2 Нелінійні диференціальні рівняння вищих порядків

2.1 Загальні визначення. Існування та єдиність розв'язків рівнянь

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Якщо диференціальне рівняння розв'язане відносно старшої похідної, то воно має вигляд

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = 0.$$

Іноді його називають диференціальним рівнянням у нормальній формі. Для диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної, задача Коші ставиться таким чином. Потрібно знайти функцію $y = y(x)$, n разів неперервно диференційовану і таку, що при підстановці в останнє рівняння обертає його в тотожність і задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної, задача Коші полягає в знаходженні розв'язку $y = y(x)$, що задовольняє початковим даним

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)},$$

де значення $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ довільні, а $y_0^{(n)}$ один з коренів алгебраїчного рівняння

$$F\left(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}\right) = 0.$$

Теорема 2.1 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші рівняння, розв'язаного відносно похідної)**.** *Нехай у деякому замкненому околі точки* $\left(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}\right)$ *функція* $f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ *задовольняє умовам:*

1. *вона визначена і неперервна по всім змінним;*

2. *задовольняє умові Ліпшиця по всім змінним, починаючи з другої.*

Тоді при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, де h — досить мала величина, існує і єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = 0,$$

що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Теорема 2.2 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші рівняння, не розв'язаного відносно похідної)**.** *Нехай у деякому замкненому околі точки $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}\right)$ функція $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)$ задовольняє умовам:*

1. *вона визначена і неперервна по всім змінним;*
2. *її частинні похідні по всім змінним з другої до пердеостанньої обмежені:*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M_0, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y'}\right| < M_1, \quad \ldots, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}\right| < M_{n-1}.$$

3. *її частинна похідна по останній змінній не обертаєтсья на нуль:*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right| \ne 0.$$

Тоді при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, де h — досить мала величина, існує і єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}.$$

Визначення. Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається n разів неперервно диференційована функція вигляду $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, що обертає при підстановці рівняння в тотожність, у якій вибором сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можна одержати розв'язок довільної задачі Коші в області існування та єдиності розв'язків.

2.2 Диференціальні рівняння вищих порядків, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1. Рівняння вигляду
$$y^{(n)} = f(x).$$
Проінтегрувавши його n разів одержимо загальний розв'язок у вигляді
$$y = \underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(x) \underbrace{\mathrm{d}x \cdots \mathrm{d}x}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$
Якщо задані умови Коші
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
то розв'язок має вигляд
$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x}}_{n} f(t) \underbrace{\mathrm{d}t \cdots \mathrm{d}t}_{n} + \frac{y_0}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \\ + \frac{y_0'}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + \ldots + y_0^{(n-2)}(x-x_0) + y_0^{(n-1)}.$$

2. Рівняння вигляду
$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0.$$
Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$$
Використовуючи основне співвідношення $\mathrm{d}y^{(n-1)} = y^{(n)}\,\mathrm{d}x$, одержимо
$$\mathrm{d}y^{(n-1)} = \psi(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$
Проінтегрувавши його, маємо
$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

І одержимо параметричний запис рівняння $(n-1)$-го порядку:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n-1)} = \psi_1(t, C_1). \end{cases}$$

Проробивши зазначений процес ще $(n-1)$ раз, одержимо загальний розв'язок рівняння в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi_n(t, C_1, \ldots, C_n). \end{cases}$$

3. Рівняння вигляду
$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0.$$

Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді

$$\begin{cases} y^{(n-1)} = \varphi(t), \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи основне співвідношення $\mathrm{d}y^{(n-1)} = y^{(n)}\,\mathrm{d}x$, одержуємо
$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Проінтегрувавши, маємо

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,\mathrm{d}t + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

І одержали параметричний запис майже з попереднього пункту.

Використовуючи попередній пункт, запишемо загальний розв'язок у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = \psi(t, C_1), \\ y = \varphi_n(t, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

4. Нехай рівняння вигляду

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$$

можна розв'язати відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right).$$

Домножимо його на $2y^{(n-1)}\,\mathrm{d}x$ й одержимо

$$2y^{(n-1)}y^{(n)}\,\mathrm{d}x = 2f\left(y^{(n-2)}\right)y^{(n-1)}\,\mathrm{d}x.$$

Перепишемо його у вигляді

$$\mathrm{d}\left(y^{(n-1)}\right)^2 = 2f\left(y^{(n-2)}\right)\mathrm{d}y^{(n-2)}.$$

Проінтегрувавши, маємо

$$\left(y^{(n-1)}\right)^2 = 2\int f\left(y^{(n-2)}\right)\mathrm{d}y^{(n-2)} + C_1,$$

тобто

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int f\left(y^{(n-2)}\right)\mathrm{d}y^{(n-2)} + C_1},$$

або

$$y^{(n-1)} = \pm\psi_1\left(y^{(n-2)}, C_1\right).$$

Таким чином одержали повернулися до третього випадку.

2.3 Найпростіші випадки зниження порядку в диференціальних рівняннях вищих порядків

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають зниження порядку.

1. Рівняння не містить шуканої функції і її похідних до $(k-1)$-го порядку включно:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Зробивши заміну:

$$y^{(k)} = z, \quad y^{(k+1)} = z', \quad \ldots, \quad y^{(n)} = z^{(n-k)},$$

одержимо рівняння $(n-k)$-го порядку

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

2. Рівняння не містить явно незалежної змінної

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Будемо вважати, що y — нова незалежна змінна, а $y', \ldots, y^{(n)}$ — функції від y. Тоді

$$\begin{aligned}
y'_x &= p(y), \\
y''_{x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y'_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(y) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p'_y p(y), \\
y'''_{x^3} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y''_{x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (p'_y p) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(p''_{y^2} p + \left(p'_y\right)^2\right) p,
\end{aligned}$$

і так далі до $y^{(n)}_{x^n}$. Після підстановки одержимо

$$F\left(y, p, p'_y p(y), \left(p''_{y^2} p + \left(p'_y\right)^2\right) p, \ldots, p^{(n-1)}\right) = 0,$$

диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку.

3. Нехай функція F диференціального рівняння

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

є однорідної щодо аргументів $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Робимо заміну $y = e^{\int u \,\mathrm{d}x}$, де $u = u(x)$ — нова невідома функція. Одержимо

$$\begin{aligned}
y' &= e^{\int u \,\mathrm{d}x} u, \\
y'' &= e^{\int u \,\mathrm{d}x} u^2 + e^{\int u \,\mathrm{d}x} u' = e^{\int u \,\mathrm{d}x} \left(u^2 + u'\right), \\
y''' &= e^{\int u \,\mathrm{d}x} u \left(u^2 + u'\right) + e^{\int u \,\mathrm{d}x} \left(2uu' + u''\right) = \\
&= e^{\int u \,\mathrm{d}x} \left(u^3 + 3uu' + u''\right),
\end{aligned}$$

і так далі до $y^{(n)}$. Після підстановки одержимо

$$F\left(x, e^{\int u \,\mathrm{d}x}, e^{\int u \,\mathrm{d}x} u, e^{\int u \,\mathrm{d}x} \left(u^2 + u'\right), e^{\int u \,\mathrm{d}x} \left(u^3 + 3uu' + u''\right), \ldots\right) = 0.$$

Оскільки наше початкове (а отже і останнє) рівняння однорідне відносно $e^{\int u \,\mathrm{d}x}$, то цей член можна винести і на нього скоротити. Одержимо

$$F\left(x, 1, u, u^2 + u', u^3 + 3uu' + u'', \ldots\right) = 0,$$

диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку.

4. Нехай ліва частина рівняння

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

є похідної деякого диференціального виразу ступеня $(n-1)$, тобто

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right).$$

У цьому випадку легко обчислюється так званий перший інтеграл

$$\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C.$$

5. Нехай диференціальне рівняння

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

розписано у вигляді диференціалів

$$F\left(x, y, \mathrm{d}y, \mathrm{d}^2y, \ldots, \mathrm{d}^n y\right) = 0,$$

і F — функція однорідна по всім змінним. Зробимо заміну $x = e^t$, $y = ue^t$, де u, t — нові змінні. Тоді одержуємо

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= e^t\,\mathrm{d}t,\\
y'_x &= \frac{y'_t}{x'_y} = \frac{u'_t e^t + ue^t}{e^t} = u'_t + u,\\
y''_{x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y'_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u'_t + u\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{u''_{t^2} + u'_t}{e^t},\\
y'''_{x^3} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y''_{x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u''_{t^2} + u'_t}{e^t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} =\\
&= \frac{\left(u'''_{t^3} + u''_{t^2}\right)e^t - \left(u''_{t^2} + u'_t\right)e^t}{e^{3t}} = \frac{u'''_{t^3} - u'_t}{e^{2t}},
\end{aligned}$$

і так далі до $y^{(n)}$. Підставивши, одержимо

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(x, y, \mathrm{d}y, \mathrm{d}^2y, \ldots, \mathrm{d}^n y\right) =\\
&\qquad = \Phi\left(e^t, ue^t, e^t\,\mathrm{d}t, (u'_t + u)e^t\,\mathrm{d}t, \left(u''_{t^2} + u'_t\right)e^t\,\mathrm{d}t, \ldots\right) = 0.
\end{aligned}$$

Скоротивши на e^t одержимо

$$\Phi\left(1, u, \mathrm{d}t, u'_t + u, u''_{t^2} + u'_t, \ldots\right) = 0.$$

Тобто повертаємося до другого випадку.

2.4 Вправи для самостійної роботи

Розглянемо приклади.

Приклад 2.4.1. Розв'язати рівняння: $y'' = x + \sin x$.

Розв'язок. Інтегруємо два рази

$$y' = \int (x + \sin x)\,\mathrm{d}x + C_1 = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1;$$
$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

Приклад 2.4.2. Розв'язати рівняння $(y'')^3 - 2y'' - x = 0$.

Розв'язок. Запишемо рівняння у параметричній формі

$$y'' = y, \quad x = t^3 - 2t.$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y' = y''\,\mathrm{d}x$, одержуємо

$$\mathrm{d}y' = t(3t^2 - 2)\,\mathrm{d}t,$$

або

$$\mathrm{d}y' = (3t^2 - 2t)\,\mathrm{d}t.$$

Звідси понижуємо порядок рівняння на одиницю

$$y' = \frac{3t^3}{4} - t^2 + C_1, \quad x = t^3 - 2t.$$

Знов використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$, одержуємо

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{3t^3}{4} - t^2 + C_1\right)(3t^2 - 2)\,\mathrm{d}t,$$

або

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{9t^5}{4} - 3t^4 - \frac{3t^3}{2} + (2 + 3C_1)t^2 - 2C_1\right)\mathrm{d}t.$$

Звідси загальний розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$x = t^3 - 2t, \quad y = \frac{3t^6}{8} - \frac{3t^5}{5} - \frac{3t^4}{8} + \frac{(2 + 3C_1)t^3}{3} - 2C_1 t + C_2.$$

Приклад 2.4.3. Розв'язати рівняння: $(y'')^3 + xy'' = y'$.

Розв'язок. Запишемо рівняння у параметричній формі

$$y'' = t, \quad y''' = e^{-t}.$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y' = y''\,\mathrm{d}x$, одержуємо

$$\mathrm{d}t = e^{-t}\,\mathrm{d}x.$$

Звідси $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$ і $x = e^t + C_1$. Запишемо рівняння другого порядку

$$x = e^r + C_1, \quad y'' = t.$$

Запишемо рівняння у параметричній формі

$$y'' = t, \quad x = t^3 - 2t.$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y' = y''\,\mathrm{d}x$, одержуємо

$$\mathrm{d}y' = te^t\,\mathrm{d}t.$$

Звідси

$$y' = \int te^t\,\mathrm{d}t = e^t(t-1) + C_2.$$

Одержали диференціальне рівняння першого порядку

$$x = e^t + C_1, \quad y' = e^t(t-1) + C_2.$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$, запишемо

$$\mathrm{d}y = (e^t(t-1) + C_2)e^t\,\mathrm{d}t.$$

Звідси

$$y = \frac{e^{2t}(t-1)}{2} - \frac{e^{2t}}{4} + C_2e^t + C_3.$$

Остаточно загальний розв'язок має вигляд

$$x = e^t + C_1, \quad y = \frac{e^{2t}(2t-3)}{4} + C_2e^t + C_3.$$

Якщо вилучити параметр t, то одержимо загальний розв'язок

$$y = \frac{(x-C_1)^2}{4}\,(2\ln|x-C_1| - 3) + C_2(x-C_1) + C_3.$$

Приклад 2.4.4. Розв'язати рівняння: $3\sqrt[3]{y}y'' = 1$.

Розв'язок. Запишемо рівняння у вигляді

$$y'' = \frac{1}{3\sqrt[3]{y}}.$$

Помножимо обидві частини на $2y'\,\mathrm{d}x$. Одержимо

$$2y''y'\,\mathrm{d}x = \frac{2y'\,\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{y}},$$

або

$$\mathrm{d}(y')^2 = \frac{2\,\mathrm{d}y}{3\sqrt[3]{y}}.$$

Проінтегруємо і одержимо

$$(y')^2 = \sqrt[3]{y^2} + C_1.$$

Звідси $y' = \pm\sqrt{y^{2/3} + C_1}$. Нехай початкові умови такі, що $C_1 = \bar{C}_1^2 > 0$. Тобто рівняння має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2}.$$

Розділимо змінні

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2}} = \pm \int \mathrm{d}x + C_2.$$

Робимо заміну $\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2} = t$. Тоді

$$y = \left(t^2 - \bar{C}_1^2\right)^{3/2}, \quad \mathrm{d}y = 3\left(t^2 - \bar{C}_1^2\right)^{1/2} t\,\mathrm{d}t,$$

і інтеграл має вигляд

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2}} = 3\int \sqrt{t^2 - \bar{C}_1^2}\,\mathrm{d}t = 3.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 2.4.5.

$$y''x\ln x = y';$$

Задача 2.4.6.

$$y''' = x + \cos x;$$

Задача 2.4.7. $2xy'' = y'$ при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_0' = 0$, $y_0'' = 0$;

Задача 2.4.8. $xy'' + y' = x + 1$ при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_0' = 0$, $y_0'' = 0$;

Задача 2.4.9. $y''\tan x = y' + \frac{1}{\sin x} = 0$ при $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $y_0' = 1$, $y_0'' = 1$;

Задача 2.4.10.

$$(y'')^4 + y'' - x = 0;$$

Задача 2.4.11.

$$y'' + \ln y'' - x = 0;$$

Задача 2.4.12.

$$y'' - a(1 + (y')^2)^{3/2} = 0;$$

Задача 2.4.13.

$$y''' - (y'')^3;$$

Задача 2.4.14.

$$y''' - y'' = 0;$$

Задача 2.4.15.

$$y'' + 2y'' \ln y' - 1 = 0;$$

Задача 2.4.16.

$$(y''')^2 + (y'')^2 - 1 = 0;$$

Задача 2.4.17.

$$y''y^3 - 1 = 0;$$

Задача 2.4.18.

$$y^3y'' - y^4 + 0;$$

Задача 2.4.19.

$$4\sqrt{y}y'' = 1;$$

Задача 2.4.20.

$$3y'' = y^{-5/3};$$

Задача 2.4.21.

$$(y'')^2 + (y')^2 - (y')^4 = 0;$$

Приклад 2.4.22. Розв'язати рівняння: $(y'')^3 + xy'' = y'$.

Розв'язок. Позначимо $y' = z$, $y'' = z'$. Одержимо рівняння $(z')^3 + xz' = z$, тобто рівняння Клеро, що легко інтегрується введенням параметра.

Нехай $z' = p$. Тоді $z = xp + p^3$. Продиференцюємо це співвідношення:

$$\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}x + 3p^2\,\mathrm{d}p.$$

Підставивши $\mathrm{d}z = p\,\mathrm{d}z$, отримаємо $(x + 3p^2)\,\mathrm{d}p = 0$. Це рівняння розділяється на два:

1. $x + 3p^2 = 0$. Звідси маємо $x = -3p^2$, $z = -2p^2$. Повертаємось до вихідних змінних $x = -3p^2$, $y' = -2p^3$. Використовуємо основне співвідношення $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$. Одержуємо

$$\mathrm{d}y = 12p^4\,\mathrm{d}p \implies y = \frac{12p^5}{5} + C_1.$$

Таким чином перша гілка дає розв'язок

$$x = -3p^2, \quad y = \frac{12p^5}{5} + C_1.$$

2. $\mathrm{d}p = 0$. Звідси маємо $z = C_1x + C_1^3$. Повертаємось до вихідних змінних $y' = C_1x + C_1^3$. Проінтегруємо і отримаємо другу гілку розв'язків
$$y = \frac{C_1x^2}{2} + C_1^3x + C_2.$$

Приклад 2.4.23. Розв'язати рівняння: $y^4 - y^3y'' = 1$.

Розв'язок. Відсутній аргумент x, отже, його порядок знижується заміною:
$$y' = p, \quad y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$
Звідси одержуємо
$$y^4 - y^3p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 1.$$
Розділимо змінні:
$$\frac{y^4 - 1}{y^3}\,\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}p.$$
Проінтегруємо
$$\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2} = \frac{p^2}{2} - \frac{C_1}{2}.$$
Звідси одержали
$$p^2 = y^2 + C_1 + y^{-2}.$$
Повертаємось до вихідних змінних
$$(y')^2 = y^2 + C_1 + y^{-2}.$$
Розв'яжемо рівняння відносно похідної
$$y' = \pm\sqrt{y^2 + C_1 + y^{-2}}.$$
Розділимо змінні
$$\pm\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 + C_1 + y^{-2}}} = \mathrm{d}x.$$
Візьмемо інтеграл
$$\pm\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 + C_1 + y^{-2}}} = \pm\int\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^4 + C_1y^2 + 1}} =$$
$$= \pm\int\frac{\mathrm{d}\left(y^2 + \frac{C_1}{2}\right)}{\sqrt{\left(y^2 + \frac{C_1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{C_1}{4}\right)}} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|y^2 + \frac{C_1}{2} + \sqrt{y^4 + C_1y^2 + 1}\right|.$$
Таким чином загальний розв'язок має вигляд:
$$x = \pm\frac{1}{2}\ln\left|y^2 + C_1/2 + \sqrt{y^4 + C_1y^2 + 1}\right|.$$

Приклад 2.4.24. Розв'язати рівняння: $yy'' = (y')^2$.

Розв'язок. Оскільки рівняння однорідне по змінним y, y', y'', то робимо заміну
$$y = e^{\int u\,\mathrm{d}x}, \quad y' = e^{\int u\,\mathrm{d}x}u, \quad y'' = e^{\int u\,\mathrm{d}x}(u^2+u).$$
Рівняння буде мати вигляд
$$e^{\int u\,\mathrm{d}x}e^{\int u\,\mathrm{d}x}(u^2+u) = \left(e^{\int u\,\mathrm{d}x}u\right)^2.$$

Скоротимо на $e^{\int u\,\mathrm{d}x}$. Маємо $u^2 + u' = u^2$, або $u' = 0$. Звідси $u' = C_1$ і одержимо загальний розв'язок
$$y = e^{\int C_1 x\,\mathrm{d}x} = e^{c_1x^2+\ln|c_2|} = c_2e^{c_1x^2}.$$

Приклад 2.4.25. Розв'язати рівняння: $yy'' - (y')^2 = y^2$.

Розв'язок. Розділимо рівняння на y^2:
$$\frac{yy''-(y')^2}{y^2} = 1,$$
і перепишемо у вигляді:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{y}\right) = 1.$$
Проінтегрувавши, одержимо загальний розв'зок
$$\frac{y'}{y} = x + C_1 \implies \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1x + \ln|C_2| \implies y = C_2e^{x^2/2+C_1x}.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 2.4.26.
$$xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right);$$

Задача 2.4.27.
$$2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2;$$

Задача 2.4.28.
$$2xy'' = y';$$

Задача 2.4.29.
$$xy'' + y' = x + 1;$$

Задача 2.4.30.
$$y''\tan x - y' + \frac{1}{\sin x} = 0;$$

Задача 2.4.31.
$$x^2y'' + xy' = 1;$$

Задача 2.4.32.
$$y''\cot 2x + 2y' = 0;$$

Задача 2.4.33.

$$x^3y'' + x^2y = 0;$$

Задача 2.4.34.

$$y'' \tan x = 2y';$$

Задача 2.4.35.

$$yy'' - (y')^2 - y^2 \ln y = 0;$$

Задача 2.4.36.

$$x^4y'' + x^3y' = 1;$$

Задача 2.4.37.

$$xyy'' - x(y')^2 - 2yy' = 0;$$

Задача 2.4.38.

$$xyy'' - x(y')^2 = yy' + \frac{x(y')^2}{\sqrt{1-x^2}};$$

Задача 2.4.39.

$$x^2y''' - x(y'')^2 = 0;$$

Задача 2.4.40.

$$x^5y'' + x^4y' = 1.$$