

**Ф.Г. Гаращенко, В.Т. Матвієнко, В.В. Пічкур, І.І. Харченко**

**Задачі з курсу  
„Диференціальні рівняння”**

для студентів факультету кібернетики  
за напрямком підготовки  
„Прикладна математика”  
(Спеціальність – інформатика)

**Заняття 1.Тема: Побудова диференціальних рівнянь за заданим параметричним сімейством кривих.**

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

Знайти диференціальні рівняння сімейств кривих та дати геометричне тлумачення результатів

1.  $x + y^2 = C$ .    2.  $y = e^{Cx}$ .    3.  $y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$ .

4. Написати диференціальні рівняння всіх кіл на площині.

5.  $(x - C)^2 + y^2 = r^2$ .    6.  $y - C = e^{\frac{x}{C}}$ . 7.  $y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^3$ .

8. Знайти диференціальні рівняння всіх кіл на площині, які проходять через початок координат:  $x^2 + y^2 - 2C_1 x - 2C_2 y = 0$ .

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

Знайти диференціальні рівняння сімейств кривих та дати геометричне тлумачення результатів

1.  $x^2 + y^2 - Cx = 0$ .    2.  $y = \frac{C}{x}$ .    3.  $y = \sin(x + C)$ .

4.  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ .    5.  $y = \operatorname{tg} Cx$ .    6.  $\operatorname{tg}(x + C) - y = 0$ .

7. Знайти диференціальне рівняння всіх прямих на площині.

8. Утворити диференціальне рівняння прямих, що проходять через задану точку з координатами  $(a; b)$ .

**Заняття 2.Тема: Поле напрямів. Інтегральні криві.**

Побудувати поле напрямів та накреслити схематично поведінку інтегральних кривих наступних диференціальних рівнянь.

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

1.  $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$ .    2.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ .    3.  $\frac{dy}{dx} = y - x^2$ .

4.  $\frac{dy}{dx} = 2y - x$ .    5.  $\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x - y$ .

6.  $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ . Побудувати ізокліни  $y' = 0$ ,  $y' = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $y' = 1$ ,  $y' = \sqrt{3}$ .

7.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y}$ .    8.  $\frac{dy}{dx} = -2xy$ .

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

1.  $\frac{dy}{dx} = y + x$ .    2.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ .    3.  $\frac{dy}{dx} = y + x^2$ .

4.  $\frac{dy}{dx} = y - 3x$ .    5.  $\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2$ .

6.  $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$ . Побудувати ізокліни  $y' = 0$ ,  $y' = \pm 1$ ,  $y' = \pm 2$ ,  $y' = \pm 3$ .

$$7. \frac{dy}{dx} = \frac{y-3x}{x+3y}.$$

$$8. y \left( \frac{dy}{dx} + x \right) = 1.$$

**Заняття 3.** Тема: Диференціальні рівняння 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Рівняння з відокремлюваними змінними.

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

$$1. (y^2 - 1)(x + 2)dx - x^2 y dy = 0.$$

$$2. \sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0.$$

$$3. xy - (x^2 + 1)y' = 0; \quad M(0;1). \quad 4. \frac{dy}{dx} + \frac{x^3(y-1)^3}{(x+1)y} = 0.$$

$$5. x^2 dx + y^3 e^{x+y} dy = 0. \quad 6. y^{-3} \ln \ln x dx + x e^{y^2} dy = 0.$$

$$7. \frac{e^x - 1}{e^y} = e^{e^y} (1 + e^x) y'.$$

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

$$1. 2x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0; \quad M(1;0).$$

$$2. \frac{dy}{dx} = e^{x+y}; \quad M(0;0).$$

$$3. y dx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dy = 0; \quad M(1;1). \quad 4. y' = \frac{\sin(\ln x)}{\cos(\ln y)}.$$

$$5. \left( \frac{\cos x}{\ln y} \right)^2 dx + \frac{y}{x^2} dy = 0.$$

$$6. \frac{1 - \ln^2 y}{x \ln y} dx + \frac{\sqrt{3 - \ln^2 x}}{y} dy = 0.$$

**Заняття 4.** Тема: Інтегровані типи диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Однорідні рівняння та зведені до них. Лінійні рівняння.

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

$$1. (y + \sqrt{x^2 - y^2}) dx - x dy = 0.$$

$$2. 2xy dx + (y^2 - x^2) dy = 0; \quad M(1;1).$$

$$3. (2x + 3y) dx + (x + 2y) dy = 0.$$

$$4. xy' - x \cos \frac{y}{x} - y = 0.$$

$$5. (y^3 + 2x^2 y) dx - (2x^3 + 2xy^2) dy = 0.$$

$$6. (6x + y - 1) dx + (4x + y - 2) dy = 0.$$

$$7. (x + y + 1) dx + (2x + 2y - 1) dy = 0.$$

$$8. y(x^2 y^2 + 1) dx + (x^2 y^2 - 1) x dy = 0.$$

$$9. xy dx + (y^4 - x^2) dy = 0.$$

$$10. \frac{dy}{dx} - y = 2x - x^2.$$

$$11. \frac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x \cos x.$$

$$12. y'(x + \operatorname{ctg} y) = 1.$$

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

$$1. xy' = y(1 + \ln y - \ln x).$$

2.  $xdy - (\sqrt{x^2 + y^2} + y)dx = 0.$
3.  $(xye^{\frac{x}{y}} + y^2)dx - x^2e^{\frac{x}{y}}dy = 0.$
4.  $(6xy + 5y^2)dx + (3x^2 + 10xy - y^2)dy = 0.$
5.  $(x^3 + 3xy^2)dx + (2y^3 + 3x^2y)dy = 0.$
6.  $(x - 2)dx + (y - 2x + 1)dy = 0.$
7.  $(x + 2y + 1)dx + (2x + 4y + 3)dy = 0.$
8.  $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0.$
9.  $(xy^2 - y)dx - (x^3y^2 - 3x^2y + 3x)dy = 0.$
10.  $\frac{dy}{dx} - y = x - 1; M(0;1).$
11.  $y' + y = \sin x + \cos x.$
12.  $y'(x + \ln y) = 1.$

**Заняття 5.** Тема: *Інтегровані типи диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Лінійні неоднорідні рівняння. Метод варіації довільної сталої. Рівняння типу Бернуллі.*

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

1.  $\frac{dy}{dx} - 2xy = 1.$
2.  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x^2}.$
3.  $xy' + y = x \cos x; M(\pi/2;1).$
4.  $y' \sin x - y = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$
5.  $x \cos x \frac{dy}{dx} + y(x \sin x + \cos x) = 1.$
6.  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + (2 - x) \ln y = x(e^{2x} - e^{-\frac{x^2}{2}}).$
7.  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$
8.  $\cos x \frac{dy}{dx} - y \sin x = y^4.$

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

1.  $x \ln x \frac{dy}{dx} - y = x(\ln x - 1).$
2.  $y' + y \tan x = x \cos^2 x; M(0;1).$
3.  $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0; M(0;-1).$
4.  $(y - y^2)dx + (2xy^2 - x - y^2)dy = 0.$
5.  $dx + (x - e^{-y} \sec^2 y)dy = 0; M(2;0).$
6.  $\sec^2 y \frac{dy}{dx} + x \tan y = x.$
7.  $y' + \frac{xy}{1 - x^2} = x\sqrt{y}.$
8.  $3\frac{dy}{dx} - y \sin x + 3y^4 \sin x = 0.$
9.  $xy' + y = xy^2 \ln x.$

**Заняття 6.** Тема: Рівняння Рікатті.

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

Знайти розв'язки рівнянь, підібравши спочатку частинні розв'язки

1.  $x^2 \frac{dy}{dx} - x^2 y^2 + 5xy - 3 = 0$ .      2.  $\frac{dy}{dx} + xy^2 + \frac{y}{x} - x^3 - 2 = 0$ .

Знайти загальні розв'язки рівнянь

3.  $(x - x^4)y' - x^2 - y + 2xy^2 = 0$ ,  $y_1(x) = x^2$ .

4.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + x \cos x - 1 + \cos 2x$ ,  $y_1 = x \sin x$ .

5.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} + \left(2 + \frac{1}{x}\right)y - \ell^{4x}$ ,  $y_1 = x\ell^{2x}$ .

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

1.  $x^3 \frac{dy}{dx} - y^2 - x^2 y + x^2 = 0$ .      2.  $\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 + 1$ .

3.  $y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$ ,  $y_1(x) = -\frac{1}{x}$ .

4.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - x \sin x - \cos^2 x$ ,  $y_1 = x \cos x$ .

5.  $\frac{dy}{dx} = \frac{\ell^{-x}}{\sin x} y^2 + y + \ell^x (\cos x - \sin x)$ ,  $y_1 = \ell^x \sin x$ .

**Заняття 7.** Тема: Рівняння в повних диференціалах.

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

Знайти розв'язки рівнянь в повних диференціалах

1.  $(\ell^y \cos x + \ell^x \cos y)dx + (\ell^y \sin x - \ell^x \sin y)dy = 0$ .

2.  $\left(2x \ln(x+y) + \frac{x^2+y}{x+y}\right)dx + \left(\ln(x+y) + \frac{x^2+y}{x+y}\right)dy = 0$ .

3.  $(2x + x^2 - y^2 x)dx - (2y + x^2 y - y^2)dy = 0$ .

4.  $(2x \sin y - y^2 \sin x)dx + (x^2 \cos y + 2y \cos x + 1)dy = 0$ .

5.  $(6xy + x^2 + 3)y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0$ .

6.  $\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$ .      7.  $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$ .

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

Знайти розв'язки рівнянь в повних диференціалах

1.  $\ell^{-y} dx - (2y + x\ell^{-y})dy = 0$ .

2.  $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + xy}{y^3} dy = 0$ .

3.  $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1} dy = 0.$
4.  $(x \ln y - x^2 + \cos y)dy + (x^2 + y \ln y - y - 2xy)dx = 0.$
5.  $\frac{2x - y}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y + x}{x^2 + y^2} dy = 0.$
6.  $(2x \cos y - y^2 \sin x)dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)dy = 0.$
7.  $(xe^y + e^x)dy + (e^y + ye^x)dx = 0.$

**Заняття 8.** Тема: Інтегрувальний множник. Випадки знаходження інтегрувального множника.

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

Розв'язати диференціальні рівняння методом інтегрувального множника, знаючи, що вони мають  $\mu = f(x)$  або  $\mu = f(y)$

1.  $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0.$
2.  $y^2(x - 3y)dx + (1 - 3xy^2)dy = 0.$
3.  $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0.$

Зінтегрувати рівняння за допомогою множників  $\mu(x + y)$ ,  $\mu(xy)$  або  $\mu(x - y)$

4.  $\left(y - \frac{ay}{x} + x\right)dx + ady = 0.$
5.  $y^2dx + (xy - 1)dy = 0.$

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

Розв'язати диференціальні рівняння методом інтегрувального множника, знаючи, що вони мають  $\mu = f(x)$  або  $\mu = f(y)$

1.  $(1 + x^2y)dx + x^2(x + y)dy = 0.$
2.  $(2xy + ax)dx + dy = 0.$
3.  $dx + (x + e^{-y}y^2)dy = 0.$

Зінтегрувати рівняння за допомогою множників  $\mu = (x + y)$ ,  $\mu = f(xy)$  або  $\mu = (x - y)$

4.  $dx + x \operatorname{ctg}(x + y)(dx + dy) = 0.$
5.  $(2x^2y + x)dy + (y + 2xy^2 - x^2y^3)dx = 0.$

**Заняття 9.** Тема: Диференціальні рівняння 1-го порядку, не розв'язані відносно похідної. Метод параметризації

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

Знайти загальні розв'язки і загальні інтеграли рівнянь

1.  $x^3y'^2 + x^2yy' + a = 0.$
2.  $xy'^2 - 2y' - y = 0.$
3.  $y = 2xy' + \sqrt{1 + y'^2}.$
4.  $x\sqrt{1 + y'^2} - y' = 0.$
5.  $x = y' \sin y'$
6.  $3y'^5 - yy' + 1 = 0.$
7.  $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0.$
8.  $y'^3 - 1 = 0.$
9.  $x(2 + y'^2) = 1.$
10.  $y = y' \ln y'.$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти загальні розв'язки і загальні інтеграли рівнянь

- $9yy'^2 + 4x^3y' - 4x^2y = 0.$
- $xy'^2 + yy' + a = 0.$
- $y = xy' + \sin y'.$
- $x(1 + y'^2) = 1.$
- $y = y' \sin y' + \cos y'.$
- $y - y' = \sqrt{1 + y'^2}.$
- $y'^2 + xy' - x^2 = 0.$
- $y'^2 + 2y' + 1 = 0.$
- $x = ay' + b\sqrt{1 + y'^2}.$
- $x = y \left( \frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'} \right).$

**Заняття 10.** Тема: Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними

Зінтегрувати диференціальні рівняння та відшукати частинні розв'язки там, де задані початкові умови:

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

- $y''' = 0$ , при  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y'_0 = 0$ ,  $y''_0 = 2.$
- $y''' = x + \cos x.$
- $xy^{IV} + y''' = e^{2x}.$
- $y''' - y'^2 = 0.$
- $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$
- $2yy'' - y'^2 = 1.$
- $x^2y''' - y''^2 = 0.$
- $y'' = xe^x$ , при  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y'_0 = 0.$
- $y'' + y'^2 = 2e^{-y}.$
- $x^2yy'' = (y - xy')^2.$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

- $y^V = x - 1.$
- $y''' = \frac{\ln x}{x^2}.$
- $y'' + \ln y'' - x = 0.$
- $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$
- $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0.$
- $y'''y - 3y''^2 = 0.$
- $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x).$
- $yy'' - y'^2 = y'.$
- $xyy'' + xy' = 2yy'.$
- $y''' - 3yy' = 0.$

**Заняття 11.** Тема: Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних рівнянь, а також частинні там, де задані початкові умови:

- $y'' + 5y' + 4y = 0.$
- $y'' - a^2y = 0.$
- $y''' + 8y = 0.$
- $y^{(IV)} + 2y'' + y = 0.$
- $y^V - 10y''' + 9y' = 0.$
- $y^{(6)} + 64y = 0.$
- $y'' - 5y' + 4y = 0$ , при  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y'_0 = 0.$
- $y'' + y = 0$ , при  $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
- $y^{(IV)} + a^4y = 0.$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1.  $y'' - 7y' + 10y = 0$ .
2.  $y'' + 9y = 0$ .
3.  $y'' + 3y' = 0$ .
4.  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .
5.  $2y'' + y' - y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 0$ .
6.  $y^{IV} - a^4 y = 0$ .
7.  $y^V - 4y^{IV} = 0$ .
8.  $y^{VI} + 2y^V = 0$ .
9.  $y'' - 4y' + 29y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 7$

**Заняття 12.** Тема: Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі змінними коефіцієнтами. Рівняння, що зводяться до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. Функції  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  справджують деяке однорідне лінійне диференціальне рівняння. Переконайтеся, що вони утворюють фундаментальну систему, та скласти згадане рівняння.

Розв'язати лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами.

2.  $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ,  $y_1(x) = x$ .

3.  $y'' - (x^2 + 1)y = 0$ ,  $y_1(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ .

4.  $xy'' + 2y' + xy = 0$ ,  $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$  ( $x \neq 0$ ).

Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння (найменшого можливого порядку), яке має такі частинні розв'язки.

5.  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = \cos x$ .

6.  $y_1 = xe^{-x}$ ,  $y_2 = e^{-x}$ .

Розв'язати рівняння.

7.  $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6y'}{x^2} - \frac{6y}{x^3} = \sqrt{x}$ .

8.  $x^3y''' + xy' - y = 0$ .

9.  $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ .

10.  $x^2y'' + xy' + y = 0$ .

11.  $(2x + 3)^2 y'' + (2x + 3)y' - y = 0$ .

12.  $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$ .

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. Побудувати диференціальне рівняння, що має таку фундаментальну систему функції 1 та  $\cos 2x$ .

Розв'язати лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами.

2.  $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$ ;  $y_1(x) = e^x$ .

3.  $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ ;  $y_1(x) = \sqrt{1 + x^2}$ .

4.  $y'' - xy' + 2y = 0$ ;  $y_1(x) = x^2 - 1$ .

5.  $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ .

6.  $x^2y''' - 2y' = 0$ .

7.  $(x + 1)^3 y''' - 3(x + 1)^2 y'' + 4(x + 1)y' - 4y = 0$ .

8.  $x^3y''' - xy' - 3y = 0$ .

9.  $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$

10.  $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ .

11.  $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$ .



12.  $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$ .

**Заняття 13, 14.** Тема: *Методи Лагранжа, Коші і невизначених коефіцієнтів для розв'язування неоднорідних рівнянь вищих порядків*

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

1.  $y'' - y = x^2 + 1$  (НК).
2.  $y''' - 4y' = x^2$  (Л).
3.  $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$  (НК).
4.  $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}$  (НК).
5.  $y'' + y = \operatorname{ctgx}$  (К).
6.  $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^2}$  (Л).
7.  $y'' - y = x^2 - x + 1$  (НК).
8.  $y'' + 4y = 4x \cos 2x$  (Л).
9.  $y'' + 2y' - 3y = 2x - e^{3x}$  (НК).
10.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$  (К).

**Рекомендовані варіанти домашнього завдання:**

1.  $y'' + y = \operatorname{tgx}$  (К).
2.  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$  (Л).
3.  $y'' - y = \frac{1}{x}$  (К).
4.  $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$  (Л).
5.  $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$  (НК).
6.  $y''' - 3y'' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$  (НК).
7.  $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x$  (НК).
8.  $y^V + y''' = x^2 - 1$  (НК).
9.  $y^{IV} - y = xe^x + \cos x$  (НК).
10.  $y'' + \omega^2 y = \frac{1}{x+1}$ ;  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = -3$  (Л).

**Заняття 15.** Тема: *Крайові задачі. Задача Штурма – Ліувілля. Побудова функції Гріна.*

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

Яка з крайових задач має розв'язки:

1.  $y'' - y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(\pi/2) = 1$ .
2.  $y'' + y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(2\pi) = 1$ .

Знайти власні значення і власні функції:

3.  $y'' = \lambda y$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y(b) = 0$ .
4.  $y'' = \lambda y$ ;  $y(0) = y'(b) = 0$ .

Побудувати функції Гріна для крайових задач:

5.  $y'' = f(x)$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .
6.  $y'' + y = f(x)$ ;  $y(0) = y(\pi)$ ,  $y'(0) = y'(\pi)$ .

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

1.  $y'' + y = 1$ ;  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ .
2.  $y'' + y = 1$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi/2) = 0$ .
3.  $y'' + y = f(x)$ ;  $y'(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$ .
4.  $y'' = \lambda y$ ;  $y'(0) = 0$ ,  $y(l) = 0$ .

5.  $x^2 y'' = \lambda y$ ;  $y(1) = 0$ ,  $y(a) = 0$ .

**Заняття 16.** Тема: Розв'язування однорідних лінійних систем з постійними коефіцієнтами.

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

$$\begin{array}{lll}
 1. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases} & 2. \begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases} & 3. \begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases} \\
 4. \begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y - z, \lambda_2 = 2, \\ \dot{z} = 2x - y, \lambda_3 = -1. \end{cases} & 5. \begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y, \lambda_2 = 1 + 2i \\ \dot{z} = 3x + z, \lambda_3 = 1 - 2i \end{cases} & 6. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \lambda_1 = 2, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \lambda_2 = 3, \\ \dot{z} = x - y + 2z, \lambda_3 = 3. \end{cases} \\
 7. \begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \lambda_1 = 1 \\ \dot{y} = x + y - z, \lambda_2 = 1 \\ \dot{z} = 2z - y, \lambda_3 = 2. \end{cases} & & 
 \end{array}$$

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

$$\begin{array}{lll}
 1. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases} & 2. \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases} & 3. \begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases} \\
 4. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \lambda_1 = 0, \\ \dot{y} = y - x + z, \lambda_2 = 2, \\ \dot{z} = x - z, \lambda_3 = -1. \end{cases} & 5. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \lambda_1 = 2, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \lambda_2 = 3 + i \\ \dot{z} = 2y + 3z - x, \lambda_3 = 3 - i. \end{cases} \\
 6. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \lambda_1 = 0, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \lambda_2 = 1, \\ \dot{z} = y + 2z - x, \lambda_3 = 1. \end{cases} & 7. \begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = 4x + y, \lambda_2 = -1, \\ \dot{z} = 2x + y - z, \lambda_3 = -1. \end{cases}
 \end{array}$$

**Заняття 17,18.** Тема: Методи розв'язування неоднорідних систем з постійним коефіцієнтами. Застосування методу невизначених коефіцієнтів.

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

$$\begin{array}{llll}
 1. \begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases} & 2. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases} & 3. \begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases} & 4. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18. \end{cases} \\
 5. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases} & 6. \begin{cases} \dot{x} = y + tg^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + t g t. \end{cases} & 7. \begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases} & 8. \begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}
 \end{array}$$

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{cases} \dot{x} = y - 5 \cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases} & 2. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}
 \end{array}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$$

**Заняття 19,20.** Тема: Системи в симетричній формі. Розв'язування лінійних рівнянь першого порядку з частинними похідними. Метод характеристик. Задача Коші.

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

$$1. \frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}. \quad 2. \frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}.$$

$$3. y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad 4. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$5. y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x - y. \quad 6. (z-y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

Знайти розв'язки рівняння, яке задовольняє вказаним умовам.

$$7. x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = 2x \text{ при } y = 1.$$

Знайти поверхню, яка задовольняє даному рівнянню і проходить через задану лінію.

$$8. y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x; \quad x = 0, \quad z = y^2.$$

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

$$1. \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}. \quad 2. \frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}. \quad 3. (x+2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$4. (x-z) \frac{\partial u}{\partial x} + (y-z) \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad 5. e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x. \quad 6. xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x-2z) \frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

Знайти розв'язок рівняння, яке задовольняє вказаним умовам.

$$7. \frac{\partial z}{\partial x} - (2e^x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = y \text{ при } x = 0.$$

Знайти поверхню, яка задовольняє даному рівнянню і проходить через задану лінію.

$$8. x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2; \quad y = 1, \quad z = x^2.$$

**Заняття 21.** Тема: Особливі точки диференціальних рівнянь на площині.

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

Дослідити особливі точки для поданих нижче рівнянь та систем.

Дати схематичний малюнок розміщення інтегральних кривих на площині  $(x, y)$ .

$$1. y' = \frac{2x+y}{3x+4y}. \quad 2. y' = \frac{y-2x}{2y-3x}. \quad 3. y' = \frac{y}{x}.$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 5y. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$$

Знайти та дослідити особливі точки систем.

$$6. y' = \frac{2y - x}{3x + 6}. \quad 7. y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Дослідити особливі точки для поданих нижче рівнянь та систем.

Дати схематичний малюнок розміщення інтегральних кривих на площині  $(x, y)$ .

$$1. y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}. \quad 2. y' = \frac{4y - 2x}{x + y}. \quad 3. y' = \frac{4x - y}{3x - 2y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$$

$$6. y' = \frac{2x + y}{x - 2y - 5}. \quad 7. y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

**Заняття 22,23.** Тема: *Методи Ляпунова. Побудова функцій Ляпунова для лінійних стаціонарних систем. Критерій Гурвіца*

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. Дослідити стійкість розв'язків з вказаними початковими умовами  $\dot{x} = 4x - t^2x$ ,  $x(0) = 0$ .

2. Дослідити стійкість нульового розв'язку, якщо відомо загальний розв'язок системи  $x = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}$ .

3. За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$$

4. При яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x \\ \dot{y} = ax + by \end{cases}.$$

5. Дослідити, при яких значеннях параметрів  $a$  буде асимптотично стійким нульовий розв'язок

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$

6. Знайти стан рівноваги даної системи і дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$$

Дослідити стійкість користуючись відомими критеріями

7.  $y''' + y'' + y' + 2y = 0.$

8.  $y^{IV} + 3,1y''' + 5,2y'' + 9,8y' + 5,8y = 0.$

9. Дослідити, при яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  нульовий розв'язок буде асимптотично стійким

$$y''' + ay'' + by' + 2y = 0.$$

10. Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^T Bx, \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \text{ для системи}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 \end{cases} \quad (*) \text{ таким чином, що } \left( \frac{dV}{dt} \right)_{(*)} = -x_1^2 - x_2^2.$$

11. При яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(\ell + ax) - \ell^y \\ \dot{y} = bx + tgy \end{cases}.$$

12. Знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на стійкість системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x) \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases}.$$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. Дослідити стійкість розв'язків з вказаними початковими умовами

$$3(t-1)\dot{x} = x, \quad x(2) = 0.$$

За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок

$$2. \begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

4. Дослідити, при яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  буде асимптотично стійким нульовий розв'язок

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$$

5. Знайти стан рівноваги даної системи і дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

Дослідити стійкість користуючись відомими критеріями

6.  $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$

7.  $y^V + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$

8. При яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  нульовий розв'язок є асимптотично стійким

$$y^{IV} + y''' + ay'' + y' + by = 0.$$

9. Дослідити, при яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  нульовий розв'язок буде асимптотично стійким  $y''' + 3y'' + ay' + by = 0.$

10. Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної

форми  $V(x) = x^T Bx$ ,  $x = (x_1, x_2)^T$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ , для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2 \end{cases} \quad (**) \text{ таким чином, що } \left( \frac{dV}{dt} \right)_{(**)} = -x_1^2 - x_2^2.$$

**11.** При яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x \\ \dot{y} = ax + by \end{cases}.$$

**12.** Знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на стійкість системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin(x + y) \end{cases}.$$

**Заняття 24,25.** Тема: *Варіаційне числення.*

**Рекомендовані приклади для аудиторної роботи**

Знайти екстремалі таких функціоналів

$$1. I[y(x)] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx; \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$2. I[y(x)] = \int_{-1}^1 (y'^2 - 2xy) dx; \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

$$3. I[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y''^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = -sh1.$$

$$4. I[y(x)] = \int_0^1 (y + y'') dx; \quad y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad y'(0) = y'_0, \quad y'(1) = y'_1.$$

$$5. I[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y''^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = sh1, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = ch1.$$

$$6. I[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/4} (2z - 4y^2 + y'^2 - z'^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$7. I[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 - 2yz) dx; \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Дослідити на екстремум функціонали

$$8. I[y(x)] = \int_0^1 (y'^3 + y') dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$$

$$9. I[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 2.$$

**Рекомендовані приклади для домашнього завдання**

Знайти екстремалі таких функціоналів

$$1. I[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{y(1+y'^2)} dx; \quad y(0) = y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$2. I[y(x)] = \int_{-1}^1 (y'^2 - 2xy) dx; \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

$$3. I[y(x)] = \int_{-1}^0 (240y - y'''^2) dx; \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0, \\ y'(-1) = -4.5, \quad y'(0) = 0, \quad y''(-1) = 16, \quad y''(0) = 0.$$

$$4. I[y(x)] = \int_a^b (y'^2 + yy'') dx; \quad y(a) = A_1, \quad y(b) = B_1, \quad y'(a) = A_2, \quad y'(b) = B_2.$$

$$5. I[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 (y'')^2 dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

$$6. I[y(x), z(x)] = \int_{-1}^1 \left( 2xy - y'^2 + \frac{z'^3}{3} \right) dx; \quad y(1) = 0, \quad y(-1) = 2, \quad z(1) = 1, \quad z(-1) = -1.$$

$$7. I[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 2y) dx; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{3}{2}, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 1.$$

Дослідити на екстремум функціонали

$$8. I[y(x)] = \int_0^1 \left( x + 2y + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$9. I[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 4z) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0.$$

**Заняття 26** (1 година). *Огляд методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. Методи інтегрування систем диференціальних рівнянь. Якісні методи дослідження розв'язків диференціальних рівнянь*

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: Вища школа, 1972. –156 с.
2. Краснов М.П., Макаренко Г.И., Киселёв А.И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1973. – 191 с.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. –М.: Высшая школа, 1979. –128 с.
4. Гаращенко Ф.Г., Харченко І.І. Збірник задач і вправ з диференціальних рівнянь. –К.: ВПЦ «Київський університет», 2004. – 162 с.