

Заняття 1: Побудова диференціальних рівнянь за заданим параметричним сімейством кривих

Аудиторні задачі

Знайти диференціальні рівняння сімейств кривих та дати геометричне тлумачення результатів

Задача 1. $x + y^2 = C$.

Задача 2. $y = e^{Cx}$.

Задача 3. $y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$.

Задача 4. Написати диференціальні рівняння всіх кіл на площині.

Задача 5. $(x - C)^2 + y^2 = r^2$.

Задача 6. $y - C = e^{x/C}$.

Задача 7. $y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^3$.

Задача 8. Знайти диференціальні рівняння всіх кіл на площині, які проходять через початок координат:

$$x^2 + y^2 - 2C_1x - 2C_2y = 0.$$

Домашнє завдання

Знайти диференціальні рівняння сімейств кривих та дати геометричне тлумачення результатів

Задача 9. $x^2 + y^2 - Cx = 0$.

Задача 10. $y = C/x$.

Задача 11. $y = \sin(x + C)$.

Задача 12. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.

Задача 13. $y = \tan Cx$.

Задача 14. $\tan(x + C) - y = 0$.

Задача 15. Знайти диференціальне рівняння всіх прямих на площині.

Задача 16. Утворити диференціальне рівняння прямих, що проходять через задану точку з координатами (a, b) .

Заняття 2: Поле напрямів. Інтегральні криві

Побудувати поле напрямів та накреслити схематично поведінку інтегральних кривих наступних диференціальних рівнянь.

Аудиторні задачі

Задача 17. $dy/dx = 2x + 1$.

Задача 18. $dy/dx = y/x$.

Задача 19. $dy/dx = y - x^2$.

Задача 20. $dy/dx = 2y - x$.

Задача 21. $dy/dx = x^2 + 2x - y$.

Задача 22. $dy/dx = x^2 + y^2$. Побудувати ізокліни $y' = 0$, $y' = 1/\sqrt{3}$, $y' = \sqrt{3}$.

Задача 23. $dy/dx = y/(x + y)$.

Задача 24. $dy/dx = -2xy$.

Домашнє завдання

Задача 25. $dy/dx = y + x$.

Задача 26. $dy/dx = -x/y$.

Задача 27. $dy/dx = y + x^2$.

Задача 28. $dy/dx = y - 3x$.

Задача 29. $dy/dx = (y - 1)^2$.

Задача 30. $dy/dx = x^2 - y^2$. Побудувати ізокліни $y' = 0$, $y' = \pm 1$, $y' = \pm 2$, $y' = \pm 3$.

Задача 31. $dy/dx = (y - 3x)/(x + 3y)$.

Задача 32. $y \cdot (dy/dx + x) = 1$.

Заняття 3: Диференціальні рівняння 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Рівняння з відокремлюваними змінними

Аудиторні задачі

Задача 33. $(y^2 - 1) \cdot (x + 2) \cdot dx - x^2 \cdot y \cdot dy = 0.$

Задача 34. $\sec^2(x) \cdot \tan(y) \cdot dy + \sec^2(y) \cdot \tan(x) \cdot dx = 0.$

Задача 35. $x \cdot y - (x^2 + 1) \cdot y' = 0. M(0, 1).$

Задача 36. $\frac{dy}{dx} + \frac{x^3 \cdot (y - 1)^3}{(x + 1) \cdot y} = 0.$

Задача 37. $x^2 \cdot dx + y^3 \cdot e^{x+y} \cdot dy = 0.$

Задача 38. $y^{-3} \cdot \ln(\ln(x)) \cdot dx + x \cdot e^{y^2} \cdot dy = 0.$

Задача 39. $(e^x - 1)/e^y = e^{e^y} \cdot (1 + e^x) \cdot y'.$

Домашнє завдання

Задача 40. $2x \cdot (1 + y^2) \cdot dx + y \cdot (1 + x^2) \cdot dy = 0. M(1, 0).$

Задача 41. $dy/dx = e^{x+y}. M(0, 0).$

Задача 42. $y \cdot dx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x}) \cdot dy = 0. M(1, 1).$

Задача 43. $y' = \sin(\ln(x))/\cos(\ln(y)).$

Задача 44. $(\cos(x)/\ln(y)^2) \cdot dx + y/x^2 \cdot dy = 0.$

Задача 45. $\frac{1 - \ln^2(y)}{x \cdot \ln(y)} \cdot dx + \frac{\sqrt{3 - \ln^2(x)}}{y} \cdot dy = 0.$

Заняття 4: Інтегровані типи диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Однорідні рівняння та зведені до них. Лінійні рівняння

Аудиторні задачі

Задача 46. $(y + \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot dx - x \cdot dy = 0.$

Задача 47. $2xy \cdot dx + (y^2 - x^2) \cdot dy = 0. M(1, 1).$

Задача 48. $(2x + 3y) \cdot dx + (x + 2y) \cdot dy = 0.$

Задача 49. $x \cdot y' - x \cdot \cos(y/x) - y = 0.$

Задача 50. $(y^3 + 2x^2y) \cdot dx - (2x^3 + 2xy^2) \cdot dy = 0.$

Задача 51. $(6x + y - 1) \cdot dx + (4x + y - 2) \cdot dy = 0.$

Задача 52. $(x + y + 1) \cdot dx + (2x + 2y - 1) \cdot dy = 0.$

Задача 53. $y \cdot (x^2 \cdot y^2 + 1) \cdot dx + (x^2 \cdot y^2 - 1) \cdot x \cdot dy = 0.$

Задача 54. $x \cdot y \cdot dx + (y^4 - x^2) \cdot dy = 0.$

Задача 55. $dy/dx - y = 2x - x^2.$

Задача 56. $dy/dx + y \cdot \cos(x) = \sin(x) \cdot \cos(x).$

Задача 57. $y' \cdot (x + \cot(y)) = 1.$

Домашнє завдання

Задача 58. $x \cdot y' = y \cdot (1 + \ln(y) - \ln(x)).$

Задача 59. $x \cdot dy - (\sqrt{x^2 + y^2} + y) \cdot dx = 0.$

Задача 60. $(xy \cdot e^{x/y} + y^2) \cdot dx - x^2 e^{x/y} \cdot dy = 0.$

Задача 61. $(6xy + 5y^2) \cdot dx + (3x^2 + 10xy - y^2) \cdot dy = 0.$

Задача 62. $(x^3 + 3xy^2) \cdot (2y^3 + 3x^2y) \cdot dy = 0.$

Задача 63. $(x - 2) \cdot dx + (y - 2x + 1) \cdot dy = 0.$

Задача 64. $(x + 2y - 1) \cdot dx + (2x + 4y + 3) \cdot dy = 0.$

Задача 65. $y^3 \cdot dx + 2 \cdot (x^2 - xy^2) \cdot dy = 0.$

Задача 66. $(xy^2 - y) \cdot dx - (x^3y^2 - 3x^2y + 3x) \cdot dy = 0.$

Задача 67. $dy/dx - y = x - 1. M(0, 1).$

Задача 68. $y' + y = \sin(x) + \cos(x).$

Задача 69. $y' \cdot (x + \ln(y)) = 1.$

Заняття 5: Інтегровані типи диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Лінійні неоднорідні рівняння. Метод варіації довільної сталої. Рівняння типу Бернуллі

Аудиторні задачі

Задача 70. $dy/dx - 2xy = 1$.

Задача 71. $dy/dx + y/x = \sin(x)/x^2$.

Задача 72. $x \cdot y' + y = x \cdot \cos(x)$. $M(\pi/2, 1)$.

Задача 73. $y' \cdot \sin(x) - y = 2 \sin^2(x/2)$.

Задача 74. $x \cdot \cos(x) \cdot dy/dx + y \cdot (x \cdot \sin(x) + \cos(x)) = 1$.

Задача 75. $1/y \cdot dy/dx + (2 - x) \cdot \ln y = x \cdot (e^{2x} - e^{-x^2/2})$.

Задача 76. $y' + 2y/x = 2\sqrt{y}/\cos^2(x)$.

Задача 77. $\cos(x) \cdot dy/dx - y \cdot \sin(x) = y^4$.

Домашнє завдання

Задача 78. $x \cdot \ln x \cdot dy/dx - y = x \cdot (\ln(x) - 1)$.

Задача 79. $y' + y \cdot \tan(x) = x \cdot \cos^2(x)$. $M(0, 1)$.

Задача 80. $(y^2 - 6x) \cdot y' + 2y = 0$. $M(0, -1)$.

Задача 81. $(y - y^2) \cdot dx + (2xy^2 - x - y^2) \cdot dy = 0$.

Задача 82. $dx + (x - e^{-y} \cdot \sec^2(y)) \cdot dy = 0$. $M(2, 0)$.

Задача 83. $\sec^2(y) \cdot dy/dx + a \cdot \tan(y) = x$.

Задача 84. $y' + xy/(1 - x^2) = x \cdot \sqrt{y}$.

Задача 85. $3 dy/dx - y \cdot \sin(x) + 3y^4 \cdot \sin(x) = 0$.

Задача 86. $x \cdot y' + y = x \cdot y^2 \cdot \ln(x)$.

Заняття 6: Рівняння Рікатті

Аудиторні задачі

Знайти розв'язки рівнянь, підібравши спочатку частинні розв'язки:

Задача 87. $x^2 \cdot dy/dx - x^2y^2 + 5xy - 3 = 0$.

Задача 88. $dy/dx + xy^2 + y/x - x^3 - 2 = 0$.

Знайти загальні розв'язки рівнянь:

Задача 89. $(x - x^4) \cdot y' - x^2 - y + 2xy^2 = 0$, $y_1(x) = x^2$.

Задача 90. $dy/dx = 2y^2/x^2 + y/x + x \cdot \cos(x) - 1 + \cos(2x)$, $y_1(x) = x \cdot \sin(x)$.

Задача 91. $dy/dx = y^2/x^2 + (2 + 1/x) \cdot y - e^{4x}$, $y_1(x) = x \cdot e^{2x}$.

Домашнє завдання

Задача 92. $x^3 \cdot dy/dx - y^2 - x^2y + x^2 = 0$.

Задача 93. $dy/dx = y^2 - x^2 + 1$.

Задача 94. $y' = y^2 + y/x + 1/x^2$, $y_1(x) = -1/x$.

Задача 95. $dy/dx = y^2/x^2 + y/x - x \cdot \sin(x) - \cos^2(x)$, $y_1(x) = x \cdot \cos(x)$.

Задача 96. $dy/dx = e^{-x}/\sin(x) \cdot y^2 + y + e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x))$, $y_1(x) = e^x \cdot \sin(x)$.

Заняття 7: Рівняння в повних диференціалах

Аудиторні задачі

Знайти розв'язки рівнянь в повних диференціалах:

Задача 97. $(e^t \cdot \cos(x) + e^x \cdot \cos(y)) \cdot dx + (e^y \cdot \sin(x) - e^x \cdot \sin(y)) \cdot dy = 0.$

Задача 98. $\left(2x \cdot \ln(x+y) + \frac{x^2+y}{x+y}\right) \cdot dx + \left(\ln(x+y) + \frac{x^2+y}{x+y}\right) \cdot dy = 0.$

Задача 99. $(2x + x^2 - y^2x) \cdot dx - (2y + x^2y - y^2) \cdot dy = 0.$

Задача 100. $(2x \cdot \sin y - y^2 \cdot \sin x) \cdot dx + (x^2 \cdot \cos(y) + 2y \cdot \cos(x) + 1) \cdot dy = 0.$

Задача 101. $(6xy + x^2 + 3) \cdot y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0.$

Задача 102. $(1 + y^2/x^2) \cdot dx - 2y/x \cdot dy = 0.$

Задача 103. $(1 + e^{x/y}) \cdot dx + e^{x/y} \cdot (1 - x/y) \cdot dy = 0.$

Домашнє завдання

Знайти розв'язки рівнянь в повних диференціалах:

Задача 104. $e^{-y} \cdot dx - (2y + x \cdot e^{-y}) \cdot dy = 0.$

Задача 105. $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} \cdot dx - \frac{2x^3 + xy}{y^3} \cdot dy = 0.$

Задача 106. $\left(\frac{x}{\sin(y)} + 2\right) \cdot dx + \frac{(x^2 + 1) \cdot \cos(y)}{\cos(2y) - 1} \cdot dy = 0.$

Задача 107. $(x \cdot \ln(y) - x^2 + \cos(y)) \cdot dy + (x^2 + y \cdot \ln(y) - y - 2xy) \cdot dx = 0.$

Задача 108. $\frac{2x - y}{x^2 + y^2} \cdot dx + \frac{2y + x}{x^2 + y^2} \cdot dy = 0.$

Задача 109. $(2x \cdot \cos(y) - y^2 \cdot \sin(x)) \cdot dx + (2y \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(y)) \cdot dy = 0.$

Задача 110. $(x \cdot e^y + e^x) \cdot dy + (e^y + y \cdot e^x) \cdot dx = 0.$

Заняття 8: Інтегрувальний множник. Випадки знаходження інтегрувального множника

Аудиторні задачі

Розв'язати диференціальні рівняння методом інтегрувального множника, знаючи, що вони мають вигляд $\mu = f(x)$ або $\mu = f(y)$:

Задача 111. $(2y + xy^3) \cdot dx + (x + x^2y^2) \cdot dy = 0.$

Задача 112. $y^2 \cdot (x - 3y) \cdot dx + (1 - 3xy^2) \cdot dy = 0.$

Задача 113. $2y \cdot dx + (y^2 - 6x) \cdot dy = 0.$

Зінтегрувати рівняння за допомогою множників $\mu(x + y)$, $\mu(xy)$, або $\mu(x - y)$

Задача 114. $(y - ay/x + x) \cdot dx + a \cdot dy = 0.$

Задача 115. $y^2 \cdot dx + (xy - 1) \cdot dy = 0.$

Домашнє завдання

Розв'язати диференціальні рівняння методом інтегрувального множника, знаючи, що вони мають вигляд $\mu = f(x)$ або $\mu = f(y)$:

Задача 116. $(1 + x^2y) \cdot dx + x^2 \cdot (x + y) \cdot dy = 0.$

Задача 117. $(2xy + ax) \cdot dx + dy = 0.$

Задача 118. $dx + (x + e^{-y} \cdot y^2) \cdot dy = 0.$

Зінтегрувати рівняння за допомогою множників $\mu(x + y)$, $\mu(xy)$, або $\mu(x - y)$

Задача 119. $dx + x \cdot \cot(x + y) \cdot (dx + dy) = 0.$

Задача 120. $(2x^2y + x) \cdot dy + (y + 2xy^2 - x^2y^3) \cdot dx = 0.$

Заняття 9: Диференціальні рівняння 1-го порядку, не розв'язані відносно похідної. Метод параметризації

Аудиторні задачі

Знайти загальні розв'язки і загальні інтеграли рівнянь

Задача 121. $x^3 \cdot (y')^2 + x^2 \cdot y \cdot y' + a = 0.$

Задача 122. $x \cdot (y')^2 - 2y' - y = 0.$

Задача 123. $y = 2x \cdot y' + \sqrt{1 + (y')^2}.$

Задача 124. $x \cdot \sqrt{1 + (y')^2} - y' = 0.$

Задача 125. $x = y' \cdot \sin(y').$

Задача 126. $3(y')^5 - y \cdot y' + 1 = 0.$

Задача 127. $x^3 + (y')^3 - 3x \cdot y' = 0.$

Задача 128. $(y')^3 - 1 = 0.$

Задача 129. $x \cdot (2 + (y')^2) = 1.$

Задача 130. $y = y' \cdot \ln(y').$

Домашнє завдання

Знайти загальні розв'язки і загальні інтеграли рівнянь

Задача 131. $9y \cdot (y')^2 + 4x^3 \cdot y' - 4x^2 \cdot y = 0.$

Задача 132. $x \cdot (y')^2 + y \cdot y' + a = 0.$

Задача 133. $y = x \cdot y' + \sin(y').$

Задача 134. $x \cdot (1 + (y')^2) = 1.$

Задача 135. $y = y' \cdot \sin(y') + \cos(y').$

Задача 136. $y - y' = \sqrt{1 + (y')^2}.$

Задача 137. $(y')^2 + x \cdot y' - x^2 = 0.$

Задача 138. $(y')^2 + 2y' + 1 = 0.$

Задача 139. $x = a \cdot y' + b \cdot \sqrt{1 + (y')^2}.$

Задача 140. $x = y \cdot (1/\sqrt{y'} - 1/y').$

Заняття 10: Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними

Зінтегрувати диференціальні рівняння та відшукати частинні розв'язки там, де задані початкові умови:

Аудиторні задачі

Задача 141. $y''' = 0$ при $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 0, y''_0 = 2$.

Задача 142. $y''' = x + \cos(x)$.

Задача 143. $xy^{IV} + y''' = e^{2x}$.

Задача 144. $y''' - (y'')^2 = 1$.

Задача 145. $x \cdot y'' = y' \cdot \ln(y'/x)$.

Задача 146. $2y \cdot y'' - (y')^2 = 1$.

Задача 147. $x^2 \cdot y''' - (y'')^2 = 0$.

Задача 148. $y'' = x \cdot e^x$ при $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 0$.

Задача 149. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

Задача 150. $x^2 \cdot y \cdot y'' = (y - x \cdot y')^2$.

Домашнє завдання

Задача 151. $y^V = x - 1$.

Задача 152. $y''' = \ln(x)/x^2$.

Задача 153. $y'' + \ln(y'') - x = 0$.

Задача 154. $2y \cdot y'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

Задача 155. $x \cdot y'' + y' - x^2 - 1 = 0$.

Задача 156. $y''' \cdot y - 3(y'')^2 = 0$.

Задача 157. $y \cdot (x \cdot y'' + y') = x \cdot (y')^2 \cdot (1 - x)$.

Задача 158. $y \cdot y'' - (y')^2 = y'$.

Задача 159. $x \cdot y \cdot y'' + x \cdot y' = 2y \cdot y'$.

Задача 160. $y''' - 3y \cdot y' = 0$.

Заняття 11: Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

Аудиторні задачі

Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних рівнянь, а також частинні там, де задані початкові умови:

Задача 161. $y'' + 5y' + 4y = 0$.

Задача 162. $y'' - a^2 \cdot y = 0$.

Задача 163. $y''' + 8y = 0$.

Задача 164. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

Задача 165. $y^V - 10y''' + 9y' = 0$.

Задача 166. $y^{(6)} + 64y = 0$.

Задача 167. $y'' - 5y' + 4y = 0$ при $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 0$.

Задача 168. $y'' + y = 0$ при $y(-\pi/2) = 1, y'(-\pi/2) = 0$.

Задача 169. $y^{IV} + a^4 \cdot y = 0$.

Домашнє завдання

Задача 170. $y'' - 7y' + 10y = 0$.

Задача 171. $y'' + 9y = 0$.

Задача 172. $y'' + 3y' = 0$.

Задача 173. $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Задача 174. $2y'' + y' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0$.

Задача 175. $y^{IV} - a^4 \cdot y = 0$.

Задача 176. $y^V - 4y^{IV} = 0$.

Задача 177. $y^{VI} + 2y^V = 0$.

Задача 178. $y'' - 4y' + 29y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 7$.

Заняття 12: Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі змінними коефіцієнтами. Рівняння, що зводяться до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Аудиторні задачі

Задача 179. Функції x , x^2 , x^3 задовольняють деяке однорідне лінійне диференціальне рівняння. Переконайтеся, що вони утворюють фундаментальну систему, та скласти згадане рівняння.

Розв'язати лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами:

Задача 180. $(1 + x^2) \cdot y'' - 2x \cdot y' + 2y = 0$, $y_1(x) = x$.

Задача 181. $y'' - (x^2 + 1) \cdot y = 0$, $y_1(x) = e^{x^2/2}$.

Задача 182. $x \cdot y'' + 2y' + xy = 0$, $y_1(x) = \sin(x)/x$ ($x \neq 0$).

Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння (найменшого можливого порядку), яке має такі частинні розв'язки:

Задача 183. $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \cos(x)$.

Задача 184. $y_1(x) = x \cdot e^{-x}$, $y_2(x) = e^{-x}$.

Розв'язати рівняння:

Задача 185. $y''' - 3y''/x + 6y'/x^2 - 6y/x^3 = \sqrt{x}$.

Задача 186. $x^3 \cdot y''' + x \cdot y' - y = 0$.

Задача 187. $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' - 3y = 0$.

Задача 188. $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = 0$.

Задача 189. $(2x + 3)^2 \cdot y'' + (2x + 3) \cdot y' - y = 0$.

Задача 190. $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + 4y = 10x$.

Домашнє завдання

Задача 191. Побудувати диференціальне рівняння, що має таку фундаментальну систему функцій: 1 та $\cos(2x)$.

Розв'язати лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами:

Задача 192. $(1 - x) \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0$, $y_1(x) = e^x$.

Задача 193. $(1 + x^2) \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0$, $y_1(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

Задача 194. $y'' - x \cdot y' + 2y = 0$, $y_1(x) = x^2 - 1$.

Задача 195. $x^2 \cdot y'' + 2x \cdot y' - 6y = 0$.

Задача 196. $x^2 \cdot y''' - 2y' = 0$.

Задача 197. $(x + 1)^3 \cdot y''' - 3(x + 1)^2 \cdot y'' + 4(x + 1) \cdot y' - 4y = 0$.

Задача 198. $x^3 \cdot y''' - x \cdot y' - 3y = 0$.

Задача 199. $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' - 3y = 5x^4$.

Задача 200. $x^2 \cdot y'' - 4x \cdot y' + 6y = 0$.

Задача 201. $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + y = 8x^3$.

Задача 202. $x^2 \cdot y'' - 3x \cdot y' + 5y = 3x^2$.

Заняття 13–14: Методи Лагранжа, Коші і невизначених коефіцієнтів для розв'язування неоднорідних рівнянь вищих порядків

НК – метод невизначених коефіцієнтів, *Л* – Лагранжа, *К* – Коші.

Аудиторні задачі

Задача 203. $y'' - y = x^2 + 1$ (НК).

Задача 204. $y''' - 4y' = x^2$ (Л).

Задача 205. $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$ (НК).

Задача 206. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cdot \cos(x) + x \cdot e^{-x}$ (НК).

Задача 207. $y'' + y = \cot(x)$ (К).

Задача 208. $y'' - 6y' + 9y = (9x^2 + 6x + 2)/x^2$ (Л).

Задача 209. $y'' - y = x^2 - x + 1$ (НК).

Задача 210. $y'' + 4y = 4x \cdot \cos(2x)$ (Л).

Задача 211. $y'' + 2y' - 3y = 2x - e^{3x}$ (НК).

Задача 212. $y'' - 2y' + y = e^x/x$ (К).

Домашнє завдання

Задача 213. $y'' + y = \tan(x)$ (К).

Задача 214. $y'' + 3y' + 2y = 1/(e^x + 1)$ (Л).

Задача 215. $y'' - y = 1/x$ (К).

Задача 216. $y'' + 4y = 1/\cos(2x)$ (Л).

Задача 217. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$ (НК).

Задача 218. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x} \cdot (4x^2 + 4x - 10)$ (НК).

Задача 219. $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos(x)$ (НК).

Задача 220. $y^V + y''' = x^2 - 1$ (НК).

Задача 221. $y^{IV} - y = x \cdot e^x + \cos(x)$ (НК).

Задача 222. $y'' + \omega^2 \cdot y = 1/(x + 1)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -3$ (Л).

Заняття 15: Крайові задачі. Задача Штурма-Ліувілля. Побудова функції Гріна

Аудиторні задачі

Яка з крайових задач має розв'язки:

Задача 223. $y'' - y = 0, y(0) = 0, y'(\pi/2) = 1.$

Задача 224. $y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(2\pi) = 1.$

Знайти власні значення і власні функції:

Задача 225. $y'' = \lambda y, y(0) = y(b) = 0.$

Задача 226. $y'' = \lambda y, y(0) = y'(b) = 0.$

Побудувати функції Гріна для крайових задач:

Задача 227. $y'' = f(x), y(0) = y(1) = 0.$

Задача 228. $y'' + y = f(x), y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi).$

Домашнє завдання

Задача 229. $y'' + y = 1, y'(0) = 0, y(1) = 1.$

Задача 230. $y'' + y = 1, y(0) = y(\pi/2) = 0.$

Задача 231. $y'' + y = f(x), y'(0) = y(\pi) = 0.$

Задача 232. $y'' = \lambda y, y'(0) = y'(\ell) = 0.$

Задача 233. $x^2 \cdot y'' = \lambda y, y(1) = y(a) = 0.$

Заняття 16: Розв'язування однорідних лінійних систем з постійними коефіцієнтами

Аудиторні задачі

Задача 234.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Задача 235.

$$\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$$

Задача 236.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$

Задача 237.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y - z, & \lambda_2 = 2, \\ \dot{z} = 2x - y, & \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

Задача 238.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y, & \lambda_2 = 1 + 2i, \\ \dot{z} = 3x + z, & \lambda_3 = 1 - 2i. \end{cases}$$

Задача 239.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, & \lambda_1 = 2, \\ \dot{y} = x + 2y - z, & \lambda_2 = 3, \\ \dot{z} = x - y + 2z, & \lambda_3 = 3. \end{cases}$$

Задача 240.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y - z, & \lambda_2 = 1, \\ \dot{z} = -y + 2z, & \lambda_3 = 2. \end{cases}$$

Домашнє завдання

Задача 241.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$$

Задача 242.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$

Задача 243.

$$\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$$

Задача 244.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, & \lambda_1 = 0, \\ \dot{y} = -x + y + z, & \lambda_2 = 2, \\ \dot{z} = x - z, & \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

Задача 245.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, & \lambda_1 = 2, \\ \dot{y} = x + 3y - z, & \lambda_2 = 3 + i, \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z, & \lambda_3 = 3 - i. \end{cases}$$

Задача 246.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, & \lambda_1 = 0, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, & \lambda_2 = 1, \\ \dot{z} = -x + y + 2z, & \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Задача 247.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 2z, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = 4x + y, & \lambda_2 = -1, \\ \dot{z} = 2x + y - z, & \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

Заняття 17–18: Методи розв’язування неоднорідних систем з постійними коефіцієнтами. Застосування методу невизначених коефіцієнтів

Аудиторні задачі

Задача 248.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$$

Задача 249.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

Задача 250.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$$

Задача 251.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18. \end{cases}$$

Задача 252.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$$

Задача 253.

$$\begin{cases} \dot{x} = t + \tan^2(t) - 1, \\ \dot{y} = -x + \tan(t). \end{cases}$$

Задача 254.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + 2/(e^t - 1), \\ \dot{y} = 6x + 3y - 3/(e^t - 1). \end{cases}$$

Задача 255.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1/\cos(t), \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

Домашнє завдання

Задача 256.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos(t), \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

Задача 257.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

Задача 258.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

Задача 259.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16t \cdot e^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

Задача 260.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \cdot \sin(t). \end{cases}$$

Задача 261.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x - e^{3t}/(e^{2t} + 1). \end{cases}$$

Заняття 19–20: Системи в симетричній формі. Розв’язування лінійних рівнянь першого порядку з частинними похідними. Метод характеристик. Задача Коші

Аудиторні задачі

Задача 262. $\frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

Задача 263. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$.

Задача 264. $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Задача 265. $x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Задача 266. $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$.

Задача 267. $(z-y)^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xz \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy$.

Знайти розв’язки рівняння, яке задовольняє вказаним умовам:

Задача 268. $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = 2x$ при $y = 1$.

Знайти поверхню, яка задовольняє даному рівнянню і проходить через задану лінію:

Задача 269. $y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x$, $z = y^2$ при $x = 0$.

Домашнє завдання

Задача 270. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$.

Задача 271. $\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$.

Задача 272. $(x+2y) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Задача 273. $(x-z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (y-z) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Задача 274. $e^x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = y \cdot e^x$.

Задача 275. $xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + (x-2z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = yz$.

Знайти розв’язки рівняння, яке задовольняє вказаним умовам:

Задача 276. $\frac{\partial z}{\partial x} - (2e^x - y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y$ при $x = 0$.

Знайти поверхню, яка задовольняє даному рівнянню і проходить через задану лінію:

Задача 277. $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$, $z = x^2$ при $y = 1$.

Заняття 21: Особливі точки диференціальних рівнянь на площині

Аудиторні задачі

Дослідити особливі точки для поданих нижче рівнянь та систем. Дати схематичний малюнок розміщення інтегральних кривих на площині (x, y) :

Задача 278. $y' = \frac{2x + y}{3x + 4y}$.

Задача 279. $y' = \frac{y - 2x}{2y - 3x}$.

Задача 280. $y' = \frac{y}{x}$.

Задача 281.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$$

Задача 282.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$$

Знайти та дослідити особливі точки систем:

Задача 283. $y' = \frac{2y - x}{3x + 6}$.

Задача 284. $y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4 - 8}$.

Домашнє завдання

Дослідити особливі точки для поданих нижче рівнянь та систем. Дати схематичний малюнок розміщення інтегральних кривих на площині (x, y) :

Задача 285. $y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}$.

Задача 286. $y' = \frac{4y - 2x}{x + y}$.

Задача 287. $y' = \frac{4x - y}{3x - 2y}$.

Задача 288.

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - 3y \end{cases}$$

Задача 289.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

Знайти та дослідити особливі точки систем:

Задача 290. $y' = \frac{2x + y}{x - 2y - 5}$.

Задача 291. $y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}$.

Заняття 22–23: Методи Ляпунова. Побудова функцій Ляпунова для лінійних стаціонарних систем. Критерій Гурвіца

Аудиторні задачі

Задача 292. Дослідити стійкість розв'язків з вказаними початковими умовами $\dot{x} = 4x - t^2x$, $x(0) = 0$.

Задача 293. Дослідити стійкість нульового розв'язку, якщо відомо загальний розв'язок системи $x = C_1 \cdot \cos^2(t) - C_2 \cdot e^{-t}$.

Задача 294. За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos(3x), \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$$

Задача 295. При яких значеннях параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin(x), \\ \dot{y} = a \cdot x + b \cdot y. \end{cases}$$

Задача 296. Дослідити, при яких значеннях параметра a буде асимптотично стійким нульовий розв'язок:

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot x - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$

Задача 297. Знайти стан рівноваги даної системи і дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$

Дослідити стійкість користуючись відомими критеріями:

Задача 298. $y''' + y'' + y' + 2y = 0$.

Задача 299. $y^{IV} + 3.1y''' + 5.2y'' + 9.8y' + 5.8y = 0$.

Задача 300. Дослідити, при яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок буде асимптотично стійким: $y''' + a \cdot y'' + b \cdot y' + 2y = 0$.

Задача 301. Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^T B x, \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2, \end{cases}$$

таким чином, що її похідна в силу системи дорівнює $-x_1^2 - x_2^2$.

Задача 302. При яких значеннях параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + a \cdot x) - e^y, \\ \dot{y} = b \cdot x + \tan(y). \end{cases}$$

Задача 303. Знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на стійкість системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$$

Домашнє завдання

Задача 304. Дослідити стійкість розв'язків з вказаними початковими умовами $3 \cdot (t - 1) \cdot \dot{x} = x$, $x(2) = 0$.

За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок:

Задача 305.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$$

Задача 306.

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

Задача 307. При яких значеннях параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot x + y + x^2, \\ \dot{y} = x + a \cdot y + y^2. \end{cases}$$

Задача 308. Знайти стан рівноваги даної системи і дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - 1)(y - 1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

Дослідити стійкість користуючись відомими критеріями:

Задача 309. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$.

Задача 310. $y^V + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0$.

Задача 311. При яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок буде асимптотично стійким: $y^{IV} + y''' + a \cdot y'' + y' + b \cdot y = 0$.

Задача 312. Дослідити, при яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок буде асимптотично стійким: $y''' + 3 \cdot y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$.

Задача 313. Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^T B x, \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2, \end{cases}$$

таким чином, що її похідна в силу системи дорівнює $-x_1^2 - x_2^2$.

Задача 314. При яких значеннях параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin(x), \\ \dot{y} = a \cdot x + b \cdot y. \end{cases}$$

Задача 315. Знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на стійкість системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x + y). \end{cases}$$

Заняття 24–25: Варіаційне числення

Аудиторні задачі

Знайти екстремалі таких функціоналів:

Задача 316. $I[y(x)] = \int_{-1}^0 (12xy - (y')^2) dx, y(-1) = 1, y(0) = 0.$

Задача 317. $I[y(x)] = \int_{-1}^1 ((y')^2 - 2xy) dx, y(-1) = -1, y(1) = 1.$

Задача 318. $I[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2) dx, y(0) = 0, y(1) = 0, y'(0) = 1, y'(1) = -\sinh(1).$

Задача 319. $I[y(x)] = \int_0^1 (y + y'') dx, y(0) = y_0, y(1) = y_1, y'(0) = y'_0, y'(1) = y'_1.$

Задача 320. $I[y(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (y'')^2) dx, y(0) = 0, y(1) = \sinh(1), y'(0) = 1, y'(1) = \cosh(1).$

Задача 321. $I[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/4} (2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2) dx, y(0) = 0, y(\pi/4) = 1, z(0) = 0, z(\pi/4) = 1.$

Задача 322. $I[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/2} ((y')^2 + (z')^2 - 2yz) dx, y(0) = 0, y(\pi/2) = 1, z(0) = 0, z(\pi/2) = 1.$

Дослідити на екстремум функціонали:

Задача 323. $I[y(x)] = \int_0^1 ((y')^3 + y') dx, y(0) = 0, y(1) = 2.$

Задача 324. $I[y(x), z(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2) dx, y(0) = 0, y(1) = 1, z(0) = 0, z(1) = 2.$

Домашнє завдання

Знайти екстремалі таких функціоналів:

Задача 325. $I[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{y \cdot (1 + (y')^2)} dx, y(0) = y(1) = 1/\sqrt{2}.$

Задача 326. $I[y(x)] = \int_{-1}^1 ((y')^2 - 2xy) dx, y(-1) = -1, y(1) = 1.$

Задача 327. $I[y(x)] = \int_{-1}^0 (240y - (y''')^2) dx, y(-1) = 1, y(0) = 0, y'(-1) = -4.5, y'(0) = 0, y''(-1) = 16, y''(0) = 0.$

Задача 328. $I[y(x)] = \int_a^b ((y')^2 + y \cdot y'') dx, y(a) = A_1, y(b) = B_1, y'(a) = A_2, y'(b) = B_2.$

Задача 329. $I[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 (y'')^2 dx, y(0) = 0, y(1) = 1, y'(0) = 0, y'(1) = 1.$

Задача 330. $I[y(x), z(x)] = \int_{-1}^1 (2xy - (y')^2 + (z')^3/3) dx, y(1) = 0, y(-1) = 2, z(1) = 1, z(-1) = -1.$

Задача 331. $I[y(x), z(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2 + 2y) dx, y(0) = 1, y(1) = 3/2, z(0) = 0, z(1) = 1.$

Дослідити на екстремум функціонали:

Задача 332. $I[y(x)] = \int_0^1 (y + 2x + (y')^2/2) dx, y(0) = y'(0) = 0.$

Задача 333. $I[y(x), z(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2 + 4z) dx, y(0) = 0, y(1) = 1, z(0) = 0, z(1) = 0.$