Заняття 22–23: Методи Ляпунова. Побудова функцій Ляпунова для лінійних стаціонарних систем. Критерій Гурвіца

Аудиторні задачі

Задача 1. Дослідити стійкість розв'язків з вказаними початковими умовами $\dot{x} = 4x - t^2x$, $x(0) = 0$.

Задача 2. Дослідити стійкість нульового розв'язку, якщо відомо загальний розв'язок системи $x = C_1 \cdot \cos^2(t) - C_2 \cdot e^{-t}$.

Задача 3. За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos(3x), \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$$

Задача 4. При яких значеннях параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin(x), \\ \dot{y} = a \cdot x + b \cdot y. \end{cases}$$

Задача 5. Дослідити, при яких значеннях параметра a буде асимптотично стійким нульовий розв'язок:

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot x - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$

Задача 6. Знайти стан рівноваги даної системи і дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$

Дослідити стійкість користуючись відомими критеріями:

Задача 7. $y''' + y'' + y' + 2y = 0$.

Задача 8. $y^{IV} + 3.1y''' + 5.2y'' + 9.8y' + 5.8y = 0$.

Задача 9. Дослідити, при яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок буде асимптотично стійким: $y''' + a \cdot y'' + b \cdot y' + 2y = 0$.

Задача 10. Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^\intercal Bx, \quad x = (x_1, x_2)^\intercal, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2, \end{cases}$$

таким чином, що її похідна в силу системи дорівнює $-x_1^2 - x_2^2$.

Задача 11. При яких значеннях параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + a \cdot x) - e^y, \\ \dot{y} = b \cdot x + \tan(y). \end{cases}$$

Задача 12. Знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на стійкість системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$$

Домашнє завдання

Задача 13. Дослідити стійкість розв'язків з вказаними початковими умовами $3 \cdot (t-1) \cdot \dot{x} = x$, $x(2) = 0$.

За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок:

Задача 14.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$$

Задача 15.

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

Задача 16. При яких значеннях параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot x + y + x^2, \\ \dot{y} = x + a \cdot y + y^2. \end{cases}$$

Задача 17. Знайти стан рівноваги даної системи і дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

Дослідити стійкість користуючись відомими критеріями:

Задача 18. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$.

Задача 19. $y^V + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0$.

Задача 20. При яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок буде асимптотично стійким: $y^{IV} + y''' + a \cdot y'' + y' + b \cdot y = 0$.

Задача 21. Дослідити, при яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок буде асимптотично стійким: $y''' + 3 \cdot y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$.

Задача 22. Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^\intercal B x, \quad x = (x_1, x_2)^\intercal, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2, \end{cases}$$

таким чином, що її похідна в силу системи дорівнює $-x_1^2 - x_2^2$.

Задача 23. При яких значеннях параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin(x), \\ \dot{y} = a \cdot x + b \cdot y. \end{cases}$$

Задача 24. Знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на стійкість системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x + y). \end{cases}$$