4 Системи рівнянь

4.1 Загальна теорія

Співвідношення вигляду

$$\begin{cases} F_1(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, t) & = 0, \\ F_2(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, t) & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ F_n(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, t) & = 0, \end{cases}$$

називається системою n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Якщо система розв'язана відносно похідних і має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) & = 0, \\ \dot{x}_2 & = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \dot{x}_n & = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) & = 0, \end{cases}$$

то вона називається системою в нормальній формі.

Визначення. Розв'язком системи диференціальних рівнянь називається набір n неперервно диференційованих функцій $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ що тотожно задовольняють кожному з рівнянь системи.

У загальному випадку розв'язок системи залежить від n довільних сталих і має вигляд $x_1(t, C_1, \ldots, C_n), \ldots, x_n(t, C_1, \ldots, C_n)$ і задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку ставиться в такий спосіб. Потрібно знайти розв'язок, що задовольняє початковим умовам (умовам Коші):

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0$$

Визначення. Розв'язок $x_1(t, C_1, \ldots, C_n)$, …, $x_n(t, C_1, \ldots, C_n)$ називається загальним, якщо за рахунок вибору сталих $C_1, \ldots, C_n$ можна розв'язати довільну задачу Коші.

Для систем звичайних диференціальних рівнянь досить важливим є поняття інтеграла системи. В залежності від гладкості (тобто диференційованості) можна розглядати два визначення інтеграла.

Визначення.
1. Функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ стала уздовж розв'язків системи, називається інтегралом системи.

2. Функція $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ повна похідна, якої в силу системи тотожно дорівнює нулю, називається інтегралом системи.

Для лінійних рівнянь існує поняття лінійної залежності і незалежності розв'язків. Для нелінійних рівнянь (систем рівнянь) аналогічним поняттям є функціональна незалежність.

Визначення. Інтеграли

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad \dots, \quad F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

називаються функціонально незалежними, якщо не існує функції n змінних $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ такої, що

$$\Phi(F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)) = 0.$$

Теорема 4.1. *Для того щоб інтеграли*

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad \dots, \quad F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

системи звичайних диференціальних рівнянь були функціонально незалежними, необхідно і достатньо, щоб визначник Якобі був відмінний від тотожного нуля, тобто

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Визначення. Якщо $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ — інтеграл системи диференціальних рівнянь, то рівність $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = C$ називається першим інтегралом.

Визначення. Сукупність n функціонально незалежних інтегралів називається загальним інтегралом системи диференціальних рівнянь.

Власне кажучи загальний інтеграл — це загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у неявному вигляді.

Теорема 4.2 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші)**.** *Щоб система диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної, мала єдиний розв'язок, що задовольняє умовам Коші:*

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0$$

досить, щоб:

1. *функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ були неперервними по змінним $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ в околі точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0)$;*

2. *функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ задовольняли умові Ліпшиця по аргументах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у тому ж околі.*

Зауваження. Умову Ліпшиця можна замінити більш грубою умовою, але такою, що перевіряється легше, існування обмежених частинних похідних, тобто

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leq M, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

4.1.1 Геометрична інтерпретація розв'язків

Назвемо $(n+1)$-вимірний простір змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ розширеним фазовим простором $\mathbb{R}^{n+1}$. Тоді розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ визначає в просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ деяку криву, що називається інтегральною кривою. Загальний розв'язок (чи загальний інтеграл) визначає сім'ю інтегральних кривих, що всюди щільно заповнюють деяку область $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ (область існування та єдиності розв'язків). Задача Коші ставиться як виділення із сім'ї інтегральних кривих, окремої кривої, що проходить через задану початкову точку $M\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0\right) \in D$.

4.1.2 Механічна інтерпретація розв'язків

В евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ змінних $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ визначає закон руху по деякій траєкторії в залежності від часу t. При такій інтерпретації функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ є складовими швидкості руху, простір зміни перемінних називається фазовим простором, система динамічної, а крива, по якій відбувається рух $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ – фазовою траєкторією. Фазова траєкторія є проекцією інтегральної кривої на фазовий простір.

4.1.3 Зведення одного рівняння вищого порядку до системи рівнянь першого порядку

Нехай маємо диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

Розглянемо заміну змінних

$$x \mapsto t, \quad y \mapsto x_1, \quad , \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \mapsto x_2, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} \mapsto x_n.$$

Тоді одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \quad \dot{x}_1 &= x_2, \\ \quad \dot{x}_2 &= x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \quad \dot{x}_n &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

4.1.4 Зведення системи рівнянь до одного рівняння вищого порядку

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t). \end{cases}$$

і заданий її розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$. Якщо цей розв'язок підставити в перше рівняння, то вийде тотожність і її можна диференціювати

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Підставивши замість $\mathrm{d}x_i(t)/\,\mathrm{d}t$ їх значення, одержимо

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} f_i = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Знову диференціюємо це рівняння й одержимо

$$\frac{\mathrm{d}^3 x_1}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} f_i = F_3(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Продовжуючи процес далі, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}} &= F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{\mathrm{d}^n x_1}{\mathrm{d}t^n} &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1} x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}} &= F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{\mathrm{d}^n x_1}{\mathrm{d}t^n} &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Припустимо, що

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Тоді систему перших $(n-1)$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1} x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}} &= F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

можна розв'язати відносно останніх $(n-1)$ змінних $x_2, x_3, \ldots, x_n$ і одержати

$$\begin{cases} x_2 &= \varphi_2\left(t, x_1, \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1} x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \\ x_3 &= \varphi_3\left(t, x_1, \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1} x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ x_n &= \varphi_n\left(t, x_1, \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1} x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \end{cases}$$

Підставивши одержані вирази в останнє рівняння, запишемо

$$\frac{\mathrm{d}^n x_1}{\mathrm{d}t^n} = F_n\left(t, x_1, \varphi_2\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \ldots, \right.$$
$$\left. \varphi_n\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)\right).$$

Або, після перетворень

$$\frac{\mathrm{d}^n x_1}{\mathrm{d}t^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right),$$

одержимо одне диференціальне рівняння n-го порядку.

У загальному випадку, одержимо, що система диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t). \end{cases}$$

зводиться до одного рівняння n-го порядку

$$\frac{\mathrm{d}^n x_1}{\mathrm{d}t^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right),$$

і системи $(n-1)$ рівнянь зв'язку

$$\begin{cases} x_2 &= \varphi_2\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \\ x_3 &= \varphi_3\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ x_n &= \varphi_n\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \end{cases}$$

Зауваження. Було зроблене припущення, що

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Якщо ця умова не виконана, то можна зводити до рівняння щодо інших змінних, наприклад відносно x_2.

4.1.5 Комбінації, що інтегруються

Визначення. Комбінацією, що інтегрується, називається диференціальне рівняння, отримане шляхом перетворень із системи, диференціальних рівнянь, але яке вже можна легко інтегрувати.

$$\mathrm{d}\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Одна комбінація, що інтегрується, дає можливість одержати одне кінцеве рівняння

$$\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C,$$

яке є першим інтегралом системи.

Геометрично перший інтеграл являє собою n-вимірну поверхню в $(n+1)$-вимірному просторі, що цілком складається з інтегральних кривих.

Якщо знайдено k комбінацій, що інтегруються, то одержуємо k перших інтегралів

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) & = C_1, \\ \Phi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) & = C_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) & = C_n. \end{cases}$$

І, якщо інтеграли незалежні, то хоча б один з визначників

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k)}{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})} \neq 0.$$

Звідси з системи можна виразити k невідомих функцій $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ через інші і підставивши їх у вихідну систему, понизити порядок до $(n-k)$ рівнянь. Якщо $n = k$ і всі інтеграли незалежні, то одержимо загальний інтеграл системи.

Особливо поширеним засобом знаходження комбінацій, що інтегруються, є використання систем у симетричному вигляді.

Систему диференціальних рівнянь, що записана в нормальній формі

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 & = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n & = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{cases}$$

можна переписати у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)} = \dots = \frac{\mathrm{d}x_n}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)} = \frac{\mathrm{d}t}{1}.$$

При такій формі запису всі змінні $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ рівнозначні.

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

називається системою у симетричному вигляді.

При знаходженні комбінацій, що інтегруються, найбільш часто використовується властивість “пропорційності”. А саме, для систем в симетричному вигляді справедлива рівність

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} =$$
$$= \frac{k_1\, dx_1 + k_2\, dx_2 + \ldots k_n\, dx_n}{(k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_nX_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

4.1.6 Вправи для самостійної роботи

Приклад 4.1.1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь зведенням до одного рівняння вищого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Розв'язок. Диференціюємо перше рівняння по змінній x:

$$y'' = \frac{1}{z} - \frac{x}{z^2}z' = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Таким чином, одержали допоміжну систему:

$$y' = \frac{x}{z}, \quad y'' = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

З першого рівняння отримаємо $z = x/y'$. Підставляємо одержане значення в другу систему

$$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{(y')^2}{y}.$$

Маємо однорідне (по y, y', y'') диференціальне рівняння другого порядку. Робимо заміну

$$\begin{aligned} y &= \exp\left\{\int u\, dx\right\}, \\ y' &= u \exp\left\{\int u\, dx\right\}, \\ y'' &= (u^2 + u') \exp\left\{\int u\, dx\right\}. \end{aligned}$$

Після підстановки та скорочення на $e^{\int u\, dx}$ одержуємо

$$u^2 + u' = \frac{u}{x} + u^2,$$

або

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}.$$

Далі

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \implies u = \frac{C_1 x}{2}.$$

Звідси

$$y = \exp\left\{ \int \frac{C_1 x}{2}\,\mathrm{d}x \right\} = e^{C_1 x^2 + \ln C_2},$$

або

$$y_2 = C_2 e^{C_1 x^2}.$$

Змінна z знаходиться з умови $z = x/y'$, або

$$z = \frac{x}{2C_2 C_1 x e^{C_1 x^2}} = \frac{1}{2C_1 C_2} e^{-C_1 x^2}.$$

Приклад 4.1.2. Розв'язати систему в симетричному вигляді за допомогою інтегрованих комбінацій

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Розв'язок. Використовуючи властивості "пропорційності", маємо

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}(x-y)}{-(x-y)} = \frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{(x+y+z)}.$$

1. Візьмемо

   $$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}(x-y)}{-(x-y)}.$$

   Звідси

   $$\ln|z| + \ln|x-y| = \ln C_1,$$

   і перший інтеграл має вигляд $z(x-y) = C_1$.

2. Візьмемо

   $$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{(x+y+z)}.$$

   Звідси

   $$\ln|z| + \ln|x+y+z| = \ln C_2,$$

   і ще один інтеграл має вигляд

   $$\frac{x+y+z}{z} = C_2.$$

Умовою функціональної незалежності одержаних інтегралів є

$$\frac{D(C_1, C_2)}{D(x, y)} \neq 0.$$

Перевіряємо:

$$\frac{D(C_1, C_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} {}^{\partial C_1}\!/\!_{\partial x} & {}^{\partial C_1}\!/\!_{\partial y} \\ {}^{\partial C_2}\!/\!_{\partial x} & {}^{\partial C_2}\!/\!_{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & -z \\ {}^{1}\!/\!_{z} & {}^{1}\!/\!_{z} \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Таким чином

$$z(x-y) = C_1, \quad \frac{x+y+z}{z} = C_2$$

є загальним інтегралом системи.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь, зведенням до одного рівняння вищого порядку

Задача 4.1.3.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{z-x}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y+1;$$

Задача 4.1.4.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)};$$

Задача 4.1.5.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 z, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{x} - yz^2;$$

Задача 4.1.6.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2-z^2+1}{2z}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z+y.$$

Розв'язати системи диференціальних рівнянь за допомогою інтегрованих комбінацій.

Задача 4.1.7.

$$\frac{\mathrm{d}x}{y+z} = \frac{\mathrm{d}y}{x+z} = \frac{\mathrm{d}z}{x+y};$$

Задача 4.1.8.

$$\frac{\mathrm{d}x}{y-x} = \frac{\mathrm{d}y}{x+y+z} = \frac{\mathrm{d}z}{x-y};$$

Задача 4.1.9.

$$\frac{\mathrm{d}x}{z} = \frac{\mathrm{d}y}{xz} = \frac{\mathrm{d}z}{y};$$

Задача 4.1.10.

$$\frac{\mathrm{d}x}{z^2-y^2} = \frac{\mathrm{d}y}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{-y};$$

Задача 4.1.11.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{xy+z};$$

Задача 4.1.12.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+y^2+z^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z};$$

Задача 4.1.13.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(y+z)} = \frac{\mathrm{d}y}{z(z-y)} = \frac{\mathrm{d}z}{y(y-z)};$$

Задача 4.1.14.

$$\frac{\mathrm{d}x}{-x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{xy-2z^2} = \frac{\mathrm{d}z}{xz};$$

Задача 4.1.15.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(z-y)} = \frac{\mathrm{d}y}{y(y-x)} = \frac{\mathrm{d}z}{y^2-xz};$$

Задача 4.1.16.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(y^2-z^2)} = \frac{\mathrm{d}y}{-y(z^2+x^2)} = \frac{\mathrm{d}z}{z(x^2+y^2)}.$$

4.2 Системи лінійних рівнянь. Загальні положення

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases}$$

називається лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь. Система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n, \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n, \end{cases}$$

називається лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь. Якщо ввести векторні позначення

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

то лінійну неоднорідну систему можна переписати у вигляді

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),$$

а лінійну однорідну систему у вигляді

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Якщо функції $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ неперервні в околі точки

$$(x_0, t_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0),$$

то виконані умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, і існує єдиний розв'язок

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t),$$

системи рівнянь, що задовольняє початковим даним

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

4.2.1 Властивості розв'язків лінійних однорідних систем

Властивість 1. Якщо вектор $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ є розв'язком лінійної однорідної системи, то і

$$Cx(t) = (Cx_1(t), Cx_2(t), \dots, Cx_n(t))^T,$$

де C — стала скалярна величина, також є розв'язком цієї системи.

Доведення. Дійсно, за умовою

$$\dot{x}(t) - A(t)x(t) \equiv 0.$$

Але тоді і

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Cx(t)) - A(t)(Cx(t)) = \; = C(\dot{x}(t) - A(t)x(t)) \equiv 0$$

оскільки дорівнює нулю вираз в дужках. Тобто $Cx(t)$ є розв'язком однорідної системи. □

Властивість 2. Якщо дві векторні функції

$$x_1 = (x_{11}(t), x_{21}(t), \dots, x_{n1}(t))^T,$$
$$x_2 = (x_{12}(t), x_{22}(t), \dots, x_{n2}(t))^T$$

є розв'язками однорідної системи, то і їхня сума також буде розв'язком однорідної системи.

Доведення. Дійсно, за умовою

$$\dot{x}_1(t) - A(t)x_1(t) \equiv 0,$$
$$\dot{x}_2(t) - A(t)x_2(t) \equiv 0.$$

Але тоді і

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1(t) + x_2(t)) - A(t)(x_1(t) + x_2(t)) =$$
$$= (\dot{x}_1(t) - A(t)x_1(t)) + (\dot{x}_2(t) - A(t)x_2(t)) \equiv 0$$

тому що дорівнюють нулю вирази в дужках, тобто $x_1(t)+x_2(t)$ є розв'язком однорідної системи. □

Властивість 3. Якщо вектори $x_1 = (x_{11}(t), x_{21}(t), \ldots, x_{n1}(t))^T$, ..., $x_n = (x_{1n}(t), x_{2n}(t), \ldots, x_{nn}(t))^T$ є розв'язками однорідної системи, та і їхня лінійна комбінація з довільними коефіцієнтами також буде розв'язком однорідної системи.

Доведення. Дійсно, за умовою

$$\dot{x}_i(t) - A(t)x_i(t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Але тоді і

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)\right) - A(t)\left(\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i \left(\dot{x}_i(t) - A(t)x_i(t)\right) \equiv 0$$

тому що дорівнює нулю кожний з доданків, тобто $\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$ є розв'язком однорідної системи. □

Властивість 4. Якщо комплексний вектор з дійсними елементами $u(t) + iv(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^T + i(v_1(t), \ldots, v_n(t))^T$ є розв'язком однорідної системи, то окремо дійсна та уявна частини є розв'язками системи.

Доведення. Дійсно за умовою

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t) + iv(t)) - A(t)(u(t) + iv(t)) \equiv 0.$$

Розкривши дужки і зробивши перетворення, одержимо

$$(\dot{u}(t) - A(t)u(t)) + i(\dot{v}(t) - A(t)v(t)) \equiv 0.$$

А комплексний вираз дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли дорівнюють нулю дійсна і уявна частини, тобто

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) - A(t)u(t) \equiv 0, \\ \dot{v}(t) - A(t)v(t) \equiv 0. \end{aligned}$$

що і було потрібно довести. □

Визначення. Вектори

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad x_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

називаються лінійно залежними на відрізку $t \in [a,b]$, якщо існують не всі рівні нулю сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$, такі, що

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t) \equiv 0$$

при $t \in [a,b]$.

Якщо тотожність справедлива лише при $C_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, то вектори лінійно незалежні.

Визначення. Визначник, що складається з векторів $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, тобто

$$W[x_1, x_2, \dots, x_n](t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

називається визначником Вронського.

Теорема 4.3. *Якщо векторні функції $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ лінійно залежні, то визначник Вронського тотожно дорівнює нулю.*

Доведення. За умовою існують не всі рівні нулю $C_1, C_2, \dots, C_n$, такі, що $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t) \equiv 0$ при $t \in [a,b]$.

Або, розписавши покоординатно, одержимо

$$\begin{cases} C_1 x_{11}(t) + C_2 x_{12}(t) + \dots + C_n x_{1n}(t) & \equiv 0, \\ C_1 x_{21}(t) + C_2 x_{22}(t) + \dots + C_n x_{2n}(t) & \equiv 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ C_1 x_{n1}(t) + C_2 x_{n2}(t) + \dots + C_n x_{nn}(t) & \equiv 0. \end{cases}$$

А однорідна система має ненульовий розв'язок $C_1, C_2, \dots, C_n$ тоді і тільки тоді, коли визначник дорівнює нулю, тобто

$$W[x_1, x_2, \dots, x_n](t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \equiv 0, \quad t \in [a,b].$$

□

Теорема 4.4. *Якщо розв'язки $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ лінійної однорідної системи лінійно незалежні, то визначник Вронського не дорівнює нулю в жодній точці $t \in [a,b]$.*

Доведення. Нехай, від супротивного, існує точка $t_0 \in [a, b]$ і

$$W[x_1, x_2, \dots, x_n](t_0) = 0.$$

Тоді виконується система однорідних алгебраїчних рівнянь

$$C_1 x_1(t_0) + C_2 x_2(t_0) + \dots + C_n x_n(t_0) = 0.$$

Або, розписавши покоординатно, одержимо

$$\begin{cases} C_1 x_{11}(t_0) + C_2 x_{12}(t_0) + \dots + C_n x_{1n}(t_0) & = 0, \\ C_1 x_{21}(t_0) + C_2 x_{22}(t_0) + \dots + C_n x_{2n}(t_0) & = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ C_1 x_{n1}(t_0) + C_2 x_{n2}(t_0) + \dots + C_n x_{nn}(t_0) & = 0. \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$. Розглянемо лінійну комбінацію розв'язків з отриманими коефіцієнтами

$$x(t) = C_1^0 x_1(t) + C_2^0 x_2(t) + \dots + C_n^0 x_n(t).$$

Відповідно до властивості 4, ця комбінація буде розв'язком. Крім того, як випливає із системи алгебраїчних рівнянь, для отриманих $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$: $x(t_0) = 0$, $t_0 \in [a, b]$. Але розв'язком, що задовольняють таким умовам, є $x \equiv 0$. І в силу теореми існування та єдиності ці два розв'язки збігаються, тобто $x(t) \equiv 0$ при $t \in [a, b]$, або

$$C_1^0 x_1(t) + C_2^0 x_2(t) + \dots + C_n^0 x_n(t) \equiv 0,$$

або розв'язки $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ лінійно залежні, що суперечить умові теореми.

Таким чином, $W[x_1, x_2, \dots, x_n](t) \neq 0$ у жодній точці $t \in [a, b]$, що і було потрібно довести. □

Теорема 4.5. *Для того щоб розв'язки $x_1(t), \dots, x_n(t)$ були лінійно незалежні, необхідно і достатньо, щоб $W[x_1, \dots, x_n](t) \neq 0$ у жодній точці $t \in [a, b]$.*

Доведення. Випливає з попередніх двох теорем. □

Теорема 4.6. *Загальний розв'язок лінійної однорідної системи представляється у вигляді лінійної комбінації n лінійно незалежних розв'язків.*

Доведення. Як випливає з властивості 3, лінійна комбінація розв'язків також буде розв'язком. Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто завдяки вибору коефіцієнтів $C_1, \ldots, C_n$ можна розв'язати будь-яку задачу Коші $x(t_0) = x_0$ або в координатній формі:

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

Оскільки розв'язки $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ лінійно незалежні, то визначник Вронського відмінний від нуля. Отже, система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 x_{11}(t_0) + C_2 x_{12}(t_0) + \ldots + C_n x_{1n}(t_0) & = x_1^0, \\ C_1 x_{21}(t_0) + C_2 x_{22}(t_0) + \ldots + C_n x_{2n}(t_0) & = x_2^0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ C_1 x_{n1}(t_0) + C_2 x_{n2}(t_0) + \ldots + C_n x_{nn}(t_0) & = x_n^0. \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$.

Тоді лінійна комбінація

$$x(t) = C_1^0 x_1(t) + C_2^0 x_2(t) + \ldots + C_n^0 x_n(t)$$

є розв'язком поставленої задачі Коші. Теорема доведена. □

Зауваження. Максимальне число незалежних розв'язків дорівнює кількості рівнянь n.

Доведення. Це випливає з теореми про загальний розв'язок системи однорідних рівнянь, тому що будь-який інший розв'язок може бути представлений у вигляді лінійної комбінації n лінійно незалежних розв'язків. □

Визначення. Матриця, складена з будь-яких n лінійно незалежних розв'язків, називається фундаментальною матрицею розв'язків системи.

Якщо лінійно незалежними розв'язками будуть

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad x_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

то матриця

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

буде фундаментальною матрицею розв'язків.

Як випливає з попередньої теореми загальний розв'язок може бути представлений у вигляді

$$x_{\text{homo}} = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t),$$

де C_i — довільні сталі. Якщо ввести вектор $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$, то загальний розв'язок можна записати у вигляді $x_{\text{homo}} = X(t)C$.

4.2.2 Формула Якобі

Нехай $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — лінійно незалежні розв'язки однорідної системи, $W[x_1, \ldots, x_n]$ — визначник Вронського. Обчислимо похідну визначника Вронського

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W[x_1, \ldots, x_n] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x'_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x'_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x'_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x'_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x'_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x'_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Оскільки для похідних виконується співвідношення

$$
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{ll}
x'_{11}(t) & = \alpha_{11}x_{11}(t) + \alpha_{12}x_{12}(t) + \ldots + \alpha_{1n}x_{1n}(t), \\
x'_{12}(t) & = \alpha_{11}x_{21}(t) + \alpha_{12}x_{22}(t) + \ldots + \alpha_{1n}x_{2n}(t), \\
\multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\
x'_{1n}(t) & = \alpha_{11}x_{n1}(t) + \alpha_{12}x_{n2}(t) + \ldots + \alpha_{1n}x_{nn}(t),
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{ll}
x'_{21}(t) & = \alpha_{21}x_{11}(t) + \alpha_{22}x_{12}(t) + \ldots + \alpha_{2n}x_{1n}(t), \\
x'_{22}(t) & = \alpha_{21}x_{21}(t) + \alpha_{22}x_{22}(t) + \ldots + \alpha_{2n}x_{2n}(t), \\
\multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\
x'_{2n}(t) & = \alpha_{21}x_{n1}(t) + \alpha_{22}x_{n2}(t) + \ldots + \alpha_{2n}x_{nn}(t),
\end{array}\right. \\
\dotfill \\
\left\{\begin{array}{ll}
x'_{n1}(t) & = \alpha_{n1}x_{11}(t) + \alpha_{n2}x_{12}(t) + \ldots + \alpha_{nn}x_{1n}(t), \\
x'_{2n}(t) & = \alpha_{n1}x_{21}(t) + \alpha_{n2}x_{22}(t) + \ldots + \alpha_{nn}x_{2n}(t), \\
\multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\
x'_{nn}(t) & = \alpha_{n1}x_{n1}(t) + \alpha_{n2}x_{n2}(t) + \ldots + \alpha_{nn}x_{nn}(t),
\end{array}\right.
\end{array}
$$

то після підстановки одержимо

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W[x_1, \ldots, x_n] = \\
&\quad = \begin{vmatrix}
\alpha_{11}x_{11}(t) + \alpha_{12}x_{12}(t) + \ldots + \alpha_{1n}x_{1n}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\
\alpha_{11}x_{21}(t) + \alpha_{12}x_{22}(t) + \ldots + \alpha_{1n}x_{2n}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\alpha_{11}x_{n1}(t) + \alpha_{12}x_{n2}(t) + \ldots + \alpha_{1n}x_{nn}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)
\end{vmatrix} + \\
&\quad + \begin{vmatrix}
x_{11}(t) & \alpha_{21}x_{11}(t) + \alpha_{22}x_{12}(t) + \ldots + \alpha_{2n}x_{1n}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\
x_{21}(t) & \alpha_{21}x_{21}(t) + \alpha_{22}x_{22}(t) + \ldots + \alpha_{2n}x_{2n}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{n1}(t) & \alpha_{21}x_{n1}(t) + \alpha_{22}x_{n2}(t) + \ldots + \alpha_{2n}x_{nn}(t) & \cdots & x_{nn}(t)
\end{vmatrix} + \ldots \\
&\quad \ldots + \begin{vmatrix}
x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & \alpha_{n1}x_{11}(t) + \alpha_{n2}x_{12}(t) + \ldots + \alpha_{nn}x_{1n}(t) \\
x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & \alpha_{n1}x_{21}(t) + \alpha_{n2}x_{22}(t) + \ldots + \alpha_{nn}x_{2n}(t) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & \alpha_{n1}x_{n1}(t) + \alpha_{n2}x_{n2}(t) + \ldots + \alpha_{nn}x_{nn}(t)
\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Розкривши кожний з визначників, і з огляду на те, що визначники з однаковими стовпцями дорівнюють нулю, одержимо

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W[x_1, \ldots, x_n] = a_{11}\begin{vmatrix}
x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\
x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)
\end{vmatrix} +
$$

$$+a_{22}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}+\ldots+a_{nn}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}=$$

$$=(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}=$$

$$=\operatorname{tr} A\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}=\operatorname{tr} A\cdot W[x_1,\ldots,x_n].$$

Або

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W[x_1,\ldots,x_n]=\operatorname{tr} A\cdot W[x_1,\ldots,x_n].$$

Розділивши змінні, одержимо

$$\frac{\mathrm{d}W[x_1,\ldots,x_n]}{W[x_1,\ldots,x_n]}=\operatorname{tr} A\,\mathrm{d}t.$$

Проінтегруємо в межах $t_0\le s\le t$,

$$\ln W[x_1,\ldots,x_n](t)-\ln W[x_1,\ldots,x_n](t_0)=\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr} A\,\mathrm{d}t,$$

або

$$W[x_1,\ldots,x_n](t)=W[x_1,\ldots,x_n](t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr} A\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Взагалі кажучи, доведення проводилося в припущенні, що система рівнянь може залежати від часу, тобто

$$W[x_1,\ldots,x_n](t)=W[x_1,\ldots,x_n](t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr} A(t)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Отримана формула називається формулою Якобі.

4.3 Системи лінійних однорідних рівнянь з сталими коефіцієнтами

Система диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_1 & = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ \dot{x}_1 & = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

де a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$ — сталі величини, називається лінійною однорідною системою з сталими коефіцієнтами. У матричному вигляді вона записується

$$\dot{x} = Ax.$$

4.3.1 Розв'язування систем однорідних рівнянь з сталими коефіцієнтами методом Ейлера

Розглянемо один з методів побудови розв'язку систем з сталими коефіцієнтами.

Розв'язок системи шукаємо у вигляді вектора

$$x(t) = (\alpha_1 e^{\lambda t}, \alpha_2 e^{\lambda t}, \ldots, \alpha_n e^{\lambda t})^T.$$

Підставивши в систему диференціальних рівнянь, одержимо

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda e^{\lambda t} & = a_{11}\alpha_1 e^{\lambda t} + a_{12}\alpha_2 e^{\lambda t} + \ldots + a_{1n}\alpha_n e^{\lambda t}, \\ \alpha_2 \lambda e^{\lambda t} & = a_{21}\alpha_1 e^{\lambda t} + a_{22}\alpha_2 e^{\lambda t} + \ldots + a_{2n}\alpha_n e^{\lambda t}, \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ \alpha_n \lambda e^{\lambda t} & = a_{n1}\alpha_1 e^{\lambda t} + a_{n2}\alpha_2 e^{\lambda t} + \ldots + a_{nn}\alpha_n e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Скоротивши на $e^{\lambda t}$, і перенісши всі члени вправо, запишемо

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n & = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n & = 0, \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n & = 0. \end{cases}$$

Отримана однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння, може бути записаним у векторно-матричній формі

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

і воно називається характеристичним рівнянням. Розкриємо його

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го ступеня має n коренів. Розглянемо різні випадки:

1. Всі корені характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (власні числа матриці A) дійсні і різні. Підставляючи їх по черзі в систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n & = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_i)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)\alpha_n & = 0. \end{cases}$$

одержуємо відповідні ненульові розв'язки системи

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^2 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \alpha^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \vdots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

що являють собою власні вектори, які відповідають власним числам λ_i, $i = \overline{1, n}$.

У такий спосіб одержимо n розв'язків

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 x} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}, x_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 e^{\lambda_2 x} \\ \alpha_2^2 e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ \alpha_n^2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \ldots, x_n(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^n e^{\lambda_n x} \\ \alpha_2^n e^{\lambda_n x} \\ \vdots \\ \alpha_n^n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

Причому оскільки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — різні а $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ – відповідні їм власні вектори, то розв'язки $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ — лінійно незалежні, і загальний розв'язок системи має вигляд

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t).$$

Або у векторно-матричній формі запису

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \alpha_1^n e^{\lambda_n t} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \alpha_2^n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі.

2. Нехай $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ — пара комплексно спряжених коренів. Візьмемо один з них, наприклад $\lambda = p + iq$. Комплексному власному числу відповідає комплексний власний вектор

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + is_1 \\ r_2 + is_2 \\ \vdots \\ r_n + is_n \end{pmatrix}$$

і, відповідно, розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1)e^{(p+iq)t} \\ (r_2 + is_2)e^{(p+iq)t} \\ \vdots \\ (r_n + is_n)e^{(p+iq)t} \end{pmatrix}$$

Використовуючи залежність $e^{(p+iq)t} = e^{pt}(\cos qt + i \sin qt)$, перетворимо розв'язок до вигляду:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1)e^{pt}(\cos qt + i \sin qt) \\ (r_2 + is_2)e^{pt}(\cos qt + i \sin qt) \\ \vdots \\ (r_n + is_n)e^{pt}(\cos qt + i \sin qt) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1 \cos qt - s_1 \sin qt) \\ e^{pt}(r_2 \cos qt - s_2 \sin qt) \\ \vdots \\ e^{pt}(r_n \cos qt - s_n \sin qt) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{pt}(s_1 \cos qt + r_1 \sin qt) \\ e^{pt}(s_2 \cos qt + r_2 \sin qt) \\ \vdots \\ e^{pt}(s_n \cos qt + r_n \sin qt) \end{pmatrix} =$$

$$= u(t) + iv(t).$$

І, як випливає з властивості 4 розв'язків однорідних систем, якщо комплексна функція $u(t) + iv(t)$ дійсного аргументу є розв'язком однорідної системи, то окремо дійсна і уявна частини також будуть розв'язками, тобто комплексним власним числам $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ відповідають лінійно незалежні розв'язки

$$u(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1 \cos qt - s_1 \sin qt) \\ e^{pt}(r_2 \cos qt - s_2 \sin qt) \\ \vdots \\ e^{pt}(r_n \cos qt - s_n \sin qt) \end{pmatrix},$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(s_1 \cos qt + r_1 \sin qt) \\ e^{pt}(s_2 \cos qt + r_2 \sin qt) \\ \vdots \\ e^{pt}(s_n \cos qt + r_n \sin qt) \end{pmatrix}$$

3. Якщо характеристичне рівняння має кратний корінь λ кратності γ, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\gamma = \lambda$, то розв'язок системи рівнянь має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1^1 + \alpha_1^2 t + \ldots + \alpha_1^\gamma t^{\gamma-1})\, e^{\lambda t} \\ (\alpha_2^1 + \alpha_2^2 t + \ldots + \alpha_2^\gamma t^{\gamma-1})\, e^{\lambda t} \\ \vdots \\ (\alpha_n^1 + \alpha_n^2 t + \ldots + \alpha_n^\gamma t^{\gamma-1})\, e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Підставивши його у вихідне диференціальне рівняння і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, одержимо γn рівнянь, що містять γn невідомих. Тому що корінь характеристичного рівняння λ має кратність γ, то ранг отриманої системи $\gamma n - \gamma = \gamma(n-1)$. Уводячи γ довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_\gamma$ і розв'язуючи систему, одержимо

$$\alpha_i^j = \alpha_i^j(C_1, C_2, \ldots, C_\gamma), \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,\gamma}.$$

4.3.2 Розв'язок систем однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами матричним методом

Досить універсальним методом розв'язку лінійних однорідних систем з сталими коефіцієнтами є матричний метод. Він полягає в наступному. Розглядається лінійна система з сталими коефіцієнтами, що записана у векторно-матричному вигляді

$$\dot{x}(t) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Робиться невироджене перетворення $x = Sy$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\det S \neq 0$, де вектор $y(t)$ — нова невідома векторна функція. Тоді рівняння прийме вигляд

$$S\dot{y} = ASy,$$

або

$$\dot{y} = S^{-1}ASy.$$

Для довільної матриці A завжди існує неособлива матриця S, що приводить її до жорданової форми, тобто $S^{-1}AS = \Lambda$, де Λ — жорданова форма матриці A. І система диференціальних рівнянь прийме вигляд

$$\dot{y} = \Lambda y, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Складемо характеристичне рівняння матриці A

$$\det(D - \lambda E) = 0,$$

або

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го ступеня має n коренів. Розглянемо різні випадки:

1. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — дійсні різні числа. Тоді матриця Λ має вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n. \end{pmatrix}$$

   І перетворена система диференціальних рівнянь розпадається на n незалежних рівнянь

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, \quad \ldots, \quad \dot{y}_n = \lambda_n y_n.$$

   Розв'язуючи кожне окремо, отримаємо

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad y_n = C_n e^{\lambda_n t}.$$

   Або в матричному вигляді

$$y = e^{\Lambda t} C,$$

де

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Звідси розв'язок вихідного рівняння має вигляд $x = Se^{\Lambda t}C$. Для знаходження матриці S треба розв'язати матричне рівняння

$$S^{-1}AS = \Lambda$$

або

$$AS = S\Lambda$$

де Λ — жорданова форма матриці A. Якщо матрицю S записати у вигляді

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix},$$

то для кожного з стовпчиків $s_i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)^T$, матричне рівняння перетвориться до

$$As_i = \lambda_i s_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким чином, у випадку різних дійсних власних чисел матриця S являє собою набір n власних векторів, що відповідають різним власним числам.

2. Нехай $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ — комплексний корінь. Тоді відповідна клітка Жордана має вигляд

$$\Lambda_{1,2} = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix},$$

а перетворена система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = py_1 + qy_2, \\ \dot{y}_2 = -qy_1 + py_2. \end{cases}$$

Неважко перевірити, що розв'язок отриманої системи диференціальних рівнянь має вигляд

$$y_1 = c_1 e^{pt} \cos qt + c_2 e^{pt} \sin qt,$$

$$y_2 = c_2 e^{pt} \cos qt - c_1 e^{pt} \sin qt.$$

Або в матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt} \cos qt & e^{pt} \sin qt \\ -e^{pt} \sin qt & e^{pt} \cos qt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, комплексно-спряженим власним числам $\lambda_{1,2}$ відповідає розв'язок

$$y = e^{\Lambda t} C,$$

де

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{pt} \cos qt & e^{pt} \sin qt \\ -e^{pt} \sin qt & e^{pt} \cos qt \end{pmatrix}$$

3. Нехай λ — кратний корінь, кратності $m \leq n$, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \lambda$ і йому відповідають $r \leq m$ лінійно незалежних векторів. Тоді клітка Жордана, що відповідає цьому власному числу, має вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2, \end{pmatrix}$$

де

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r},$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-r) \times (m-r)}.$$

І перетворена підсистема, що відповідає власному числу λ, розпадається не дві підсистеми

$$\dot{y}_1 = \Lambda_1 y_1, \quad y_1 \in \mathbb{R}^r,$$
$$\dot{y}_2 = \Lambda_2 y_2, \quad y_2 \in \mathbb{R}^{m-r},$$

Розв'язок першої знаходиться з використанням зазначеного в першому пункті підходу. Розглянемо другу підсистему. Запишемо її в координатному вигляді

Розв'язок останнього рівняння цієї підсистеми має вигляд

$$y_{2,m-r} = c_{2,m-r}e^{\lambda t}$$

Підставимо його в передостаннє рівняння. Одержуємо

$$\dot{y}_{2,m-r-1} = \lambda y_{2,m-r-1} + c_{2,m-r}e^{\lambda t}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд суми загального розв'язку однорідного і частинного розв'язку неоднорідних рівнянь, тобто

$$y_{2,m-r-1} = y_{2,m-r-1,\text{homo}} + y_{2,m-r-1,\text{hetero}}.$$

Загальний розв'язок однорідного має вигляд

$$\dot{y}_{2,m-r-1,\text{homo}} = c_{2,m-r-1}e^{\lambda t}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного шукаємо методом невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$y_{2,m-r-1,\text{hetero}} = Ate^{\lambda t},$$

де A — невідома стала. Підставивши в неоднорідне рівняння, одержимо

$$Ae^{\lambda t} + A\lambda te^{\lambda t} = A\lambda te^{\lambda t} + c_{2,m-r}e^{\lambda t}.$$

Звідси $A = c_{2,m-r}$ і загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{2,m-r-1} = c_{2,m-r-1}e^{\lambda t} + c_{2,m-r}te^{\lambda t}.$$

Піднявшись ще на один крок нагору одержимо

$$y_{2,m-r-1} = c_{2,m-r-2}e^{\lambda t} + c_{2,m-r-1}te^{\lambda t} + c_{2,m-r}\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}.$$

Продовжуючи процес далі, маємо

$$y_{2,1} = c_{2,1}e^{\lambda t} + c_{2,2}te^{\lambda t} + \ldots + c_{2,m-r}\frac{t^{m-r-1}}{(m-r-1)!}e^{\lambda t}.$$

Або у векторно-матричному вигляді

$$y_2(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{m-r-2}}{(m-r-2)!} & \dfrac{t^{m-r-1}}{(m-r-1)!} \\ 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{m-r-3}}{(m-r-3)!} & \dfrac{t^{m-r-2}}{(m-r-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ \vdots \\ c_{2,m-r-1} \\ c_{2,m-r} \end{pmatrix}.$$

Додавши першу підсистему, одержимо

$$y = \begin{pmatrix} e^{\Lambda_1 t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\Lambda_2 t} \end{pmatrix} C,$$

де

$$e^{\Lambda_1 t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

$$e^{\Lambda_2 t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{m-r-2}}{(m-r-2)!} & \dfrac{t^{m-r-1}}{(m-r-1)!} \\ 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{m-r-3}}{(m-r-3)!} & \dfrac{t^{m-r-2}}{(m-r-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,r} & c_{2,1} & \cdots & c_{2,m-r} \end{pmatrix}^T.$$

Для останніх двох випадків матриця знаходиться як розв'язок матричного рівняння

$$AS = S\Lambda$$

4.3.3 Вправи для самостійної роботи

При розв'язуванні систем методом Ейлера складають характеристичне рівняння, і в залежності від його коренів для кожного λ_i, $i = \overline{1, n}$ знаходять відповідний лінійно незалежний розв'язок.

Приклад 4.3.1. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$.

Коренями будуть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

1. Знайдемо власний вектор, що відповідає $\lambda_1 = 1$. Підставивши в систему
$$\begin{cases} (2-\lambda)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + (4-\lambda)\alpha_2 = 0, \end{cases}$$
одержимо
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0. \end{cases}$$
Звідси $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$.

2. Знайдемо власний вектор, що відповідає $\lambda_2 = 5$. Підставивши в систему, одержимо
$$\begin{cases} -3\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$
Звідси $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$.

Таким чином, одержимо розв'язок системи у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.3.2. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$.

Коренями будуть $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

Візьмемо $\lambda_1 = 2 + i$. Підставивши в систему

$$\begin{cases} (1-\lambda)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -2\alpha_1 + (3-\lambda)\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

одержимо

$$\begin{cases} (-1-i)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -2\alpha_1 + (1-i)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1 + i$.

Запишемо вектор розв'язку

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(2+i)t} \\ (1+i)e^{(2+i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos t + i \sin t) \\ e^{2t}(1+i)(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Оскільки комплексно-спряженому розв'язку відповідають два лінійно незалежних розв'язки, то загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) & e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.3.3. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.

Коренями будуть $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Оскільки

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\Bigg|_{\lambda=3} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

то матриця має один власний вектор. Тому розв'язок шукаємо у вигляді

$$x = (a_1^1 + a_1^2 t)e^{3t}, \quad y = (a_2^1 + a_2^2 t)e^{3t}.$$

Підставимо в систему

$$\begin{cases} 3e^{3t}(a_1^1 + a_1^2 t) + a_1^2 e^{3t} = 2(a_1^1 + a_1^2 t)e^{3t} + (a_2^1 + a_2^2)e^{3t}, \\ 3e^{3t}(a_2^1 + a_2^2 t) + a_2^2 e^{3t} = -(a_1^1 + a_1^2 t)e^{3t} + 4(a_2^1 + a_2^2)e^{3t}. \end{cases}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових членах, одержимо дві системи

$$\begin{cases} 3a_1^2 = 2a_1^2 + a_2^2, \\ 3a_2^2 = -a_1^2 + 4a_2^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a_1^1 + a_1^2 = 2a_1^1 + a_2^1, \\ 3a_2^1 + a_2^2 = -a_1^1 + 4a_2^1. \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} -a_1^2 + a_2^2 = 0, \\ -a_1^2 + a_2^2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -a_1^1 + a_2^1 = a_1^2, \\ -a_1^1 + a_2^1 = a_1^2. \end{cases}$$

З першої системи одержуємо $a_1^2 = a_2^2 = c_1$. Підставивши в другу, одержимо $-a_1^1 + a_2^1 = c_1$. Поклавши $a_1^1 = c_2$, одержимо $c_2^1 = c_1 + c_2$. Таким чином,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_2 + c_1 t)e^{3t} \\ (c_1 + c_2 + c_1 t)e^{3t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} te^{3t} \\ (1+t)e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} te^{3t} & e^{3t} \\ (1+t)e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо ці ж системи матричним методом.

Приклад 4.3.1. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$.

Його коренями будуть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Тому

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо матричне рівняння $AS = S\Lambda$, або

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Воно розпадається на два

$$\begin{cases} 2a_1^1 + a_2^1 = a_1^1, \\ 3a_1^1 + 4a_2^1 = a_2^1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_1^2 + a_2^2 = 5a_1^2, \\ 3a_1^2 + 4a_2^2 = 5a_2^2, \end{cases}$$

Після перенесення всіх членів уліво, одержимо

$$\begin{cases} a_1^1 + a_2^1 = 0, \\ 3a_1^1 + 3a_2^1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -3a_1^2 + a_2^2 = 0, \\ 3a_1^2 - a_2^2 = 0, \end{cases}$$

Звідси $a_1^1 = 1$, $a_2^1 = -1$, $a_1^2 = 1$, $a_2^2 = 3$.

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.3.2. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$.

Коренями будуть $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Тому

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{pmatrix}.$$

Матричне рівняння має вигляд $AS = S\Lambda$, чи

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розпишемо його поелементно

$$\begin{cases} a_1^1 + a_2^1 = 2a_1^1 - a_1^2, \\ -2a_1^1 + 3a_2^1 = 2a_2^1 - a_2^2, \\ a_1^2 + a_2^2 = a_1^1 + 2a_1^2, \\ -2a_1^2 + 3a_2^2 = a_2^1 + 2a_2^2. \end{cases}$$

На відміну від попереднього пункту (і це істотно ускладнює обчислення) система не розщеплюється на дві незалежні підсистеми. Після перенесення всіх членів в одну сторону, одержимо систему

$$\begin{cases} -a_1^1 - a_1^2 + a_2^1 = 0, \\ -2a_1^1 + a_2^1 + a_2^2 = 0, \\ -a_1^1 - a_1^2 + a_2^2 = 0, \\ -2a_1^2 + a_2^1 + a_2^2 = 0. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на -2 і, склавши з другим, підставимо на місце другого. Далі, помножимо перше рівняння на -1 і, склавши з третім, поставимо його на місце третього. Одержуємо систему

$$\begin{cases} -a_1^1 + a_1^2 + a_2^1 = 0, \\ -2a_1^2 - a_2^1 + a_2^2 = 0, \\ -2a_1^2 - a_2^1 + a_2^2 = 0, \\ -2a_1^2 - a_2^1 + a_2^2 = 0. \end{cases}$$

Останні два рівняння можна відкинути. Залишається

$$\begin{cases} -a_1^1 + a_1^2 + a_2^1 = 0, \\ -2a_1^2 - a_2^1 + a_2^2 = 0. \end{cases}$$

Покладаємо $a_1^2 = a_2^2 = 1$. Тоді $a_2^1 = -1$, $a_1^1 = 0$. Таким чином,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \\ -e^{2t}(\cos t + \sin t) & e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.3.3. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.

Коренями будуть $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Оскільки

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \Bigg|_{\lambda=3} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

то матриця має один власний вектор і клітка Жордана має вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0t & e^{3t}\cos t \end{pmatrix}.$$

Матричне рівняння має вигляд $AS = S\Lambda$, чи

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розпишемо його поелементно

$$\begin{cases} 2a_1^1 + a_2^1 = 3a_1^1, \\ -a_1^1 + 4a_2^1 = 3a_2^1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_1^2 + a_2^2 = a_1^1 + 3a_1^2, \\ -a_1^2 + 4a_2^2 = a_2^1 + 3a_2^2. \end{cases}$$

На відміну від комплексних коренів, можна розв'язати спочатку першу підсистему, а потім другу. Перша має вид

$$\begin{cases} -a_1^1 + a_2^1 = 0, \\ -a_1^1 + a_2^1 = 0, \end{cases}$$

Звідси $a_1^1 = a_2^1 = 1$.

Підставивши в другу, одержимо

$$\begin{cases} -a_1^2 + a_2^2 = 1, \\ -a_1^2 + a_2^2 = 1. \end{cases}$$

Звідси $a_2^2 = 1$, $a_1^2 = 0$. Таким чином одержали

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ -0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ e^{3t} & (t+1)e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Якщо власні числа дійсні різні, то обидва методи еквівалентні. Якщо власні числа комплексні, переважніше метод Ейлера, якщо кратні, то матричний метод.

Розв'язати лінійні однорідні системи методом Ейлера чи матричним методом.

Задача 4.3.4.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$$

Задача 4.3.5.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

Задача 4.3.6.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$

Задача 4.3.7.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

Задача 4.3.8.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$$

Задача 4.3.9.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$$

Задача 4.3.10.

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$$

Розв'язати лінійні однорідні системи методом Ейлера чи матричним методом (після системи вкзані власні числа для спрощення обчислень).

Задача 4.3.11.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$$

($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$)

Задача 4.3.12.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$$

($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$)

Задача 4.3.13.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3)$

Задача 4.3.14.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5)$

Задача 4.3.15.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y - 2z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 6z - 6y + 5z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$

Задача 4.3.16.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 + \pm 3i)$

Задача 4.3.17.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = -x + y - z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm i)$

Задача 4.3.18.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = -2x - y + 2z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = \pm i)$

Задача 4.3.19.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3)$

Задача 4.3.20.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$

Задача 4.3.21.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$

Задача 4.3.22.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y + 2z, \\ \dot{z} = 2x - 4y. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -5)$

Задача 4.3.23.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = -y + 2z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2)$

Задача 4.3.24.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 2z, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = -y + 2z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$

Задача 4.3.25.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + 4z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 3)$

Задача 4.3.26.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - z, \\ \dot{z} = -x + z. \end{cases}$$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2)$

4.4 Лінійні неоднорідні системи

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \dot{x}_2 & = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ \dot{x}_n & = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_2(t), \end{cases}$$

чи у векторно-матричному вигляді

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

називається системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

4.4.1 Властивості розв'язків лінійних неоднорідних систем

Властивість 1. Якщо вектор

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}^T$$

є розв'язком лінійної неоднорідної системи, а

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \end{pmatrix}^T$$

розв'язком відповідної лінійної однорідної системи, то сума $x(t) + y(t)$ є розв'язком лінійної неоднорідної системи.

Доведення. Дійсно, за умовою

$$\dot{x}(t) - A(t)x(t) \equiv f(t)$$

і

$$\dot{y}(t) - A(t)y(t) \equiv 0.$$

Але тоді і

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)+y(t))-A(t)(x(t)+y(t))=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)-A(t)x(t)\right)+$$
$$+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)-A(t)y(t)\right)\equiv f(t)+0\equiv f(t),$$

тобто $x(t)+y(t)$ є розв'язком неоднорідної системи. □

Властивість 2 (Принцип суперпозиції)**.** Якщо вектори

$$x_i(t)=\begin{pmatrix}x_{1i}(t) & \cdots & x_{ni}(t)\end{pmatrix}^T, \quad i=\overline{1,n}$$

є розв'язками лінійних неоднорідних систем

$$\dot{x}(t)-A(t)x(t)\equiv f_i(t) \quad i=\overline{1,n}$$

де

$$f_i(t)=\begin{pmatrix}f_{1i}(t) & \cdots & f_{ni}(t)\end{pmatrix}^T, \quad i=\overline{1,n},$$

то вектор $x(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t)$, де C_i — довільні сталі буде розв'язком лінійної неоднорідної системи

$$\dot{x}(t)-A(t)x(t)\equiv\sum_{i=1}^{n}C_i f_i(t) \quad i=\overline{1,n}.$$

Доведення. Дійсно, за умовою виконуються n тотожностей

$$\dot{x}_i(t)-A(t)x_i(t)\equiv f_i(t) \quad i=\overline{1,n}.$$

Склавши лінійну комбінацію з лівих і правих частин, одержимо

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t)\right)-A(t)\left(\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t)\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}C_i(\dot{x}_i(t)-A(t)x_i(t))\equiv\sum_{i=1}^{n}C_i f_i(t),$$

тобто лінійна комбінація $x(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t)$ буде розв'язком системи

$$\dot{x}(t)-A(t)x(t)\equiv\sum_{i=1}^{n}C_i f_i(t) \quad i=\overline{1,n}.$$

□

Властивість 3. Якщо комплексний вектор з дійсними елементами

$$x(t) = u(t) + iv(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t) \end{pmatrix}^T + i \begin{pmatrix} v_1(t) & \cdots & v_n(t) \end{pmatrix}^T$$

є розв'язком неоднорідної системи $\dot{x} = A(t)x + f(t)$, де

$$f(t) = p(t) + iq(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) & \cdots & p_n(t) \end{pmatrix}^T + i \begin{pmatrix} q_1(t) & \cdots & q_n(t) \end{pmatrix}^T,$$

то окремо дійсна і уявна частини є розв'язками систем $\dot{x} = A(t)x + p(t)$ і $\dot{x} = A(t)x + q(t)$ відповідно.

Доведення. Дійсно, за умовою

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t) + iv(t)) - A(t)(u(t) + iv(t) \equiv p(t) + iq(t).$$

Розкривши дужки і перетворивши, одержимо

$$(\dot{u}(t) - A(t)u(t)) + i(\dot{v}(t) - A(t)v(t)) \equiv p(t) + iq(t).$$

Але комплексні вирази рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні дійсні та уявні частини, що і було потрібно довести. □

Теорема 4.7 (про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи)**.** *Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи складається із суми загального розв'язку однорідної системи і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідної системи.*

Доведення. Нехай $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$ — загальний розв'язок однорідної системи і $y(t)$ — частинний розв'язок неоднорідної. Тоді, як випливає з властивості 1, їхня сума $x(t) + y(t)$ буде розв'язком неоднорідної системи.

Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто підбором сталих C_i, $i = \overline{1, n}$ можна розв'язати довільну задачу Коші

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

Оскільки $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$ — загальний розв'язок однорідного рівняння, то вектори $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ лінійно незалежні, $W[x_1, \ldots, x_n](t) \neq 0$ і система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 x_{11}(t_0) + C_2 x_{12}(t_0) + \ldots + C_n x_{1n}(t_0) & = x_1^0 - y_1(t_0), \\ C_1 x_{21}(t_0) + C_2 x_{22}(t_0) + \ldots + C_n x_{2n}(t_0) & = x_2^0 - y_2(t_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ C_1 x_{n1}(t_0) + C_2 x_{n2}(t_0) + \ldots + C_n x_{nn}(t_0) & = x_n^0 - y_n(t_0) \end{cases}$$

має єдиний розв'язок C_i^0, $i = \overline{1, n}$. І лінійна комбінація $z(t) = y(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i^0 x_i(t)$ з отриманими сталими є розв'язком поставленої задачі Коші. □

4.4.2 Побудова частинного розв'язку неоднорідної системи методом варіації довільних сталих

Як випливає з останньої теореми, для побудови загального розв'язку неоднорідної системи потрібно розв'язати однорідну і яким-небудь засобом знайти частинний розв'язок неоднорідної системи. Розглянемо метод, який називається методом варіації довільної сталої.

Нехай маємо систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

і $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$ — загальний розв'язок однорідної системи. Розв'язок неоднорідної будемо шукати в такому ж вигляді, але вважати C_i не сталими, а невідомими функціями, тобто $C_i = C_i(t)$ і

$$x_{\text{hetero}}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) x_i(t),$$

чи в матричній формі

$$x_{\text{hetero}}(t) = X(t)C(t),$$

де $X(t)$ — фундаментальна матриця розв'язків, $C(t)$ — вектор з невідомих функцій. Підставивши в систему, одержимо

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t)C(t) + X(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)X(t)C(t) + f(t),$$

чи

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) - A(t)X(t)\right) C(t) + X(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = f(t).$$

Оскільки $X(t)$ — фундаментальна матриця, тобто матриця складена з розв'язків, то

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) - A(t)X(t) \equiv 0$$

і залишається система рівнянь

$$X(t)C'(t) = f(t).$$

Розписавши покоординатно, одержимо

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_1' x_{11}(t) + C_2' x_{12}(t) + \ldots + C_n' x_{1n}(t) & = f_1(t), \\ C_1' x_{21}(t) + C_2' x_{22}(t) + \ldots + C_n' x_{2n}(t) & = f_2(t), \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ C_1' x_{n1}(t) + C_2' x_{n2}(t) + \ldots + C_n' x_{nn}(t) & = f_n(t). \end{array} \right.$$

Оскільки визначником системи є визначник Вронського і він не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок і функції визначаються в такий спосіб

$$
\begin{aligned}
C_1(t) &= \int \frac{\begin{vmatrix} f_1(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ f_2(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}}{W[x_1, \ldots, x_n](t)} \, \mathrm{d}t, \\
C_2(t) &= \int \frac{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & f_1(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & f_2(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & f_n(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}}{W[x_1, \ldots, x_n](t)} \, \mathrm{d}t, \\
\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_n(t) &= \int \frac{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & f_1(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & f_2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & f_n(t) \end{vmatrix}}{W[x_1, \ldots, x_n](t)} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Звідси частинний розв'язок неоднорідної системи має вигляд

$$x_{\text{hetero}}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) x_i(t).$$

Для лінійної неоднорідної системи на площині

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t), \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t) \end{cases}$$

метод варіації довільної сталої реалізується таким чином.

Нехай

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t). \end{pmatrix}$$

Фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи. Тоді частинний розв'язок неоднорідної шукається з системи

$$\begin{cases} C_1' x_{11}(t) + C_2' x_{12}(t) = f_1(t), \\ C_2' x_{21}(t) + C_2' x_{22}(t) = f_2(t). \end{cases}$$

Звідси

$$C_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} f_1(t) & x_{12}(t) \\ f_2(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}}, \qquad C_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & f_1(t) \\ x_{21}(t) & f_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}}$$

І загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

4.4.3 Формула Коші

Нехай $X(t, t_0)$ — фундаментальна система, нормована при $t = t_0$ тобто $X(t_0, t_0) = E$, де E — одинична матриця. Загальний розв'язок однорідної системи має вигляд

$$x(t) = X(t, t_0)C.$$

Вважаючи C невідомою вектором-функцією і повторюючи викладення методу варіації довільної постійний, одержимо

$$X(t, t_0)C'(t) = f(t).$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = X^{-1}(t, t_0)f(t).$$

Проінтегруємо отриманий вираз

$$C(t) = C + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau, t_0)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Тут C — вектор із сталих, що отриманий при інтегруванні системи. Підставивши у вихідний вираз, одержимо:

$$x(t) = X(t, t_0)\left(C + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau, t_0)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \\ = X(t, t_0)C + \int_{t_0}^{t} X(t, t_0)X^{-1}(\tau, t_0)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Якщо $X(t, t_0)$ — фундаментальна матриця, нормована при $t = t_0$, то $X(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$. Звідси

$$\begin{aligned} X(t, t_0)X^{-1}(\tau, t_0) &= X(t)X^{-1}(t_0)\left(X(\tau)X^{-1}(t_0)\right)^{-1} = \\ &= X(t)X^{-1}(\tau) = X(t, \tau). \end{aligned}$$

Підставивши початкові значення $x(t_0 = x_0)$ і з огляду на те, що фундаметнальна матриця нормована, тобто $X(t_0, t_0) = E$, одержимо

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Отримана формула називається формулою Коші загального розв'язку неоднорідного рівняння.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння, що задовольняє нульовій початковій умові, має вид

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} X(t, \tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Якщо система з сталою матрицею A, то

$$X(t, t_0) = X(t - t_0), \qquad X(t, \tau) = X(t - \tau).$$

І формула Коші має вигляд

$$x(t) = X(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t - \tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

4.4.4 Метод невизначених коефіцієнтів

Якщо система лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами, а векторна функція $f(t)$ спеціального виду, то частинний розв'язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Доведення існування частинного розв'язку зазначеного виду аналогічно доведенню для лінійних рівнянь вищих порядків.

1. Нехай кожна з компонент вектора $f(x)$ є многочленом степеню не більш ніж s, тобто

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^1 t + A_s^1 \\ A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^2 t + A_s^2 \\ \vdots \\ A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^n t + A_s^n \end{pmatrix}.$$

(а) Якщо характеристичне рівняння не має нульового кореня, тобто $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, то частинний розв'язок шукається в такому ж вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^1 t + B_s^1 \\ B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^2 t + B_s^2 \\ \vdots \\ B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^n t + B_s^n \end{pmatrix}.$$

(б) Якщо характеристичне рівняння має нульовий корінь кратності r, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$, то частинний розв'язок шукається у вигляді многочлена степеню $s + r$, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 t^{s+r} + B_1^1 t^{s+r-1} + \ldots + B_{s+r-1}^1 t + B_{s+r}^1 \\ B_0^2 t^{s+r} + B_1^2 t^{s+r-1} + \ldots + B_{s+r-1}^2 t + B_{s+r}^2 \\ \vdots \\ B_0^n t^{s+r} + B_1^n t^{s+r-1} + \ldots + B_{s+r-1}^n t + B_{s+r}^n \end{pmatrix}.$$

Причому перші $(s+1)n$ коефіцієнти B_i^j, $i = \overline{0,s}$, $j = \overline{1,n}$ знаходяться точно, а інші rn — з точністю до сталих інтегрування $C_1, \ldots, C_n$, що входять у загальний розв'язок однорідних систем.

2. Нехай $f(t)$ має вид

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^1 t + A_s^1) \\ e^{pt}(A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^2 t + A_s^2) \\ \vdots \\ e^{pt}(A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^n t + A_s^n) \end{pmatrix}.$$

(а) Якщо характеристичне рівняння не має коренем значення p, тобто $\lambda_i \neq p$, $i = \overline{1,n}$, то частинний розв'язок шукається в такому ж вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^1 t + B_s^1) \\ e^{pt}(B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^2 t + B_s^2) \\ \vdots \\ e^{pt}(B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^n t + B_s^n) \end{pmatrix}.$$

(б) Якщо p є коренем характеристичного рівняння кратності r, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = p$, то частинний розв'язок шукається у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^{s+r} + B_1^1 t^{s+r-1} + \ldots + B_{s+r-1}^1 t + B_{s+r}^1) \\ e^{pt}(B_0^2 t^{s+r} + B_1^2 t^{s+r-1} + \ldots + B_{s+r-1}^2 t + B_{s+r}^2) \\ \vdots \\ e^{pt}(B_0^n t^{s+r} + B_1^n t^{s+r-1} + \ldots + B_{s+r-1}^n t + B_{s+r}^n) \end{pmatrix}.$$

І, як у попередньому пункті, перші $(s+1)n$ коефіцієнти B_i^j, $i = \overline{0,s}$, $j = \overline{1,n}$, а інші з точністю до сталих інтегрування $C_1, \ldots, C_n$.

3. Нехай $f(t)$ має вигляд:

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^1 t + A_s^1)\cos qt \\ e^{pt}(A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^2 t + A_s^2)\cos qt \\ \vdots \\ e^{pt}(A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^n t + A_s^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^1 t + B_s^1)\sin qt \\ e^{pt}(B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^2 t + B_s^2)\sin qt \\ \vdots \\ e^{pt}(B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^n t + B_s^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

(а) Якщо характеристичне рівняння не має коренем значення $p \pm iq$, то частинний розв'язок шукається в такому ж вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(C_0^1 t^s + C_1^1 t^{s-1} + \ldots + C_{s-1}^1 t + C_s^1)\cos qt \\ e^{pt}(C_0^2 t^s + C_1^2 t^{s-1} + \ldots + C_{s-1}^2 t + C_s^2)\cos qt \\ \vdots \\ e^{pt}(C_0^n t^s + C_1^n t^{s-1} + \ldots + C_{s-1}^n t + C_s^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} e^{pt}(D_0^1 t^s + D_1^1 t^{s-1} + \ldots + D_{s-1}^1 t + D_s^1)\sin qt \\ e^{pt}(D_0^2 t^s + D_1^2 t^{s-1} + \ldots + D_{s-1}^2 t + D_s^2)\sin qt \\ \vdots \\ e^{pt}(D_0^n t^s + D_1^n t^{s-1} + \ldots + D_{s-1}^n t + D_s^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

(б) Якщо $p \pm iq$ є коренем характеристичного рівняння кратності r, то частинний розв'язок має вигляд

$$
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} e^{pt}(C_0^1 t^{s+r} + C_1^1 t^{s+r-1} + \ldots + C_{s+r-1}^1 t + C_{s+r}^1)\cos qt \\ e^{pt}(C_0^2 t^{s+r} + C_1^2 t^{s+r-1} + \ldots + C_{s+r-1}^2 t + C_{s+r}^2)\cos qt \\ \vdots \\ e^{pt}(C_0^n t^{s+r} + C_1^n t^{s+r-1} + \ldots + C_{s+r-1}^n t + C_{s+r}^n)\cos qt \end{pmatrix} +
$$

$$
+ \begin{pmatrix} e^{pt}(D_0^1 t^{s+r} + D_1^1 t^{s+r-1} + \ldots + D_{s+r-1}^1 t + D_{s+r}^1)\sin qt \\ e^{pt}(D_0^2 t^{s+r} + D_1^2 t^{s+r-1} + \ldots + D_{s+r-1}^2 t + D_{s+r}^2)\sin qt \\ \vdots \\ e^{pt}(D_0^n t^{s+r} + D_1^n t^{s+r-1} + \ldots + D_{s+r-1}^n t + D_{s+r}^n)\sin qt \end{pmatrix}.
$$

4.4.5 Вправи для самостійної роботи

Приклад 4.4.1. Розв'язати систему неоднорідних рівнянь методом варіації довільної сталої

$$
\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}
$$

Розв'язок. Розв'язуємо спочатку однорідну систему. Її характеристичне рівняння має вигляд

$$
\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1.
$$

Розв'язуємо (наприклад) матричним методом. Маємо

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}
$$

Матричне рівняння $AS = S\Lambda$ має вигляд

$$
\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Звідси маємо дві системи рівнянь

$$
\begin{cases} -4a_1^1 - 2a_2^1 = 0, \\ 6a_1^1 + 3a_2^1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -4a_1^2 - 2a_2^2 = -a_1^2, \\ 6a_1^2 + 3a_2^2 = -a_2^2, \end{cases}
$$

Їх розв'язками будуть

$$a_1^1 = 1, \quad a_2^1 = -2, \quad a_1^2 = -2, \quad a_2^2 = 3.$$

І розв'язок однорідної системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}.$$

Функції $C_1(t), C_2(t)$ задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(t) - 2C_2(r)e^{-t} = \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ -2C_1'(t) + 3C_2(r)e^{-t} = -\dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Звідси

$$C_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 2/_{e^t-1} & -2e^{-t} \\ -3/_{e^t-1} & 3e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{vmatrix}} \, \mathrm{d}t = 0 + \bar{C}_1,$$

$$C_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2/_{e^t-1} \\ -2 & -3/_{e^t-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{vmatrix}} \, \mathrm{d}t = \int \frac{\frac{1}{e^t-1}}{-e^{-t}} \, \mathrm{d}t = -\int \frac{e^t}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t =$$
$$= -\ln|e^t - 1| + \bar{C}_2.$$

Поклавши $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$, одержуємо $C_1(t) \equiv 0$, $C_2(t) = -\ln|e^t - 1|$. Таким чином, частинний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\ln|e^t - 1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t}\ln|e^t - 1| \\ -3e^{-t}\ln|e^t - 1| \end{pmatrix}$$

А загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-t}\ln|e^t - 1| \\ -3e^{-t}\ln|e^t - 1| \end{pmatrix}$$

Приклад 4.4.2. Розв'язати систему неоднорідних рівнянь за допомогою формули Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases}$$

Розв'язок. Розв'язуємо спочатку однорідну систему. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

Розв'язуємо матричним методом. Маємо

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Матричне рівняння $AS = S\Lambda$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Одержуємо дві системи

$$\begin{cases} -a_1^1 + 2a_2^1 = a_1^1, \\ 3a_1^1 + 4a_2^1 = a_2^1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -a_1^2 + 2a_2^2 = 2a_1^2, \\ 3a_1^2 + 4a_2^2 = 2a_2^2, \end{cases}$$

Їх розв'язками будуть

$$a_1^1 = 1, \quad a_2^1 = 1, \quad a_1^2 = 2, \quad a_2^2 = 3.$$

І розв'язок однорідної системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & 3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальна матриця лінійної однорідної системи, нормована в точці $t = 0$, має вигляд

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & 3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (3-2e^t)e^t & -2(1-e^t)e^t \\ 3(1-e^t)e^t & (-2+3e^t)e^t \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу Коші, одержуємо частинний розв'язок, який задовольняє нульовим початковим умовам

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} (3-2e^s)e^s & -2(1-e^s)e^s \\ 3(1-e^s)e^s & (-2+3e^s)e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \mathrm{d}s =$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^t \frac{-2(1-e^{t-s})e^{t+2s}}{e^{2s}}\,\mathrm{d}s \\ \\ \displaystyle\int_0^t \frac{(-2+3e^{t-s})e^{t+2s}}{e^{2s}}\,\mathrm{d}s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle -2e^t \int_0^t \frac{e^{2s}}{e^{2s}}\,\mathrm{d}s + 2e^{2t}\int_0^t \frac{e^{2s}}{e^{2s}}\,\mathrm{d}s \\ \\ \displaystyle -2e^t \int_0^t \frac{e^{2s}}{e^{2s}}\,\mathrm{d}s + 3e^{2t}\int_0^t \frac{e^{2s}}{e^{2s}}\,\mathrm{d}s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t \ln|e^{2s}+1| + 2e^{2t}\arctan e^s \\ -e^t \ln|e^{2s}+1| + 3e^{2t}\arctan e^s \end{pmatrix}\Bigg|_{s=0}^{s=t} =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t(\ln|e^{2t}+1| - \ln 2) + 2e^{2t}\left(\arctan e^t - \frac{\pi}{4}\right) \\ -e^t(\ln|e^{2t}+1| - \ln 2) + 3e^{2t}\left(\arctan e^t - \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

І загальний розв'язок системи у формі Коші має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-2e^t)e^t & -2(1-e^t)e^t \\ 3(1-e^t)e^t & (-2+3e^t)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} -e^t(\ln|e^{2t}+1| - \ln 2) + 2e^{2t}\left(\arctan e^t - \frac{\pi}{4}\right) \\ -e^t(\ln|e^{2t}+1| - \ln 2) + 3e^{2t}\left(\arctan e^t - \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Якщо шукати розв'язок не в формі Коші, то він має більш простіший вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^t \\ e^t & 3e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t \ln|e^{2t}+1| + 2e^{2t}\arctan e^t \\ -e^t \ln|e^{2t}+1| + 3e^{2t}\arctan e^t \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.4.3. Знайти загальний розв'язок системи лінійних неоднорідних рівнянь за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + t. \end{cases}$$

Розв'язок. Складаємо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

Оскільки рівняння не містить нульових коренів, частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}.$$

Підставивши в систему, отримаємо

$$\begin{cases} a = ct + d, \\ c = at + b + t. \end{cases}$$

Прирівнявши коефіцієнти при членах з однаковими степенями, отримаємо

$$0 = c, \quad 0 = a + 1, \quad a = d, \quad c = b.$$

Звідси $a = -1$, $b = c = 0$, $d = -1$. І частинний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.4.4. Знайти загальний розв'язок системи лінійних неоднорідних рівнянь за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 4x_2 + t. \end{cases}$$

Розв'язок. Складаємо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5.$$

Оскільки є один нульовий корінь, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 + bt + c \\ dt^2 + et + f \end{pmatrix}.$$

Підставляємо в неоднорідну систему

$$\begin{cases} 2at + b = at^2 + bt + c + 2(dt^2 + et + f), \\ 2dt + e = 2(at^2 + bt + c) + 4(dt^2 + et + f) + t. \end{cases}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при членах з однаковими степенями.

$$\begin{cases} 0 = a + 2d, \\ 0 = 2a + 4d, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a = b + 2e, \\ 2d = 2b + 4e + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} b = c + 2f, \\ e = 2c + 4f. \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння у другій підсистемі на мінус два і склавши з другим рівнянням, одержуємо $-4a+2d = 1$. Разом з першим рівнянням першої системи маємо

$$\begin{cases} \quad a + 2d = 0, \\ -4a + 2d = 1. \end{cases}$$

Звідси $a = -1/5, d = -1/10$. І перше рівняння другої підсистеми має вигляд*

$$b - 2e = -2/5.$$

Помноживши перше рівняння останньої підсистеми на два і віднявши друге рівняння, маємо

$$2b - e = 0.$$

З одержаних двох рівнянь дістаємо $b = -2/25, e = -4/25$. І остання підсистема дає співвідношення $c = -2/25 - 2f$. Таким чином частинний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2/5 - 2t/25 - 2/25 - 2f \\ -t^2/10 - 4t/25 + f \end{pmatrix}.$$

Стала f входить в загальний розв'язок однорідної системи і точно не визначається. Поклавши $f = 0$, одержуємо

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2/5 - 2t/25 - 2/25 \\ -t^2/10 - 4t/25 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.4.5. Знайти частинний розв'язок системи за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + e^t, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + te^t. \end{cases}$$

Розв'язок. Складаємо характеристичне рівняння однорідної системи

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Оскільки одиниця не є коренем, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at + b)e^t \\ (ct + d)e^t \end{pmatrix}.$$

Підставляємо в неоднорідну систему, одержуємо

$$\begin{cases} ae^t + (at + b)e^t = (ct + d)e^t + e^t, \\ ce^t + (ct + d)e^t = -(at + b)e^t + te^t. \end{cases}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах, одержуємо

$$\begin{cases} a = c, \\ c = -a + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = d + 1, \\ e = 2c + 4f. \end{cases}$$

Розв'язавши, одержуємо: $b = 0, a = c = d = 1/2$. Таким чином частинний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t/2 \\ (t+1)e^t/2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.4.6. Знайти частинний розв'язок системи за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + e^t, \\ \dot{x}_2 = x_1 + te^t. \end{cases}$$

Розв'язок. Складаємо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

Оскільки характеристичне рівняння має коренем одиницю кратності один, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at^2 + bt + c)e^t \\ (dt^2 + et + f)e^t \end{pmatrix}.$$

Підставляємо в неоднорідну систему, одержуємо

$$\begin{cases} (2at + b)e^t + (at^2 + bt + c)e^t = (dt^2 + et + f)e^t + e^t, \\ (2dt + e)e^t + (dt^2 + et + f)e^t = (at^2 + bt + c)e^t + te^t. \end{cases}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах, одержуємо

$$\begin{cases} a = d, \\ d = a, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a + b = e, \\ 2d + e = b + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} b + c = f + 1, \\ e + f = c. \end{cases}$$

З першої підсистеми одержуємо $a = d$. Підставляємо в другу

$$\begin{cases} 2a + b - e = 0, \\ 2a + e - b = 1, \end{cases}$$

Склавши два рівняння, одержуємо: $a = 1/4$, $b - e = -1/2$. Склавши два рівняння останньої підсистеми, маємо $b + e = 1$. Звідси $b = 1/4, e = 3/4$, $f - c = 3/4$. Таким чином частинний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t^2/4 + t/4 + c)e^t \\ (t^2/4 + 3t/4 - 3/4 + c)e^t \end{pmatrix}.$$

Поклавши $c = 0$, одержуємо

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t^2 + t)e^t/4 \\ (t^2 + 3t - 3)e^t/4 \end{pmatrix}.$$

Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи.

Задача 4.4.7.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \tan^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \tan t. \end{cases}$$

Задача 4.4.8.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$$

Задача 4.4.9.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

Задача 4.4.10.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

Задача 4.4.11.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

Задача 4.4.12.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$$

Задача 4.4.13.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$$

Задача 4.4.14.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

Задача 4.4.15.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$$

Задача 4.4.16.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$$

Задача 4.4.17.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

Задача 4.4.18.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1/\cos t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

Задача 4.4.19.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$$

Задача 4.4.20.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

Задача 4.4.21.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = -2x + t. \end{cases}$$

Задача 4.4.22.

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$

Задача 4.4.23.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$$

Задача 4.4.24.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = -2x + y + 18t. \end{cases}$$

Задача 4.4.25.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4t - 8, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Задача 4.4.26.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

Задача 4.4.27.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$$

Задача 4.4.28.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = -x + 2y - 5e^t \sin t. \end{cases}$$