t)^3 + xt^3, & x < 2t. \end{cases}$$

Задача 4. Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 2 \tag{1}$$

в области $x > 0$, $t > 0$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{t=0} = x + x^3, \qquad u_t|_{t=0} = -9x^2, \qquad (u - u_x)|_{x=0} = t^2 - 1. \tag{2}$$

Решение. Общее решение уравнения (1) имеет вид $u(x,t) = f(x+3t) + g(x-3t) + t^2$. Из условий (2) получаем

$$\begin{aligned} &f(x) + g(x) = x + x^3, && x \geq 0,\\ &3f'(x) - 3g'(x) = -9x^2, && x \geq 0, \qquad (3)\\ &f(3t) + g(-3t) - f'(3t) - g'(-3t) = -1, && t \geq 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений этой системы находим $f(x) = \frac{1}{2}x + C$, $g(x) = \frac{1}{2}x + x^3 - C$, $x \geq 0$. Подставляя найденную функцию $f(x)$ в третье уравнение системы (3), получаем $g'(x) - g(x) = C + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$, откуда $g(x) = C_1 e^x + \frac{1}{2}x - C$, $x \leq 0$. Из условия непрерывности функции $g(x)$ при $x = 0$ находим $C_1 = 0$, т.е. $g(x) = \frac{1}{2}x - C$, $x \leq 0$. Следовательно, решением задачи (1), (2) является функция

$$u(x,t) = \begin{cases} (x-3t)^2 + x + t^2, & x \geq 3t,\\ x + t^2, & x < 3t. \end{cases}$$

§ 2. Метод разделения переменных

Задача 5. Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения гиперболического типа

$$u_{tt} - u_{xx} = 2t, \qquad 0 < x < 1, \qquad t > 0 \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = x \tag{2}$$

и граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \qquad u_x|_{x=1} = t. \tag{3}$$

Решение. Подберем сначала такую функцию w, чтобы она удовлетворяла граничным условиям (3). Пусть, например, $w = xt$. Тогда $w_{tt} - w_{xx} = 0$, $w|_{t=0} = 0$, $w_t|_{t=0} = x$. Следовательно, функция

$$v(x,t) = u(x,t) - xt \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению

$$v_{tt} - v_{xx} = 2t, \tag{5}$$

однородным граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \qquad v_x|_{x=1} = 0 \tag{6}$$

и нулевым начальным условиям

$$v|_{t=0} = 0, \qquad v_t|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения $v_{tt} - v_{xx} = 0$ при условиях (6), (7), положим $v(x,t) = X(x)\,T(t)$. Приходим к следующей задаче Штурма–Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda^2 X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X'(1) = 0.$$

Решая эту задачу, находим ее собственные значения $\lambda_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и соответствующие собственные функции

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x. \tag{8}$$

Решение задачи (5)–(7) ищем в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \lambda_n x, \tag{9}$$

где

$$T_n(0) = 0, \qquad T_n'(0) = 0. \tag{10}$$

Подставляя $v(x,t)$ из (9) в (5), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t)) \sin \lambda_n x = 2t. \tag{11}$$

Для нахождения функций $T_n(t)$ разложим функцию 1 в ряд Фурье по системе функций (8) на интервале $(0, 1)$:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x. \tag{12}$$

Так как

$$\int_0^1 \sin^2 \lambda_n x \, dx = \frac{1}{2}, \qquad \text{то} \qquad a_n = \int_0^1 \sin \lambda_n x \, dx = \frac{2}{\lambda_n},$$

и из (11) и (12) получаем

$$T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n}. \tag{13}$$

Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n^3} + A \sin \lambda_n t + B \cos \lambda_n t.$$

Используя условие (10), получаем $B = 0$, $A = -4/\lambda_n^4$. Подставляя

$$T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n^3} - \frac{4}{\lambda_n^4} \sin \lambda_n t$$

в формулу (9) и используя (4), находим искомое решение задачи (1)–(3):

$$u = xt + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} (\lambda_n t - \sin \lambda_n t) \sin \lambda_n x,$$

где $\lambda_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$.

Задача 6. Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения параболического типа

$$u_t - u_{xx} = t(x+1), \qquad 0 < x < 1, \qquad t > 0 \tag{1}$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

и граничных условиях

$$u_x|_{x=0} = t^2, \qquad u|_{x=1} = t^2. \tag{3}$$

Р е ш е н и е. Функция $w = xt^2$ удовлетворяет краевым условиям (3), уравнению $w_t - w_{xx} = 2xt$ и начальному условию $w|_{t=0} = 0$. Поэтому функция

$$v = u - xt^2 \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению

$$v_t - v_{xx} = (1-x)\,t \tag{5}$$

и условиям

$$v|_{t=0} = 0, \qquad v_x|_{x=0} = 0, \qquad v|_{x=1} = 0. \tag{6}$$

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения $v_t - v_{xx} = 0$ при условиях (6), положим $v = X(x)\,T(t)$. Получим задачу Штурма–Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \qquad X'(0) = 0, \qquad X(1) = 0,$$

собственными значениями которой являются числа $\lambda_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а собственными функциями — функции

$$X_n(x) = \cos\lambda_n x. \tag{7}$$

Решение задачи (5), (6) ищем в виде

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\lambda_n x. \tag{8}$$

Подставляя $v(x,t)$ из (8) в уравнение (5), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t))\cos\lambda_n x = (1-x)\,t. \tag{9}$$

Разложим функцию $1-x$ в ряд Фурье по системе функций (7) на интервале $(0,1)$:

$$1 - x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos\lambda_n x. \tag{10}$$

Так как

$$a_n = 2\int_0^1 (1-x)\,\cos\lambda_n x\,dx = \frac{2}{\lambda_n^2},$$

то из (9) и (10) находим

$$T_n'(t) + \lambda_n^2 T(t) = \frac{2t}{\lambda_n^2}. \tag{11}$$

Решением уравнения (11) при условии $T_n(0) = 0$ является функция

$$T_n(t) = 2\lambda_n^{-6}\bigl(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2 t - 1\bigr). \tag{12}$$

Из (4), (8) и (12) находим решение задачи (1)–(3):

$$u = xt^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-6}\bigl(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2 t - 1\bigr)\cos\lambda_n x,$$

где $\lambda_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$.

§ 3. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Задача 7. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + y \cos x)\, \varphi(y)\, dy + a \sin x + bx \qquad (1)$$

при всех допустимых значениях a, b, λ.

Р е ш е н и е. Обозначим

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \cdot \varphi(y)\, dy, \qquad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} y\varphi(y)\, dy; \qquad (2)$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$\varphi(x) = \lambda C_1 x + \lambda C_2 \cos x + a \sin x + bx. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получаем

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y\, (\lambda C_1 y + \lambda C_2 \cos y + a \sin y + by)\, dy,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} y\, (\lambda C_1 y + \lambda C_2 \cos y + a \sin y + by)\, dy,$$

откуда находим

$$\begin{aligned} C_1 &= \lambda C_1 \cdot 2\pi + a\pi + 2\pi b, \\ C_2 &= \lambda C_1 \frac{2\pi^3}{3} + a \cdot 2\pi + b\, \frac{2\pi^3}{3}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Систему (4) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} C_1(1 - 2\pi\lambda) &= a\pi + 2\pi b, \\ -\lambda \frac{2\pi^3}{3} C_1 + C_2 &= 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Определитель $\Delta(\lambda)$ системы (5) равен $\Delta(\lambda) = 1 - 2\pi\lambda$. Если $\Delta(\lambda) \neq 0$, т. е. $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$, то система (5) имеет единственное решение при любых a и b:

$$C_1 = \frac{a\pi + 2\pi b}{1 - 2\pi\lambda}, \qquad C_2 = \frac{2\pi^3 \lambda (a\pi + 2\pi b)}{3(1 - 2\pi\lambda)} + 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}. \qquad (6)$$

Подставляя C_1 и C_2 из (6) в (3), найдем при $x \neq \frac{1}{2\pi}$ единственное решение интегрального уравнения (1).

Пусть $\lambda = \frac{1}{2\pi}$, тогда система (5) примет вид

$$\begin{aligned} C_1 \cdot 0 &= (a + 2b)\, \pi, \\ -\frac{\pi^2}{3} C_1 + C_2 &= 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Система (7) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$a + 2b = 0. \tag{8}$$

Условие (8) является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1) при $\lambda = \frac{1}{2\pi}$. Здесь $\frac{1}{2\pi}$ — характеристическое число интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + y \cos x)\, \varphi(y)\, dy.$$

Общее решение однородной линейной системы

$$C_1 \cdot 0 = 0,$$
$$-\frac{\pi^2}{3} C_1 + C_2 = 0,$$

соответствующей системе (7), имеет вид

$$\widetilde{C}_1 = C, \qquad \widetilde{C}_2 = \frac{\pi^2}{3} C,$$

где C — произвольная постоянная.

В качестве частного решения системы (7) можно взять

$$C_1^0 = 0, \qquad C_2^0 = 2a\pi - \frac{a\pi^3}{3}.$$

Поэтому общее решение системы (7) имеет вид

$$C_1 = C, \qquad C_2 = \frac{\pi^2}{3} C + a\pi\Big(2 - \frac{\pi^2}{3}\Big). \tag{9}$$

Подставляя C_1 и C_2 из (9) в (3), найдем все решения уравнения (1) при $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ при условии (8). Эти решения можно записать формулой

$$\varphi(x) = \Big(A - \frac{a}{2}\Big)\, x + \left[\frac{A\pi^2}{2} + a\Big(1 - \frac{\pi^2}{6}\Big)\right] \cos x + a \sin x,$$

где A — произвольная постоянная.

§ 4. Вариационные задачи

Задача 8. Найти минимум функционала

$$I(v) = \int_G \left[|\operatorname{grad} v|^2 + \frac{4v}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right] dx_1\, dx_2 \tag{1}$$

среди функций, принадлежащих классу $\mathring{C}^1(G)$, где $G = \{1 < |x| < 3\}$, $x = (x_1, x_2)$.

Р е ш е н и е. Известно, что существует функция $v_0(x_1, x_2) \in \mathring{C}^1(G)$, дающая минимум функционалу (1). Функция $v_0(x)$ является решением краевой задачи

$$\Delta u = \frac{2}{r}, \qquad u\big|_{|x|=1} = u\big|_{|x|=3} = 0;$$

записав лапласиан в полярных координатах, получим

$$(ru_r)' = 2, \qquad u\big|_{|x|=1} = u\big|_{|x|=3} = 0. \tag{2}$$

Решением краевой задачи (2) является функция $v_0 = 2(r-1) - \dfrac{4}{\ln 3} \ln r$. Так как v_0 не зависит от φ, то

$$|\operatorname{grad} v_0|^2 = \left|\frac{\partial v_0}{\partial r}\right|^2 = \left(2 - \frac{4}{\ln 3}\,\frac{1}{r}\right)^2.$$

Тогда

$$I(v_0) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^3 \left\{\left(2 - \frac{4}{\ln 3}\,\frac{1}{r}\right)^2 + \left[8(r-1) - \frac{16}{\ln 3}\ln r\right]\frac{1}{r}\right\} r\,dr\,d\varphi =$$

$$= 2\pi \int\limits_1^3 \left(4r - \frac{16}{\ln 3} + \frac{16}{\ln^2 3}\,\frac{1}{r} + 8r - 8 - \frac{16}{\ln 3}\ln r\right) dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_1^3 \left(12r - \frac{16}{\ln 3} - 8 + \frac{16}{\ln^2 3}\,\frac{1}{r} - \frac{16}{\ln 3}\ln r\right) dr = 32\pi\left(\frac{1}{\ln 3} - 1\right).$$

Итак, минимум функционала (1) равен $32\pi\left(\dfrac{1}{\ln 3} - 1\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука, 1974.
2. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Изд. 8-е. — М.: Физматлит, 2000.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — Изд. 5-е. — М.: Наука, 1985.
4. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2000.
5. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — Изд. 2-е. — М.: Наука, 1983.
6. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. — Изд. 5-е. — М.: Физматлит, 2000.
7. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — М.–СПб.: Физматлит. Невский Диалект. Лаборатория Базовых Знаний, 2000.
8. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Изд. 3-е. — М.: Наука, 1989.

Учебное издание

ВАШАРИН Анатолий Алексеевич, ВЛАДИМИРОВ Василий Сергеевич,
КАРИМОВА Хуршит Хусниевна, МИХАЙЛОВ Валентин Петрович,
СИДОРОВ Юрий Викторович, ШАБУНИН Михаил Иванович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Под редакцией В. С. Владимирова

Издание третье, исправленное

Редактор *Е. Ю. Ходан*
Корректор *Л. Т. Варьяш*
Оригинал-макет *Л. К. Попковой*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 22.02.2001.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 18. Уч.-изд. л. 19,8. Тираж 5000 экз. Заказ № 1389

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная ул., 90

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099 Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0072-6

9785922100724