

Заняття 24–25: Варіаційне числення

Аудиторні задачі

Знайти екстремалі таких функціоналів:

Задача 1. $I[y(x)] = \int_{-1}^0 (12xy - (y')^2) dx, y(-1) = 1, y(0) = 0.$

Задача 2. $I[y(x)] = \int_{-1}^1 ((y')^2 - 2xy) dx, y(-1) = -1, y(1) = 1.$

Задача 3. $I[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2) dx, y(0) = 0, y(1) = 0, y'(0) = 1, y'(1) = -\sinh(1).$

Задача 4. $I[y(x)] = \int_0^1 (y + y'') dx, y(0) = y_0, y(1) = y_1, y'(0) = y'_0, y'(1) = y'_1.$

Задача 5. $I[y(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (y'')^2) dx, y(0) = 0, y(1) = \sinh(1), y'(0) = 1, y'(1) = \cosh(1).$

Задача 6. $I[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/4} (2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2) dx, y(0) = 0, y(\pi/4) = 1, z(0) = 0, z(\pi/4) = 1.$

Задача 7. $I[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/2} ((y')^2 + (z')^2 - 2yz) dx, y(0) = 0, y(\pi/2) = 1, z(0) = 0, z(\pi/2) = 1.$

Дослідити на екстремум функціонали:

Задача 8. $I[y(x)] = \int_0^1 ((y')^3 + y') dx, y(0) = 0, y(1) = 2.$

Задача 9. $I[y(x), z(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2) dx, y(0) = 0, y(1) = 1, z(0) = 0, z(1) = 2.$

Домашнє завдання

Знайти екстремалі таких функціоналів:

Задача 10. $I[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{y \cdot (1 + (y')^2)} dx, y(0) = y(1) = 1/\sqrt{2}.$

Задача 11. $I[y(x)] = \int_{-1}^1 ((y')^2 - 2xy) dx, y(-1) = -1, y(1) = 1.$

Задача 12. $I[y(x)] = \int_{-1}^0 (240y - (y''')^2) dx, y(-1) = 1, y(0) = 0, y'(-1) = -4.5, y'(0) = 0, y''(-1) = 16, y''(0) = 0.$

Задача 13. $I[y(x)] = \int_a^b ((y')^2 + y \cdot y'') dx, y(a) = A_1, y(b) = B_1, y'(a) = A_2, y'(b) = B_2.$

Задача 14. $I[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 (y'')^2 dx, y(0) = 0, y(1) = 1, y'(0) = 0, y'(1) = 1.$

Задача 15. $I[y(x), z(x)] = \int_{-1}^1 (2xy - (y')^2 + (z')^3/3) dx, y(1) = 0, y(-1) = 2, z(1) = 1, z(-1) = -1.$

Задача 16. $I[y(x), z(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2 + 2y) dx, y(0) = 1, y(1) = 3/2, z(0) = 0, z(1) = 1.$

Дослідити на екстремум функціонали:

Задача 17. $I[y(x)] = \int_0^1 (y + 2x + (y')^2/2) dx, y(0) = y'(0) = 0.$

Задача 18. $I[y(x), z(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2 + 4z) dx, y(0) = 0, y(1) = 1, z(0) = 0, z(1) = 0.$