Вступ

Наведемо декілька основних визначень теорії диференціальних рівнянь, що будуть використовуватися надалі.

Визначення. Рівняння, що містять похідні від шуканої функції та можуть містити шукану функцію та незалежну змінну, називаються диференціальними рівняннями.

Визначення. Якщо в диференціальному рівнянні невідомі функції є функціями однієї змінної:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається звичайним.

Визначення. Якщо невідома функція, що входить в диференціальне рівняння, є функцією двох або більшої кількості незалежних змінних:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^k z}{\partial x^\ell \partial y^{k-\ell}}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається рівнянням у частинних похідних.

Визначення. Порядком диференціального рівняння називається максимальний порядок похідної від невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння.

Визначення. Розв'язком диференціального рівняння називається функція, що має необхідний ступінь гладкості, і яка при підстановці в диференціальне рівняння обертає його в тотожність.

Визначення. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння.

1 Рівняння першого порядку

Рівняння першого порядку, що розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y).$$

Диференціальне рівняння встановлює зв'язок між координатами точки та кутовим коефіцієнтом дотичної $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ до графіка розв'язку в цій же точці. Якщо знати x та y, то можна обчислити $f(x, y)$ тобто $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

Таким чином, диференціальне рівняння визначає поле напрямків, і задача інтегрування рівнянь зводиться до знаходження кривих, що звуться інтегральними кривими, напрям дотичних до яких в кожній точці збігається з напрямом поля.

1.1 Рівняння зі змінними, що розділяються

1.1.1 Загальна теорія

Рівняння вигляду
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y),$$
або більш загального вигляду
$$f_1(x)f_2(y)\,\mathrm{d}x + g_1(x)g_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$$
називаються рівняннями зі змінними, що розділяються. Розділимо його на $f_2(y)g_1(x)$ і одержимо рівняння з розділеними змінними:
$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}\,\mathrm{d}y = 0.$$
Узявши інтеграли, отримаємо
$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}\,\mathrm{d}y = C,$$
або
$$\Phi(x, y) = C.$$

Визначення. Це кінцеве рівняння, що визначає розв'язок диференціального рівняння як неявну функцію від x, називається інтегралом розглянутого рівняння.

Визначення. Це ж рівняння, що визначає всі без винятку розв'язки даного диференціального рівняння, називається загальним інтегралом.

Бувають випадки (в основному), що невизначені інтеграли з рівняння з розділеними змінними не можна записати в елементарних функціях. Попри це, задача інтегрування вважається виконаною. Кажуть, що диференціальне рівняння розв'язне у квадратурах.

Можливо, що інтеграл рівняння розв'язується відносно y:
$$y = y(x, C).$$
Тоді, завдяки вибору C, можна одержати всі розв'язки.

Визначення. Ця залежність, що тотожно задовольняє вихідному диференціальному рівнянню, де C — довільна стала, називається загальним розв'язком диференціального рівняння.

Геометрично загальний розв'язок являє собою сім'ю кривих, що не перетинаються, які заповнюють деяку область. Іноді треба виділити одну криву сім'ї, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$.

Визначення. Знаходження розв'язку $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$, називається розв'язком задачі Коші.

Визначення. Розв'язок, який записаний у вигляді $y = y(x, x_0, y_0)$ і задовольняє умові $y(x, x_0, y_0) = y_0$, називається розв'язком у формі Коші.

1.1.2 Рівняння, що зводяться до рівнянь зі змінними, що розділяються

Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$$

де a, b, c — сталі.

Зробимо заміну $ax + by + c = z$. Тоді

$$a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}z, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a\right).$$

Підставивши в початкове рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a\right) = f(z),$$

або

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + bf(z).$$

Розділивши змінні, запишемо

$$\frac{\mathrm{d}z}{a + bf(z)} - \mathrm{d}x = 0$$

і

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{a + bf(z)} - x = C.$$

Загальний інтеграл має вигляд $\Phi(ax + by + c, x) = C$.

1.1.3 Вправи для самостійної роботи

Рівняння зі змінними, що розділяються можуть бути записані у вигляді

$$y' = f(x)g(y)$$

або

$$f_1(x)f_2(y)\,\mathrm{d}x + g_1(x)g_2(y)\,\mathrm{d}y.$$

Для розв'язків такого рівняння необхідно обидві частини помножити або розділити на такий вираз, щоб в одну частину входило тільки x, а в другу — тільки y. Тоді обидві частини рівняння можна проінтегрувати.

Якщо ділити на вираз, що містить x та y, може бути загублений розв'язок, що обертає цей вираз в нуль.

Приклад 1.1.1. Розв'язати рівняння

$$x^2y^2y' + y = 1.$$

Розв'язок. Підставивши $y = \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$ в рівняння, отримаємо

$$x^2y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 1.$$

Помножимо обидві частини рівняння на $\mathrm{d}x$ і розділимо на $x^2(y-1)$. Перевіримо, що $y = 1$ при цьому є розв'язком, а $x = 0$ цим розв'язком не є:

$$\frac{y^2}{y-1}\,\mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int\frac{y^2}{y-1}\,\mathrm{d}y = -\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = \frac{1}{x} + C$$

Приклад 1.1.2. Розв'язати рівняння

$$y' = \sqrt{4x+2y-1}.$$

Розв'язок. Введемо заміну змінних $z = 4x + 2y - 1$. Тоді $x' = 4 + 2y'$. Рівняння перетвориться до вигляду

$$z' - 4 = 2\sqrt{z}$$

$$z' = 4 + 2\sqrt{z}$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{2+\sqrt{z}} = 2\,\mathrm{d}x.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{2+\sqrt{z}} = \int 2\,\mathrm{d}x$$

Обчислимо інтеграл, що стоїть зліва. При обчисленні будемо використовувати таку заміну:

$$\sqrt{z} = t, \quad \mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t, \quad 2+\sqrt{z} = 2+t,$$

тоді

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{2+\sqrt{z}} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{2+t} = 2\int \frac{t+2-2}{t+2}\,\mathrm{d}t = \\ = 2t - 4\ln|2+t| = 2\sqrt{z} - 4\ln\left(2+\sqrt{z}\right).$$

Після інтегрування отримаємо

$$2\sqrt{z} - 4\ln\left(2+\sqrt{z}\right) = 2x + 2C.$$

Зробимо обернену заміну, $z = 4x + 2y - 1$:

$$\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln\left(2+\sqrt{4x+2y-1}\right) = x + C.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 1.1.3.

$$xy\,\mathrm{d}x + (x+1)\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.1.4.

$$x(1+y)\,\mathrm{d}x = y(1+x^2)\,\mathrm{d}y;$$

Задача 1.1.5.

$$y' = 10^{x+y};$$

Задача 1.1.6.

$$y' - xy^2 = 2xy;$$

Задача 1.1.7.

$$\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}x = xy\,\mathrm{d}y;$$

Задача 1.1.8.

$$y' = x\tan y;$$

Задача 1.1.9.

$$yy' + x = 1;$$

Задача 1.1.10.

$$3y^2y' + 15x = 2xy^3;$$

Задача 1.1.11.

$$y' = \cos(y - x);$$

Задача 1.1.12.

$$y' - y = 2x - 3;$$

Задача 1.1.13.

$$xy' + y = y^2;$$

Задача 1.1.14.

$$e^{-y}(1 + y') = 1;$$

Задача 1.1.15.

$$2x^2yy' + y^2 = 2;$$

Задача 1.1.16.

$$y' - xy^3 = 2xy^2.$$

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють заданим початковим умовам:

Задача 1.1.17.

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.1.18.

$$y' \cot x + y = 2, \quad y(0) = -1;$$

Задача 1.1.19.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0.$$

1.2 Однорідні рівняння

1.2.1 Загальна теорія

Нехай рівняння має вигляд

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ однорідні одного ступеня, то рівняння називається однорідним. Нехай функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ однорідні ступеня k, тобто

$$M(tx, ty) = t^k M(x, y), \qquad N(tx, ty) = t^k N(x, y).$$

Робимо заміну

$$y = ux, \quad \mathrm{d}y = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u.$$

Після підстановки одержуємо

$$M(x, ux)\,\mathrm{d}x + N(x, ux)(u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u) = 0,$$

або
$$x^k M(1,u)\,\mathrm{d}x + x^k N(1,u)(u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u) = 0.$$
Скоротивши на x^k і розкривши дужки, запишемо
$$M(1,u)\,\mathrm{d}x + N(1,u)u\,\mathrm{d}x + N(1,u)x\,\mathrm{d}u = 0.$$
Згрупувавши, одержимо рівняння зі змінними, що розділяються
$$(M(1,u) + N(1,u)u)\,\mathrm{d}x + N(1,u)x\,\mathrm{d}u = 0,$$
або
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{N(1,u)\,\mathrm{d}u}{M(1,u) + N(1,u)u} = C.$$
Явно узявши інтеграли та заміняючи $u = y/x$, отримаємо загальний інтеграл $\Phi\left(x, y/x\right) = C$.

1.2.2 Рівняння, що зводяться до однорідних

Нехай маємо дробово-лінійне рівняння вигляду
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$
Розглянемо два випадки

1. $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

   Тоді система алгебраїчних рівнянь
   $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$$
   має єдиний розв'язок (x_0, y_0). Проведемо заміну
   $$\begin{cases} x = x_1 + x_0, \\ y = y_1 + y_0 \end{cases}$$
   та отримаємо
   $$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = f\left(\frac{a_1(x_1 + x_0) + b_1(y_1 + y_0) + c_1}{a_2(x_1 + x_0) + b_2(y_1 + y_0) + c_2}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}{a_2x_1 + b_2y_1 + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}\right)$$

Оскільки (x_0, y_0) — розв'язок алгебраїчної системи, то диференціальне рівняння набуде вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = f\left(\frac{a_1x_1 + b_1y_1}{a_2x_1 + b_2y_1}\right)$$

і є однорідним нульового ступеня. Робимо заміну

$$y_1 = ux_1, \quad \mathrm{d}y_1 = u\,\mathrm{d}x_1 + x_1\,\mathrm{d}u.$$

Підставимо в рівняння

$$u + x_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_1} = f\left(\frac{a_1x_1 + b_1ux_1}{a_2x_1 + b_2ux_1}\right).$$

Одержимо

$$x_1\,\mathrm{d}u + \left(u - f\left(\frac{a_1x_1 + b_1ux_1}{a_2x_1 + b_2ux_1}\right)\right)\mathrm{d}x_1 = 0.$$

Розділивши змінні, маємо

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u - f\left(\frac{a_1x_1 + b_1ux_1}{a_2x_1 + b_2ux_1}\right)} + \ln(x_1) = C.$$

І загальний інтеграл рівняння має вигляд $\Phi(u, x_1) = C$. Повернувшись до вихідних змінних, запишемо

$$\Phi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}, x - x_0\right) = C.$$

2. Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто коефіцієнти рядків лінійно залежні і

$$a_1x + b_1y = \alpha(a_2x + b_2y).$$

Робимо заміну $a_2x + b_2y = z$. Звідси

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b_2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a_2\right)$$

Підставивши в диференціальне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a_2\right) = f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right),$$

або

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a_2 + b_2 f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right),$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{a_2 + b_2 f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right)} - x = C,$$

Загальний інтеграл має вигляд $\Phi(a_2x + b_2y, x) = C$.

1.2.3 Вправи для самостійної роботи

Однорідні рівняння можуть бути записані у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

або

$$M(x,y)\,\mathrm{d}y + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

де $M(x,y)$ і $N(x,y)$ — однорідні функції одного й того ж ступеня. Для того, щоб розв'язати однорідне рівняння, необхідно провести заміну

$$y = ux, \quad \mathrm{d}y = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u,$$

в результаті якої отримаємо рівняння зі змінними, що розділяються.

Приклад 1.2.1. Розв'язати рівняння $x\,\mathrm{d}y = (x+y)\,\mathrm{d}y$.

Розв'язок. Дане рівняння однорідне, оскільки x та $x+y$ є однорідними функціями першого ступеня.

Проведемо заміну: $y = ux$. Тоді $\mathrm{d}y = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$. Підставивши y та $\mathrm{d}y$ в задане рівняння, отримаємо

$$x(x\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}x) = (x + xu)\,\mathrm{d}x,$$

$$x^2\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$$

Розв'яжемо це рівняння зі змінними, що розділяються:

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$
$$u = \ln|x| + C.$$

Повернувшись до вихідних змінних $u = y/x$, отримаємо

$$y = x(\ln|x| + C).$$

Крім того розв'язком є $x = 0$, що було загублене при поділенні рівняння на x.

Розв'язати рівняння:

Задача 1.2.2.

$$(x + 2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.3.

$$(x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.4.

$$y^2 + x^2y' = xyy';$$

Задача 1.2.5.

$$(x^2 + y^2)y' = 2xy;$$

Задача 1.2.6.

$$xy' - y = x\tan\left(\frac{y}{x}\right);$$

Задача 1.2.7.

$$xy' = y - xe^{y/x};$$

Задача 1.2.8.

$$xy' - y = (x + y)\ln\left(\frac{x + y}{x}\right);$$

Задача 1.2.9.

$$(3x + y)\,\mathrm{d}x - (2x + 3y)\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.10.

$$xy' = y\cos\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right);$$

Задача 1.2.11.

$$(y + \sqrt{xy})\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.12.

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$$

Задача 1.2.13.

$$x^2y' = y(x + y);$$

Задача 1.2.14.

$$y(-y + xy') = \sqrt{x^4 + y^4};$$

Задача 1.2.15.

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x;$$

Задача 1.2.16.

$$(y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.17.

$$2x^3y' = y(2x^2 - y^2);$$

Задача 1.2.18.

$$(x - y\cos({}^{y}\!/_{x}))\,\mathrm{d}x = -x\cos({}^{y}\!/_{x})\,\mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.19.

$$y'(xy - x^2) = y^2;$$

Задача 1.2.20.

$$2xyy' = x^2 + y^2;$$

Задача 1.2.21.

$$(6x + 3y)\,\mathrm{d}x = (7x - 2y)\,\mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.22.

$$y^2x\,\mathrm{d}x = y(xy - 2y^2)\,\mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.23.

$$x^2y\,\mathrm{d}x = y(xy - 2y^2)\,\mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.24.

$$2y^3 = xy'(2y^2 - x^2);$$

Задача 1.2.25.

$$(x + \sqrt{xy})\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x;$$

Задача 1.2.26.

$$y = \left(\sqrt{y^2 - x^2} + x\right)y';$$

Задача 1.2.27.

$$(3x - 2y)\,\mathrm{d}x - (2x + y)\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.28.

$$(7x + 6y)\,\mathrm{d}x - (x + 3y)\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.29.

$$xy' = y + x\cot\left(\frac{y}{x}\right).$$

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють задані початкові умови:

Задача 1.2.30.

$$xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 2;$$

Задача 1.2.31.

$$(2y^2 + 3x^2)xy' = 3y^3 + 6yx^2, \quad y(2) = 1;$$

Задача 1.2.32.

$$y'(x^2 - 2xy) = x^2 + xy - y^2, \quad y(3) = 0;$$

Задача 1.2.33.

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{8y}{x} + 8, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.34.

$$y'(x^2 - 4xy) = x^2 + xy - 3y^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.35.

$$xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.36.

$$(2y^2 + 7x^2)xy' = 3y^3 + 14yx^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.37.

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{6y}{x} + 3, \quad y(3) = 1;$$

Задача 1.2.38.

$$x^2y' = y^2 + 4xy + 2x^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.39.

$$xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.40.

$$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y, \quad y(3) = 4;$$

Задача 1.2.41.

$$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y, \quad y(4) = 3;$$

Задача 1.2.42.

$$y' = \frac{x + 2y}{2x - y}, \quad y(3) = 8.$$

1.3 Лінійні рівняння першого порядку

1.3.1 Загальна теорія

Рівняння, що є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, називається лінійним диференціальним рівнянням. Його загальний вигляд такий:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x).$$

Якщо $q(x) \equiv 0$, тобто рівняння має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0,$$

то воно зветься однорідним. Однорідне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються і розв'язується таким чином:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int p(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln y = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + \ln C.$$

Нарешті

$$y = C\exp\left\{-\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

Розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати методом варіації довільних сталих (методом невизначених множників Лагранжа). Він складається в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв'язок однорідного, але C вважається невідомою функцією від x, тобто $C = C(x)$ і

$$y = C(x)\exp\left\{-\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

Для знаходження $C(x)$ підставимо y у рівняння

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}\exp\left\{-\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\} = -C(x)p(x)\exp\left\{-\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\} + \\ + p(x)C(x)\exp\left\{-\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\} = q(x).$$

Звідси

$$\mathrm{d}C(x) = q(x)\exp\left\{\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$C(x) = \int q(x)\exp\left\{\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x + C.$$

І загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = \exp\left\{-\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\}\left(\int q(x)\exp\left\{\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x + C\right).$$

Якщо використовувати початкові умови $y(x_0) = y_0$, то розв'язок можна записати у формі Коші:

$$y(x, x_0, y_0) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)\exp\left\{\int_{t}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}t + y_0\right).$$

1.3.2 Рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^m, \quad m \neq 1$$

називається рівнянням Бернуллі. Розділимо на y^m і одержимо

$$y^{-m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-m} = q(x).$$

Зробимо заміну:

$$y^{1-m} = z, \quad (1-m)y^{-m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{d}z.$$

Підставивши в рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{1-m} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)z = q(x).$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння. Його розв'язок має вигляд

$$z = \exp\left\{-(1-m)\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\} \cdot$$
$$\cdot \left((1-m)\int q(x)\exp\left\{(1-m)\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x + C\right).$$

1.3.3 Рівняння Рікатті

Рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

називається рівнянням Рікатті. В загальному випадку рівняння Рікатті не інтегрується. Відомі лише деякі частинні випадки рівнянь Рікатті, що інтегруються в квадратурах. Розглянемо один з них. Нехай відомий один частинний розв'язок $y = y_1(x)$. Робимо заміну $y = y_1(x) + z$ і одержуємо

$$\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)(y_1(x)+z) + r(x)(y_1(x)+z)^2 = q(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ — частинний розв'язок, то

$$\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x} + p(x)y_1 + r(x)y_1^2 = q(x).$$

Розкривши в попередній рівності дужки і використовуючи останнє зауваження, одержуємо

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)z + 2r(x)y_1(x)z + r(x)z^2 = 0.$$

Перепишемо одержане рівняння у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(p(x) + 2r(x)y_1(x)\right) z = -r(x)z^2,$$

це рівняння Бернуллі з $m = 2$.

1.3.4 Вправи для самостійної роботи

Приклад 1.3.1. Розв'язати рівняння

$$y' - y \tan x = \cos x.$$

Розв'язок. Використовуючи вигляд загального розв'язку, отримаємо

$$y = \exp\left\{\int \tan x \,\mathrm{d}x\right\} \left(\int \exp\left\{-\int \tan x \,\mathrm{d}x\right\} \cos x \,\mathrm{d}x + C\right).$$

Оскільки

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|,$$

то отримаємо

$$\begin{aligned} y = e^{-\ln|\cos x|} \left(\int e^{\ln|\cos x|} \cos x \,\mathrm{d}x + C\right) = \\ = \frac{1}{\cos x}\left(\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x + C\right) = \\ = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\right). \end{aligned}$$

Або

$$y = \frac{C}{\cos x} + \frac{x}{2\cos x} + \frac{\sin x}{2}.$$

Приклад 1.3.2. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y' - \frac{y}{x} = x^2,$$

що задовольняє початковій умові $y(2) = 2$.

Розв'язок. Використовуючи вигляд загального розв'язку, отримаємо

$$\begin{aligned} y &= \exp\left\{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right\}\left(\int \exp\left\{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right\} x^2\,\mathrm{d}x + C\right) = \\ &= e^{\ln|x|}\left(\int e^{-\ln|x|}x^2\,\mathrm{d}x + C\right) = \\ &= x\left(\int x\,\mathrm{d}x + C\right) = \\ &= x\left(\frac{x^2}{2} + C\right). \end{aligned}$$

Таким чином

$$y = Cx + \frac{x^3}{2}.$$

Підставивши початкові умови $y(2) = 2$, одержимо $2 = 2C + 4$. Звідси $C = -1$ і частинний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{част.}} = \frac{x^3}{2} - x.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 1.3.3.

$$xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x};$$

Задача 1.3.4.

$$(2x+1)y' = 4x + 2y;$$

Задача 1.3.5.

$$y' = 2x(x^2 + y);$$

Задача 1.3.6.

$$x^2y' + xy + 1 = 0;$$

Задача 1.3.7.

$$y' + y\tan x = \sec x;$$

Задача 1.3.8.

$$x(y' - y) = e^x;$$

Задача 1.3.9.

$$(xy' - 1)\ln x = 2y;$$

Задача 1.3.10.

$$(y + x^2)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y;$$

Задача 1.3.11.

$$(2e^x - y)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y;$$

Задача 1.3.12.

$$\sin^2 y + x\cot y = \frac{1}{y^2};$$

Задача 1.3.13.

$$(x + y^2)y' = y;$$

Задача 1.3.14.

$$(3e^y - x)y' = 1;$$

Задача 1.3.15.

$$y = x(y' - x\cos x).$$

Знайти частинні розв'язки рівняння з заданими початковими умовами:

Задача 1.3.16.

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.3.17.

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3;$$

Задача 1.3.18.

$$y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.3.19.

$$xy' + 2y = x64, \quad y(1) = -\frac{5}{8};$$

Задача 1.3.20.

$$y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

Задача 1.3.21.

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi};$$

Задача 1.3.22.

$$(13y^3 - x)y' = 4y, \quad y(5) = 1;$$

Задача 1.3.23.

$$2(x + \ln^2 y - \ln y)y' = y, \quad y(2) = 1.$$

Розв'язати рівняння Бернуллі:

Задача 1.3.24.

$$y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2;$$

Задача 1.3.25.

$$xy' + y = 2y^2 \ln x;$$

Задача 1.3.26.

$$2(2xy' + y) = xy^2;$$

Задача 1.3.27.

$$3(xy' + y) = y^2 \ln x;$$

Задача 1.3.28.

$$2(y' + y) = xy^2.$$

Розв'язати рівняння Рікатті:

Задача 1.3.29.

$$x^2y' + xy + x^2y^2 = 4;$$

Задача 1.3.30.

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x} = 0;$$

Задача 1.3.31.

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = 5 - x^2;$$

Задача 1.3.32.

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2;$$

Задача 1.3.33.

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$$

1.4 Рівняння в повних диференціалах

1.4.1 Загальна теорія

Якщо ліва частина диференціального рівняння

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$\mathrm{d}u(x,y) = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

і, таким чином, рівняння набуває вигляду $\mathrm{d}u(x,y) = 0$ то рівняння називається рівнянням в повних диференціалах. Звідси вираз

$$u(x,y) = C$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння.

Критерієм того, що рівняння є рівнянням в повних диференціалах, тобто необхідною та достатньою умовою, є виконання рівності

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Нехай маємо рівняння в повних диференціалах. Тоді

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Звідси

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ — невідома функція. Для її визначення продиференціюємо співвідношення по y і прирівняємо $N(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right) + \frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y} = N(x,y).$$

Звідси

$$\varphi(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}y.$$

Остаточно, загальний інтеграл має вигляд

$$\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}y = C.$$

Як відомо з математичного аналізу, якщо відомий повний диференціал, то функцію $u(x,y)$ можна визначити, взявши криволінійний інтеграл по довільному контуру, що з'єднує фіксовану точку (x_0, y_0) і точку із змінними координатами (x,y).

Більш зручно брати криву, що складається із двох відрізків прямих. В цьому випадку криволінійний інтеграл розпадається на два простих інтеграла

$$\begin{aligned} u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = \\ = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} M(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} N(x,y)\,\mathrm{d}y = \\ = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y_0)\,\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

У цьому випадку одразу одержуємо розв'язок задачі Коші.

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi, y_0)\,\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta = 0.$$

1.4.2 Множник, що інтегрує

В деяких випадках рівняння

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

не є рівнянням в повних диференціалах, але існує функція $\mu = \mu(x,y)$ така, що рівняння

$$\mu(x,y)M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

вже буде рівнянням в повних диференціалах. Необхідною та достатньою умовою цього є рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y)),$$

або

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Таким чином замість звичайного диференціального рівняння відносно функції $y(x)$ одержимо диференціальне рівняння в частинних похідних відносно функції $\mu(x,y)$.

Задача інтегрування його значно спрощується, якщо відомо в якому вигляді шукати функцію $\mu(x,y)$, наприклад $\mu = \mu(\omega(x,y))$ де $\omega(x,y)$ — відома функція. В цьому випадку одержуємо

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

Після підстановки в попереднє рівняння маємо

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}\cdot M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}\cdot N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

або

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right) = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Розділимо змінні

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M}\,\mathrm{d}\omega.$$

Проінтегрувавши і поклавши сталу інтегрування одиницею, одержимо:

$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M}\,\mathrm{d}\omega\right\}.$$

Розглянемо частинні випадки.

1. Нехай $\omega(x,y) = x$. Тоді $\partial\omega/\partial x = 1$, $\partial\omega/\partial y = 0$, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x$ і формула має вигляд

$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,\mathrm{d}x\right\}.$$

2. Нехай $\omega(x,y) = y$. Тоді $\partial\omega/\partial x = 0$, $\partial\omega/\partial y = 1$, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}y$ і формула має вигляд
$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\,\mathrm{d}y\right\}.$$

3. Нехай $\omega(x,y) = x^2 \pm y^2$. Тоді $\partial\omega/\partial x = 2x$, $\partial\omega/\partial y = \pm 2y$, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(x^2 \pm y^2)$ і формула має вигляд
$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2xN \mp 2yM}\,\mathrm{d}(x^2 \pm y^2)\right\}.$$

4. Нехай $\omega(x,y) = xy$. Тоді $\partial\omega/\partial x = y$, $\partial\omega/\partial y = x$, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(xy)$ і формула має вигляд
$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}\,\mathrm{d}(xy)\right\}.$$

1.4.3 Вправи для самостійної роботи

Як вже було сказано, рівняння
$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$
буде рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції. Це має місце при
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Приклад 1.4.1. Розв'язати рівняння
$$(2x + 3x^2y)\,\mathrm{d}x + (x^3 - 3y^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Розв'язок. Перевіримо, що це рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Обчислимо
$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2y) = 3x^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2.$$

Таким чином існує функція $u(x,y)$, що
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x + 3x^2y.$$

Проінтегруємо по x. Отримаємо

$$u(x, y) = \int (2x + 3x^2 y)\,\mathrm{d}x + \Phi(y) = x^2 + x^3 y + \Phi(y).$$

Для знаходження функції $\Phi(y)$ візьмемо похідну від $u(x, y)$ по y і прирівняємо до $x^3 - 3y^2$. Отримаємо

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^3 + \Phi'(y) = x^3 - 3y^2.$$

Звідси $\Phi'(y) = -3y^2$ і $\Phi(y) = -y^3$. Таким чином,

$$u(x, y) = x^2 + x^3 y - y^3$$

і загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$$

Перевірити, що дані рівняння є рівняннями в повних диференціалах, і розв'язати їх:

Задача 1.4.2.

$$2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.3.

$$(2 - 9xy^2)x\,\mathrm{d}x + (4y^2 - 6x^3)y\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.4.

$$e^{-y}\,\mathrm{d}x - (2y + xe^{-y})\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.5.

$$\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.6.

$$\frac{3x^2 + y^2}{y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.7.

$$2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)\mathrm{d}x - \sqrt{x^2 - y}\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.8.

$$(1 + y^2 \sin 2x)\,\mathrm{d}x - 2y\cos^2 x\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.9.

$$3x^2(1+\ln y)\,\mathrm{d}x = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)\mathrm{d}y;$$

Задача 1.4.10.

$$\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)\mathrm{d}x + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.11.

$$(2x + ye^{xy})\,\mathrm{d}x + (xe^{xy} + 3y^2)\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.12.

$$\left(2 + \frac{1}{x^2+y^2}\right)x\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.13.

$$\left(3y^2 - \frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x + \left(6xy + \frac{x}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y = 0.$$

Розв'язати, використовуючи множник, що інтегрує:

Задача 1.4.14. $\mu = \mu(x-y)$,

$$(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)\,\mathrm{d}x + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = 0;$$

Задача 1.4.15.

$$\left(y - \frac{ay}{x} + x\right)\mathrm{d}x + a\,\mathrm{d}y = 0, \quad \mu = \mu(x+y);$$

Задача 1.4.16.

$$(x^2 + y)\,\mathrm{d}y + x(1-y)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \mu = \mu(xy);$$

Задача 1.4.17.

$$(x^2 - y^2 + y)\,\mathrm{d}x + x(2y-1)\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.18.

$$(2x^2y^2 + y)\,\mathrm{d}x + (x^3y - x)\,\mathrm{d}y = 0.$$

1.5 Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має такий вигляд
$$F(x, y, y') = 0.$$

1.5.1 Частинні випадки рівнянь, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо ряд диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1. Рівняння вигляду
$$F(y') = 0.$$
Нехай алгебраїчне рівняння $F(k) = 0$ має принаймні один дійсний корінь $k = k_0$. Тоді, інтегруючи $y' = k_0$, одержимо $y = k_0 x + C$. Звідси знаходимо $k_0 = (y - C)/x$ і вираз
$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$$
містить всі розв'язки вихідного диференціального рівняння.

2. Рівняння вигляду
$$F(x, y') = 0.$$
Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \psi(t). \end{cases}$$
Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y' \, \mathrm{d}x$, одержимо
$$\mathrm{d}y = \psi(t)\varphi'(t) \, \mathrm{d}t.$$
Проінтегрувавши, запишемо
$$y = \int \psi(t)\varphi'(t) \, \mathrm{d}t + C.$$
І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \displaystyle\int \psi(t)\varphi'(t) \, \mathrm{d}t + C. \end{cases}$$

3. Рівняння вигляду
$$F(y, y') = 0.$$
Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді
$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ y' = \psi(t). \end{cases}$$
Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$, одержимо
$$\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \psi(t)\,\mathrm{d}x$$
і
$$\mathrm{d}x = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,\mathrm{d}t$$
Проінтегрувавши, запишемо
$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,\mathrm{d}t + C.$$
І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд
$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,\mathrm{d}t + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

4. Рівняння Лагранжа
$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$
Введемо параметр $y' = \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x = p$ і отримаємо
$$y = \varphi(p)x + \psi(p).$$
Продиференціювавши, запишемо
$$\mathrm{d}y = \varphi'(p)x\,\mathrm{d}p + \varphi(p)\,\mathrm{d}x + \psi'(p)\,\mathrm{d}p.$$
Замінивши $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$ одержимо
$$p\,\mathrm{d}x = \varphi'(p)x\,\mathrm{d}p + \varphi(p)\,\mathrm{d}x + \psi'(p)\,\mathrm{d}p.$$

Звідси
$$(p - \varphi(p))\,\mathrm{d}x - \varphi'(p)x\,\mathrm{d}p = \psi'(p)\,\mathrm{d}p.$$

І отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Його розв'язок
$$x = \exp\left\{\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}\,\mathrm{d}p\right\} \cdot \\ \cdot \left(\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} \exp\left\{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\,\mathrm{d}p\right\}\mathrm{d}p + C\right) = \Psi(p, C).$$

І остаточний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричній формі запишеться у вигляді
$$\begin{cases} x = \Psi(p, C), \\ y = \varphi(p)\Phi(p, C) + \psi(p). \end{cases}$$

5. Рівняння Клеро.

   Частинним випадком рівняння Лагранжа, що відповідає $\varphi(y') = y'$ є рівняння Клеро
$$y = y'x + \psi(y').$$

   Поклавши $y' = \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x = p$, отримаємо $y = px + \psi(p)$. Продиференціюємо
$$\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}p + \psi'(p)\,\mathrm{d}p.$$

   Оскільки $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$, то
$$p\,\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}p + \psi'(p)\,\mathrm{d}p.$$

   Скоротивши, одержимо
$$(x + \psi'(p))\,\mathrm{d}p = 0.$$

   Можливі два випадки.

(а) $x + \psi'(p) - 0$ і розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p). \end{cases}$$

(б) $\mathrm{d}p = 0$, $p = C$ і розв'язок має вигляд

$$y = Cx + \psi(C).$$

Загальним розв'язком рівняння Клеро буде сім'я "прямих". Її огинає особлива крива.

6. Параметризація загального вигляду. Нехай диференціальне рівняння

$$F(x, y, y') = 0$$

вдалося записати у вигляді системи рівнянь з двома параметрами

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \theta(u, v).$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$, одержимо

$$\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\,\mathrm{d}v = \theta(u,v)\left(\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)$$

Перегрупувавши члени, одержимо

$$\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} - \theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\right)\mathrm{d}u = \left(\theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right)\mathrm{d}v.$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{\theta(u,v)\cdot\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}}{\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} - \theta(u,v)\cdot\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}}.$$

Або отримали рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = f(u,v).$$

Параметризація загального вигляду не дає інтеграл диференціального рівняння. Вона дозволяє звести диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної, до диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної.

7. Нехай рівняння $F(x, y, y') = 0$ можна розв'язати відносно y' і воно має n коренів, тобто його можна записати у вигляді

$$\prod_{i=1}^{n}(y' - f_i(x, y)) = 0.$$

Розв'язавши кожне з рівнянь $y' = f_i(x, y)$, $i = \overline{1, n}$, отримаємо n загальних розв'язків (або інтервалів) $y = \varphi_i(x, C)$, $i = \overline{1, n}$ (або $\varphi_u(x, y) = C$, $i = \overline{1, n}$). І загальний розв'язок вихідного рівняння, не розв'язаного відносно похідної має вигляд

$$\prod_{i=1}^{n}(y - \varphi_i(x, C)) = 0,$$

або

$$\prod_{i=1}^{n}(\varphi_i(x, y) - C) = 0.$$

1.5.2 Вправи для самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння вигляду $F(y') = 0$:

Приклад 1.5.1. $(y')^3 - 1 = 0$;

Розв'язок. Рівняння має дійсний розв'язок, тобто воно поставлене коректно. Тому його розв'язком буде

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^3 - 1 = 0.$$

Задача 1.5.2.

$$(y')^2 - 2y' + 1 = 0;$$

Задача 1.5.3.

$$(y')^4 - 16 = 0.$$

2. Розв'язати рівняння вигляду $F(x, y') = 0$:

Приклад 1.5.4. $x = (y')^3 + y'$;

Розв'язок. Робимо параметризацію $y' = t$, $x = t^3 + t$. Використовуючи основну форму запису $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$ одержимо

$$\mathrm{d}y = t(3t^2 + 1)\,\mathrm{d}t.$$

Звідси

$$y = \int t(3t^2 + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{3t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + C.$$

Остаточний розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$x = t^3 + t, \quad y = \frac{3t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + C.$$

Задача 1.5.5.

$$x((y')^2 - 1) = 2y';$$

Задача 1.5.6.

$$x = y'\sqrt{(y')^2 - 1};$$

Задача 1.5.7.

$$y'(x - \ln y') - 1.$$

3. Розв'язати рівняння вигляду $F(y, y') = 0$:

   Приклад 1.5.8. $y = (y')^2 + 2(y')^3$;

   Розв'язок. Робимо параметризацію $y' = t$, $y = t^2 + 2t^3$. Використовуючи основну форму запису $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$, одержуємо

   $$(2t + 6t^2)\,\mathrm{d}t = t\,\mathrm{d}x.$$

   Звідси

   $$\mathrm{d}x = (2 + 6t)\,\mathrm{d}t, \quad x = \int (2 + 6t)\,\mathrm{d}t = 2t + 3t^2 + C.$$

   Остаточний розв'язок у параметричній формі має вигляд

   $$x = 2t + 3t^2, \quad y = t^2 + 2t^{\cdot}$$

   Крім того за рахунок скорочення втрачено $y \equiv 0$.

   Задача 1.5.9.

   $$y = \ln(1 + (y')^2);$$

   Задача 1.5.10.

   $$y = (y' - 1)e^{y'};$$

   Задача 1.5.11.

   $$(y')^4 - (y')^2 = y^2.$$

4. Розв'язати рівняння Лагранжа

   Приклад 1.5.12. $y = -xy' + 4\sqrt{y'}$;

Розв'язок. Робимо параметризацію

$$y' = t, \quad y = -xt + 4\sqrt{t}.$$

Диференціюємо друге рівняння.

$$\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Оскільки зроблено заміну $\mathrm{d}y = t\,\mathrm{d}x$, то одержимо

$$t\,\mathrm{d}x = -x\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x + \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}},$$

або

$$2t\,\mathrm{d}x = -x\,\mathrm{d}t + \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{x}{2t} = \frac{1}{t\sqrt{t}}.$$

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння може бути представлений у вигляді

$$x = \exp\left\{-\int \frac{\mathrm{d}t}{2t}\right\}\left(\int \exp\left\{\int \frac{\mathrm{d}t}{2t}\right\}\frac{1}{t\sqrt{t}} + C\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + C\right) = \frac{\ln|t| + C}{\sqrt{t}}.$$

Остаточно маємо

$$x = \frac{\ln|t| + C}{\sqrt{t}}, \quad y = -\sqrt{t}(\ln|t| + C) + 4\sqrt{t}.$$

Крім того при діленні на t втратили $y \equiv 0$.

Задача 1.5.13.

$$y = 2xy' - 4(y')^3;$$

Задача 1.5.14.

$$y = x(y')^2 - 2(y')^3;$$

Задача 1.5.15.

$$xy'(y' + 2) = y;$$

Задача 1.5.16.

$$2xy' - y = \ln y'.$$

5. Розв'язати рівняння Клеро

Приклад 1.5.17. $y = xy' - (y')^2$;

Розв'язок. Робимо параметризацію $y' = t$, $y = xt - t^2$. Диференціюємо друге рівняння:

$$\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x - 2t\,\mathrm{d}t.$$

Оскільки зроблено заміну $\mathrm{d}y = t\,\mathrm{d}x$, то одержимо

$$t\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x - 2t\,\mathrm{d}t.$$

Звідси $(x - 2t)\,\mathrm{d}t = 0$. І маємо дві гілки

(а) Особливий розв'язок $x = 2t$, $y = t^2$, або $y = x^2/4$.

(б) Загальний розвозок $y = Cx - C^2$.

Задача 1.5.18.

$$y = xy' + 4\sqrt{y'};$$

Задача 1.5.19.

$$y = xy' + 2 - y';$$

Задача 1.5.20.

$$y = xy' - \ln y';$$

Задача 1.5.21.

$$y = xy' + \sin y';$$

Задача 1.5.22.

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2};$$

Задача 1.5.23.

$$y = xy' + (y')^3;$$

Задача 1.5.24.

$$y = xy' + \cos(2 + y');$$

Задача 1.5.25.

$$y = xy' - \ln\sqrt{1 + (y')^2};$$

Задача 1.5.26.

$$y = xy' - y' - (y')^3;$$

Задача 1.5.27.

$$y = xy' - \sqrt{2 - (y')^2};$$

Задача 1.5.28.

$$y = xy' + \sqrt{2y' + 2};$$

Задача 1.5.29.

$$y = xy' - e^{y'};$$

Задача 1.5.30.

$$y = xy' - \tan y';$$

Задача 1.5.31.

$$(y')^3 = 3(xy' - y).$$

6. Розв'язати рівняння параметризацією загального виду

Приклад 1.5.32. $(y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y$;

Розв'язок. Введемо параметризацію рівняння

$$x = u, \quad y' = v, \quad y = \frac{u^2 + 2uv - v^2}{4}.$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$, одержимо рівняння

$$\frac{1}{u}(2u\,\mathrm{d}u + 2u\,\mathrm{d}v + 2v\,\mathrm{d}u - 2v\,\mathrm{d}v) = v\,\mathrm{d}u.$$

Перепишемо його у вигляді

$$(u + v)\,\mathrm{d}u + (u - v)\,\mathrm{d}v = 2v\,\mathrm{d}u,$$

або

$$(u - v)\,\mathrm{d}u + (u - v)\,\mathrm{d}v = 0,$$

Воно розділяється на два

(а) $\mathrm{d}u + \mathrm{d}v = 0 \implies v = -u + C$.

Підставивши в параметризовану систему, одержуємо

$$x = u, \quad y = \frac{u^2 + 2u(-u + C) - (-u + C)^2}{4},$$

або

$$y = \frac{x^2 + 2x(-x + C) - (-x + C)^2}{4} = \frac{-2x^2 + 4Cx - C^2}{4}.$$

(б) $u - v = 0 \implies v = u$. І розв'язок має вигляд $y = x^2/2$.

Задача 1.5.33.

$$5y + (y')^2 = x(x + y');$$

Задача 1.5.34.

$$x^2(y')^2 = xyy' + 1;$$

Задача 1.5.35.

$$(y')^3 + y^2 = xyy';$$

Задача 1.5.36.

$$y = x(y')^2 - 2(y')^3;$$

Задача 1.5.37.

$$2xy' - y = y'\ln(yy');$$

Задача 1.5.38.

$$y' = e^{xy'/y}.$$

7. Розв'язати рівняння

Приклад 1.5.39. $(y')^2 - y^2 = 0$;

Розв'язок. Це рівняння розв'язується відносно y'. Маємо

$$y' = y, \quad y' = -y.$$

Розв'язок першого має вигляд $y = ce^x$, другого Ce^{-x}. Загальний розв'язок має вигляд

$$(y - ce^x)(y - Ce^{-x}) = 0.$$

Задача 1.5.40.

$$y^2((y')^2 + 1) = 1;$$

Задача 1.5.41.

$$(y')^2 - 4y^3 = 0;$$

Задача 1.5.42.

$$x(y')^2 = y;$$

Задача 1.5.43.

$$(y')^2 + xy = y^2 + xy';$$

Задача 1.5.44.

$$xy'(xy' + y) = 2y^2.$$

1.6 Існування та єдиність розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. Неперервна залежність та диференційованість

Клас диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах, досить невеликий, тому мають велике значення наближені методи розв'язку диференціальних рівнянь. Але, щоб використовувати ці методи, треба бути впевненим в існуванні розв'язку шуканого рівняння та в його єдиності.

Зараз значна частина теорем існування та єдиності розв'язків не тільки диференціальних, але й рівнянь інших видів доводиться методом стискаючих відображень.

Визначення. Простір M називається метричним, якщо для довільних двох точок $x, y \in M$ визначена функція $\rho(x, y)$, що задовольняє аксіомам:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, причому $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (комутативність);
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (нерівність трикутника).

Функція $\rho(x, y)$ називається відстанню (метрикою) в просторі M.

Приклад. Векторний n-вимірний простір $\mathbb{R}^n$.

Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. За метрику можна взяти:

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2},$$

або

$$\rho(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|.$$

Приклад. Простір неперервних функцій на відрізку $[a, b]$ позначається $C([a, b])$. За метрику можна взяти

$$\rho(x(t), y(t)) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2},$$

або

$$\rho(x(t), y(t)) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Визначення. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається фундаментальною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n \geq N(\varepsilon)$ таке, що при $n \geq N(\varepsilon)$ і довільному $m \in \mathbb{N}$ буде $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$.

Визначення. Метричний простір називається повним, якщо довільна фундаментальна послідовність точок простору збігається до деякої точки простору.

Теорема 1.1 (принцип стискаючих відображень)**.** *Нехай в повному метричному просторі M задано оператор A, що задовольняє умовам.*

1. *Оператор A переводить точки простору M в точки цього ж простору, тобто якщо $x \in M$, то і $Ax \in M$.*

2. *Оператор A є оператором стиску, тобто $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y)$, де стала $0 < \alpha < 1$, а x, y — довільні точки M.*

Тоді існує єдина нерухома точка $\bar{x} \in M$, яка є розв'язком операторного рівняння $A\bar{x} = \bar{x}$ і вона може бути знайдена методом послідовних відображень, тобто $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, де $x_{n+1} = Ax_n$, причому x_0 вибирається довільно.

Доведення. Візьмемо довільну точку $x_0 \in M$ і побудуємо послідовність $A^n x_0$. Покажемо, що побудована послідовність є фундаментальною. Дійсно

$$\begin{aligned}
\rho(x_2, x_1) &= \rho(Ax_1, Ax_0) \leq \alpha\rho(x_1, x_0),\\
\rho(x_3, x_2) &= \rho(Ax_2, Ax_1) \leq \alpha\rho(x_2, x_1) \leq \alpha^2\rho(x_1, x_0),\\
\rho(x_{n+1}, x_n) &= \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \leq \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \alpha^n\rho(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Оцінимо $\rho(x_n, x_{n+m})$. Застосувавши $m-1$ раз нерівність трикутника, отримуємо

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_{n+m}) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \leq\\
&\leq \alpha^n\rho(x_1, x_0) + \alpha^{n+1}\rho(x_1, x_0) + \alpha^{n+m-1}\rho(x_1, x_0) =\\
&= (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m})\rho(x_1, x_0) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Тобто послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною і, в силу повноти простору M, збігається до деякого елемента цього ж простора x.

Покажемо, що x є нерухомою точкою A, тобто $Ax = x$.

Нехай від супротивного $Ax = \bar{x}$ і $x \neq \bar{x}$. Застосувавши нерівність трикутника, одержимо $\rho(x, \bar{x}) < \rho(x, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, \bar{x})$. Оцінимо кожний з доданків.

1. $\rho(x, x_{n+1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$
2. $\rho(x_{n+1}, \bar{x}) = \rho(Ax_n, Ax) \leq \alpha\rho(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Таким чином $\rho(x, \bar{x}) \leq 0$, а в силу невід'ємності метрики це значить, що $x = \bar{x}$.

Покажемо, що нерухома точка єдина. Нехай, від супротивного, існують дві точки x і y: $Ax = x$ і $Ay = y$. Але тоді

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y) < \rho(x, y),$$

що суперечить припущенню про стислість оператора. Таким чином, припущення про неєдиність нерухомої точки помилкове. □

З використанням теореми про нерухому точку доведемо теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної.

Теорема 1.2 (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші)**.** *Нехай у диференціальному рівнянні* $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x = f(x,y)$ *функція* $f(x,y)$ *визначена в прямокутнику*

$$D = \{(x,y) : x_0 - a \le x \le x_0 + a, y_0 - b \le y \le y_0 + b\},$$

і задовольняє умовам:

1. $f(x,y)$ *неперервна по* x *та* y *у* D;
2. $f(x,y)$ *задовольняє умові Ліпшиця по змінній* y, *тобто*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le N|y_1 - y_2|, \quad N = const.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ *диференціального рівняння, який визначений при* $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, *і задовольняє умові* $y(x_0) = y_0$, *де позначено* $h < \min\{a, b/M, 1/N\}$, $M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$.

Доведення. Розглянемо простір, елементами якого є функції $y(x)$, неперервні на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$ й обмежені $|y(x) - y_0| \le b$. Введемо метрику $\rho(y(x), z(x))$. Одержимо повний метричний простір $C([x_0 - h, x_0 + h])$. Замінимо диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

еквівалентним інтегральним рівнянням

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t + y_0 = Ay.$$

Розглянемо оператор A. Через те, що

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(t,y(t))|\,\mathrm{d}t \le M|x - x_0| \le Mh \le b,$$

то оператор A ставить у відповідність кожній неперервній функції $y(x)$, визначеній при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ й обмеженій $|y(x) - y_0| \le b$ також неперервну функцію Ay, визначену при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ й обмежену $|y(x) - y_0| \le b$.

Перевіримо, чи є оператор A оператором стиску:

$$\rho(Ay, Az) = \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,\mathrm{d}y - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t,z(t))\,\mathrm{d}t \right| \le$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} \int_{x_0}^{x} |f(t,y(t)) - f(t,z(t))|\,\mathrm{d}t \leq \\
&\leq N \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|\,\mathrm{d}t \leq \\
&\leq N \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} |y(t) - z(t)| \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \leq N\rho(y,z)h.
\end{aligned}
$$

Оскільки $Nh < 1$, то оператор A є оператором стиску. Відповідно до принципу стискаючих відображень операторне рівняння $Ay = y$ має єдиний розв'язок. Тобто інтегральне рівняння чи початкова задача Коші також має єдиний розв'язок. □

Зауваження. Умову Ліпшиця можна замінити іншою, більш грубою, але легше перевіряємою умовою існування обмеженої по модулю частинної похідної $f'_y(x,y)$ в області D. Дійсно,

$$
|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |f'_y(x,\xi)||y_1 - y_2| \leq N|y_1 - y_2|,
$$

де $N = \max_{(x,y)\in D} |f'_y(x,y)|$.

Використовуючи доведену теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші розглянемо ряд теорем, що описують якісну поведінку розв'язків.

Теорема 1.3 (про неперервну залежність розв'язків від параметру)**.** *Якщо права частина диференціального рівняння*

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y,\mu)
$$

неперервна по μ при $\mu \in [\mu_1,\mu_2]$ і при кожному фіксованому μ задовольняє умовам теореми існування й единості, причому стала Ліпшиця N не залежить від μ, то розв'язок $y = y(x,\mu)$, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, неперервно залежить від μ.

Доведення. Оскільки члени послідовності

$$
y_n(x,\mu) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t,\mu))\,\mathrm{d}t
$$

є неперервними функціями змінних x і μ, а стала N не залежить від μ, то послідовність $\{y_n\}$ збігається до y рівномірно по μ. І, як випливає з математичного аналізу, якщо послідовність неперервних функцій збігається рівномірно, то вона збігається до неперервної функції, тобто $y = y(x,\mu)$ — функція, неперервна по μ. □

Теорема 1.4 (про неперервну залежність від початкових умов)**.** *Нехай виконані умови теореми про існування та єдиність розв'язків рівняння*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$

з початковими умовами $y(x_0) = y_0$. *Тоді, розв'язки* $y = y(x_0, y_0, x)$, *що записані у формі Коші, неперервно залежать від початкових умов.*

Доведення. Роблячи заміну $x = y(x_0, y_0, x) - y_0$, $t = x - x_0$ одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f(t + x_0, z + y_0)$$

з нульовими початковими умовами. На підставі попередньої теореми маємо неперервну залежність розв'язків від x_0, y_0 як від параметрів. □

Теорема 1.5 (про диференційованість розв'язків)**.** *Якщо в околі деякої точки* (x_0, y_0) *функція* $f(x, y)$ *має неперервні змішані похідні до* k*-го порядку, то розв'язок* $y(x)$ *рівняння*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$

з початковими умовами $y(x_0) = y_0$ *в деякому околі точки* (x_0, y_0) *буде* k *разів неперервно диференційований.*

Доведення. Підставивши $y(x)$ в рівняння, одержимо тотожність

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv f(x, y(x)),$$

яку можна диференціювати

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f.$$

Якщо $k > 1$, то праворуч функція неперервно диференційована. Продиференціюємо її ще раз

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) f + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

або

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} F\right),$$

Проробивши це k разів, отримаємо твердження теореми. □

Розглянемо диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної

$$F(x, y, y') = 0.$$

Нехай (x_0, y_0) — точка на площині. Підставивши її в рівняння, одержимо відносно y' алгебраїчне рівняння

$$F(x_0, y_0, y') = 0.$$

Це рівняння має корені $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$. Задача Коші для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної, ставиться в такий спосіб.

Потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ диференціального, що задовольняє умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_i$, де x_0, y_0 — довільні значення, а y'_i — один з вибраних наперед коренів алгебраїчного рівняння.

Теорема 1.6 (існування й єдиність розв'язку задачі Коші рівняння, не розв'язаного відносно похідної)**.** *Нехай у замкненому околі точки* (x_0, y_0, y'_i) *функція* $F(x, y, y')$ *задовольняє умовам:*

1. $F(x, y, y')$ *— неперервна по всіх аргументах;*
2. $\partial F/\partial y'$ *існує і відмінна від нуля;*
3. $|\partial F/\partial y| \leq N_0$.

Тоді при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$*, де* h *— досить мале, існує єдиний розв'язок* $y = y(x)$ *рівняння* $F(x, y, y') = 0$*, що задовольняє початковій умові* $y(x_0) = y_0$*,* $y'(x_0) = y'_i$*.*

Доведення. Як випливає з математичного аналізу відповідно до теореми про неявну функцію можна стверджувати, що умови 1) і 2) гарантують існування єдиної неперервної в околі точки (x_0, y_0, y'_i) функції $y' = f(x, y)$, обумовленої рівнянням $F(x, y, y') = 0$, для якої $y'(x_0) = y'_i$. Перевіримо, чи задовольняє функція $f(x, y)$ умові Ліпшиця чи більш грубій $|\partial f/\partial y| \leq N$. Диференціюємо $F(x, y, y') = 0$ по y. Оскільки $y' = f(x, y)$, то одержуємо

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Звідси

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$$

З огляду на умови 2), 3), одержимо, що в деякому околі точки (x_0, y_0) буде $|\partial f/\partial y| \leq N$ і для рівняння $y' = f(x, y)$ виконані умови теореми існування й єдиності розв'язку задачі Коші. □

1.6.1 Особливі розв'язки

Визначення. Розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння, в кожній точці якого $M(x, y)$ порушена єдиність розв'язку задачі Коші, називається особливим розв'язком.

Очевидно, особливі розв'язки треба шукати в тих точках області D, де порушені умови теореми про існування й єдиність розв'язку задачі Коші. Але, оскільки умови теореми носять достатній характер, то їхнє не виконання для існування особливих розв'язків, носить необхідний характер. І точки $N(x, y)$ області D, у яких порушені умови теореми про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння, є лише "підозрілими" на особливі розв'язки.

Розглянемо рівняння
$$y' = f(x, y).$$
Неперервність $f(x, y)$ в області D зазвичай виконується, і особливі розв'язки варто шукати там, де $\partial f/\partial y = + \pm \infty$.

Для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної
$$F(x, y, y') = 0,$$
умови неперервності $F(x, y, y')$ й обмеженості $\partial F/\partial y$ зазвичай виконуються. І особливі розв'язки варто шукати там, де задовольняється остання рівність і
$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$$
Вилучаючи із системи y', одержимо $\Phi(x, y) = 0$. Однак не в кожній точці $M(x, y)$, у якій $\Phi(x, y)$, порушується єдиність розв'язку, тому що умови теореми мають лише достатній характер і не є необхідними. Якщо ж яка-небудь гілка $y = \varphi(x)$ кривої $\Phi(x, y)$ є інтегральною кривою, то $y = \varphi(x)$ називається особливим розв'язком.

Таким чином, для знаходження особливого розв'язку $F(x, y, y') = 0$ треба

1. знайти p-дискримінантну криву на якій виконується $F(x, y, y') = 0$ та $\partial F(x, y, y')/\partial y' = 0$.

2. з'ясувати шляхом підстановки чи є серед гілок p-дискримінантної кривої інтегральні криві;

3. з'ясувати чи порушена умова одиничності в точках цих кривих.

1.6.2 Вправи для самостійної роботи

Приклад 1.6.1. Побудувати послідовні наближення $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ для рівняння $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$.

Розв'язок. Візьмемо початкову функцію $y_0(0) \equiv 0$. Підставивши в ітераційну залежність

$$y_{n+1}(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\,\mathrm{d}s$$

отримаємо

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^x s\,\mathrm{d}s = \frac{x^2}{2}, \\ y_2(x) &= \int_0^x (s - y_1^2(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^x \left(s - \frac{s^4}{4}\right)\mathrm{d}s = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}. \end{aligned}$$

Побудувати послідовні наближення $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ для рівнянь

Задача 1.6.2.

$$y' = y^2 + 3x^2 - 1, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.6.3.

$$y' = y + e^{y-1}, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.6.4.

$$y' = 1 + x \sin y, \quad y(\pi) = 2\pi.$$

Приклад 1.6.5. Вказати на проміжок з $a = 1$, $b = 1$, на якому гарантується існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння $y' = y^3 + x$ за умови $y(0) = 1$.

Розв'язок. Як випливає з теореми про існування та єдиність розв'язку, проміжок, на якому гарантується існування та єдиність розв'язку задачі Коші дорівнює $h = \min\{a, b/M, 1/L\}$, де

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|, \quad L = \max_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|.$$

Для цієї задачі отримаємо $D = \{(x,y) : |x| \le 1, |y| \le 1\}$, $M = 2$, $L = 3$. Тому $h = 1/3$.

Вказати проміжки, де гарантується існування та єдиність розв'язку задачі Коші рівняння

Задача 1.6.6.

$$y' = y + e^y, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad a = 1, \quad b = 2;$$

Задача 1.6.7.

$$y' = 2xy + y^3, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad a = 2, \quad b = 1;$$

Задача 1.6.8.

$$y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad a = 1, \quad b = 1.$$

Приклад 1.6.9. Знайти особливий розв'язок рівняння $y' - \sqrt{y}$.

Розв'язок. Особливий розв'язок слід шукати там, де $\partial f(x,y)/\partial y = \pm\infty$.

Оскільки

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

то отримаємо $\bar{y}(x) = 0$ — крива, що підозріла на особливу. Перевірка показує, що це дійсно інтегральна крива. Щоб до кінця переконатися, що ця крива особлива, розв'язуємо рівняння

$$y' = \sqrt{y} \implies \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \mathrm{d}x \implies 2\sqrt{y} = x + C \implies y(x) = \frac{(x+c)^2}{4}.$$

Легко переконатися, що $\bar{y}(x) = 0$ є кривою, що огинає сім'ю інтегральних кривих $y(x) = (x+c)^2/4$.

Приклад 1.6.10. Знайти особливий розв'язок рівняння $y = x + y' - \ln y'$.

Розв'язок. Складаємо рівняння p-дискриминантної кривої

$$y = x + p - \ln p, \quad 0 = 1 - \frac{1}{p}.$$

Із другого рівняння $p = 1$. Підставивши в перше, отримаємо, що крива, що є підозрілою як особлива, має вигляд $\bar{y}(x) = x + 1$.

Підставивши у рівняння, отримаємо $x+1 = x+1-\ln 1$, тобто впевнились, що $\bar{y}(x) = x + 1$ є інтегральною кривою.

Розв'яжемо рівняння методом введення параметру. Його загальний розв'язок має вигляд

$$y = Ce^x - \ln C.$$

Можна переконатися, що $\bar{y}(x) = x + 1$ є кривою, що огинає сім'ю інтегральних кривих.

Щоб перевірити це аналітично, запишемо умову дотику кривої $y = x+1$ та $y = Ce^x - \ln C$ в точці (x_0, y_0). Вона має вигляд:

$$\bar{y}(x_0) = y(x_0, C), \quad \bar{y}'(x_0) = y'(x_0, C).$$

Тобто

$$x_0 + 1 = Ce^{x_0} - \ln C, \quad 1 = Ce^{x_0}.$$

З другого рівняння отримаємо $C = e^{-x_0}$. Підставивши у перше рівняння, маємо $x_0+1 = 1-\ln e^{-x_0}$, тобто $x_0+1 = x_0+1$ — тотожність. Таким чином при кожному x_0 відбувається дотик інтегральних кривих та $\bar{y}(x) = x+1$, що огинає сім'ю інтегральних кривих.

Знайти особливі розв'язки та зробити рисунок.

Задача 1.6.11.

$$8(y')^3 - 27y = 0;$$

Задача 1.6.12.

$$(y'+1)^3 - 27(x+y)^2 = 0;$$

Задача 1.6.13.

$$y^2((y')^2 + 1) = 1;$$

Задача 1.6.14.

$$(y')^2 - 4y^3 = 0.$$