

А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

2-ге видання, перероблене  
й доповнене

*Допущено Міністерством освіти  
і науки України*

Підручник  
для студентів математичних спеціальностей  
вищих навчальних закладів

Київ  
"Либідь"  
2003

Розповсюдження й тиражування  
без офіційного дозволу видавництва заборонено

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, чл.-кор. НАН України *В. І. Фушич*;  
д-р фіз.-мат. наук, акад. АПН України *М. І. Шкіль*

*Допущено Міністерством освіти і науки України*  
(лист № 1/12—2354 від 10.09.2001 р.)

Редакція літератури з природничих і технічних наук  
Редактор *А. С. Мнишенко*

**Самойленко А. М. та ін.**

**С17** Диференціальні рівняння: Підручник / А. М. Самойленко,  
М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. — 2-ге вид., перероб. і доп. —  
К.: Либідь, 2003. — 600 с.  
ISBN 966-06-0249-9.

У повному обсязі викладено матеріал нормативного курсу звичайних диференціальних рівнянь. Представлено основні практичні методи розв'язання лінійних і нелінійних рівнянь і систем, елементарні підходи до їх геометричного й якісного аналізу, а також фундаментальні теоретичні факти: теореми існування, єдиності, продовжуваності розв'язків, їх неперервної та диференційовної залежності від параметрів, стійкості за Ляпуновим. Наведено приклади застосувань викладеної теорії при дослідженні конкретних математичних моделей. Наприкінці кожного пункту вміщено вправи та задачі різного рівня складності.

Матеріал викладено з урахуванням сучасних тенденцій розвитку теорії диференціальних рівнянь, її символіки та термінології.

Для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**ББК 22.161.6я73**

© А. М. Самойленко, М. О. Перестюк,  
І. О. Парасюк, 1994

А. М. Самойленко, М. О. Перестюк,  
І. О. Парасюк, 2003, зі змінами

ISBN 966

---

---

## ПЕРЕДМОВА

**С**учасна теорія диференціальних рівнянь посідає чільне місце серед інших математичних дисциплін. Гармонійне поєднання суто математичного й прикладного аспектів робить її однаково привабливою як для теоретиків, так і для тих, хто займається застосуванням математики в різноманітних галузях знань. Механіка, фізика, радіоелектроніка, машинобудування, хімія, біологія, економіка — це далеко не повний перелік наук, в яких широко використовуються диференціальні рівняння.

Мета пропонуваного підручника — ознайомити студента з основними, базовими поняттями, фактами, методами та найпростішими застосуваннями теорії диференціальних рівнянь, підготувати його до самостійної роботи зі спеціалізованими посібниками вищого рівня, науковою літературою.

При написанні підручника використано багаторічний досвід викладання нормативного курсу «Диференціальні рівняння» на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Центральним об'єктом вивчення є звичайне (як скалярне, так і векторне) диференціальне рівняння — аналітичний запис задачі про відшукування невідомої функції (вектор-функції) однієї незалежної змінної за відомим співвідношенням, яке пов'язує між собою значення шуканої функції, її похідних та аргументу. Однак у підручнику диференціальне рівняння розглядається не лише як аналітичний об'єкт. Значна увага приділяється геометричним поняттям і образам, які дають змогу глибше зрозуміти природу цього об'єкта, пояснити відповідні теоретичні побудови.

Матеріал книги можна умовно поділити на три рівня складності. До першого рівня належать питання «програми-мінімум»: елементарні прийоми інтегрування та зниження порядку деяких типів нелінійних диференціальних рівнянь; алгоритми розв'язування лінійних рівнянь та систем, квазілінійних рівнянь із частинними похідними першого порядку;

формулювання основних теорем існування та єдиності розв'язків. Ці питання входять до більшості загальноматематичних курсів вищих навчальних закладів.

Матеріал другого рівня переважно становлять питання теорії, які тією чи іншою мірою розглядаються в стандартних нормативних курсах диференціальних рівнянь. Сюди, наприклад, можна віднести: локальні теореми існування та єдиності розв'язків задачі Коші для рівнянь і систем; класифікацію фазових портретів лінійних систем на площині та в тривимірному просторі; дослідження будови фундаментальних матриць лінійних систем зі сталими коефіцієнтами; вибране питання теорії лінійних рівнянь другого порядку (теорема коливаності, інтегрування узагальненими степеневими рядами; розв'язання крайових задач); більшість фактів, що стосуються теорії стійкості за Ляпуновим.

Для засвоєння матеріалу двох указаних рівнів достатньо володіти такими стандартними розділами математичного аналізу, як «Границі», «Похідна», «Інтеграл Рімана», «Функціональні ряди», «Диференціальне числення функцій кількох незалежних змінних», «Існування оберненої та неявної функції». Ґрунтовному вивченню лінійних систем диференціальних рівнянь має передувати знайомство з елементами теорії лінійних просторів та лінійних операторів. Для зручності в додатках розміщено деякі найуживаніші в підручнику теоретичні відомості з лінійної алгебри та аналізу.

У книзі наведено й декілька досить складних теорем, які можна класифікувати як матеріал третього рівня складності. До них належать: глобальні теореми існування розв'язку задачі Коші, його неперервності та диференційовності як функції початкових даних та параметрів у природній області визначення; питання коректності початкової задачі; теореми про стійкість та нестійкість за першим наближенням; теорема про існування граничного циклу. Розуміння доведень (але не формулювань!) зазначених теорем вимагає від студента відповідного ступеня знань та математичної культури. Пункти книги, які містять матеріал третього рівня складності, позначено зірочкою. Крім того, окремі складні місця, які можна пропустити під час першого читання, набрано дрібним шрифтом.

Вправи й задачі до кожного пункту призначені для самоконтролю за ступенем засвоєння матеріалу курсу. Якщо в процесі такого самоконтролю виникають значні труднощі, автори рекомендують скористатися посібником [12].

Наприкінці книги розміщено короткі відомості про вчених, які згадуються в тексті.

## ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

- $\forall$  — для кожного, для всіх (квантор загальності)  
 $\exists$  — існує (квантор існування)  
 $\Rightarrow$  — впливає  
 $\Leftrightarrow$  — тоді й лише тоді  
 $:=$  — дорівнює за означенням  
 $O$  — відношення підпорядкування [4]  
 $o$  — відношення нехтування [4]  
 $\emptyset$  — порожня множина  
 $a \in A \subset B$  —  $a$  належить множині  $A$ , яка є підмножиною множини  $B$   
 $\bar{A}$  — замикання множини  $A$   
 $A \cap B, A \cup B$  — переріз і об'єднання множин  $A$  та  $B$   
 $A \times B$  — прямий добуток множин  $A$  та  $B$   
 $\inf$  ( $\sup$ ) — нижня (верхня) межа [4]  
 $f: A \rightarrow B$  —  $f$  відображає множину  $A$  в множину  $B$   
 $\text{Id}$  — тотожне відображення  
 $f \circ g$  — суперпозиція (композиція) відображень  $f$  та  $g$   
 $\mathbb{R}$  — множина (поле) дійсних чисел, дійсна вісь  
 $\mathbb{C}$  — множина (поле) комплексних чисел, комплексна площина

- $\mathbb{Z}$  — множина цілих чисел  
 $\mathbb{N}$  — множина натуральних чисел  
 $\mathbb{R}^n$  — дійсний  $n$ -вимірний векторний простір  
 $\mathbb{C}^n$  — комплексний  $n$ -вимірний векторний простір  
 $\langle a, b \rangle, ab$  — скалярний добуток векторів  $a$  та  $b$   
 $\|a\|$  — евклідова норма вектора  $a$   
 $\|A\|$  — норма матриці  $A$   
 $\text{tr } A$  — слід матриці  $A$  — сума елементів головної діагоналі  
 $A^T$  — матриця, транспонована щодо матриці  $A$   
 $\dot{x}$  — похідна за «часом»  $t$   
 $F'_x$  — частинна похідна за змінною  $x$   
 $f'(x)$  — похідна відображення  $f$   
 $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$  — матриця Якобі відображення  $f(x)$   
 $B_r^n(x_0)$  — куля радіусом  $r$  із центром у  $x_0$  у просторі  $\mathbb{R}^n$  (або  $\mathbb{C}^n$ )  
 $C(\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B})$  — клас неперервних відображень із множини  $\mathcal{A}$  в множину  $\mathcal{B}$   
 $C^r(\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B})$  — клас  $r$  разів неперервно диференційованих відображень із множини  $\mathcal{A}$  в множину  $\mathcal{B}$

---

**В.1****Виникнення теорії диференціальних рівнянь**

Передумови для появи теорії диференціальних рівнянь склалися в другій половині XVII ст., коли математики впритул наблизилися до усвідомлення взаємно оберненого характеру двох основних операцій аналізу нескінченно малих — диференціювання та інтегрування.

Актуальні на той час так звані «обернені задачі на дотичні» (тобто задачі відшукування кривих за відомими властивостями їх дотичних) були одними з перших, що зводилися до розв'язання диференціальних рівнянь. Наведемо простий приклад такої задачі.

Нехай на площині з декартовою прямокутною системою координат  $xOy$  потрібно знайти криву, в кожній точці якої кутковий коефіцієнт дотичної пропорційний із коефіцієнтом  $k$  ординаті точки дотику. Якщо таку криву шукати у вигляді графіка деякої диференційовної функції  $y = y(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , то, врахувавши геометричний зміст похідної, умову задачі можна подати у вигляді співвідношення

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

яке являє собою одне з найпростіших і водночас дуже важливе диференціальне рівняння. Легко перекоонатися в тому, що його задовольняє кожна функція вигляду  $y = ce^{kx}$ , де  $c$  — довільне дійсне число. Цей факт було виявлено Р. Декартом іще в 1639 р.

Популярний у XVII ст. кінематичний спосіб побудови різноманітних кривих, що спирався на поняття миттєвої швидкості (механічного

еквівалента похідної), теж був важливим джерелом виникнення диференціальних рівнянь. Як приклад наведемо запропоновану Р. Декартом кінематичну інтерпретацію кривих із попередньої задачі. Нехай точка  $P$  рухається в площині так, що швидкість її абсциси є величиною сталою, рівною для певності одиниці, а миттєва швидкість ординати в кожен момент часу  $t$  пропорційна з коефіцієнтом  $k$  самій ординаті. Очевидно, що функції  $x(t)$  та  $y(t)$ , які визначають залежність координат точки  $P$  від часу, мають задовольняти систему рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = ky.$$

Перше з виписаних співвідношень становить задачу про первісну функції  $f(t) \equiv 1$ . Його розв'язки вичерпуються функціями  $x = t + c_1$ , де стала  $c_1$  пробігає множину дійсних чисел. Друге рівняння, як нам уже відомо, задовольняє кожна функція  $y = c_2 e^{kt}$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$ . Унаслідок вилучення параметра  $t$  дістаємо залежність  $y = c_2 e^{k(x - c_1)}$ , або  $y = ce^{kx}$ , якщо ввести позначення  $c = c_2 e^{-kc_1}$ .

Цікаво відзначити, що на описаному вище законі руху точки  $P$  фактично ґрунтувався запропонований Дж. Непером принцип укладання таблиць логарифмів.

У 1669 р. І. Барроу в своїх «Лекціях з геометрії та оптики» доводить важливий результат про взаємно обернений характер задач на дотичні, з одного боку, та про площі фігур, обмежених графіками функцій,— з іншого, і на підставі цього формулює правило розв'язання диференціальних рівнянь спеціального вигляду  $dy/dx = f(x)/g(y)$  (рівняння такого типу називають диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними).

І. Ньютон, мабуть, першим сповна усвідомив значення диференціальних рівнянь для опису законів природи й насамперед законів руху механічних систем. У 1676 р. він запропонував метод відшукування розв'язків диференціальних рівнянь у вигляді степеневих рядів. У цей самий час Г. Лейбніц ставить задачу про знаходження розв'язків у скінченному вигляді.

Починаючи з 90-х років XVII ст. пошук у цьому напрямі ведуть Я. Бернуллі та Й. Бернуллі, пізніше до них приєднуються Я. Ріккати та Д. Бернуллі. З працями Л. Ейлера, А. Клеро, Ж. Д'Аламбера теорія диференціальних рівнянь стає самостійною математичною дисципліною.



В.2

Диференціальні рівняння  
в прикладних задачах

Основна частина даного курсу присвячена вивченню диференціальних рівнянь відносно функції (системи функцій) однієї незалежної змінної. Такі рівняння називають *звичайними диференціальними рівняннями*.

Аби показати природність об'єктів подальшого вивчення, а також постановок основних задач, проілюструємо їх виникнення на прикладах математичного моделювання реальних процесів.

□ Приклад В.1

Розглянемо задачу про рух матеріальної точки масою  $m$  по прямій під дією сталої сили тяги  $F$ , напрямленої вздовж цієї прямої, та з урахуванням сили опору середовища.

Позначимо через  $v(t)$  швидкість точки в момент часу  $t$ . Якщо вона порівняно невелика, то цілком прийнятним є припущення про те, що сила опору середовища дорівнює  $-kv(t)$ , де  $k$  — деякий додатний сталий коефіцієнт. Диференціальне рівняння, яке описує процес зміни швидкості точки з часом, можна дістати, користуючися другим законом Ньютона: добуток маси  $m$  на прискорення точки  $a(t)$  дорівнює сумі сил, що діють на неї. Оскільки за означенням  $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ , то шукане рівняння можна подати у вигляді

$$m \frac{dv}{dt} = F - kv$$

або

$$\frac{dv}{dt} = -k(v - v_*), \quad (\text{В.1})$$

де  $k = \kappa/m$ ,  $v_* = F/\kappa$ . Функція  $v = ce^{-kt} + v_*$  перетворює рівняння (В.1) на тотожність щодо  $t$  при кожному фіксованому  $c \in \mathbb{R}$ . Цей факт легко перевірити безпосередньо, однак його можна трактувати й як наслідок такого зауваження: ввівши нову невідому функцію  $y(t)$  співвідношенням  $v = y + v_*$ , дістанемо для неї вже відоме рівняння  $dy/dt = -ky$ .

Таким чином, нам удалося знайти багато функцій (однопараметричну сім'ю, залежну від довільної сталої  $c \in \mathbb{R}$ ), які задовольняють

рівняння (В.1). Кожну з них природно називати його *розв'язком*. (Далі ми покажемо, що між множиною розв'язків рівняння (В.1) та множиною значень довільної сталої  $c$  існує взаємно однозначна відповідність.) Як же з усіх цих розв'язків виділити той, що відповідає конкретному процесові зміни швидкості матеріальної точки? Для цього слід урахувати, що кожен такий процес є детермінованим у часі й однозначно характеризується своїм значенням  $v_0 = v(t_0)$  у початковий момент  $t_0$ . Отже, ми природно підійшли до так званої *початкової задачі* (її називають також *задачею Коші*): за заданою парою чисел  $(t_0, v_0)$  — *початковими даними* — знайти розв'язок  $v(t)$  рівняння (В.1), який би задовольняв *початкову умову*  $v(t_0) = v_0$ .

Тепер зрозуміло, що конкретне значення довільної сталої  $c$  потрібно визначити з початкової умови, тобто з рівності  $ce^{-kt_0} + v_* = v_0$ . Звідси знаходимо  $c = (v_0 - v_*)e^{kt_0}$ .

Отже, розв'язок задачі Коші з початковими даними  $(t_0, v_0)$  має вигляд

$$v(t) = (v_0 - v_*)e^{k(t - t_0)} + v_*.$$

Ця формула дає змогу зробити важливий висновок: при  $t \rightarrow \infty$  швидкість матеріальної точки прямує до граничного значення  $v_*$ , яке не залежить від  $v_0$ . Крім того, користуючися відомою залежністю

$s(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$ , можна легко обчислити шлях  $s(t)$ , пройдений точкою за проміжок часу від  $t_0$  до  $t$ , і, таким чином, завершити розв'язання поставленої задачі.

Зауважимо: за певних умов, наприклад при великих швидкостях, припущення про те, що сила опору середовища пропорційна  $v(t)$ , не справджується. Точніше ця сила моделюється деякою нелінійною функцією швидкості. Так, диференціальне рівняння задачі про падіння тіла з висоти має вигляд

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v^2 + mg,$$

де  $\alpha$  — деякий додатний коефіцієнт, а  $g$  — прискорення вільного падіння. Це рівняння належить до класу, який вивчав І. Барроу, і теж допускає відшукування розв'язків у явному вигляді.

## □ Приклад В.2

Нехай тіло має масу  $m$ , питому теплосмність  $c$  та початкову температуру  $T_0$ . Розглянемо процес його охолодження за рахунок теплообміну із зовнішнім середовищем. Вважається, що температура  $T_*$  оточуючого є сталою величиною,  $T_* < T_0$ .

Температуру тіла в момент часу  $t$  позначимо через  $T(t)$ . Згідно з гіпотезою Ньютона кількість теплоти  $\Delta Q$ , яку тіло віддає в зовнішнє середовище протягом «малого» проміжку часу від  $t$  до  $t + \Delta t$ , визначається наближеною рівністю  $\Delta Q = a(T(t) - T_*) \Delta t$ , де  $a$  — деякий сталий додатний коефіцієнт. Більш строго цей фізичний закон, із одного боку, слід було б подати у вигляді

$$\Delta Q = a(T(t) - T_*) \Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

З іншого боку, внаслідок втрати тілом зазначеної кількості теплоти  $\Delta Q$  його температура зменшується. При цьому, як добре відомо,  $\Delta Q = cm(T(t) - T(t + \Delta t))$ . Таким чином, маємо рівність

$$cm(T(t) - T(t + \Delta t)) = a(T(t) - T_*) \Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Поділивши обидві її частини на  $\Delta t$  і спрямувавши  $\Delta t$  до нуля, дістанемо диференціальне рівняння того самого типу, що й у попередньому прикладі:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_*),$$

де  $k = a/cm$ .

Отже, залежність температури тіла від часу має вигляд

$$T(t) = (T_0 - T_*)e^{-k(t-t_0)} + T_*.$$

Коефіцієнт  $a$  визначається певними теплофізичними характеристиками тіла. Може статися, що конкретне його значення невідоме. В цьому разі знайдена нами залежність  $T(t)$  дає змогу визначити  $a$  експериментально, вимірюванням температури тіла в заданий момент часу  $t_1 > t_0$ . Дійсно, якщо  $T_1 = T(t_1)$  вважати відомим, то з умови

$T_1 = (T_0 - T_*)e^{-k(t_1-t_0)} + T_*$  можна легко знайти коефіцієнт  $k$ , а отже, і  $a = cmk$ .

Узагальнюючи модель охолодження тіла, припустимо, що температура зовнішнього середовища є відомою функцією часу:  $T_*(t)$ . Тоді відповідне диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_*(t)).$$

Угадати його розв'язки вже не так просто, як у попередньому випадку. Один із способів розв'язання рівнянь такого типу запропонував І. Бернуллі.

## □ Приклад В.3

Проаналізуємо процес розмноження одновидової популяції живих організмів. Величину цієї популяції в момент часу  $t$  позначимо через  $x(t)$ . Це може бути загальна кількість особин популяції або їхня маса. Ідеалізуючи досліджуваний процес, вважатимемо, що  $x(t)$  неперервно змінюється в часі.

У найпростішій моделі приймають таку гіпотезу (закон Мальтуса): за «малий» проміжок часу від  $t$  до  $t + \Delta t$  кількість новонароджених особин приблизно становить  $ax(t)\Delta t$ , а померлих —  $bx(t)\Delta t$ . Тут  $a$  та  $b$  — коефіцієнти народжуваності та смертності відповідно. Отже, загальна зміна величини популяції за вказаний проміжок часу виражається формулою

$$x(t + \Delta t) - x(t) = (a - b)x(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Поклавши  $k = a - b$ , поділивши обидві частини цієї рівності на  $\Delta t$  і перейшовши до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ , дістанемо знайоме диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad (\text{В.2})$$

розв'язками якого є функції  $ce^{kt}$ , де  $c \in \mathbb{R}$  — довільна стала.

Якщо відомо, що величина популяції в момент  $t_0$  становить  $x_0$ , то, визначивши  $c$  із початкової умови  $ce^{kt_0} = x_0$ , дістаємо залежність

$$x = x_0 e^{k(t - t_0)},$$

яка являє собою розв'язок задачі Коші з початковими даними  $(t_0, x_0)$ .

У випадку, коли  $a$  і  $b$  невідомі, коефіцієнт  $k$  можна знайти так само, як і в попередньому прикладі, визначивши значення  $x_1 = x(t_1)$  у деякий момент  $t_1$ . Тоді з умови  $x_1 = x_0 e^{k(t_1 - t_0)}$  матимемо  $k = (t_1 - t_0)^{-1} \ln(x_1/x_0)$ .

Цікавий факт: коли за такою методикою обчислили коефіцієнт  $k$ , користуючися даними про населення Землі в 1961 та 1971 рр., то дістали залежність  $x = 3,06 \cdot 10^9 \cdot e^{0,021(t - 1961)}$ , яка непогано узгоджується з оцінками приросту населення в період між 1700 та 1960 рр. У цей час воно подвоювалося кожні 35 років, а одержана формула дає подвоєння за 34,6 року.

Диференціальне рівняння (В.2) має доволі універсальний характер. Окрім прикладів, розглянутих вище, воно виникає при вивченні багатьох інших явищ, зокрема явища розпаду радіоактивних елементів. Однак, якщо розглядувана популяція розвивається в середовищі з обмеженими ресурсами життєзабезпечення, то модель Мальтуса при  $k > 0$ , коли з плином часу  $x(t)$  стає досить великим, перестає правильно описувати реальний процес. Цей факт пояснюється тим,

що в разі зростання кількості особин між ними загострюється конкурентна боротьба, яка веде до збільшення коефіцієнта смертності. Таким чином, зазначений коефіцієнт насправді слід вважати деякою функцією змінної  $x$ . У 1837 р. П. Ферхюльст запропонував модель, в якій коефіцієнт смертності є лінійною функцією. Відповідне рівняння має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = kx - lx^2 \quad (\text{В.3})$$

і називається *логістичним*. Далі ми його детально досліджуватимемо. Зокрема, буде показано, що величина популяції, яка розвивається відповідно до логістичного рівняння, має тенденцію до стабілізації: при  $t \rightarrow \infty$  вона необмежено наближається до граничного значення  $x_* = k/l$ .

Цікаво, що досить повну інформацію про поведінку розв'язків рівняння (В.3) вдається дістати, не знаходячи їх явно, а аналізуючи лише властивості його правої частини. Саме такий підхід покладено в основу так званої якісної теорії диференціальних рівнянь, біля витоків якої стояли такі видатні вчені, як А. Пуанкаре та О. М. Ляпунов.

#### □ Приклад В.4

*Диференціальне рівняння вигляду*

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - (\mu + \nu)x - c(t)$$

*править за найпростішу математичну модель економічної динаміки.*

В цій моделі  $x(t)$  — обсяг капіталу (основних фондів), який припадає на одного працівника в момент часу  $t$ ;  $\mu$  та  $\nu$  — додатні коефіцієнти, що мають економічний зміст норми амортизації капіталу та темпу росту чисельності робочої сили відповідно;  $c(t)$  — залежність від часу обсягу споживання в розрахунку на одного працівника;  $f(x)$  — так звана виробнича функція, яка є характеристикою продуктивності праці й має певні властивості монотонності та опуклості.

Складнішими є математичні моделі процесів, які визначаються не однією, а цілим набором скалярних величин.

#### □ Приклад В.5

*Розглянемо модель двовидової популяції за умови, що один із видів знаходить харчові ресурси в зовнішньому середовищі й водночас слугує їжею для іншого. Це — так звана модель «хижак—жертва».*

Нехай скалярні змінні  $x$  та  $y$  характеризують величини популяцій жертв та хижаків відповідно. При складанні диференціальних рівнянь процесу взаємодії цих двох популяцій будемо виходити з таких припущень.

- Швидкість, з якою відбувається зміна величини популяції жертв, є сумою трьох доданків  $kx$ ,  $-lx^2$  та  $-mxy$ , де  $k$ ,  $l$ ,  $m$  — додатні числа. Наявність перших двох доданків пов'язана з процесом розмноження жертв в умовах внутрішньовидової конкуренції, а третій означає, що швидкість поїдання жертв хижаками пропорційна як кількості жертв, так і кількості хижаків.
- Швидкість, з якою відбувається зміна величини популяції хижаків, теж є сумою трьох доданків  $-py$ ,  $-qy^2$  та  $rxu$ , де  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — додатні числа. Перший і другий доданки характеризують кількість хижаків, що вмирають за одиницю часу відповідно природним шляхом (смерть від старіння та хвороб) та внаслідок внутрішньовидової боротьби, а третій — означає, що коефіцієнт народжуваності хижаків є лінійною функцією кількості жертв.

Отже, за зроблених припущень матимемо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx - lx^2 - mxy, \\ \frac{dy}{dt} = -py - qy^2 + rxy. \end{cases} \quad (\text{В.4})$$

Для неї задача Коші виглядає таким чином: знаючи, що в початковий момент часу  $t_0$  величини популяцій жертв і хижаків становлять відповідно  $x_0$  та  $y_0$ , знайти функції  $x(t)$  та  $y(t)$ , котрі задовольняють як систему диференціальних рівнянь (В.4), так і початкові умови  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ .

Досі в розглядуваних рівняннях фігурували лише перші похідні невідомих функцій. Водночас багато процесів описуються диференціальними рівняннями з похідними вищих порядків.

### □ Приклад В.6

*Розглянемо так звану задачу n тіл. У тривимірному просторі рухається n матеріальних точок, які взаємодіють між собою за законом гравітації. Вважається, що жодні інші сили на цю систему не впливають.*

Нехай  $m_1, \dots, m_n$  — маси точок. Уведемо в тривимірному просторі декартові прямокутні координати  $(x, y, z)$ . Тоді положення  $i$ -ї точки

визначається її радіусом-вектором  $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ , а сила  $f_{ij}$ , з якою на неї діє  $j$ -та точка ( $i \neq j$ ), має вигляд

$$f_{ij} = \frac{\gamma m_i m_j}{\|r_j - r_i\|^2} (r_j - r_i),$$

де  $\gamma$  — гравітаційна стала. Для зручності покладемо  $f_{ii} = 0$ .

За другим законом Ньютона добуток маси  $i$ -ї точки на її прискорення дорівнює рівнодійній усіх сил, прикладених до цієї точки. Оскільки прискорення цієї точки являє собою вектор

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} := \left( \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right),$$

то диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок мають вигляд

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^n f_{ij}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.5})$$

Як бачимо, дана система складається з  $3n$  скалярних диференціальних рівнянь, що містять похідні другого порядку. Кажуть, що це  $3n$ -вимірна система диференціальних рівнянь другого порядку.

Не можна не наголосити на тій визначній ролі, яку вона відіграла в розвитку математики та механіки. Вивчаючи її, І. Ньютон обґрунтував закони руху планет, емпірично відкриті Й. Кеплером (на можливість такого обґрунтування Ньютону вказав Р. Гук). Ці закони вдалося вивести, дослідивши спрощену ідеалізовану систему, яка формально одержується з рівнянь (B.5) при  $m_i \rightarrow 0$ ,  $i = 2, 3, \dots$  і відповідає випадку, коли масами планет можна нехтувати порівняно з масою Сонця  $m_1$ . Для врахування взаємного впливу планет ( $m_i \gg m_j \neq 0$ ,  $j = 2, 3, \dots$ ) такі видатні математики, як Ж. Лагранж, П. Лаплас, К. Гаусс, розробляли теорію збурень. У процесі її розвитку природно виникли чудові спеціальні функції, які зараз називають ім'ям Ф. Бесселя. Вони, однак, були відомі раніше Ж. Лагранжу. Аналіз рядів теорії збурень (розвинень розв'язків системи (B.5) за степенями так званого малого параметра, пропорційного відношенням  $m_i/m_1$ ,  $i = 2, 3, \dots$ ) привів О. Коші до важливих результатів у теорії функцій комплексної змінної. Потреби небесної механіки (розділу механіки, який вивчає рух небесних тіл) значною мірою стимулювали розвиток на-

ближених (чисельних) методів розв'язання диференціальних рівнянь. У 1846 р. на основі чисельного аналізу системи рівнянь типу (В.5) У. Лєвер'є та Дж. Адамсу вдалося вказати місцезнаходження невідомої на той час планети Нептун. Нарешті, задача  $n$  тіл безпосередньо вплинула на розвиток теорії стійкості, абстрактної теорії динамічних систем, інших галузей математики.

Можна навести чимало прикладів і таких задач, в яких виникають диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідних шуканих функцій.

### □ Приклад В.7

*Розглянемо задачу про ізогональні траєкторії.*

Нехай функція  $\Phi(x, y, c)$  неперервна й має неперервні частинні похідні за змінними  $x, y$  в деякій області  $G \subset \mathbb{R}^3$ . Вважатимемо, що співвідношення

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad (\text{В.6})$$

визначає на площині однопараметричну сім'ю кривих із такою властивістю: для кожної точки  $(x_0, y_0, c) \in G$  існує єдина диференційовна в деякому околі точки  $x_0$  функція  $y_c(x)$ , яка в ньому тотожно задовольняє рівняння (В.6). Таким чином, графік функції  $y_c(x)$  є кривою, що відповідає значенню параметра сім'ї  $c$ .

*Ізогональною траєкторією* сім'ї (В.6) називається лінія, яка перетинає криві цієї сім'ї під сталим кутом. (Кут між двома кривими в їх спільній точці  $P$  визначається кутом між дотичними до цих кривих у точці  $P$ .)

Наша задача полягає у відшуванні ізогональних траєкторій сім'ї (В.6). Зауважимо, що ізогональні траєкторії застосовуються, наприклад, у гідромеханіці — при вивченні плоскої течії рідини, у фізиці — при дослідженні електромагнітних явищ тощо.

Покажемо, що поставлену задачу можна звести до розв'язання деякого диференціального рівняння. Спочатку утворимо диференціальне рівняння сім'ї кривих (В.6). Диференціюванням тотожності  $\Phi(x, y_c(x), c) \equiv 0$  за змінною  $x$  дістаємо

$$\frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial x} \Big|_{y=y_c(x)} + \frac{\partial \Phi(x, y_c(x), c)}{\partial y} \frac{dy_c(x)}{dx} = 0.$$

Таким чином, функція  $y_c(x)$  тотожно задовольняє систему

$$\Phi(x, y, c) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial y} y' = 0.$$



Виключивши з цієї системи параметр  $c$  (будемо припускати, що це завжди можна зробити), матимемо співвідношення вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \quad (\text{В.7})$$

яке й є шуканим диференціальним рівнянням сім'ї кривих (В.6).

Перейдемо до побудови диференціального рівняння ізогональних траєкторій. Нехай останні перетинають криві заданої сім'ї під кутом  $\alpha$ . Ізогональну траєкторію вважатимемо графіком функції  $y = \eta(x)$ . Зафіксуємо  $x = x_0$ . Нехай  $\varphi(x_0)$  — кут між додатною піввіссю осі абсцис та дотичною до тієї кривої сім'ї (В.6)  $y = y(x)$ , яка проходить через точку  $(x_0, \eta(x_0))$  [отже,  $y(x_0) = \eta(x_0)$ ], а  $\psi(x_0)$  — аналогічний кут для ізогональної траєкторії. Тоді  $\varphi(x_0) = \psi(x_0) - \alpha$ . (Можна було б шукати ізогональну траєкторію, для якої справджується рівність  $\varphi(x_0) = \psi(x_0) + \alpha$ ; характер подальших міркувань від цього не зміниться.) Оскільки  $F(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = 0$ ,  $y(x_0) = \eta(x_0)$ ,  $\text{tg } \varphi(x_0) = y'(x_0)$ , то  $F(x_0, \eta(x_0), \text{tg } \varphi(x_0)) = 0$ . Але  $\text{tg } \varphi(x_0) = \text{tg}(\psi(x_0) - \alpha)$ ,  $\text{tg } \psi(x_0) = \eta'(x_0)$ . Отже, якщо розглядати випадок, коли  $\alpha \neq \pi/2$ , то

$$\text{tg}(\psi(x_0) - \alpha) = \frac{\text{tg } \psi(x_0) - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } \psi(x_0) \text{tg } \alpha} = \frac{\eta'(x_0) - k}{1 + k\eta'(x_0)},$$

де  $k := \text{tg } \alpha$ . Тоді

$$F\left(x_0, \eta(x_0), \frac{\eta'(x_0) - k}{1 + k\eta'(x_0)}\right) = 0.$$

Зрозуміло, що ця рівність повинна справджуватися для будь-якої точки  $x_0$  з області визначення функції  $\eta(x)$ . Тому дана функція має бути розв'язком диференціального рівняння

$$F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0. \quad (\text{В.8})$$

Воно й є шуканим диференціальним рівнянням ізогональних траєкторій.

У випадку, коли  $\alpha = \pi/2$ , маємо задачу про *ортогональні траєкторії*. Відповідне диференціальне рівняння легко дістати з (В.8) граничним переходом, спрямувавши  $k$  до нескінченності. В результаті матимемо

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

Для диференціальної геометрії становить інтерес задача про ізогональні траєкторії сім'ї кривих, що лежать на заданій поверхні. Окремі випадки такої задачі виникли внаслідок потреб практики.

### □ Приклад В.8

Мореплавці ще в епоху великих географічних відкриттів зацікавилися кривою, вздовж якої відбувається рух корабля заданим істинним курсом. Така крива перетинає меридіани під сталим кутом  $\alpha$  і називається *локсодрою*.

Знайдемо диференціальне рівняння локсодроми на поверхні сфери, заданої в просторі  $\mathbb{R}^3$  з координатами  $(x, y, z)$  рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

у випадку  $\alpha \neq \pi/2$ . (Якщо  $\alpha = \pi/2$ , то локсодрома збігається з деякою паралеллю сфери.) Для цього використаємо такий відомий факт: якщо криву  $\Gamma$  у просторі  $\mathbb{R}^3$  задано в параметричному вигляді рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

де  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  — неперервно диференційовні функції на деякому інтервалі  $I$ , то вектор  $\tau(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$  (тут  $\dot{x} := dx/dt$  і т. д.) за умови, що він не перетворюється в нуль, визначає напрям дотичної до  $\Gamma$  у точці  $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Цей вектор природно вважати прикладеним до точки  $P(t)$  і називати дотичним до кривої  $\Gamma$  у цій точці. Кутом між кривими в точці їх перетину називають кут між відповідними дотичними векторами.

Виявляється, що найпростішого вигляду диференціальне рівняння локсодроми набуває у сферичних координатах  $(\varphi, \theta)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta \in [0, \pi)$ , які вводяться на сфері одиничного радіуса за формулами

$$x = \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \cos \theta. \quad (\text{В.9})$$

Меридіани такої сфери утворюють однопараметричну сім'ю, задану рівнянням  $\varphi = c$ ,  $\theta \in [0, \pi)$  (тут  $c$  — параметр сім'ї). Декартові координати дотичного вектора  $\xi$  до меридіана, що проходить через точку на сфері з координатами  $(\varphi_0, \theta_0)$ , знайдемо диференціюванням правих частин рівностей (В.9) за змінною  $\theta$ , яка відіграє роль параметра  $t$ , поклавши надалі  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\theta = \theta_0$ . У результаті маємо

$$\xi = (\cos \varphi_0 \cos \theta_0, \sin \varphi_0 \cos \theta_0, -\sin \theta_0).$$

Аналогічно, задавши у сферичних координатах локсодрому, що проходить через точку  $(\varphi_0, \theta_0)$ , рівнянням  $\varphi = \varphi(\theta)$  ( $\varphi(\theta_0) = \varphi_0$ ), обчис-

люємо декартові координати її дотичного вектора  $\eta$  у цій точці й знаходимо:

$$\eta = (-\sin \varphi_0 \sin \theta_0 \cdot \dot{\varphi}(\theta_0) + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 \cdot \dot{\theta}_0, \\ \cos \varphi_0 \sin \theta_0 \cdot \dot{\varphi}(\theta_0) + \sin \varphi_0 \cos \theta_0 \cdot \dot{\theta}_0, -\sin \theta_0).$$

За умовою задачі кут між векторами  $\xi$  та  $\eta$  дорівнює  $\alpha$ . Косинус цього кута можна знайти за допомогою скалярного добутку:

$$\frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\|\xi\| \|\eta\|} = \cos \alpha.$$

Після елементарних обчислень з урахуванням того, що  $\theta_0$  може набувати довільних значень із півінтервалу  $[0, \pi)$ , дістаємо шукане диференціальне рівняння локсодроми в сферичних координатах

$$\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\theta} \sin \theta\right)^2} + 1 = \sec \alpha.$$

### В.3

## Основні поняття та об'єкти вивчення

Нехай  $D$  — область у просторі  $\mathbb{R}^2$ ,  $(t, x)$  — координати в ньому. Кожна функція  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  визначає в  $D$  диференціальне рівняння

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \dot{x} := \frac{dx}{dt}. \quad (\text{B.10})$$

Воно називається *скалярним диференціальним рівнянням першого порядку* (розв'язаним відносно похідної). Множина  $D$  — *область визначення рівняння* (B.10).

### ⇒ Означення В.1

*Розв'язком рівняння (B.10) на інтервалі  $I \subset \mathbb{R}$  називають диференційовну в кожній точці  $t \in I$  функцію  $x(t)$ , графік якої належить області  $D$  (тобто  $(t, x(t)) \in D$  для всіх  $t \in I$ ) і яка задовольняє умову*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I.$$

### ◆ Зауваження В.1

Поняття розв'язку можна ввести й у випадку, коли  $I$  є однією з таких множин: 1)  $[a, b)$ , 2)  $(a, b]$ , 3)  $\{a, b\}$ . При цьому слід лише уточнити, що в граничних точках роль похідної функції  $x(t)$  відіграє відповідна одностороння похідна: права — для точки  $a$  та ліва — для точки  $b$ .

Розв'язати (зінтегрувати) диференціальне рівняння (В.10) означає знайти всі його розв'язки. В подальшому на прикладі конкретних класів рівнянь буде показано, що типовою слід вважати ситуацію, коли множина всіх розв'язків рівняння (В.10) утворює сім'ю функцій, що залежить від дійсного параметра — так званої довільної сталої. Тоді таку сім'ю функцій називають *загальним розв'язком* рівняння, а кожен окремо взятий розв'язок — *частинним*. Зауважимо, що за винятком теорії так званих лінійних диференціальних рівнянь, якій буде приділено велику увагу в цій книзі, зазначені терміни в сучасній літературі використовуються рідко. Тому ми не даватимемо відповідних строгих математичних означень.

### ⇒ Означення В.2

Нехай  $(t_0, x_0) \in D$ . *Задача Коші з початковими даними*  $(t_0, x_0)$  для рівняння (В.10) полягає у відшуванні розв'язку, визначеного принаймні в деякому околі точки  $t_0$ , який задовольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$ .

### ⇒ Означення В.3

Казатимемо, що  $(t_0, x_0) \in D$  є *точкою єдиності розв'язку задачі Коші*, якщо для будь-яких двох розв'язків  $x_j(t)$ ,  $t \in I_j$  ( $j = 1, 2$ ) задачі Коші з початковими даними  $(t_0, x_0)$  існує такий інтервал  $I \subset I_1 \subset I_2$ , що  $t_0 \in I$  і  $x_1(t) = x_2(t)$  при всіх  $t \in I$ . У протилежному разі кажуть, що в точці  $(t_0, x_0)$  порушується єдиність розв'язку задачі Коші ( $(t_0, x_0)$  — точка неєдиності розв'язку задачі Коші).

### ⇒ Означення В.4

Казатимемо, що *розв'язок задачі Коші єдиний*, якщо кожна точка його графіка є точкою єдиності розв'язку задачі Коші.

Задачу Коші називають також *початковою задачею*. Питання існування та єдиності розв'язку задачі Коші належить до числа фундаментальних у загальній теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Незалежну змінну  $t$  прийнято називати *часом*. Кожен розв'язок рівняння (В.10) описує еволюцію в часі величини  $x$ . Процес зміни  $x = x(t)$  відбувається так, що миттєва швидкість  $\dot{x}(t)$  є заданою

функцією  $f(t, x(t))$  часу  $t$  та значення величини  $x$  у цей самий момент часу.

При вивченні диференціальних рівнянь із ними пов'язують також і геометричні об'єкти.

### ⇒ Означення В.5

*Графік розв'язку рівняння (В.10) називають його інтегральною кривою.*

З погляду геометрії задача Коші полягає у відшуванні інтегральної кривої рівняння (В.10), яка проходить через наперед задану точку області  $D$ . Урахувавши геометричний зміст похідної, можна зауважити, що інтегральна крива має таку характеристичну властивість: у кожній її точці  $P$  кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює значенню правої частини відповідного диференціального рівняння в точці  $P$ . Цей факт є основою для геометричної інтерпретації диференціальних рівнянь та застосування геометричних підходів до їх дослідження. Детальніше відповідні питання ми розглянемо пізніше, а зараз лише зазначимо, що з геометричних міркувань, як узагальнення (В.10), природно виникає диференціальне рівняння в симетричній формі, або рівняння Пфаффа. Його вигляд

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (\text{В.11})$$

Тут  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  — задані функції, визначені в деякій області  $D \subset \mathbb{R}^2$ . У даному рівнянні наперед не визначено, яку змінну слід вважати незалежною. Тому його розв'язки можна шукати у вигляді функцій  $y = y(x)$  або  $x = x(y)$ . Найзагальнішою формою задання розв'язку рівняння Пфаффа є параметрична. В цьому випадку змінні  $x$  та  $y$  є диференційовними функціями параметра  $t \in I$ , які перетворюють рівність (В.11) на тотожність. Відповідне точніше означення ми введемо в п. 1.6.

Об'єктом нашого подальшого розгляду буде також *неявне скалярне диференціальне рівняння першого порядку*. Воно має вигляд

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

де  $F: G \mapsto \mathbb{R}$  — задана функція, визначена в області  $G \subset \mathbb{R}^3$ .

Нехай тепер  $D$  — область простору  $\mathbb{R}^{1+n}$ , в якому задано координати  $(t, \mathbf{x}) = (t, x_1, \dots, x_n)$ . Кожне відображення  $f: G \mapsto \mathbb{R}^n$  визначає в  $D$



# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

## 1.1

### Розв'язання окремих типів диференціальних рівнянь першого порядку

На ранніх стадіях розвитку теорії диференціальних рівнянь основні зусилля математиків були спрямовані на відшукування розв'язків диференціальних рівнянь у замкненій аналітичній формі з використанням скінченного числа наперед визначених допустимих операцій. До останніх, зокрема, відносилися стандартні операції елементарної математики, операції обернення функцій та операції інтегрування — «обчислення квадратур». Через це процес відшукування розв'язків диференціальних рівнянь у замкненій формі з використанням зазначених допустимих операцій традиційно називають *інтегруванням диференціальних рівнянь у квадратурах*.

Розглянемо кілька найпростіших типів інтегрованих у квадратурах диференціальних рівнянь.

#### 1.1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними \_\_\_\_\_

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t)f_2(x). \quad (1.1)$$

Будемо припускати, що кожна функція  $f_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$  неперервна на інтервалі  $I_k$  ( $k = 1, 2$ ).

Розглянемо спочатку випадок, коли

$$f_2(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_2. \quad (1.2)$$

Тоді процес розв'язування рівняння (1.1) складається з таких операцій:

- відокремлення змінних — перехід від рівняння (1.1) до еквівалентного йому

$$\frac{dx}{f_2(x)} = f_1(t) dt;$$

- інтегрування одержаного рівняння — відшукання первісних  $F_1(t)$  і  $F_2(x)$  функцій  $f_1(t)$  та  $1/f_2(x)$  відповідно з подальшим виписуванням рівності

$$F_2(x) = F_1(t) + c, \quad (1.3)$$

де  $c$  — довільна стала;

- відшукання функції  $F_2^{-1}(x)$ , оберненої до функції  $F_2(x)$ , і зображення однопараметричної сім'ї розв'язків рівняння (1.1) у вигляді

$$x = x_c(t) := F_2^{-1}(F_1(t) + c). \quad (1.4)$$

З теоретичного погляду всі зазначені операції коректні. Зокрема, за первісні можна взяти

$$F_1(t) = \int_{t_0}^t f_1(s) ds, \quad F_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{ds}{f_2(s)}, \quad (1.5)$$

де  $t_0 \in I_1$ ,  $x_0 \in I_2$  — фіксовані точки, а існування оберненої функції  $F_2^{-1}(x)$  впливає з монотонності  $F_2(x)$ : адже  $F_2'(x) = 1/f_2(x) \neq 0$  для всіх  $x \in I_2$ . Крім того, як добре відомо, функція  $F_2^{-1}(x)$  неперервно диференційовна в області свого визначення (див., наприклад, [4]). Звичайно, формула (1.4) має сенс лише для тих значень  $c$ , для яких область визначення функції  $x_c(t)$  не порожня.

Покажемо, що описаний вище процес інтегрування рівняння (1.1) дає змогу знайти всі його розв'язки.



**Теорема 1.1**

Якщо  $x(t)$  — розв'язок рівняння (1.1) на інтервалі  $I$ , то знайдеться таке  $c$ , для якого  $x(t)$  можна подати у вигляді (1.4). Навпаки, якщо для фіксованого  $c$  функція (1.4) визначена на інтервалі  $I$ , то вона є розв'язком рівняння (1.1) на  $I$ .

**Доведення**

Доведемо першу частину теореми. Нехай  $x(t)$  — розв'язок рівняння (1.1) на інтервалі  $I$ . Тоді

$$\dot{x}(t) = f_1(t)f_2(x(t)) \quad \forall t \in I \Leftrightarrow \frac{\dot{x}(t)}{f_2(x(t))} = f_1(t) \quad \forall t \in I.$$

Легко перевірити, що останню тотожність можна переписати у вигляді

$$\frac{d}{dt} F_2(x(t)) = \frac{d}{dt} F_1(t) \quad \forall t \in I.$$

Але тоді знайдеться таке число  $c$ , що  $F_2(x(t)) = F_1(t) + c$ , а отже,  $x(t) = F_2^{-1}(F_1(t) + c)$  для всіх  $t \in I$ .

Переходимо до доведення другої частини теореми. Нехай при фіксованому  $c$  функція  $x_c(t)$ , задана формулою (1.4), визначена на інтервалі  $I$ . Вона на ньому неперервно диференційовна як суперпозиція неперервно диференційовних функцій і перетворює рівність (1.3) на тотожність. Диференціюванням останньої дістаємо

$$\frac{\dot{x}_c(t)}{f_2(x_c(t))} = f_1(t) \quad \forall t \in I \Leftrightarrow \dot{x}_c(t) = f_1(t)f_2(x_c(t)) \quad \forall t \in I.$$

Отже,  $x_c(t)$  — розв'язок рівняння (1.1).

**◆ Зауваження 1.1**

При фіксованому  $c$  формула (1.4) визначає стільки розв'язків, скільки неперетинних інтервалів містить область визначення функції  $x_c(t)$ .

З огляду на доведену теорему сім'ю функцій (1.4) природно назвати загальним розв'язком рівняння з відокремлюваними змінними. Зауважимо, що задача відшукування явного аналітичного вигляду функції  $F_2^{-1}(x)$  навіть у випадку, коли  $F_2(x)$  вдається виразити через елемен-

тарні функції, може бути практично нездійсненною. В цьому разі процес інтегрування рівняння (1.1) завершують записом формули (1.3). Співвідношення (1.3) називають *загальним інтегралом* (або просто *інтегралом*) цього рівняння. Кажуть, що загальний інтеграл визначає загальний розв'язок рівняння (1.1) у неявному вигляді. Зазначимо, що часто формулу (1.3) записують у зручнішому для сприйняття вигляді

$$\int \frac{dx}{f_2(x)} = \int f_1(t) dt + c, \quad (1.6)$$

домовившись попередньо для довільної функції  $\varphi(t)$  символом  $\int \varphi(t) dt$  позначати не невизначений інтеграл (однопараметричну сім'ю всіх первісних), а окрему первісну функції  $\varphi(t)$ .

Надаючи сталій  $c$  конкретного значення, ми за допомогою співвідношення (1.3) задаємо в неявному вигляді один або кілька частинних розв'язків. При цьому значення довільної сталої, яке відповідає розв'язку задачі Коші, однозначно визначається початковими даними. Наприклад, якщо за первісні  $F_1(t)$  та  $F_2(x)$  взяти функції, визначені формулами (1.5), то, поклавши в (1.3)  $t = t_0$ ,  $x = x_0$ , з урахуванням рівностей  $F_1(t_0) = F_2(x_0) = 0$  знайдемо  $c = 0$ .

На підставі цих міркувань робимо такий **висновок**: *розв'язок задачі Коші з початковими даними  $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$  слід визначати як функцію  $x = x(t)$  із рівняння*

$$\int_{x_0}^x \frac{ds}{f_2(s)} = \int_{t_0}^t f_1(s) ds.$$

*Якщо функція  $x(t)$  задовольняє це рівняння на інтервалі  $I$ , який містить точку  $t_0$ , то вона й є шуканим розв'язком.*

Розглянемо тепер загальний випадок, коли умова (1.2) порушується. Оскільки  $f_2(x) \in C(I_2 \mapsto \mathbb{R})$ , то множина  $\mathcal{A} = \{x \in I_2 : f_2(x) \neq 0\}$  відкрита. Як відомо (див., наприклад, [5]), вона є об'єднанням не більше ніж зліченної системи неперетинних інтервалів. Будь-який розв'язок, що набирає значень в одному з указаних інтервалів (назвемо його розв'язком типу  $A$ ), знаходимо за допомогою формули (1.4). Множина  $\mathcal{B} = I_2 \setminus \mathcal{A}$  складається з точок, в яких функція  $f_2(x)$  перетворюється в нуль. Нехай  $x_*$  — одна з них. Безпосереднім підставленням у

рішення (1.1) легко переконуємося в тому, що стала функція  $x = x_*$ ,  $t \in I_1$  є його розв'язком:

$$\frac{dx_*}{dt} \equiv 0 \equiv f_1(t)f_2(x_*).$$

Казатимемо, що це — розв'язок типу *B*. Отже, в загальному випадку розв'язки типу *A*, визначені формулою (1.4), потрібно доповнити сталими розв'язками типу *B*.

Для того щоб проілюструвати взаємозв'язок між розв'язками зазначених двох типів, розглянемо два приклади.

### □ Приклад 1.1

*Розв'яжемо рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = 2t \cos^2 x. \quad (1.7)$$

Тут функція  $\cos^2 x$  перетворюється в 0 у точках  $\pi/2 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Отже, рівняння (1.7) має набір розв'язків типу *B*

$$x = \pi/2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.8)$$

Далі на кожному інтервалі  $\{x \in \mathbb{R} : \pi/2 + \pi k < x < \pi/2 + \pi(k+1)\}$  відокремлюємо змінні

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = 2t dt,$$

визначаємо первісні функцій  $1/\cos^2 x$ ,  $2t$  і дістаємо інтеграл

$$\operatorname{tg} y = t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Звідси знаходимо сім'ю розв'язків типу *A*

$$x = \operatorname{arctg}(t^2 + c) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

яка разом із (1.8) визначає всі розв'язки рівняння (1.7). Його інтегральні криві в смугі між прямими  $x = \pm \pi/2$  зображено на рис. 1.1. Інші інтегральні криві можна утворити з них паралельними зсувами на  $\pi n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  уздовж осі  $Oy$ .

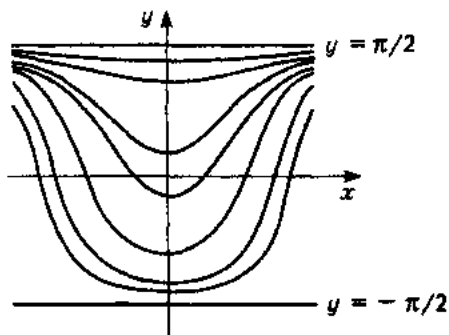


Рис. 1.1

Оскільки  $\operatorname{arctg}(t^2 + c) \rightarrow \pi/2$  при  $c \rightarrow +\infty$  і  $\operatorname{arctg}(t^2 + c) \rightarrow -\pi/2$  при  $c \rightarrow -\infty$ , то всі розв'язки типу  $B$  можна дістати із сім'ї розв'язків типу  $A$  граничним переходом за довільною сталою. Тому відповідь можна подати у вигляді

$$x = \operatorname{arctg}(t^2 + c) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

### □ Приклад 1.2

*Розв'яжемо рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = 2(tx)^{1/3}. \quad (1.9)$$

Розв'язком типу  $B$  цього рівняння є  $x = 0$ . Після відокремлення змінних у кожній із півплощин  $x > 0$ ,  $x < 0$  та інтегрування одержаного рівняння знаходимо загальний інтеграл  $x^{2/3} = t^{4/3} + c$  та сукупність розв'язків типу  $A$ :  $x = \pm (t^{4/3} + c)^{3/2}$ . На відміну від попереднього прикладу, розв'язок типу  $B$  уже не можна дістати граничним переходом за довільною сталою. Відповідь подаємо у вигляді

$$\{x = \pm(t^{4/3} + c)^{3/2}, \quad c \in \mathbb{R}\} \cup \{x = 0\}.$$

При цьому слід ураховувати, що при фіксованому  $c = c_0 < 0$  функція  $x = (t^{4/3} + c_0)^{3/2}$ , область визначення якої задається нерівністю  $t^{4/3} \geq |c_0|$ , насправді задає два частинних розв'язки: перший — на півосі  $t < -|c_0|^{3/4}$ , а другий — на півосі  $t > |c_0|^{3/4}$ . Це саме зауваження стосується, звичайно, і функції  $x = -(t^{4/3} + c_0)^{3/2}$ .

Нарешті, варто звернути увагу й на такий цікавий факт: на відміну від попереднього прикладу, «склеюванням» розв'язків типів  $A$  і  $B$  можна створювати розв'язки мішаного типу. А саме: виявляється, що при довільних фіксованих невід'ємних числах  $a$  і  $b$  функція

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} -(t^{4/3} - a^{4/3})^{3/2} & \text{при } t < -a, \\ 0 & \text{при } -a \leq t \leq b, \\ (t^{4/3} - b^{4/3})^{3/2} & \text{при } t > b \end{cases}$$

є розв'язком рівняння (1.9) на всій дійсній осі. Справді,  $x_{a,b}(t)$  за побудовою є його розв'язком, тобто виконується рівність

$$\dot{x}_{a,b}(t) = 2(tx_{a,b}(t))^{1/3} \quad (1.10)$$

на кожному з трьох інтервалів, з яких складається множина  $\mathbb{R} \setminus (\{-a\} \cup \{b\})$ .

Пропонуємо читачеві самостійно переконатися в існуванні нульових похідних  $\dot{x}_{a,b}(-a)$  та  $\dot{x}_{a,b}(b)$ .  
Із цього випливатиме, що рівність (1.10) виконується при  $t = -a$ ,  $t = b$ , а відтак і на всій дійсній осі.

Уявлення про поведінку інтегральних кривих рівняння (1.9) дає рис. 1.2. Графік розв'язку  $x_{a,b}(t)$  зображено на ньому жирною лінією.

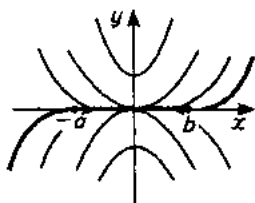


Рис. 1.2

### Приклад 1.3

Відомо, що температура повітря в межах тропосфери змінюється з висотою  $h$  за лінійним законом

$$T = T(h) = T_0(1 - \alpha h),$$

де  $T_0$  — абсолютна температура повітря на рівні моря,  $\alpha = 2,257 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ .  
Визначимо залежність тиску повітря від висоти.

Нехай  $p(h)$  та  $\rho(h)$  — відповідно тиск і густина повітря на висоті  $h$ . Уявімо собі вертикальний стовп повітря у формі прямого колового циліндра, нижня основа якого піднята на висоту  $h$ . Вага такого стовпа в першому наближенні становитиме  $g\rho(h)S\Delta h$  за умови, що його висота  $\Delta h$  досить мала, а площа основи дорівнює  $S$  ( $g$  — прискорення вільного падіння). В такому разі зміну тиску можна виразити формулою

$$p(h + \Delta h) - p(h) = -g\rho(h)\Delta h + \alpha\Delta h, \quad \Delta h \rightarrow 0.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на  $\Delta h$  і спрямувавши  $\Delta h$  до нуля, дістанемо

$$\frac{dp(h)}{dh} = -g\rho(h).$$

Виразимо густину через тиск і температуру за допомогою рівняння стану ідеального газу, яке можна подати у вигляді  $pV = \frac{m}{M}RT$ , де  $V$ ,  $m$ ,  $M$  — відповідно об'єм, маса та молярна маса газу, а  $R$  — універсальна газова стала. Маємо:  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}$ . Таким чином, дістаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{1}{\beta T_0} \frac{p}{(1 - \alpha h)},$$

де  $\beta = \frac{R}{gM}$ .

Відокремивши змінні, матимемо

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{\beta T_0} \frac{dh}{(1 - \alpha h)},$$

звідки після інтегрування знаходимо

$$p = c(1 - \alpha h)^{1/(\beta T_0)}, \quad c > 0.$$

Довільну сталу  $c$  визначаємо з умови  $p(0) = p_0$ , де  $p_0$  — тиск повітря на поверхні моря при температурі  $T_0$ . Маємо:  $c = p_0$ . Залишилося врахувати, що, як відомо, для повітря  $\beta = 3,42 \cdot 10^{-2}$  м/К.

Насамкінець зробимо кілька зауважень стосовно рівнянь із відокремлюваними змінними в симетричній формі. До цього класу належить кожне рівняння вигляду (В.11), коефіцієнти якого допускають зображення

$$M(x, y) = \lambda(x, y)M_1(x)M_2(y), \quad N(x, y) = \lambda(x, y)N_1(x)N_2(y),$$

де  $M_j \in C(I_j \mapsto \mathbb{R})$ ,  $N_j \in C(I_j \mapsto \mathbb{R})$ ,  $\lambda(x, y) \in C(I_1 \times I_2 \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ,  $j = 1, 2$ . На множині

$$\{x \in I_1 : N_1(x) \neq 0\} \times \{y \in I_2 : M_2(y) \neq 0\}$$

відокремлення змінних досягається множенням рівняння на функцію

$$\frac{1}{\lambda(x, y)M_2(y)N_1(x)}.$$

Загальний інтеграл одержаного рівняння з відокремленими змінними можна подати у вигляді

$$\int_{x_0}^x \frac{M_1(s)}{N_1(s)} ds + \int_{y_0}^y \frac{N_2(s)}{M_2(s)} ds = c.$$

До сукупності розв'язків, визначених цим співвідношенням, слід долучити сталі розв'язки, задані кожним із рівнянь  $N_1(x) = 0$  та  $M_2(y) = 0$ .

### 1.1.2. Лінійне рівняння. Рівняння Бернуллі

**Рівняння вигляду**

$$\dot{x} = a(t)x + b(t) \quad (1.11)$$

із неперервними на інтервалі  $I$  функціями  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  та  $b : I \rightarrow \mathbb{R}$  називають *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*. Воно зветься *лінійним неоднорідним рівнянням* (ЛНР), якщо  $b(t) \neq 0$ . Відповідне *лінійне однорідне рівняння* (ЛОР) утворюється з (1.11) при  $b(t) \equiv 0$  і має вигляд

$$\dot{x} = a(t)x. \quad (1.12)$$

ЛОР водночас належить до класу рівнянь із відокремлюваними змінними й легко розв'язується. Справді, в кожній із півплощин  $x > 0$  та  $x < 0$  його можна подати в еквівалентному вигляді

$$\frac{dx}{x} = a(t) dt$$

і після інтегрування дістати перший інтеграл

$$\ln|x| = \int_{t_0}^t a(s) ds + C,$$

де  $t_0$  — довільна фіксована точка з інтервалу  $I$ , а довільна стала  $C$  пробігає множину всіх дійсних чисел. Звідси знаходимо сім'ю розв'язків

$$|x| = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds - C} \Leftrightarrow x = e^C \operatorname{sign} x \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s) ds},$$

до якої долучаємо очевидний сталий розв'язок  $x = 0$  — *тривіальний розв'язок ЛОР*. Легко переконатися в тому, що одержану множину розв'язків можна виразити однією формулою

$$x = ce^{\int_{t_0}^t a(s) ds}, \quad c \in \bar{\mathbb{R}}, \quad (1.13)$$

яка й визначає *загальний розв'язок ЛОР*. (При цьому слід урахувувати, що графіки жодних двох функцій сім'ї (1.13) не мають спільних точок, а тому операція конструювання нових розв'язків «склеюванням», описана в прикладі 1.2, неможлива). Звичайно, замість  $\int_{t_0}^t a(s) ds$  у

формулі (1.13) може фігурувати будь-яка інша первісна функції  $a(t)$ . Формулу загального розв'язку ЛОР варто запам'ятати.

Найпопулярнішим методом розв'язання ЛНР (1.11) є *метод варіації довільних сталих*, винайдений Ж. Лагранжем у 1775 р. (*метод Лагранжа*). Порівняно з іншими способами розв'язання рівняння (1.11), запропонованими раніше Й. Бернуллі (див. нижче) та Л. Ейлером (див. п. 1.7), метод варіації довільних сталих є набагато перспективнішим і допускає важливі далекосяжні узагальнення. Опишемо *схему цього методу*.

- Розв'язуємо ЛОР (1.12), яке відповідає (1.11), і записуємо його загальний розв'язок (1.13).
- Розв'язок (1.11) шукаємо у вигляді

$$x = C(t)e^{\int_0^t a(s) ds}, \quad (1.14)$$

де  $C(t)$  — невідома диференційовна на інтервалі  $I$  функція (цей крок пояснює назву методу). Її визначають з умови, що заданий проект розв'язку має задовольняти ЛНР:

$$\dot{C}(t)e^{\int_0^t a(s) ds} = b(t) \Leftrightarrow \dot{C}(t) = e^{-\int_0^t a(s) ds} b(t). \quad (1.15)$$

[Справді, підставивши (1.14) у рівняння (1.11), дістанемо рівність

$$\dot{C}(t)e^{\int_0^t a(s) ds} + C(t)e^{\int_0^t a(s) ds} a(t) = a(t)C(t)e^{\int_0^t a(s) ds} + b(t),$$

еквівалентну (1.15).]

- Знаходимо всі функції, які задовольняють умову (1.15):

$$C(t) = c + \int_0^t e^{-\int_0^\tau a(s) ds} b(\tau) d\tau, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Цей вираз підставляємо в (1.14) і після нескладних перетворень дістаємо сім'ю розв'язків ЛНР

$$x = ce^{\int_0^t a(s) ds} + \int_0^t e^{\int_0^s a(s) ds} b(\tau) d\tau. \quad (1.16)$$

Ця формула визначає *загальний розв'язок ЛНР (1.11)*.



Для повного обґрунтування такої назви зауважимо, що (1.14) можна трактувати як заміну змінних — перехід від залежної змінної  $x$  до нової залежної змінної  $C$ . Ця формула встановлює взаємно однозначну відповідність між розв'язками ЛНР і множиною функцій, які задовольняють (1.15). Усі ці функції було знайдено. Звідси й випливає, що сім'я (1.16) містить усі розв'язки ЛНР.

На підставі (1.16) можна зробити такий висновок: загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння та деякого частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

За допомогою формули загального розв'язку (1.16) легко дістати розв'язок задачі Коші з початковими даними  $(t_0, x_0)$ . Справді, початкова умова  $x(t_0) = x_0$  дає змогу однозначно визначити відповідне значення довільної сталої:  $c = x_0$ . Отже, шуканий розв'язок задачі Коші має вигляд

$$x = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(s) ds} b(\tau) d\tau. \quad (1.17)$$

Спосіб розв'язання ЛНР, запропонований Й. Бернуллі наприкінці XVII ст., полягає в тому, що розв'язок шукається у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$x = u(t)v(t).$$

Співвідношення, одержане після підставлення цього виразу в (1.11) і відповідного перегрупування членів, можна подати у вигляді

$$(\dot{u}(t) - a(t)u(t))v(t) + u(t)\dot{v}(t) = b(t).$$

Цей вираз значно спрощується, якщо за функцію  $u(t)$  взяти нетривіальний розв'язок ЛОР (1.12), наприклад функцію (1.13) при  $c = 1$ . Тоді коефіцієнт при  $v(t)$  перетворюється в нуль, а для визначення функції  $v(t)$  дістаємо те саме рівняння, що й для  $C(t)$  у методі Лагранжа.

Аналогічно можна розв'язати й рівняння вигляду

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{1\}. \quad (1.18)$$

Його називають *рівнянням Бернуллі*. Діючи так само, як і у випадку лінійного рівняння, матимемо

$$(\dot{u} - a(t)u)v + u\dot{v} = b(t)(uv)^\lambda.$$

Візьмемо за  $u$  розв'язок  $u = \varphi(t) := \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$  ЛОР (1.12). Тоді для  $v$  дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dv}{dt} = b(t)\varphi^{\lambda-1}(t)v^\lambda.$$

Його легко зінтегрувати й одержати однопараметричну сім'ю розв'язків

$$v = v_c(t) := \left[ (1 - \lambda) \int_{t_0}^t b(s)\varphi^{\lambda-1}(s) ds + c \right]^{\frac{1}{1-\lambda}},$$

а у випадку  $\lambda > 0$  ще й тривіальний розв'язок  $v = 0$ . (Якщо  $\lambda > 1$ , то тривіальний розв'язок визначається з  $v_c(t)$  у границі при  $c \rightarrow \infty$ , а при  $\lambda \in (0, 1)$  це явище не проявляється.) Таким чином знаходимо сім'ю розв'язків рівняння Бернуллі

$$x = \varphi(t)v_c(t).$$

При  $\lambda > 0$  воно має також розв'язок  $x = 0$ .

Рівняння Бернуллі можна розв'язувати й за допомогою заміни шуканої функції з подальшим зведенням до лінійного рівняння. Цей спосіб, запропонований Г. Лейбніцем (1693) та Й. Бернуллі (1697), являє собою елементарну ілюстрацію надзвичайно плідної загальнономатематичної ідеї: використання заміни змінних для зведення складних об'єктів до простіших.

Поділивши обидві частини рівняння Бернуллі на  $x^\lambda$ , дістаємо при  $x \neq 0$  еквівалентне рівняння

$$x^{-\lambda}\dot{x} = a(t)x^{1-\lambda} + b(t).$$

Зрозуміло, що для зведення його до лінійного достатньо ввести нову функцію

$$u = x^{1-\lambda}.$$

Оскільки  $\dot{u} = (1-\lambda)x^{-\lambda}\dot{x}$ , то рівняння для  $u$  матиме вигляд

$$\dot{u} = (1-\lambda)(a(t)u + b(t)).$$

Його вже можна розв'язати методом варіації довільних сталих. Після цього потрібно повернутися до змінної  $x$ . Застосовуючи даний спосіб, не слід забувати про тривіальний розв'язок рівняння Бернуллі.

#### ■ Приклад 1.4

*Зінтегруємо рівняння*

$$y^2 dx + x(y + x^2) dy = 0.$$

Насамперед знаходимо сталі розв'язки цього рівняння

$$x = 0, y \in \mathbb{R}; \quad y = 0, x \in \mathbb{R}.$$

Далі в кожній із півплощин  $y > 0$ ,  $y < 0$  переписуємо рівняння так:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} + \frac{x^3}{y^2} = 0.$$

Це рівняння Бернуллі. Шукаємо його розв'язок у вигляді  $x = u(y)v(y)$ . Підставивши цей проект розв'язку в рівняння, дістанемо

$$\left( \frac{du}{dy} + \frac{u}{y} \right) v + u \frac{dv}{dy} + \frac{u^3 v^3}{y^2} = 0.$$

Знаходимо нетривіальний розв'язок ЛОР  $\frac{du}{dy} + \frac{u}{y} = 0$ . Відокремивши в ньому змінні, маємо

$$\frac{du}{u} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|u| = -\ln|y| + \ln c \Leftrightarrow |u| = c/|y|.$$

Тепер зрозуміло, що за  $u = u(y)$  доцільно взяти функцію  $u = 1/y$ . Як результат дістаємо рівняння для визначення функції  $v$ :

$$\frac{dv}{dy} + \frac{v^3}{y^4} = 0.$$

Після відокремлення змінних та інтегрування знаходимо

$$v = \pm \left( c - \frac{2}{3y^3} \right)^{1/2}.$$

Отже,

$$x = \pm \frac{1}{y \sqrt{c - \frac{2}{3y^3}}} \quad \text{або} \quad x = \pm \sqrt{\frac{3y}{3cy^3 - 2}}.$$

Виведемо рівняння інтегральної кривої, яка проходить через задану точку  $(x_0, y_0)$ . Обчисливши значення довільної сталої, яке відповідає цій точці, матимемо

$$x = \text{sign } x \sqrt{\frac{3x_0^2 y_0^3 y}{(3y_0 + 2x_0^2)y^3 - 2x_0^2 y_0^3}}.$$

Як бачимо, інтегральні криві розташовані симетрично відносно осі ординат. Аби дістати уявлення про їхню поведінку, достатньо обмежитися аналізом тих із них, які лежать у правій півплощині. Отже, надалі вважатимемо, що  $x_0 > 0$ .

Якщо  $y_0 > 0$ , то інтегральна крива має дві асимптоти: вертикальну — вісь ординат та горизонтальну — пряму,

задану рівнянням  $y = y_0 \sqrt{\frac{2x_0^2}{3y_0 + 2x_0^2}}$ .

Таку саму горизонтальну асимптоту мають інтегральні криві, для яких  $-2x_0^2/3 < y_0 < 0$ . Кожна така крива входить у початок координат. Легко перевірити, що парабола, задана рівнянням  $y = -2x^2/3$ , сама є інтегральною. Інтегральні криві, які лежать під цією параболою, виходять із початку координат, а потім при  $y \rightarrow \infty$  наближаються до осі ординат як до вертикальної асимптоти.

Портрет досліджуваного рівняння в правій півплощині зображено на рис. 1.3\*.

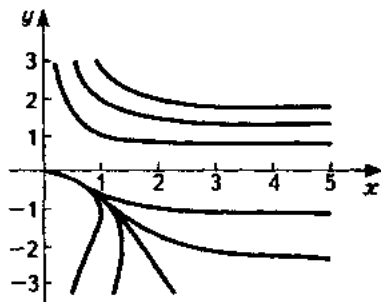


Рис. 1.3

\* Побудову портретів диференціальних рівнянь доцільно виконувати за допомогою таких комп'ютерних програм, як Matlab, Mathematica, Maple.

### 1.1.3. Квазіоднорідні рівняння

Нехай  $\sigma \in \mathbb{R}$  і  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  — множина, яка разом із кожною точкою  $(t, x)$  містить і точку  $(\lambda t, \lambda^\sigma x)$  при довільному  $\lambda > 0$ . Функцію  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  називають *квазіоднорідною степеня  $\sigma$*  з вагою  $\sigma$  відносно координати  $x$ , якщо

$$f(\lambda t, \lambda^\sigma x) = \lambda^\sigma f(t, x) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall (t, x) \in D.$$

#### Означення 1.1

*Рівняння*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.19}$$

називають *квазіоднорідним*, якщо для деякого  $\sigma > 0$  воно інваріантне відносно перетворення координат

$$t \mapsto \lambda t, \quad x \mapsto \lambda^\sigma x \tag{1.20}$$

при будь-якому  $\lambda > 0$ ; число  $\sigma$  при цьому називають *показником квазіоднорідності даного рівняння*. Рівняння з показником квазіоднорідності  $\sigma = 1$  називають *однорідним*.

У цьому означенні вимогу *інваріантності* слід розуміти як властивість диференціального рівняння (1.19) не змінювати свого вигляду при перетвореннях координат (1.20). Цю властивість можна подати в такій формі:

$$\frac{d:^\sigma x}{d:^\sigma t} = f(\lambda t, \lambda^\sigma x) \Leftrightarrow \lambda^{\sigma-1} \dot{x} = f(\lambda t, \lambda^\sigma x) \Leftrightarrow \dot{x} = f(t, x).$$

(Далі буде сформульовано більш строгі означення інваріантності диференціального рівняння.) Таким чином, умова квазіоднорідності рівняння (1.19) еквівалентна рівності

$$f(\lambda t, \lambda^\sigma x) = \lambda^{\sigma-1} f(t, x) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall (t, x) \in D. \tag{1.21}$$

**Висновок:** рівняння (1.19) квазіоднорідне з показником  $\sigma$  тоді й лише тоді, коли його права частина є квазіоднорідною функцією степеня  $\sigma - 1$  із вагою  $\sigma$  щодо координати  $x$ .

### Теорема 1.2

Нехай (1.19) — квазіоднорідне рівняння з показником  $\sigma$ . Заміна залежної змінної  $x$  на нову залежну змінну  $u$  за формулою

$$\boxed{x = t^\sigma u} \quad \text{при } t > 0 \quad (1.22)$$

перетворює його на рівняння з відокремлюваними змінними.

#### Доведення

Після заміни змінних (1.22) замість (1.19) дістаємо рівняння

$$t^\sigma \dot{u} + \sigma t^{\sigma-1} u = f(t, t^\sigma u).$$

Але згідно з рівністю (1.21)  $f(t, t^\sigma u) = f(t \cdot 1, t^\sigma u) = t^{\sigma-1} f(1, u)$ . Отже, диференціальне рівняння для  $u$  має вигляд рівняння з відокремлюваними змінними

$$\dot{u} = \frac{f(1, u) - \sigma u}{t}. \quad (1.23)$$

Розв'язавши рівняння (1.23), за формулою (1.22) знайдемо розв'язки рівняння (1.19). Відзначимо, що область визначення кожного такого розв'язку належить півосі  $t > 0$ . При цьому слід пам'ятати про можливість втрати сталих розв'язків, які визначаються коренями рівняння  $f(1, u) - \sigma u = 0$ , при відокремленні змінних у (1.23).

? *Запитання.* Як знаходити розв'язки рівняння (1.19) при  $t < 0$ ?

#### □ Приклад 1.5

*Зінтегруємо рівняння*

$$\dot{x} = x^2 + \frac{1}{4t^2}. \quad (1.24)$$

Перевіримо, чи належить це рівняння до класу квазіоднорідних. Робимо в рівнянні перетворення (1.20). Дістаємо

$$\lambda^{\sigma-1} \dot{x} = \lambda^{2\sigma} x^2 + \lambda^{-2} \frac{1}{4t^2}.$$

Аби це рівняння зводилося до (1.24) при всіх  $\lambda > 0$ , необхідно й достатньо, щоб  $\sigma$  задовольняло такі умови:  $\sigma - 1 = 2\sigma = -2$ . Звідси знаходимо

показник квазіоднорідності  $\sigma = -1$ . Для зведення даного рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними вводимо нову шукану функцію  $u$  за формулою  $x = u/t$ . Підставивши цей вираз у рівняння (1.24), матимемо

$$\dot{u}/t - u/t^2 = u^2/t^2 + 1/4t^2 \Leftrightarrow \dot{u} = (u + 1/2)^2/t.$$

Сталим розв'язком даного рівняння є  $u = -1/2$ . Інші розв'язки знаходимо, відокремлюючи змінні в кожній з областей  $u > -1/2$  та  $u < -1/2$ :

$$\frac{du}{(u + 1/2)^2} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{1}{u + 1/2} = -\ln ct \Rightarrow u = -\frac{1}{\ln ct} - \frac{1}{2}.$$

Повернувшись до вихідних змінних, записуємо загальний розв'язок рівняння (1.24):

$$\left\{ x = -\frac{1}{t} \left( \frac{1}{\ln ct} + \frac{1}{2} \right), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \cup \left\{ x = -\frac{1}{2t} \right\}.$$

Зауважимо, що при фіксованому  $c \neq 0$  формула  $x = -\frac{1}{t} \left( \frac{1}{\ln ct} + \frac{1}{2} \right)$  визначає два розв'язки. Областю визначення першого є ті значення  $t$ , для яких  $ct \in (0, 1)$ , другого — ті значення  $t$ , для яких  $ct \in (1, \infty)$ . Формула  $x = -\frac{1}{2t}$  теж визначає два розв'язки: один — на півосі  $(-\infty, 0)$ , а інший — на півосі  $(0, \infty)$ . При дослідженні інтегральних кривих рівняння (1.24) достатньо обмежитись аналізом тих із них, що розташовані в правій півплощині. Справді, це рівняння не змінюється при перетвореннях  $x \mapsto -x$ ,  $t \mapsto -t$ . Тому його інтегральні криві симетричні відносно початку координат. Розв'язку задачі Коші з початковими даними  $(t_0, x_0)$ ,  $x_0 \neq -1/(2t_0)$ ,  $t_0 > 0$  відповідає значення до-

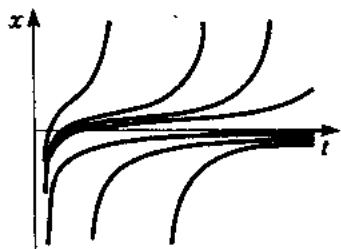


Рис. 1.4

вольної сталої  $c(t_0, x_0) = \exp\left(\frac{-2}{2t_0x_0 + 1}\right)/t_0$ .

Якщо  $x_0 > -1/(2t_0)$  [відповідно  $x_0 < -1/(2t_0)$ ], то такий розв'язок визначений на  $(0, 1/c(t_0, x_0))$  [відповідно на  $(1/c(t_0, x_0), \infty)$ ]. Уявлення про поведінку інтегральних кривих рівняння (1.24) дає рис. 1.4.

Зробимо кілька додаткових зауважень стосовно квазіоднорідного рівняння (1.19), Перетворення (1.20), відносно якого це рівняння залишається інваріантним, називають його *симетрією*. Легко помітити, що множина таких перетворень є групою відносно операції суперпозиції. Функція  $u(t, x) := x/t^\sigma$  являє собою інваріант цієї групи:

$$u(\lambda t, \lambda^\sigma x) = u(t, x) \quad \forall \lambda > 0.$$

Заміна (1.22) вибиралася саме так, щоб новою залежною змінною був інваріант  $u = u(t, x)$ .

Зазначимо, що перетворення (1.20) графік функції  $x = x(t)$ , тобто множину точок  $(t, x(t))$ , переводить у множину точок  $(\lambda t, \lambda^\sigma x(t))$ , тобто в графік функції  $x = \lambda^\sigma x(t/\lambda)$ . При цьому, якщо  $x(t)$  — розв'язок квазіоднорідного рівняння (1.19), то функція  $x = \lambda^\sigma x(t/\lambda)$  також буде його розв'язком. Справді, взявши до уваги (1.21), маємо

$$\left. \frac{d(\lambda^\sigma x(t/\lambda))}{dt} = \lambda^\sigma \left( 1 - \frac{t}{\lambda} \right) \frac{dx(t/\lambda)}{dt} \right|_{t = \lambda \tau} = \lambda^{\sigma-1} f(\tau, x(\tau)) \Big|_{\tau = t/\lambda} = f(t, \lambda^\sigma x(t/\lambda)).$$

Таким чином, характеристична властивість симетрії (1.20) полягає в тому, що вона кожен розв'язок диференціального рівняння (1.19) переводить у розв'язок цього самого рівняння.

Виявляється, кожне скалярне рівняння першого порядку, що має однопараметричну сім'ю симетрій (перетворень, які залишають його інваріантним, або перетворень, які розв'язки рівняння переводять у його ж розв'язки), може бути зінтегроване в квадратах за аналогією з квазіоднорідним рівнянням. Детальніше відповідні питання обговорюватимуться в п. 4.2.

#### 1.1.4. Рівняння Ріккати

##### Диференціальне рівняння

$$\dot{x} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (1.25)$$

де  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $r(t)$  — неперервні на деякому інтервалі  $I$  функції, називають *загальним рівнянням Ріккати*. Його окремий випадок, коли  $q(t) \equiv 0$ ,  $p(t) \equiv a$ ,  $r(t) \equiv bt^\alpha$  ( $a, b, \alpha$  — сталі), досліджував Я. Ріккати (1723). У цьому разі (1.25) називають *спеціальним рівнянням Ріккати*. Воно цікаве насамперед з огляду на такий факт. Д. Бернуллі близько 1725 р. встановив, що спеціальне рівняння Ріккати допускає відшукан-



ня загального розв'язку в елементарних функціях, якщо  $\alpha = -2$  або  $\alpha = -4n/(2n-1)$ , де  $n$  — ціле (див. [28]). У 1841 р. Ж. Ліувільль з'ясував, що при всіх інших значеннях  $\alpha$  це рівняння вже не можна зінтегрувати в квадратурах.

Рівняння (1.25) та його узагальнення на випадок систем диференціальних рівнянь мають важливі застосування в багатьох математичних дисциплінах.

Покажемо, що рівняння Ріккаті завжди можна зінтегрувати в квадратурах, якщо вдалося знайти хоча б один його частинний розв'язок.

### Твердження 1.1

Якщо  $x(t)$  — частинний розв'язок рівняння (1.25), то заміна змінних  $x = x(t) + y$ , де  $y$  — нова невідома функція незалежної змінної  $t$ , зводить це рівняння до рівняння Бернуллі.

#### Доведення

Підставивши в (1.25) замість  $x$  вираз  $x(t) + y$ , дістанемо

$$\dot{x}(t) + \dot{y} = p(t)x^2(t) + q(t)x(t) + r(t) + p(t)y^2 + (2p(t)x(t) + q(t))y.$$

Але  $\dot{x}(t) = p(t)x^2(t) + q(t)x(t) + r(t)$ . Тому рівняння для нової змінної  $y$  має вигляд

$$\dot{y} = p(t)y^2 + (2p(t)x(t) + q(t))y.$$

Це — рівняння Бернуллі.

Задачу інтегрування рівняння Ріккаті іноді вдається полегшити, звівши його попередньо до канонічного вигляду

$$\dot{z} = z^2 + Q(t). \quad (1.26)$$

Припустивши, що  $p(t) \in C^1(I \mapsto (0, \infty))$ ,  $q(t) \in C^1(I \mapsto \mathbb{R})$ , це можна зробити у два етапи. На першому — виконуємо заміну змінної

$$x = a(t)y,$$

аби перетворити коефіцієнт при  $y^2$  в одиницю. Оскільки рівняння для  $y$  має вигляд

$$a(t)\dot{y} = a^2(t)p(t)y^2 + (a(t)q(t) - \dot{a}(t))y + r(t),$$

то, поклавши  $a(t) = 1/p(t)$ , дістаємо

$$\dot{y} = y^2 + \tilde{q}(t)y + \tilde{r}(t),$$

де  $\tilde{q}(t) = q(t) - \dot{a}(t)/a(t)$ ,  $\tilde{r}(t) = r(t)/a(t)$ .

Далі робимо ще одну заміну змінних

$$y = z + b(t).$$

Маємо

$$\dot{z} = z^2 + (2b(t) + \tilde{q}(t))z + \tilde{r}(t) + b^2(t) + \tilde{q}(t)b(t) - \dot{b}(t).$$

Це рівняння набере канонічного вигляду, якщо покласти  $b(t) = -\tilde{q}(t)/2$ .

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Розв'язати рівняння та побудувати їх портрети:

а)  $\dot{x} = \frac{x \ln x^2}{t}$ ;

г)  $\dot{x} = \frac{x-2t}{x-t}$ ;

б)  $\dot{x} = x + t^2$ ;

д)  $\left(\sqrt{x^3 + y^2} + \frac{3}{2}y\right)dx - x dy = 0$ ;

в)  $\dot{x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{t^2}{x}\right)$ ;

е)  $\dot{x} = e^t x^2 - 2e^{-t}$ .

- ② Знайти всі розв'язки задачі Коші з початковою умовою  $x(0) = 2$  для кожного з рівнянь:

а)  $\dot{x} = t(x-2)^2$ ;      б)  $\dot{x} = 2t\sqrt{|x-2|}$ .

Пояснити, в чому полягає особливість цієї задачі у випадку б).

- ③ Без застосування методу варіації довільних сталих довести таке твердження. Нехай  $x = \xi(t)$ ,  $t \in I$  — будь-який частинний розв'язок ЛНР (1.11), а  $x = \varphi(t)$ ,  $t \in I$  — довільний нетривіальний розв'язок відповідного ЛОР. Тоді формула

$$x = c\varphi(t) + \xi(t), \quad c \in \mathbb{R}$$

визначає множину всіх розв'язків (загальний розв'язок) даного ЛНР.

- ✓ *Вказівка.* Довести й використати такі допоміжні твердження: 1) різниця розв'язків ЛНР є розв'язком відповідного ЛОР; 2) якщо розв'язок ЛОР,

визначений на  $I$ , перетворюється хоча б в одній точці  $t_0 \in I$  в нуль, то він тотожно дорівнює нулю на  $I$ .

- ④ Визначити, при якому співвідношенні між числами  $p$  та  $q$  рівняння  $\dot{x} = ax^p + by^q$ , де  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , буде квазіоднорідним.
- ⑤ Знайти показники квазіоднорідності функцій  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$ , при яких рівняння  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  буде квазіоднорідним, тобто інваріантним відносно перетворень  $x \mapsto \lambda x$ ,  $y \mapsto \lambda^\sigma y$  з деяким  $\sigma$ . Зінтегрувати таке рівняння.
- ⑥ Показати, що рівняння вигляду

$$\dot{x} = f\left(\frac{a_{11}t + a_{12}x + b_1}{a_{21}t + a_{22}x + b_2}\right), \quad f(z) \in C(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$$

у випадку, коли  $\Delta := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ , можна звести до однорідного, ввівши нову незалежну змінну  $\tau$  та нову шукану функцію  $\xi = \xi(\tau)$  за формулами

$$t = \tau + \alpha, \quad x = \xi + \beta$$

і відповідним чином визначивши сталі  $\alpha$  та  $\beta$ ; якщо ж  $\Delta = 0$ , то дане рівняння набуває вигляду  $\dot{x} = g(a_1 t + a_2 x)$  і зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою  $a_1 t + a_2 x = y$ , де  $y = y(t)$  — нова шукана функція.

- ⑦ Знайшовши відповідну заміну змінних, зінтегрувати рівняння

$$\dot{x} = x f(t^\alpha x^\beta) / t,$$

де  $f(x) \in C(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

## 1.2

### Скалярне автономне рівняння першого порядку

#### Диференціальне рівняння

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.27}$$

в якому функція  $f: J \mapsto \mathbb{R}$  не залежить явно від часу  $t$ , називають *автономним*. Воно належить до класу рівнянь із відокремлюваними змінними й легко інтегрується. Зараз наша мета полягатиме в якомога

детальнішому дослідженні поведінки його розв'язків на основі інформації про властивості функції  $f(x)$ . Задачі такого типу вивчає *якісна теорія звичайних диференціальних рівнянь*.

### 1.2.1. Існування та властивості розв'язку задачі Коші

Насамперед зауважимо, що рівняння (1.27) при будь-якому  $\tau \in \mathbb{R}$  є інваріантним відносно перетворення зсуву, яке має вигляд  $x \mapsto x$ ,  $t \mapsto t - \tau$ . Як наслідок маємо таке твердження.

#### Твердження 1.2

Якщо  $x(t)$  — розв'язок рівняння (1.27) на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , то для будь-якого  $\tau \in \mathbb{R}$  функція  $x_\tau(t) := x(t - \tau)$  є розв'язком цього рівняння на інтервалі  $(\alpha + \tau, \beta + \tau)$ .

#### Доведення

Достатньо записати такий ланцюжок рівностей:

$$\dot{x}_\tau(t) = \frac{dx(t - \tau)}{dt} = f(x(t - \tau)) = f(x_\tau(t)), \quad t \in (\alpha + \tau, \beta + \tau).$$

Це твердження показує, що один частинний розв'язок рівняння (1.27) породжує цілу однопараметричну сім'ю розв'язків. Завдяки цьому при розв'язуванні задачі Коші достатньо обмежитися початковими даними вигляду  $(t_0 = 0, x_0)$ ,  $x_0 \in J$ . Дійсно, якщо  $x(t)$  — відповідний розв'язок, тобто  $x(0) = x_0$ , то згідно з твердженням 1.2 розв'язком задачі з початковими даними  $(t_0, x_0)$  буде функція  $x(t - t_0)$ .

Зараз сформулюємо й доведемо теорему, яка не лише встановлює існування розв'язку задачі Коші з початковими даними  $(0, x_0)$  при довільному  $x_0$  з області визначення функції  $f(x)$ , а й указує максимальний інтервал, на якому цей розв'язок існує.

#### Теорема 1.3

Нехай функція  $f$  неперервна й набуває лише додатних значень на інтервалі  $J = (a, b)$  ( $a \geq -\infty$ ,  $b \leq +\infty$ ). Тоді для будь-якого  $x_0 \in J$  на інтервалі  $I = (\alpha, \beta)$ , де

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow a+0} \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)} \geq -\infty, \quad \beta = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)} \leq +\infty,$$

рівняння (1.27) має єдиний розв'язок  $x(t)$ , що задовольняє початкову умову  $x(0) = x_0$ . Цей розв'язок є функцією, яка строго монотонно зростає на  $(\alpha, \beta)$ . При цьому

$$\lim_{t \rightarrow \alpha+0} x(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \beta-0} x(t) = b.$$

### Доведення

З викладеного в п. 1.1 випливає, що розв'язання задачі Коші з початковими даними  $(0, x_0)$  еквівалентне відшукуванню функції  $x(t)$ , визначеної на деякому інтервалі  $I \ni t_0$ , яка при кожному  $t \in I$  задовольняє рівняння

$$F(x) := \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)} = t \quad (1.28)$$

(у нашому випадку  $f_1(t) = 1$ ,  $f_2(x) = f(x)$ ). Покажемо, що  $x(t)$  існує й знайдемо межі інтервалу  $I$ .

Зазначимо властивості функції  $F(x)$ : а)  $F(x) \in C^1(J \rightarrow \mathbb{R})$ ; б)  $F(x)$  як функція з додатною похідною  $1/f(x)$  монотонно зростає на  $J$  і відображає цей інтервал взаємно однозначно на інтервал  $(\alpha, \beta)$ , визначений у формулюванні теореми; в)  $F(x_0) = 0$ , а тому інтервал  $(\alpha, \beta)$  містить точку  $t = 0$ . За теоремою про обернену функцію (див., наприклад, [4]), існує єдина неперервно диференційовна на  $I = (\alpha, \beta)$  функція  $x(t)$ , обернена до  $F(x)$ . Вона монотонно зростає на  $I$  й відображає цей інтервал на  $J$ . Крім того, оскільки  $F(x(t)) \equiv t$ , то  $F(x(0)) = 0$ , а це можливо лише тоді, коли  $x(0) = x_0$ .

### Наслідок 1.1

Нехай справджуються умови теореми 1.3 при  $b = \infty$ . Тоді, якщо

$$f(x) = O(x) \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

то областю існування будь-якого розв'язку рівняння (1.27) є піввісь  $(\alpha, \infty)$  (кажуть, що в цьому разі розв'язки нескінченно продовжувані вправо).

Якщо ж для деякого  $\kappa > 1$  виконується умова

$$x^\kappa = O(f(x)) \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

то графік кожного розв'язку має вертикальну асимптоту й розташований ліворуч від неї.

Справді, існує стала  $K > 0$  така, що

$$F(x) > K \int_{x_0}^x \frac{ds}{s} = K \ln \left| \frac{x}{x_0} \right| \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty$$

у першому випадку й

$$F(x) < K \int_{x_0}^x \frac{ds}{s^\kappa} = \frac{K}{\kappa-1} (x_0^{1-\kappa} - x^{1-\kappa}) \rightarrow \frac{K}{\kappa-1} x_0^{1-\kappa}, \quad x \rightarrow \infty$$

— у другому.

Перейдемо до вивчення випадку, коли функція  $f(x)$  перетворюється в нуль на інтервалі  $J := (a, b)$ , але  $f(x) \neq 0$ . Тоді  $J$  є об'єднанням двох непорожніх неперетинних множин

$$\mathcal{A} = \{x \in J : f(x) \neq 0\} \quad \text{та} \quad \mathcal{B} = \{x \in J : f(x) = 0\}.$$

Як уже зазначалося в п. 1.1, множину  $\mathcal{A}$  можна зобразити у вигляді об'єднання не більше ніж зліченної системи інтервалів, що не перетинаються. Для кожного з цих інтервалів існує хоча б одна межева точка з множини  $\mathcal{B}$ . Зрозуміло, що стала функція  $x \equiv x_*$  є розв'язком рівняння (1.27) тоді й лише тоді, коли  $f(x_*) = 0$ , тобто  $x_* \in \mathcal{B}$ . Якщо  $x_*$  є межевою точкою множини  $\mathcal{A}$ , то постає цікаве запитання: чи дотикаються прямої  $x = x_*$  графіки інших розв'язків рівняння (1.27), тобто чи порушується в точках цієї прямої єдиність розв'язку задачі Коші? На підставі твердження 1.2 можна зробити такий висновок: із наявності хоча б однієї точки неєдиності розв'язку задачі Коші на прямій  $x = x_*$  випливає, що до цього самого класу належать і решта точок зазначеної прямої. Кажуть, що в цьому разі  $x = x_*$  являє собою *особливий розв'язок*. Із такими розв'язками ми вже зустрічалися в п. 1.1.

Для простоти будемо аналізувати випадок, коли  $\mathcal{B}$  складається з однієї точки. Для довільного  $x_0 \in J \setminus \{x_*\}$  введемо інтервал

$$J(x_0) = \begin{cases} (a, x_*), & \text{якщо } x_0 < x_*, \\ (x_*, b), & \text{якщо } x_0 > x_*. \end{cases}$$

Зауваживши, що функція  $F(x)$ , задана формулою (1.28), монотонна на

$J(x_0)$ , визначимо скінченну або нескінченну однобічну границю  $t_*(x_0)$  у такий спосіб:

$$\int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)} \rightarrow t_*(x_0), \quad x \in J(x_0), \quad x \rightarrow x_*.$$

Відповідь на поставлене вище запитання дає змогу дістати наступна теорема.

### Теорема 1.4

Нехай функція  $f \in C(J \rightarrow \mathbb{R})$  перетворюється в нуль в єдиній точці  $x_* \in J$ . Якщо знайдеться  $x_0 \in J \setminus \{x_*\}$ , для якого границя  $t_*(x_0)$  скінченна, то  $x = x_*$  — особливий розв'язок рівняння (1.27). Навпаки, якщо для заданого  $x_0 \in J \setminus \{x_*\}$  справджується умова  $t_*(x_0) = +\infty$  ( $t_*(x_0) = -\infty$ ), то пряма  $x = x_*$  є горизонтальною асимптотою графіка розв'язку  $x(t)$  задачі Коші з початковими даними  $(0, x_0)$ , причому  $x(t) \rightarrow x_*$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). У разі, коли на кожному з інтервалів  $(a, x_*)$  та  $(x_*, b)$  знайдеться по точці  $x_0$ , для якої границя  $t_*(x_0)$  нескінченна, рівняння (1.27) особливих розв'язків не має.

### Доведення

Проаналізуємо випадок, коли  $x_0 \in (a, x_*)$  і  $f(x) > 0$  на  $(a, x_*)$ . Тоді з теореми 1.3 випливає, що область визначення розв'язку  $x(t)$  містить множину  $[0, t_*(x_0))$ ,  $x(t)$  монотонно зростає й існують границі

$$\lim_{t \rightarrow t_*(x_0)^-} x(t) = x_*, \quad \lim_{t \rightarrow t_*(x_0)^-} \dot{x}(t) = \lim_{t \rightarrow t_*(x_0)^-} f(x(t)) = f(x_*) = 0.$$

Якщо тепер  $t_*(x_0) < \infty$ , то можна довизначити  $x(t)$  до неперервної функції на  $[0, t_*(x_0)]$ , поклавши  $x(t_*(x_0)) = x_*$ . Ця функція має до того ж нульову ліву похідну в точці  $t_*(x_0)$  (див. [16], п. 113). Тепер очевидно, що функція

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq t_*(x_0), \\ 0, & t > t_*(x_0) \end{cases}$$

є розв'язком задачі Коші з початковими даними  $(t_*(x_0), x_*)$ , який не збігається з розв'язком  $x = x_*$  у будь-якому як завгодно малому околі точки  $t_*(x_0)$  (рис. 1.5, а). Це означає, що в точці  $(t_*(x_0), x_*)$  порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

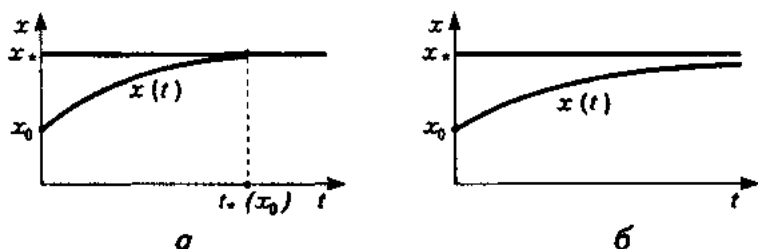


Рис. 1.5

Очевидно, що при  $t_*(x_0) = \infty$  пряма  $x = x_*$  є горизонтальною асимптотою графіка розв'язку  $x(t)$  (рис. 1.5, б). Зокрема, якщо ця умова справджується хоча б для однієї точки, то  $t_*(x_0) = \infty$  для всіх  $x_0 \in (a, x_*)$ , а тоді пряма  $x = x_*$  є асимптотою для всіх розв'язків, початкові значення яких належать  $(a, x_*)$ .

Аналіз інших можливих комбінацій знака  $f(x)$  та розташування точки  $x_0$  здійснюється аналогічно.

### У Наслідок 1.2

Якщо функція  $f \in C(J \rightarrow \mathbb{R})$  перетворюється в нуль в єдиній точці  $x_* \in J$  і має в цій точці похідну, то  $x = x_*$  не є особливим розв'язком.

Справді, в цьому випадку  $f(x) = f'(x_*)(x - x_*) + o(x - x_*)$  при  $x \rightarrow x_*$ . Тому існує окіл  $J'$  точки  $x_*$  і стала  $L > 0$  такі, що  $|f(x)| \leq L|x - x_*|$  для всіх  $x \in J'$ . Але якщо  $x \in J' \cap J(x_0)$ , то

$$\left| \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)} \right| = \left| \int_{x_0}^x \frac{ds}{|f(s)|} \right| \geq \left| \int_{x_0}^x \frac{ds}{L|s - x_*|} \right| = \frac{1}{L} \left| \ln \left| \frac{x - x_*}{x_0 - x_*} \right| \right|.$$

Тому  $|t_*(x_0)| = \infty$ .

### ◆ Зауваження 1.2

З наведених пояснень випливає, що умову існування похідної можна замінити більш загальною: існує окіл  $J'$  точки  $x_*$  і стала  $L > 0$  такі, що  $|f(x)| \leq L|x - x_*|$  для всіх  $x_* \in J'$ .

### У Наслідок 1.3

Якщо існує число  $\nu \in (0, 1)$  таке, що

$$|x - x_*|^\nu = O(|f(x)|) \text{ при } x \rightarrow x_*,$$

то  $x = x_*$  — особливий розв'язок.



Справді, в цьому разі існує стала  $K > 0$  така, що

$$\left| \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)} \right| = \left| \int_{x_0}^x \frac{ds}{|f(s)|} \right| \leq K \left| \int_{x_0}^x \frac{ds}{|s - x_*|^{\nu}} \right| \rightarrow \frac{K}{1-\nu} |x_0 - x_*|^{1-\nu},$$

коли  $x \in J(x_0)$ ,  $x \rightarrow x_*$ . Тому  $|t_*(x_0)| < \infty$ .

### 1.2.2. Геометричний аналіз скалярного автономного рівняння першого порядку

З кожною парою  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$  пов'яжемо напрямлений відрізок дійсної прямої  $\mathbb{R}$ , початок якого знаходиться в точці  $x$ , а кінець — у точці  $x + \nu$ , і назвемо цей відрізок *вектором  $\nu$ , прикладним до точки  $x$* .

#### ⇒ Означення 1.2

*Векторним полем на інтервалі  $J = (a, b)$  ( $a \geq -\infty$ ,  $b \leq +\infty$ ) називають відповідність, яка кожній точці  $x \in J$  зіставляє вектор, прикладений до  $x$ .*

Зрозуміло, що векторне поле на  $J$  можна схарактеризувати певним відображенням  $f: J \mapsto \mathbb{R}$ , і навпаки, кожне таке відображення визначає деяке векторне поле. Зокрема, права частина диференціального рівняння (1.27) визначає векторне поле  $f$ , яке кожній точці  $x \in J$  ставить у відповідність відрізок із початком у  $x$  і кінцем у  $x + f(x)$ .

Будь-який розв'язок  $x(t)$ ,  $t \in I$  рівняння (1.27) задає закон руху точки по інтервалу  $J$ . Траєкторією такого руху є множина  $\cup \{x(t)\} \subset J$ .

При цьому миттєва швидкість точки в момент часу  $t$ , як добре відомо, дорівнює  $\dot{x}(t)$  і збігається зі значенням векторного поля  $f$  саме в точці  $x(t)$ . Тому векторне поле, пов'язане з диференціальним рівнянням (1.27), називають *полем миттєвих швидкостей*.

Аби рух точки однозначно визначався її положенням у деякий початковий момент часу, скажімо в момент  $t = 0$ , потрібно вимагати, щоб рівняння (1.27) не мало особливих розв'язків. Таку властивість забезпечує, наприклад, умова  $f \in C^1(J \mapsto \mathbb{R})$  (поясніть чому), яку ми надалі вважатимемо виконаною.

Вище вже відзначалося, що існує взаємно однозначна відповід-

ність між сталими розв'язками рівняння (1.27) і точками, в яких його права частина перетворюється в нуль. Залежно від того, у зв'язку з яким об'єктом (рівнянням чи векторним полем) розглядається точка  $x$ , із властивістю  $f(x_*) = 0$ , використовують одне з двох таких означень.

### ⇒ Означення 1.3

Точку  $x_* \in J$  називають *положенням рівноваги рівняння (1.27)*, якщо стала функція  $x \equiv x_*$  є його розв'язком.

### ⇒ Означення 1.4

*Особливою точкою векторного поля називають точку, в якій відповідний вектор поля перетворюється в нуль.*

Припустимо, що рівняння має скінченну кількість положень рівноваги  $x_{*1} < \dots < x_{*k}$ . Аби з'ясувати поведінку його інтегральних кривих, потрібно знайти ці положення рівноваги й визначити напрям векторного поля (знак функції  $f(x)$ ) на кожному з інтервалів, на які точки  $x_{*j}$  розбивають множину  $J$ . Результат такого аналізу для конкретного випадку функції  $f(x)$  зображено на рис. 1.6, а. Розглянувши рис. 1.6, б, можна зрозуміти, як поведуть себе інтегральні криві рівняння (1.27), що лежать у смугах між прямими  $x = x_{*j}$  ( $j = 1, \dots, 4$ ).

Якщо треба побудувати інтегральні криві якомога точніше, то можна скористатися таким спостереженням. Нехай  $x_0$  — задана точка, яка не є положенням рівноваги. Як ми вже знаємо, розв'язок  $x(t)$ , що задовольняє початкову умову  $x(0) = x_0$ , є функцією, оберненою до функції  $F(x)$ , визначеної в рівнянні (1.28).

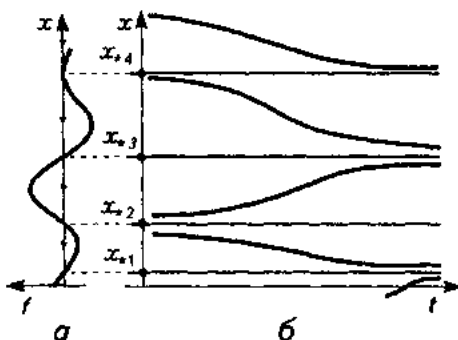


Рис. 1.6

Геометричним тлумаченням цього факту є такий висновок: графік розв'язку  $x(t)$  є геометричним місцем точок, симетричних точкам графіка функції  $x = F(t)$  відносно прямої  $x = t$ .

Рисунок типу 1.6, б, який характеризує якісну поведінку всіх інтегральних кривих заданого диференціального рівняння, називають *портетом цього рівняння*.

Положення рівноваги  $x_{*1}$  та  $x_{*3}$  називають *асимптотично стійкими*: кожна точка, що рухається по інтервалу, межовою точкою якого є  $x_{*j}$  ( $j = 1, 3$ ), прямує до  $x_{*j}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Виходячи з аналогічних міркувань, точку  $x_{*2}$  називають *нестійкою*, а точку  $x_{*4}$  — *напівстійкою*.

Асимптотично стійке положення рівноваги називають також *стоком*, або *атрактором*, а нестійке — *джерелом*, або *репелером*.

### 1.2.3. Аналіз моделі одновидової популяції

У вступі ми вже познайомилися з математичною моделлю одновидової популяції, яка описується логістичним рівнянням. Подальше узагальнення цієї моделі полягає в припущенні, що частина популяції зі сталою швидкістю вилучається із середовища свого проживання. Якщо, наприклад, йдеться про популяцію риб у закритій водоймі, то такому припущенню відповідає ситуація, коли відбувається постійний вилов риби з точним дотриманням певної квоти.

Узагальнена модель описується диференціальним рівнянням

$$\dot{x} = kx - bx^2 - \lambda, \quad x \geq 0, \quad (1.29)$$

в якому член  $-\lambda$  характеризує швидкість вилучення. Вважатимемо  $\lambda$  параметром і поставимо перед собою задачу прослідкувати, яким чином портрет рівняння (1.29) залежить від  $\lambda$ . Застосуємо для цього результати попередніх пунктів.

Портрет рівняння при  $\lambda = 0$  зображено на рис. 1.7, а: точка  $x_* = 0$  — нестійке положення рівноваги, а  $x_*^+$  — стійке. В процесі розвитку популяції її величина стабілізується до значення  $x_*^+$  незалежно від того, якою вона була в початковий момент.

При зростанні  $\lambda$  відбувається зближення положень рівноваги  $x_*^-(\lambda)$  та  $x_*^+(\lambda)$ , які є функціями  $\lambda$ , але до певної межі характер цих положень рівноваги не змінюється. Збільшуючи швидкість вилову, по-

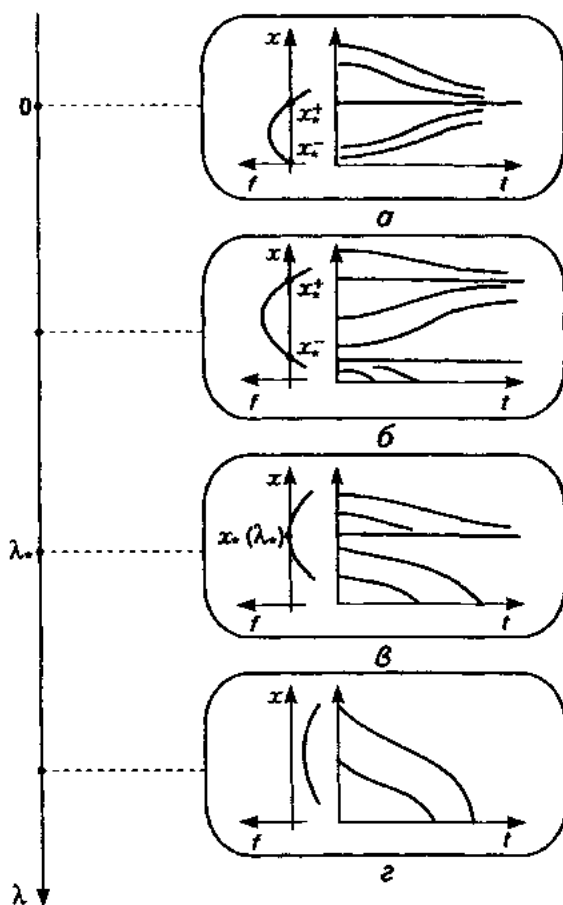


Рис. 1.7

трібно слідкувати за тим, щоб початкове значення популяції  $x_0$  залишалося більшим від  $x_-^*(\lambda)$ : адже якщо  $x_0 < x_-^*(\lambda)$ , то популяція за скінченний час зникає (1.7, б).

Критичне значення  $\lambda_*$  визначається умовою злиття двох положень рівноваги в одне «кратне»  $x_*(\lambda_*)$ , яке є напівстійким (рис. 1.7, в). При дальшому зростанні  $\lambda$  рівняння (1.29) не матиме жодного положення рівноваги й популяція вимиратиме незалежно від своєї початкової величини (рис. 1.7, г). Якісну зміну портрета рівняння при проход-

женні параметром  $\lambda$  критичного значення  $\lambda_*$  називають *біфуркацією*; вона відбиває явище фазового переходу в розглядуваній біологічній системі.

Зауважимо, що небезпечними для виживаності популяції є не лише позакритичні значення  $\lambda > \lambda_*$ , а й усі значення, досить близькі до критичного. Дійсно, якщо  $x_0 > x_*^+(\lambda)$ , то відповідний розв'язок прямує до  $x_*^+(\lambda)$  при  $t \rightarrow \infty$ . На перший погляд, популяції вимирання не загрожує. Проте якщо  $\lambda \approx \lambda_*$ , то  $x_*^+(\lambda) \approx x_*^+(\lambda_*)$ . Тому випадкове збурення величини популяції при великих значеннях  $t$  може зробити її меншою за  $x_*^+(\lambda)$ . Це призведе до загибелі популяції.

#### 1.2.4. Модель економічного зростання

Важливо зазначити, що проведений нами аналіз моделі одновидової популяції можна безпосередньо перенести на випадок рівняння загальнішого вигляду

$$\dot{x} = g(x) - \lambda,$$

де  $\lambda$  — невід'ємний параметр;  $g(x) \in C([0, \infty) \rightarrow \mathbb{R})$  — будь-яка функція, що задовольняє такі умови: а)  $g(0) = 0$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) < 0$ ; в)  $g(x)$  опукла вгору й має єдину точку максимуму.

Саме такі властивості функції

$$g(x) = f(x) - (\mu + \nu)x,$$

яка фігурує в економіко-математичній моделі, описаній у прикладі В.4. Коли обсяг споживання в розрахунку на одного працівника є сталою величиною  $c$ , відповідне рівняння набирає вигляду

$$\dot{x} = f(x) - (\mu + \nu)x - c. \quad (1.30)$$

У так званій неокласичній теорії економічного зростання від виробничої функції  $f(x)$  вимагають, щоб вона, крім неперервності на  $[0, \infty)$  і рівності  $f(0) = 0$ , задовольняла такі умови [34]:

$$f(x) \in C^2((0, \infty) \mapsto (0, \infty)); \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

За цих припущень пропонуємо читачеві самостійно проаналізувати рівняння (1.30), вважаючи  $c$  параметром, і встановити правильність таких тверджень.

1. Функція  $g(x) := f(x) - (\mu + \nu)x$  опукла вгору й досягає максимального значення  $c_* = g(\hat{x})$  в єдиній точці  $\hat{x} \in (0, \infty)$ .

2. При кожному  $c \in (0, c_*)$  рівняння має два положення рівноваги: джерело  $x_-(c)$  та стік  $x_+(c)$ , причому  $0 < x_-(c) < \hat{x} < x_+(c)$ . Якщо початкове значення  $x(0)$  належить інтервалу  $(0, x_-(c))$ , то з плином часу функція  $x(t)$ , тобто капітал, що припадає на одного працівника, монотонно спадає й досягає нульового значення за скінченний час. У випадку, коли  $x(0) \in (x_-(c), x_+(c))$ , функція  $x(t)$  монотонно зростає, наближаючися в границі при  $t \rightarrow \infty$  до значення  $x_+(c)$ . Якщо ж  $x(0) > x_+(c)$ , то  $x(t)$  монотонно спадає й  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_+(c)$ .

3. У границі при  $c \rightarrow c_* - 0$  відбувається злиття двох положень рівноваги в одне напівстійке — точку  $\hat{x}$ . Останнє зникає, коли  $c$  стає більшим за  $c_*$ .

Поясніть, чому небезпечно досягати рівня споживання  $c_*$ .

### 1.2.5. Аналіз моделі хімічної реакції

Нехай у процесі хімічної реакції між речовинами  $A$  та  $B$  утворюється речовина  $C$ , причому  $1$  г цієї речовини виникає внаслідок сполучення  $p$  грамів речовини  $A$  та  $q$  грамів речовини  $B$ . Відомо, що в кожен момент часу миттєва швидкість утворення речовини  $C$  пропорційна з деяким коефіцієнтом  $\kappa > 0$  добутку мас речовин  $A$  та  $B$ , які на цей момент ще не встигли прореагувати.

Знайдемо диференціальне рівняння, яке описує залежність  $x(t)$  маси речовини  $C$  від часу  $t$ .

Нехай  $a$  і  $b$  — маси речовин  $A$  та  $B$  відповідно в початковий момент  $t = 0$ . За умовою на момент  $t > 0$  прореагувало  $px(t)$  грамів речовини  $A$  та  $qx(t)$  грамів речовини  $B$ . Отже, на цей момент не вступило в реакцію  $a - px(t)$  грамів речовини  $A$  та  $b - qx(t)$  грамів речовини  $B$ . Тепер зрозуміло, що шукане диференціальне рівняння має вигляд

$$\dot{x} = \kappa(a - px)(b - qx)$$

або

$$\dot{x} = k(\alpha - x)(\beta - x), \quad (1.31)$$

де  $k := \kappa pq$ ;  $\alpha := a/p$ ;  $\beta := b/q$ . Сюди потрібно ще дописати початкову умову  $x(0) = 0$ .

Проаналізуємо поведінку розв'язків рівняння (1.31) при  $t > 0$ . Покладемо  $f(x) = k(\alpha - x)(\beta - x)$  і для визначеності припустимо, що  $\alpha < \beta$ .

Рівняння (1.31) має два положення рівноваги:  $x = \alpha$  та  $x = \beta$ . Оскільки  $f(x) > 0$  на множині  $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$  і  $f(x) < 0$ , коли  $x \in (\alpha, \beta)$ , то  $\alpha$  являє собою стік, а  $\beta$  — джерело. Тому розв'язок  $x(t)$  монотонно зростає до  $\alpha$ , якщо  $x(0) < \alpha$ , і монотонно спадає до  $\alpha$ , якщо  $x(0) \in (\alpha, \beta)$ . Якщо ж  $x(0) > \beta$ , то графік розв'язку  $x(t)$  має вертикальну асимптоту

$$t = t_* := \lim_{x \rightarrow \alpha} \int_{x(0)}^x \frac{ds}{k(\alpha - s)(\beta - s)}.$$

Скінченність  $t_*$  легко встановити, взявши до уваги, що  $f(x) \sim x^2$  при  $x \rightarrow \infty$ , і зауваживши, що  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x s^{-2} ds < \infty$  для довільного  $x_0 > 0$ .

Остаточно можна зробити висновок, що граничне значення маси речовини  $C$ , утвореної як результат реакції речовин  $A$  та  $B$ , дорівнює  $\min(a/p, b/q)$ .

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Схарактеризувати поведінку інтегральних кривих рівнянь

а)  $\dot{x} = \cos x$ ;      б)  $\dot{x} = \cos x - 1$

та зобразити їх. Указати стоки та джерела.

- ② Визначити, чи існує розв'язок задачі Коші

$$\dot{x} = \frac{(x+1)^{2n}}{x^{2n}+1}, \quad x(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

на всій дійсній осі.

- ③ Показати, що будь-який розв'язок рівняння  $\dot{x} = \sqrt{x^{2n} + 1}$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  існує лише на скінченному інтервалі.
- ④ Сформулювати й довести аналог теореми 1.3 за умови, що  $f(x) < 0$  на  $J$ .
- ⑤ За аналогією з наслідком 1.1 сформулювати умови продовжуваності як вліво, так і вправо, а також умови існування лівих і правих вертикальних асимптот розв'язків рівняння (1.27) із функцією  $f(x)$  сталого знака.
- ⑥ Дослідити рівняння  $\dot{x} = (x-1)\sqrt{|e^x - 1|}$  на існування особливих розв'язків.
- ⑦ Знайти в явному вигляді залежність маси речовини  $C$  від часу в моделі хімічної реакції, описаної в п. 1.2.5. Розглянути також випадок, коли  $\alpha = \beta$ .
- ⑧ Швидкість випаровування льодяної кулі в космічному просторі пропорційна площі її поверхні. Нехай початковий об'єм кулі дорівнює  $V_0$  і відомо, що через час  $T$  він зменшився наполовину. Визначити, коли така льодяна куля повністю випарується.

## 1.3

### Елементи якісного аналізу лінійного рівняння

При дослідженні поведінки розв'язків диференціальних рівнянь із правою частиною, залежною від часу, як правило, виникають задачі на порядок складніші, ніж ті, що розглядалися в п. 1.2. Ознайомлення з елементами якісного аналізу неавтономних рівнянь доцільно розпочати з лінійного випадку.

Отже, розглянемо рівняння

$$\dot{x} = a(t)x + b(t) \tag{1.32}$$

з неперервними на всій дійсній осі коефіцієнтами  $a(t)$  та  $b(t)$ . Нагадаємо формулу розв'язку задачі Коші з початковими даними  $(t_0, x_0)$ , яку було одержано в п. 1.1.2. Подамо цю формулу у вигляді

$$x = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(s) ds} b(\tau) d\tau \right). \tag{1.33}$$



### 1.3.1. Задача про обмежений розв'язок

Розглянемо випадок, коли в рівнянні (1.32) функція  $b(t)$  обмежена на всій дійсній осі, тобто

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |b(t)| = B < \infty. \quad (1.34)$$

Поставимо задачу про відшукування обмеженого на всій дійсній осі розв'язку цього рівняння. Без додаткових умов, накладених на функцію  $a(t)$ , такого розв'язку може й не існувати. Ми вкажемо найпростішу достатню умову: доведемо, що при виконанні поряд із (1.34) нерівності

$$a(t) \geq \alpha > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.35)$$

рівняння (1.32) має єдиний обмежений на всій дійсній осі розв'язок.

Спробуємо знайти початкове значення  $x_0$  такого розв'язку, користуючися формулою (1.33). Зауважимо, що з (1.35) випливає нерівність

$$e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \geq e^{\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (1.36)$$

Тому початкове значення обмеженого розв'язку має задовольняти умову

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau} b(\tau) d\tau \right) = 0. \quad (1.37)$$

Доведемо, що таке  $x_0$  існує й визначається однозначно. З нерівності (1.36) дістаємо оцінку

$$e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} \leq e^{-\alpha(\tau-t_0)}, \quad \tau \geq t_0,$$

яка гарантує існування границі

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau} b(\tau) d\tau := \int_{t_0}^{\infty} e^{-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau} b(\tau) d\tau := I.$$

Справді, візьмемо довільні  $t_1, t_2$  ( $t_0 < t_1 < t_2$ ) й оцінимо різницю інтегралів

$$\int_{t_0}^{t_2} e^{-\int_{t_0}^s a(s) ds} b(\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t_1} e^{-\int_{t_0}^s a(s) ds} b(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_{t_0}^s a(s) ds} b(\tau) d\tau.$$

**Маємо**

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_{t_0}^s a(s) ds} b(\tau) d\tau \right| &\leq \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_{t_0}^s a(s) ds} |b(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq B \int_{t_1}^{t_2} e^{-\alpha(\tau - t_0)} d\tau \leq \frac{Be^{\alpha(t_1 - t_0)}}{\alpha}. \end{aligned}$$

Оскільки  $e^{-\alpha t_1} \rightarrow 0$ ,  $t_1 \rightarrow \infty$ , то справджується необхідна й достатня умова існування скінченної границі  $I$  (див., наприклад, [5], гл. 13, п. 1.3).

Тепер, аби задовольнити умову (1.37), достатньо покласти  $x_0 = -I$ . Підставивши це початкове значення у формулу (1.33), дістанемо розв'язок вигляду

$$x(t) = -\int_t^{\infty} e^{\int_t^s a(s) ds} b(\tau) d\tau. \quad (1.38)$$

Його обмеженість на всій осі впливає з оцінки

$$|x(t)| \leq \int_t^{\infty} e^{-\int_t^s a(s) ds} |b(\tau)| d\tau \leq B \int_t^{\infty} e^{-\alpha(\tau - t)} d\tau = \frac{B}{\alpha} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Викладені міркування підсумовує така теорема.

### Теорема 1.5

Нехай для рівняння (1.32) справджуються умови (1.34) та (1.35). Тоді воно має єдиний обмежений розв'язок, і цей розв'язок визначається формулою (1.38).

#### 1.3.2. Лінійне періодичне рівняння

Розглянемо цікавий з багатьох точок зору випадок, коли в рівнянні (1.32) функції  $a(t)$  та  $b(t)$  періодичні з найменшим додатним періодом  $T$ :

$$a(t+T) = a(t), \quad b(t+T) = b(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Це лінійне рівняння називають *T-періодичним*. Важливу властивість його розв'язків встановлює таке твердження.

### Твердження 1.3

Якщо  $x(t)$  — розв'язок *T-періодичного* рівняння (1.32), то функція

$$x_T(t) := x(t+T)$$

теж є його розв'язком.

### Доведення

Оскільки рівність  $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$  виконується для всіх  $t$ , то  $\dot{x}(t+T) = a(t+T)x(t+T) + b(t+T)$ . Звідси з урахуванням *T-періодичності* функцій  $a(t)$  та  $b(t)$  маємо потрібний результат:

$$\dot{x}_T(t) = a(t)x_T(t) + b(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

За допомогою доведеного твердження дослідимо спочатку поведінку розв'язків лінійного однорідного *T-періодичного* рівняння

$$\dot{x} = a(t)x. \quad (1.39)$$

Для довільного  $x_0 \in \mathbb{R}$  його розв'язок, який набуває значення  $x_0$  при  $t = 0$ , має вигляд

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t a(s) ds}. \quad (1.40)$$

### Означення 1.5

Число

$$\lambda = e^{\int_0^T a(s) ds}$$

називають *мультиплікатором* рівняння (1.39).

Назву та значення цього числа для лінійного однорідного *T-періодичного* рівняння пояснює таке твердження.

### Твердження 1.4

Якщо  $x(t)$  — розв'язок рівняння (1.39), то для довільного  $k \in \mathbb{Z}$  і при всіх  $t \in \mathbb{R}$  справджується рівність

$$x(t + kT) = \lambda^k x(t).$$

#### Доведення

Нехай  $x_0 := x(0)$ . Відповідно до твердження 1.3 функція  $x_T(t) = x(t + T)$  — теж розв'язок рівняння (1.39). Початковим значенням цього розв'язку є  $x_T(0) = x_0 e^{\int_0^T a(s) ds} = \lambda x_0$ . Тому

$$x(t + T) = \lambda x_0 e^{\int_0^t a(s) ds} = \lambda x(t).$$

Аналогічно  $x_{-T}(0) = \lambda^{-1} x_0$  і  $x(t - T) = \lambda^{-1} x(t)$ . Тепер потрібний результат просто дістаємо індукцією щодо  $k$ .

### Теорема 1.6

Нехай  $x(t)$  — довільний нетривіальний розв'язок рівняння (1.39). Тоді, якщо  $\lambda < 1$ , то

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \text{ і } |x(t)| \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

Якщо  $\lambda > 1$ , то

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty \text{ і } |x(t)| \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Якщо ж  $\lambda = 1$ , то  $x(t)$  —  $T$ -періодична функція.

#### Доведення

Періодичність  $x(t)$  у випадку  $\lambda = 1$  є безпосереднім наслідком твердження 1.4. Отже, нехай тепер  $\lambda \neq 1$ . Для довільного  $t \in \mathbb{R}$  позначимо через  $N(t) := [t/T]$  цілу частину числа  $t/T$ . Тоді  $\tau(t) := t - N(t)T \in [0, T)$ . Згідно з твердженням 1.4

$$x(t) = x(\tau(t) + N(t)T) = \lambda^{N(t)} x(\tau(t)).$$

Але з (1.40) випливає, що  $x(t)$  не перетворюється в нуль на  $\mathbb{R}$ , зокрема,

$$0 < \min_{\tau \in [0, T]} |x(\tau)| \leq |x(\tau(t))| \leq \max_{\tau \in [0, T]} |x(\tau)| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Тому поведінка функції  $x(t)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  шлком визначається множителем  $\lambda^{N(t)}$ . Тепер для завершення доведення залишилося зауважити, що  $N(t) \rightarrow \pm\infty$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

### ◆ Зауваження 1.3

Очевидно, що перевірка умов теореми зводиться до визначення знака числа

$$\bar{a} = \int_0^T a(s) ds.$$

Перейдемо до розгляду лінійного неоднорідного  $T$ -періодичного рівняння й розв'яжемо задачу про існування в нього  $T$ -періодичних розв'язків.

### Твердження 1.5

Умова  $T$ -періодичності розв'язку  $x(t)$   $T$ -періодичного рівняння (1.32) еквівалентна рівності

$$x(0) = x(T). \quad (1.41)$$

#### Доведення

З твердження 1.3 випливає, що функція  $x(t+T)$  — розв'язок рівняння (1.32). Оскільки розв'язок лінійного рівняння однозначно визначається своїм початковим значенням, то умова  $x(t+T) = x(t) \forall t \in \mathbb{R}$  еквівалентна (1.41).

### Теорема 1.7

Якщо  $\lambda \neq 1$ , то при будь-якій  $T$ -періодичній функції  $b(t)$   $T$ -періодичне рівняння (1.32) має єдиний  $T$ -періодичний розв'язок  $x_*(t)$ . Якщо ж  $\lambda = 1$ , то при виконанні рівності

$$\int_0^T e^{-\int_0^s a(\tau) d\tau} b(\tau) d\tau = 0 \quad (1.42)$$

кожен розв'язок цього рівняння є  $T$ -періодичним, а при її порушенні рівняння (1.32) не має жодного  $T$ -періодичного розв'язку.

У випадку  $\lambda < 1$   $T$ -періодичний розв'язок  $x_*(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  притягує до себе всі інші розв'язки рівняння (1.32), тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_*(t)) = 0,$$

де  $x(t)$  — довільний розв'язок рівняння (1.32).

### Доведення

Будемо шукати початкове значення  $x_0$ , якому відповідає  $T$ -періодичний розв'язок. З урахуванням формули (1.33) умову (1.41) при  $t_0 = 0$  перепишемо у вигляді

$$x_0 = \lambda \left( x_0 + \int_0^T e^{\int_0^s a(\tau) d\tau} b(\tau) d\tau \right)$$

або

$$(1 - \lambda)x_0 = \lambda \int_0^T e^{\int_0^s a(\tau) d\tau} b(\tau) d\tau.$$

Очевидно, що при  $\lambda \neq 1$  початкове значення визначається однозначно, а у випадку  $\lambda = 1$  сумісність цього рівняння зумовлена виконанням рівності (1.42).

Доведемо останнє твердження теореми. Нехай  $x(t)$  — довільний розв'язок рівняння (1.32). Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що функція  $x(t) - x_*(t)$  задовольняє відповідне лінійне однорідне рівняння. Оскільки  $\lambda < 1$ , то з теореми 1.6 випливає, що ця функція прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ .

Зазначимо, що в реальних системах (механічних, фізичних, хімічних, біологічних і т. д.) досить часто можна спостерігати процеси, які з плином часу набувають ознак періодичності. Такі процеси називають *перехідними*, а відповідні граничні періодичні режими — *усталеними*. Отже, при  $\lambda < 1$  всі розв'язки рівняння (1.32), крім  $x_*(t)$ , можна інтерпретувати як перехідні процеси, що з часом виходять на єдиний усталений режим  $x_*(t)$ .

### ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Знайти обмежений на всій дійсній осі розв'язок рівняння  $\dot{x} = x + \cos t$ .
- ② Довести, що рівняння  $\dot{x} = |\cos t|x + \sin t$  має єдиний  $2\pi$ -періодичний розв'язок.
- ③ Показати, що в задачі про обмежений розв'язок умову (1.35) можна замінити вимогою  $a(t) \leq -\alpha < 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

- ④ Показати, що в разі виконання ще однієї додаткової умови  $b(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$  обмежений розв'язок прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ .
- ⑤ Довести, що будь-який обмежений на всій осі розв'язок  $T$ -періодичного рівняння (1.32) є  $T$ -періодичним.
- ✓ *Вказівка.* При  $\lambda \neq 1$  скористатися тим, що різниця двох розв'язків ЛНР є розв'язком відповідного ЛОР. При  $\lambda = 1$  використати  $T$ -періодичність функції  $\int_0^t a(s) ds$ .

## 1.4

### Існування та єдиність розв'язку задачі Коші

#### Фундаментальне питання загальної теорії рівняння

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.43}$$

полягає у визначенні умов існування, а також єдиності розв'язку початкової задачі. Вперше відповідний загальний результат дістав О. Коші близько 1820 р., припустивши, що в околі початкових даних  $(t_0, x_0)$  функція  $f(t, x)$  неперервна й має неперервну частинну похідну  $\partial f(t, x)/\partial x$ .

#### 1.4.1. Теорема існування Пеано

У 1890 р. Дж. Пеано довів теорему існування розв'язку (можливо, неєдиного) задачі Коші за умови, що функція  $f(t, x)$  лише неперервна в прямокутнику

$$P := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} = I_a \times J_b,$$

де  $I_a = [t_0 - a, t_0 + a]$ ,  $J_b = [x_0 - b, x_0 + b]$ . Наведемо точне формулювання цього твердження.

### Теорема 1.8 (Пеано)

Нехай  $f(t, x) \in C(\Pi \mapsto \mathbb{R})$ . Тоді на відрізку  $I_h = [t_0 - h, t_0 + h]$ , де

$$h := \min(a, b/M), \quad M := \max_{(t, x) \in \Pi} |f(t, x)|,$$

існує розв'язок  $x(t)$  рівняння (1.43), який задовольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$ .

Зараз ми не доводитимемо цю теорему з огляду на те, що в гл. 5 буде наведено повне обґрунтування більш загального результату, який стосується нормальної системи диференціальних рівнянь. Відзначимо лише, що й О. Коші, й Дж. Пеано у своїх міркуваннях використовували метод побудови наближеного розв'язку рівняння (1.43), запропонований у 1768 р. Л. Ейлером. В основі цього методу лежить поняття *ламаної Ейлера*. Остання являє собою графік кусково-лінійної функції, утвореної за таким правилом. На відрізку  $[t_0, t_0 + h]$  через рівні проміжки відкладаємо  $m$  точок  $t_i = t_0 + ih/m$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Зауваживши, що при досить великому  $m$  похідну функції  $x(t) \in C^1([t_0, t_0 + h] \mapsto \mathbb{R})$  у точці  $t_i$  можна достатньо точно наблизити різницеvim відношенням  $\frac{x(t_{i-1}) - x(t_i)}{t_{i-1} - t_i}$ , перейдемо від диференціального рівняння (1.43) до його різницевого аналога

$$\frac{x_{i-1} - x_i}{t_{i-1} - t_i} = f(t_i, x_i).$$

Звідси дістаємо рекурентне співвідношення

$$x_{i-1} = x_i + f(t_i, x_i)(t_{i-1} - t_i) \equiv x_i + f(t_i, x_i) \frac{h}{m}.$$

Воно дає змогу послідовно визначати  $x_1, \dots, x_m$  за заданим  $x_0$ . Кожне  $x_i$  розглядається як наближене значення точного розв'язку в точці  $t_i$ . Тепер будемо кусково-лінійну функцію  $x_m(t)$  за формулами

$$x_m(t) = x_i + f(t_i, x_i)(t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i-1}].$$

Її графік і являє собою ламану Ейлера, яка послідовно сполучає точки  $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \dots, (t_m, x_m)$  прямолінійними відрізками (рис. 1.8). Дж. Пеано довів, що існує підпослідовність  $\{m_k\}_{k=1, 2, \dots}$  натуральних



чисел, для якої послідовність функцій  $\{x_{m_k}(t)\}_{k=1,2,\dots}$  рівномірно збігається на відрізку  $[t_0, t_0 + h]$  і при цьому гранична функція  $x(t)$  на відрізку  $[t_0, t_0 + h]$  є точним розв'язком рівняння (1.43). Цей розв'язок задовольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$ .

На прикладі рівняння (1.9) можна переконатися в тому, що однієї лише неперервності функції  $f(t, x)$  недостатньо для гарантування єдиності розв'язку задачі Коші.

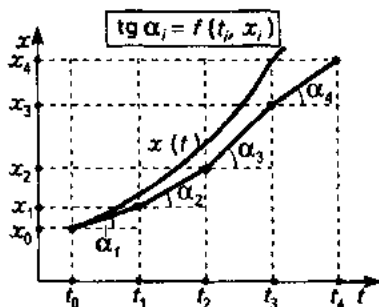


Рис. 1.8

### 1.4.2. Теорема існування та єдиності Пікара

У 1890 р. Е. Пікар обґрунтував інший спосіб побудови розв'язку задачі Коші у вигляді рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій — так званий *метод послідовних наближень*.

#### Теорема 1.9 (Пікара)

Нехай функція  $f(t, x) \in C(\Pi \mapsto \mathbb{R})$  задовольняє умову Ліпшица щодо змінної  $x$ , тобто існує додатне число  $L$  (стала Ліпшица) таке, що для довільної пари точок  $(t, x')$ ,  $(t, x'')$  із прямокутника  $\Pi$  виконується нерівність

$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leq L|x' - x''|.$$

Тоді на відрізку  $I_h = [t_0 - h, t_0 + h]$ , де

$$h := \min(a, b/M), \quad M := \max_{(t, x) \in \Pi} |f(t, x)|,$$

існує єдиний розв'язок  $x(t)$  рівняння (1.43), який задовольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$ . Цей розв'язок є границею рівномірно збіжної послідовності функцій  $\{x_k(t)\}_{k=1,2,\dots}$ , визначеної рекурентними формулами методу послідовних наближень

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0, \quad t \in I_h, \\ x_k(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{k-1}(s)) ds, \quad t \in I_h, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.44)$$

### Доведення

Воно складається з кількох етапів. Доцільно спочатку розглянути схему доведення в цілому, не вникаючи в деталі, а вже потім розбиратися в технічних подробицях.

#### 1. Еквівалентність задачі Коші інтегральному рівнянню

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (1.45)$$

Рівняння вигляду (1.45) відносно невідомої функції  $x(t)$  називають (нелінійним) інтегральним рівнянням Вольтерра. (В. Вольтерра розробив систематичну теорію рівнянь такого типу наприкінці XIX ст.)

Нехай  $I \subseteq I_a$  — деякий відрізок,  $x(t) \in C^1(I \mapsto J_b)$  — розв'язок задачі Коші з початковими даними  $(t_0, x_0)$ . Тоді

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I, \quad (1.46)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.47)$$

Інтегруванням обох частин (1.46) у межах  $t_0$  до  $t$  з урахуванням (1.47) переконуємося в тому, що функція  $x(t)$  справджує рівність (1.45) при всіх  $t \in I$ . Це означає, що  $x(t)$  — розв'язок інтегрального рівняння (1.45) на відрізку  $I$ .

Навпаки, нехай функція  $x(t) \in C(I \mapsto J_b)$  задовольняє (1.45) на відрізку  $I$ . Оскільки в правій частині рівності (1.45) фігурує неперервно диференційовна функція (за відомою властивістю визначеного інтеграла як функції верхньої межі), то й сама функція  $x(t)$  автоматично буде неперервно диференційовною на  $I$ . Після обчислення похідних в обох частинах (1.45) дістанемо (1.46), а поклавши у (1.45)  $t = t_0$ , матимемо (1.47). Ці міркування доводять, що неперервний на відрізку  $I$  розв'язок інтегрального рівняння (1.45) є шуканим розв'язком задачі Коші.

**2. Операторна форма інтегрального рівняння.** Праву частину інтегрального рівняння (1.45) природно розглядати як деяке інтегральне перетворення неперервної функції  $x(t)$ . Воно коректно визначене, якщо областю визначення  $x(t)$  є відрізок  $I \subseteq I_{a_2}$  а областю значень — підмножина відрізка  $J_b$ . Кожній функції  $x(t) \in C(I \mapsto J_b)$  це перетворення ставить у відповідність непе-

рервну функцію  $x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ . Таким чином, на множині  $C(I \mapsto J_b)$  виникає відображення  $\varphi$ , яке діє за правилом

$$\begin{aligned} C(I \mapsto J_b) &\ni x(t) \xrightarrow{\varphi} \varphi[x(\cdot)](t) := \\ &:= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \in C(I \mapsto \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Таке відображення в математичній літературі має спеціальну назву — (нелінійний) *інтегральний оператор Вольтерра*. (Ми використовуємо позначення  $x(\cdot)$ , не вказуючи аргументу цієї функції, аби підкреслити, що в обчисленні  $\varphi[x(\cdot)](t)$  беруть участь усі значення  $x(s)$ , коли  $s$  змінюється в межах від  $t_0$  до  $t$ .)

Тепер рівняння (1.45) можна переписати в операторному вигляді

$$x(t) = \varphi[x(\cdot)](t). \quad (1.48)$$

Звернемо увагу на дві важливі властивості оператора  $\varphi$ . Перша з них, зокрема, пояснює природність визначення числа  $h$ . Виявляється, що саме при  $I = I_h$  оператор  $\varphi$  кожену функцію класу  $C(I_h \mapsto J_b)$  переводить у функцію цього самого класу, тобто

$$\varphi: C(I_h \mapsto J_b) \mapsto C(I_h \mapsto J_b). \quad (1.49)$$

Дійсно, якщо  $0 < h \leq a$ , то для кожної  $x(t) \in C(I_h \mapsto J_b)$  і для всіх  $t \in I_h$  маємо

$$\begin{aligned} |\varphi[x(\cdot)](t) - x_0| &\leq \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \right| \leq M |t - t_0|. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Звідси випливає, що потрібна нерівність

$$|\varphi[x(\cdot)](t) - x_0| \leq Mh \leq b \quad \forall t \in I_h$$

виконуватиметься саме при  $h = \min(a, b/M)$ .

Друга властивість оператора  $\varphi$  виражається нерівністю

$$\begin{aligned} |\varphi[u(\cdot)](t) - \varphi[v(\cdot)](t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \right|, \end{aligned} \quad (1.51)$$

яка справджується для всіх  $u(t), v(t) \in C(I_h \mapsto J_b)$  і всіх  $t \in I_h$ .

**3. Коректність методу послідовних наближень.** Для побудови розв'язку рівняння (1.48) використаємо метод послідовних наближень.

Згідно з цим методом утворимо послідовність функцій  $\{x_k(t)\}_{k=0, 1, 2, \dots}$  за рекурентною формулою

$$x_k(t) := \varphi[x_{k-1}(\cdot)](t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.52)$$

взявши за нульове наближення сталу функцію  $x_0(t) \equiv x_0$ . Очевидно, що  $x_0(t) \equiv x_0 \in C(I_h \mapsto J_b)$ . Тому з огляду на першу властивість оператора  $\varphi$  матимемо  $x_1(t) = \varphi[x_0(\cdot)](t) \in C(I_h \mapsto J_b)$ . Узагалі

$$\begin{aligned} x_{k-1}(t) \in C(I_h \rightarrow J_b) &\Rightarrow x_k(t) := \varphi[x_{k-1}(\cdot)](t) \in C(I_h \rightarrow J_b), \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Це означає, що процес побудови послідовних наближень  $x_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) можна продовжувати до нескінченності.

**4. Збіжність послідовних наближень.** Доведемо, що послідовність функцій  $\{x_k(t)\}$  рівномірно збігається на відрізьку  $I_h$ . Для цього зауважимо, що  $x_k(t) \in k$ -ю частинною сумою функціонального ряду

$$x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (x_i(t) - x_{i-1}(t)). \quad (1.53)$$

Справді,

$$\begin{aligned} x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (x_i(t) - x_{i-1}(t)) &= x_0 + x_1(t) - x_0 + x_2(t) - x_1(t) + \dots \\ &\dots + x_{k-1}(t) - x_{k-2}(t) + x_k(t) - x_{k-1}(t) = x_k(t). \end{aligned}$$

Для доведення збіжності ряду (1.53) оцінимо  $|x_i(t) - x_{i-1}(t)|$  на відрізку  $I_h$ . Для першого члена, поклавши у (1.50)  $x(t) = x_0$ , дістанемо  $|x_1(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$ . Природно припустити, що члени ряду (1.53) задовольняють нерівності

$$|x_i(t) - x_{i-1}(t)| \leq K_i |t - t_0|^i \quad (1.54)$$

для  $i = 1, 2, \dots$  з деякими сталими  $K_i$ . Дійсно, якщо (1.54) виконується для деякого натурального числа  $i$ , то з (1.51) при  $u(t) = x_i(t)$ ,  $v(t) = x_{i-1}(t)$  матимемо

$$\begin{aligned} |x_{i+1}(t) - x_i(t)| &= |\varphi[x_i(\cdot)](t) - \varphi[x_{i-1}(\cdot)](t)| \leq LK_i \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^i ds \right| = \\ &= \frac{LK_i}{i+1} |t - t_0|^{i+1} := K_{i+1} |t - t_0|^{i+1}. \end{aligned}$$

Отже, оцінка (1.54) дійсно справджується для всіх  $i = 1, 2, \dots$ , якщо покласти

$$K_i = \frac{ML^{i-1}}{i!} = \frac{M}{L} \frac{L^i}{i!}.$$

З цих міркувань випливає, що  $i$ -й член функціонального ряду (1.53) на відрізку  $I_h$  не перевищує за абсолютною величиною відповідного члена збіжного числового ряду

$$|x_0| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{(Lh)^i}{i!},$$

сума якого дорівнює  $|x_0| + \frac{M}{L}(e^{Lh} - 1)$ . Тоді на підставі ознаки

Вейерштрасса функціональний ряд (1.53), а отже, й послідовність  $\{x_k(t)\}$  рівномірно збігаються на відрізку  $I_h$  до деякої функції  $x_*(t) \in C(I_h \mapsto J_b)$ .

Покажемо, що функція  $x_*(t)$  є розв'язком рівняння (1.48). Для цього обгрунтуємо граничний перехід

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi[x_k(\cdot)](t) = \varphi[x_*(\cdot)](t) \quad \forall t \in I_h. \quad (1.55)$$

Оскільки за теоремою Кантора функція  $f(t, x)$  рівномірно неперервна в прямокутнику  $\Pi$ , то послідовність функцій  $\{f(t, x_k(t))\}$  рівномірно на  $I_h$  збігається до функції  $f(t, x_*(t))$ . Тепер рівність (1.55) випливає з теореми про граничний перехід під знаком інтеграла.

Нарешті, перейшовши до границі в обох частинах рекурентної формули (1.52), бачимо, що функція  $x_*(t)$  є неперервним розв'язком рівняння (1.48) на  $I_h$ , а zarazом і розв'язком задачі Коші, існування якого стверджується теоремою.

**5. Швидкість збіжності послідовних наближень і єдиність розв'язку задачі Коші.** Нехай  $x(t) \in C(I \rightarrow J_b)$  — довільна функція, що справджує на відрізку  $I \subseteq I_h$  рівність (1.48). Віднімемо від (1.48) рівність (1.52). Врахувавши (1.51), дістанемо

$$\begin{aligned} |x(t) - x_k(t)| &\leq |\varphi[x(\cdot)](t) - \varphi[x_{k-1}(\cdot)](t)| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |x(s) - x_{k-1}(s)| ds \right|. \end{aligned}$$

Тепер так само, як і вище, легко одержуємо:  $|x(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$ ,  $t \in I$ , і за індукцією

$$\boxed{|x(t) - x_k(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{L^{k+1}}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1} \leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall t \in I.} \quad (1.56)$$

Як бачимо,  $x_k(t) \rightarrow x(t)$  при  $k \rightarrow \infty$  рівномірно на відрізку  $I$ . З єдиності границі послідовності випливає, що  $x(t) = x_*(t)$  для всіх  $t \in I$ . Єдиність розв'язку  $x_*(t)$  доведено.

◆ **Зауваження 1.4**

Якщо функція  $f(t, x) \in C(\Pi \rightarrow \mathbb{R})$  має частинну похідну за аргументом  $x$  у кожній точці  $(t, x) \in \Pi$  й існує стала  $L > 0$  така, що

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| \leq L \quad \forall (t, x) \in \Pi,$$

то  $f(t, x)$  задовольняє умову Ліпшица щодо  $x$  зі сталою Ліпшица  $L$ .

Дійсно, за теоремою Лагранжа про скінченні прирости для кож-

ної пари точок  $(t, x')$ ,  $(t, x'') \in \Pi$ , де для визначеності  $x' < x''$ , існує число  $\xi \in (x', x'')$  таке, що

$$f(t, x') - f(t, x'') = \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial x} (x' - x'').$$

Отже, теорема існування і єдиності Коші, про яку згадувалося на початку даного параграфа, є окремим випадком теореми Пікара.

Нарешті, відзначимо, що оцінка (1.56) свідчить про досить високу швидкість збіжності послідовних наближень до точного розв'язку. Тому метод послідовних наближень можна ефективно використовувати для наближеного інтегрування диференціальних рівнянь.

### □ Приклад 1.6

*Застосуємо метод послідовних наближень до наближеного відшукування розв'язку задачі Коші*

$$\dot{x} = x^2 + 2t, \quad x(0) = 0.$$

Послідовні наближення визначаються рекурентною формулою

$$x_k(t) = \int_0^t (x_{k-1}^2(s) + 2s) ds, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де  $x_0(t) \equiv 0$ . Виконавши відповідні обчислення, знаходимо:

$$x_1(t) = \int_0^t 2s ds = t^2,$$

$$x_2(t) = \int_0^t (s^4 + 2s) ds = t^5/5 + t^2,$$

$$x_3(t) = \int_0^t (s^{10}/25 + 2s^7/5 + s^4 + 2s) ds = t^{11}/275 + t^8/20 + t^5/5 + t^2, \dots$$

Аби вказати якнайширший відрізок, на якому збігаються ці послідовні наближення, потрібно параметри  $a$  та  $b$  прямокутника  $\Pi$  вибрати так, щоб величина  $h = \min(a, b/M)$  була найбільшою. В нашому випадку  $t_0 = x_0 = 0$ , а тоді  $M = b^2 + 2a$  і  $h = \min(a, b/(b^2 + 2a))$ .

Увівши замість  $b$  новий параметр  $c > 0$  за формулою  $b = \sqrt{ac}$ , зведемо нашу задачу до відшукування максимального значення функції

$\min\left(a, \frac{c}{\sqrt{a(c^2 + 2)}}\right)$  двох додатних змінних  $a$  та  $c$ . При фіксованому  $c$

дана функція породжує функцію аргументу  $a$ , яка досягає найбільшого

значення за умови, що  $a = \frac{c}{\sqrt{a(c^2 + 2)}}$ , тобто при  $a = \left(\frac{c}{c^2 + 2}\right)^{2/3}$ . Функція змінної  $c$ , яка фігурує в лівій частині цієї формули, досягає максимального значення  $1/2$  при  $c = \sqrt{2}$ . Тепер знаходимо:  $a = 1/2$ ,  $b = 1$ . Такий вибір параметрів  $a$  та  $b$  гарантує збіжність послідовних наближень на відрізку  $[-1/2; 1/2]$ .

Оцінимо на цьому відрізку відхилення  $k$ -го наближення від точного розв'язку  $x(t)$  досліджуваної задачі Коші. Оскільки в нашому випадку  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ , то при  $b = 1$  можна покласти  $L = 2$ . З урахуванням рівності  $M = 2$  оцінка (1.56) набирає вигляду

$$|x(t) - x_k(t)| \leq \frac{1}{(k+1)!}, \quad t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Побудувати на відрізку  $[-1/2; 1/2]$  ламану Ейлера з чотирма та вісьмома ланками для розв'язку задачі Коші  $\dot{x} = x^2 + 2t$ ,  $x(0) = 0$ .
- ② Знайти формулу для  $k$ -го послідовного наближення до розв'язку задачі Коші  $\dot{x} = x + t$ ,  $x(0) = 0$ . Довести в цьому випадку збіжність методу послідовних наближень на будь-якому проміжку.
- ③ З'ясувати, чи справджуються умови теореми Пікара у випадку, коли  $f(t, x) = 2\sqrt[3]{xt}$ ,  $\Pi = [-1; 1] \times [-1; 1]$ .
- ④ При виконанні умов теореми Пікара довести збіжність послідовних наближень на відрізку  $[t_0 - h_-, t_0 + h_+]$ , де

$$h_{\pm} = \min\left(a, \frac{b}{M_{\pm}}\right), \quad M_{\pm} = \max_{(t, x) \in \Pi_{\pm}} |f(t, x)|,$$

а  $\Pi_{-}$  та  $\Pi_{+}$  — частини прямокутника  $\Pi$ , які лежать у півплощинах  $t \leq t_0$  та  $t \geq t_0$  відповідно.



## 1.5

### Продовження розв'язку задачі Коші

Нехай  $D$  — область у  $\mathbb{R}^2$  і  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R})$ . Для довільної точки  $(t_0, x_0) \in D$  теорема Пеано дає змогу встановити існування розв'язку задачі Коші

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.57)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.58)$$

на деякому, можливо досить малому, відрізку з центром у точці  $t_0$ . Інакше кажучи, результат Пеано — це локальна теорема існування розв'язку диференціального рівняння (1.57). Для її застосування потрібні параметри  $a = a(t_0, x_0)$  та  $b = b(t_0, x_0)$  прямокутника  $\Pi$ , центр якого розташований у точці  $(t_0, x_0)$ , вибрати такими, щоб  $\Pi \subset D$ . Після цього можна визначити число  $h = h(t_0, x_0)$  і відповідний відрізок  $I_h$ , на якому існує розв'язок задачі (1.57)—(1.58).

#### 1.5.1. Непродовжувані розв'язки \_\_\_\_\_

Кінцеві точки графіка розв'язку задачі (1.57)—(1.58), існування якого гарантує теорема Пеано, лежать в області  $D$ . Тому, розглядаючи їх як нові початкові дані, можна знову застосувати теорему Пеано й розширити область існування цього розв'язку, якщо взяти до уваги таке просте твердження.

#### Твердження 1.6 (про склеювання розв'язків)

Нехай  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R})$  і  $x_1(t) \in C([t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R})$  та  $x_2(t) \in C([t_1, t_2] \mapsto \mathbb{R})$  — розв'язки рівняння (1.57), які задовольняють умову  $x_1(t_1) = x_2(t_1)$ . Тоді функція

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{при } t \in [t_0, t_1], \\ x_2(t) & \text{при } t \in (t_1, t_2] \end{cases}$$

є розв'язком рівняння (1.57) на відрізку  $[t_0, t_2]$ .

### Доведення

Очевидно, що так визначена функція  $x(t)$  задовольняє рівняння (1.5.7) як на  $[t_0, t_1)$ , так і на  $(t_1, t_2]$ . Ліва і права похідні функції  $x(t)$  у точці  $t_1$  існують і набувають значень відповідно  $f(t_1, x_1(t_1))$  та  $f(t_1, x_2(t_1))$ . Але з умови теореми випливає, що ці значення збігаються з  $f(t_1, x(t_1))$ . Тому  $x(t)$  — розв'язок на всьому відрізку  $[t_0, t_2]$ .

Казатимемо, що розв'язок  $x(t)$  із цього твердження є *продовженням розв'язку  $x_1(t)$  вправо (розв'язку  $x_2(t)$  вліво)*. В загальному випадку дамо таке означення.

#### ⇒ Означення 1.6

*Розв'язок  $\tilde{x}(t)$ , визначений на інтервалі (відрізку)  $\tilde{I}$ , називають продовженням розв'язку  $x(t)$ , визначеного на інтервалі (відрізку)  $I$ , якщо  $I \subset \tilde{I}$  і  $x(t) = \tilde{x}(t)$  для кожного  $t \in I$ .*

Покажемо, що розв'язок будь-якої задачі Коші можна продовжити так, щоб кінці його графіка вийшли за межі довільного наперед заданого компакту  $K \subset D$ . Для цього нам знадобиться допоміжний результат про існування відрізка продовжуваності, однакового для всіх точок множини  $K$ .

### Твердження 1.7

Для довільного компакту  $K \subset D$  можна вказати таке число  $\eta > 0$ , що для кожної точки  $(t', x') \in K$  розв'язок рівняння (1.5.7), який задовольняє початкову умову  $x(t') = x'$ , існує на відрізку  $[t' - \eta, t' + \eta]$ .

### Доведення

Число  $\epsilon > 0$  виберемо настільки малим, щоб для кожної точки  $(t', x') \in K$  квадрат  $\Pi_\epsilon(t', x') = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t'| \leq \epsilon, |x - x'| \leq \epsilon\}$  цілком лежав у  $D$ . Тоді

$$K_\epsilon := \overline{\bigcup_{(t', x') \in K} \Pi_\epsilon(t', x')} \subset D$$

(доведіть!) і  $\Pi_\epsilon(t', x') \subset K_\epsilon$ , як тільки  $(t', x') \in K$ . Як наслідок

$$\max_{(t, x) \in \Pi_\epsilon(t', x')} |f(t, x)| \leq M_\epsilon := \max_{(t, x) \in K_\epsilon} |f(t, x)|,$$

і з теореми Пеано, застосованої до квадрата  $\Pi_\epsilon(t', x')$ , випливає, що розв'язок рівняння (1.57), який задовольняє початкову умову  $x(t') = x'$ , існує на відрізку  $[t' - \eta, t' + \eta]$ , де  $\eta = \eta_\epsilon := \min(\epsilon, \epsilon/M_\epsilon)$  не залежить від точки  $(t', x') \in K$ .

### Теорема 1.10

Нехай  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R})$ . Для довільної точки  $(t_0, x_0) \in D$  і довільного компакту  $K \subset D$  існують числа  $t_- < t_0$ ,  $t_+ > t_0$  і розв'язок  $x(t)$  задачі (1.57)–(1.58), визначений на  $[t_-, t_+]$ , такі, що  $x(t_0) = x_0$  і  $(t_\pm, x(t_\pm)) \in K$ .

### Доведення

Далі міркуватимемо за умови, що  $(t_0, x_0) \in K$  (у випадку, коли  $(t_0, x_0) \notin K$ , твердження теореми є очевидним). Твердження 1.7 гарантує існування розв'язку  $x(t)$  задачі Коші з початковими даними  $(t_0, x_0)$  на відрізку  $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ . Якщо обидві кінцеві точки  $(t_0 \pm \eta, x(t_0 \pm \eta))$  графіка  $x(t)$  лежать за межами компакту  $K$ , то твердження теореми правильне. В протилежному разі припустимо для визначеності, що  $(t_1, x_1) := (t_0 + \eta, x(t_0 + \eta)) \in K$ . Згідно з твердженням 1.7 розв'язок задачі Коші з початковими даними  $(t_1, x_1)$  існує на відрізку  $[t_1, t_1 + \eta] = [t_0 + \eta, t_0 + 2\eta]$ . Скориставшись твердженням 1.6, можна продовжити розв'язок задачі (1.57)–(1.58) з відрізка  $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$  на відрізок  $[t_0 - \eta, t_0 + 2\eta]$ . Будемо вживати позначення  $x(t)$  і для цієї продовженої функції. Тепер знову перевіряємо, чи належить точка  $(t_0 + 2\eta, x(t_0 + 2\eta))$  компактності  $K$ , і т. д. (рис. 1.9). Оскільки множина  $K$  обмежена, то зрозуміло, що знайдеться натуральне число  $N$ , для якого розв'язок задачі (1.57)–(1.58)

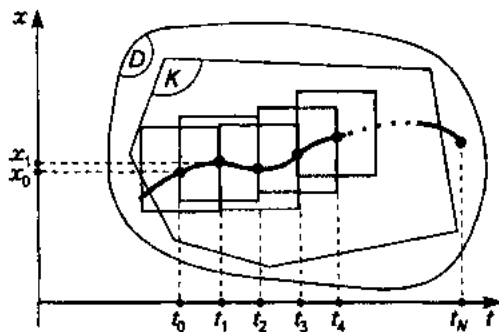


Рис. 1.9

удастся продовжити вправо на відрізок  $[t_0 - \eta, t_0 + N\eta]$ , однак при цьому точка  $(t_0 + N\eta, x(t_0 + N\eta))$  опиниться вже за межами  $K$ . Отже, можемо покласти  $t_* = t_0 + N\eta$ .

Аналогічно здійснюється процедура продовження розв'язку задачі (1.57)–(1.58) вліво.

### ⇒ Означення 1.7

*Розв'язок рівняння (1.57), визначений на інтервалі  $I$ , називають непродовжуваним, якщо для нього не існує продовження на такий інтервал  $\tilde{I}$ , що  $I \subset \tilde{I}$ ,  $\tilde{I} \setminus I \neq \emptyset$ .*

Доведемо тепер основну теорему — про існування непродовжуваного розв'язку.

### Теорема 1.11

Якщо  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R})$ , то для довільної точки  $(t_0, x_0) \in D$  існує непродовжуваний розв'язок задачі (1.57)–(1.58).

#### Доведення

Для області  $D$  існує послідовність таких компактів  $\{K_j\}_{j=1,2,\dots}$ , що  $K_j \subset K_{j+1}$ ,  $\cup K_j = D$  і для будь-якого компакту  $K \subset D$  знайдеться номер  $N$  такий, що  $K \subset K_N$ . Дійсно, якщо  $D = \mathbb{R}^2$ , то за  $K_j$  можна взяти замкнений круг  $B_j(0)$  радіусом  $j$  із центром у точці  $(0, 0)$ . Якщо ж  $D \neq \mathbb{R}^2$ , то множина  $\partial D$  межових точок області  $D$  непорожня. Позначимо тоді через  $\partial D_\epsilon$   $\epsilon$ -окіл множини  $\partial D$  (тобто об'єднання  $\epsilon$ -околів усіх точок множини  $\partial D$ ). Тепер достатньо покласти  $K_j = (D \setminus \partial D_{1/j}) \cap B_j(0)$ . (Кілька членів послідовності  $\{K_j\}$  можуть виявитися порожніми множинами.)

Застосуємо в кожному компактi  $K_j$  метод доведення теореми 1.10 і побудуємо послідовність відрізків  $\{I_j\}_{j=1,2,\dots}$  та послідовність розв'язків  $\{x_j(\cdot) : I_j \mapsto \mathbb{R}\}_{j=1,2,\dots}$  задачі (1.57)–(1.58), таких, що  $I_j \subseteq I_{j+1}$ ,  $x_j(t) = x_{j+1}(t)$  при  $t \in I_j$ , а кінці графіка розв'язку  $x_j(t)$  не належать  $K_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Після цього покладемо  $I = \cup I_j$  і визначимо функцію  $x(\cdot) : I \mapsto \mathbb{R}$  умовою

$$x(t) := x_j(t), \text{ якщо } t \in I_j.$$

Ця функція і є непродовжуваним розв'язком задачі (1.57)–(1.58). Справді, міркуючи від супротивного, припустимо, наприклад, що

$I$  має скінченну праву межу  $b < \infty$  і розв'язок  $x(t)$  допускає продовження на інтервал (відрізок), який містить точку  $b$ . [Це продовження ми знову позначимо через  $x(t)$ .] Тоді графік неперервного відображення  $x(\cdot) : [t_0, b] \mapsto \mathbb{R}$ , з одного боку, є компактною множиною, яка при досить великому натуральному  $N$  міститься в  $K_N$ , а з іншого, за побудовою, — для правої межової точки  $t_N \in [t_0, b]$  відрізка  $I_N$  маємо  $(t_N, x(t_N)) \notin K_N$ . Дійшли протиріччя.

### 1.5.2. Теорема Кнезера

Якщо на функцію не накладати жодних інших умов, крім неперервності, то може виявитися, що існує більше ніж один непродовжуваний розв'язок задачі (1.57)—(1.58). Г. Кнезер у 1923 р. одержав такий результат.

#### Теорема 1.12 (Кнезера)

Нехай  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R})$  і для точки  $(t_0, x_0) \in D$  на відрізку  $[t_0, t_*$ ] існують два таких розв'язки  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  задачі (1.57)—(1.58), що  $x_2(t) > x_1(t)$  для всіх  $t \in (t_0, t_*$ ). Припустимо також, що область  $G$ , обмежена графіками цих розв'язків і прямою  $t = t_*$ , належить  $D$ . Тоді точку  $(t_0, x_0)$  можна сполучити інтегральною кривою рівняння (1.57) з будь-якою точкою відрізка, кінцями якого є точки  $(t_*, x_1(t_*))$  та  $(t_*, x_2(t_*))$ .

#### Доведення

Нехай  $x_* \in (x_1(t_*), x_2(t_*))$ . Продовжуватимемо вліво розв'язок  $x(t)$ , який задовольняє початкову умову  $x(t_*) = x_*$ . За теоремою 1.10 його графік обов'язково вийде за межі компакту  $\bar{G}$ . Отже, знайдеться таке  $\tau \in [t_0, t_*$ ) та  $k \in \{1, 2\}$ , що  $x(\tau) = x_k(\tau)$ . Якщо  $\tau = t_0$ , то шуканою інтегральною кривою є графік розв'язку  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_*]$ ; якщо ж  $\tau > t_0$ , то нею є графік функції

$$x = \begin{cases} x_k(t), & t \in [t_0, \tau], \\ x(t), & t \in (t_0, t_*], \end{cases}$$

яка згідно з твердженням 1.6 теж є розв'язком рівняння (1.57) (рис. 1.10, а).

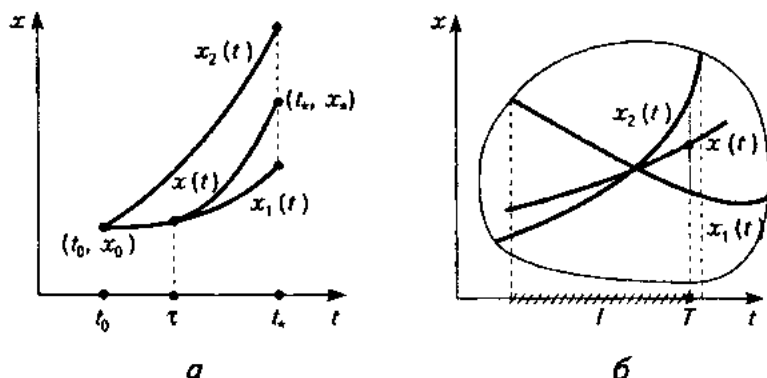


Рис. 1.10

### 1.5.3. Теорема порівняння

У дослідженнях, пов'язаних із проблемами єдиності й продовжуваності розв'язків, важливу роль відіграє така теорема.

#### Теорема 1.13 (порівняння)

Припустимо, що функції  $f_k(t, x) \in C(D \rightarrow \mathbb{R})$  ( $k = 1, 2$ ) задовольняють умову

$$f_1(t, x) < f_2(t, x) \quad \forall (t, x) \in D. \quad (1.59)$$

Нехай  $x_k(\cdot) : I_k \rightarrow \mathbb{R}$  — непродовжуваний розв'язок задачі Коші  $\dot{x} = f_k(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  ( $k = 1, 2$ ), де  $(t_0, x_0) \in D$  — спільна початкова точка обох розв'язків. Тоді виконуються нерівності

$$x_1(t) > x_2(t) \quad \forall t \in I_- := \{t \in I_1 \cap I_2 : t < t_0\},$$

$$x_1(t) < x_2(t) \quad \forall t \in I_+ := \{t \in I_1 \cap I_2 : t > t_0\}.$$

#### Доведення

Обмежимося доведенням другої нерівності. Розглянемо функцію  $\xi(t) := x_2(t) - x_1(t)$ . Очевидно, що  $\xi(t_0) = 0$  і

$$\dot{\xi}(t_0) = \dot{x}_2(t_0) - \dot{x}_1(t_0) = f_2(t_0, x_0) - f_1(t_0, x_0).$$

З урахуванням умови (1.59) маємо  $\dot{\xi}(t_0) > 0$ , і оскільки  $\xi(t) = \xi(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$ ,  $t \rightarrow t_0$ , то для всіх  $t$ , досить близьких до  $t_0$ , знак функції  $\xi(t)$  збігається зі знаком  $(t - t_0)$ . Тому існує максимальний інтервал  $(t_0, t_*) \subseteq I_*$ , на якому  $\xi(t)$  додатна. Незавжно зрозуміти, що

$$t_* = \sup\{t \in I_* : \xi(t) > 0 \quad \forall t \in (t_0, t)\}.$$

Тепер потрібно довести, що  $(t_0, t_*) = I_*$ . Припустимо, навпаки, що  $t_*$  лежить усередині інтервалу  $I_*$ . За означенням  $t_*$  виконується рівність  $\xi(t_*) = 0$ . Звідси  $x_* := x_1(t_*) = x_2(t_*)$ , і з урахуванням нерівності (1.59) дістаємо  $\dot{\xi}(t_*) = f_2(t_*, x_*) - f_1(t_*, x_*) > 0$ . А оскільки  $\xi(t) = \dot{\xi}(t_*)(t - t_*) + o(t - t_*)$ ,  $t \rightarrow t_*$ , то функція  $\xi(t)$  має набувати від'ємних значень на деякому інтервалі  $(t_* - \delta, t_*) \subset (t_0, t_*)$ , де  $\delta$  — досить мале додатне число. Це, однак, суперечить означенню  $t_*$ .

При оцінюванні інтервалу, на який допускає продовження розв'язок задачі (1.57)—(1.58), вельми корисним є такий результат.

### Теорема 1.14

Припустимо, що  $D$  — опукла область у  $\mathbb{R}^2$  і функції  $f(t, x)$ ,  $f_1(t, x)$ ,  $f_2(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R})$  задовольняють умову

$$f_1(t, x) < f(t, x) < f_2(t, x) \quad \forall (t, x) \in D.$$

Нехай  $x_k(\cdot) : I_k \mapsto \mathbb{R}$  — непродовжуваний розв'язок задачі Коші  $\dot{x} = f_k(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  ( $k = 1, 2$ ), де  $(t_0, x_0) \in D$  — спільна початкова точка обох розв'язків. Тоді розв'язок задачі (1.57)—(1.58) допускає продовження на інтервал  $I := I_1 \cap I_2$ .

### Доведення

Нехай  $T$  — довільна точка з інтервалу  $I$ , розташована правіше від  $t_0$ . За теоремою порівняння виконується нерівність  $x_1(t) < x_2(t)$ ,  $t \in (t_0, T]$ . За теоремою 1.10 розв'язок  $x(t)$  задачі (1.57)—(1.58) можна продовжити вправо так, щоб його графік перетнув межу криволінійного трикутника, обмеженого графіками функцій  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  та прямою  $t = T$  (рис. 1.10, б). Але за теоремою порівняння в процесі такого продовження має зберігатися нерівність  $x_1(t) < x(t) < x_2(t)$ . Тому графік  $x(t)$  перетне пряму  $t = T$ . Таким чином,  $x(t)$  допускає продовження на відрізок  $[t_0, T]$ . Аналогічно розглядається випадок, коли  $T < t_0$ .

### Наслідок 1.4

Якщо функція  $f(t, x) \in C(\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R})$  задовольняє умову

$$|f(t, x)| \leq g_1(t)|x| + g_2(t) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

де  $g_i(t) \in C(\mathbb{R} \mapsto [0, \infty))$  ( $i = 1, 2$ ), то кожен розв'язок рівняння (1.57) продовжується на всю дійсну вісь.

Справді, достатньо зауважити, що таку властивість мають розв'язки рівнянь

$$\dot{x} = -g_1(t)|x| - g_2(t), \quad \dot{x} = g_1(t)|x| + g_2(t)$$

(доведіть!).

### ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Використавши ідею доведення теореми Кнезера, знайти розв'язок рівняння  $\dot{x} = x^{2/3}$ , який задовольняє умови  $x(0) = 0$ ,  $x(100) = 1$ .
- ② Нехай  $M_i := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq t^2, (-1)^i t > 0\}$ ,  $i = 1, 2$ . Довести, що кожному точці множини  $M_1$  можна сполучити інтегральною кривою рівняння  $\dot{x} = 2\sqrt[3]{tx}$  із кожною точкою множини  $M_2$ .
- ③ Зауваживши, що  $x^2 + t \leq x^2 + a$  при  $t \in [0, a]$ , використати теорему порівняння й оцінити інтервал, на який продовжується вправо розв'язок задачі Коші  $\dot{x} = x^2 + t$ ,  $x(0) = 0$ . Довести, що цей розв'язок не можна продовжити на додатну піввісь.
- ④ Показати, що кожен розв'язок рівняння  $\dot{x} = x \cos(tx)$  продовжується на всю дійсну вісь.
- ⑤ Нехай  $D$  — опукла область у  $\mathbb{R}^2$  і  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R})$ . Припустимо, що графіки функцій  $\xi(t) \in C^1(I \mapsto \mathbb{R})$  та  $\eta(t) \in C^1(I \mapsto \mathbb{R})$  лежать у  $D$ , причому  $\xi(t) > \eta(t) \quad \forall t \in I$

$$\dot{\xi}(t) < f(t, \xi(t)), \quad \dot{\eta}(t) > f(t, \eta(t)) \quad \forall t \in I.$$

Довести, що розв'язок  $x(t)$  задачі Коші  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , де  $t_0 \in I$ ,  $\eta(t_0) \leq x_0 \leq \xi(t_0)$ , існує на інтервалі  $I \cap [t_0, \infty)$  і задовольняє нерівність  $\eta(t) \leq x(t) \leq \xi(t)$ .



## 1.6

## Геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку

### 1.6.1. Поле напрямів. Інтегральні криві

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.60)$$

з неперервною функцією  $f: D \mapsto \mathbb{R}$ . За теоремою Пеано через довільну точку  $(x_0, y_0)$  проходить графік розв'язку  $y = y(x)$  рівняння (1.60). У цій точці він має дотичну, яку можна задати рівнянням

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Оскільки  $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$ , то це співвідношення набуває вигляду

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0. \quad (1.61)$$

Таким чином, диференціальне рівняння (1.60) кожній точці  $(x_0, y_0)$  ставить у відповідність пряму (1.61) з кутовим коефіцієнтом  $f(x_0, y_0)$ . Важливо звернути увагу на такий факт: хоча пряма (1.61) виникла як дотична до графіка розв'язку рівняння (1.60), однак для встановлення зазначеної відповідності «точка  $\mapsto$  пряма» явний вигляд розв'язків цього рівняння не потрібен.

Абстрагуючися від описаної вище конструкції, приходимо до такого означення.

#### ➤ Означення 1.8

*Полема напрямів у області  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  називають відповідність, яка кожній точці  $(x_0, y_0) \in D$  зіставляє пряму  $L(x_0, y_0)$ , що проходить через  $(x_0, y_0)$ .*

Відповідність «точка  $\mapsto$  пряма», в якій роль  $L(x_0, y_0)$  відіграють прямі (1.61), називають *полем напрямів рівняння (1.60)*. Цей об'єкт

можна вважати геометричним еквівалентом даного диференціального рівняння. Напрямок поля у фіксованій точці зображають у вигляді мало-го відрізка (лінійного елемента) відповідної прямої (рис. 1.11).

У вступі було введено поняття інтегральної кривої рівняння (1.60). Цей термін використовувався як еквівалент графіка розв'язку. Очевидно, що в кожній точці інтегральної кривої її дотична збігається з прямою поля напрямів диференціального рівняння, яка цій точці відповідає. З огляду на цей факт у випадку поля напрямів загального типу природно дати таке означення.

### ⇒ Означення 1.9

*Інтегральною кривою поля напрямів називають таку криву, в кожній точці якої дотична збігається з прямою поля напрямів, що цій точці відповідає.*

Про інтегральну криву кажуть, що вона дотикається поля напрямів.

Природно виникає питання стосовно існування інтегральних кривих. Воно просто розв'язується у випадку поля напрямів, породженого диференціальним рівнянням із неперервною функцією  $f(x, y)$ . Дійсно, достатньо зауважити, що інтегральна крива рівняння (1.60) в розумінні означення, наведеного у вступі, є водночас інтегральною кривою поля напрямів цього рівняння в сенсі означення 1.9. Виявляється, що правильним є й обернене твердження.

Перш ніж його обґрунтувати, уточнимо, що тут і надалі, якщо не-

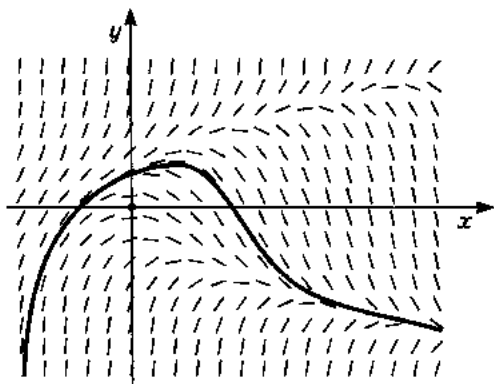


Рис. 1.11

має додаткових пояснень, кривою  $\gamma$  на площині називатимемо образ у  $\mathbb{R}^2$  відображення інтервалу  $I$

$$I \ni t \mapsto (\xi(t), \eta(t)) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.62)$$

функціями  $\xi(t), \eta(t)$  класу  $C^1(I \mapsto \mathbb{R})$ , які задовольняють так звану умову регулярності

$$|\dot{\xi}(t)| + |\dot{\eta}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in I. \quad (1.63)$$

Якщо ця умова справджується, то в кожній точці  $(\xi(t), \eta(t))$  кривої  $\gamma$  існує дотична, яка визначається дотичним вектором  $(\dot{\xi}(t), \dot{\eta}(t))$ .

Тепер покажемо: якщо крива  $\gamma$ , визначена відображенням (1.62), дотикається поля напрямів диференціального рівняння (1.60), то вона є графіком деякого його розв'язку.

Дійсно, крива  $\gamma$  дотикається поля напрямів рівняння (1.60) тоді й лише тоді, коли при кожному  $t \in I$  дотичний вектор  $(\dot{\xi}(t), \dot{\eta}(t))$  буде колінеарним прямій із кутовим коефіцієнтом  $f(\xi(t), \eta(t))$ . Аналітично цю умову можна записати у вигляді

$$\dot{\eta}(t) = f(\xi(t), \eta(t))\dot{\xi}(t) \quad \forall t \in I. \quad (1.64)$$

Але тоді з урахуванням (1.63) дістаємо:  $\dot{\xi}(t) \neq 0$  при всіх  $t \in I$ . Отже,  $\xi(t)$  монотонна на інтервалі  $I$  й відображає його взаємно однозначно на деякий інтервал  $J$ . При цьому існує обернена функція  $\tau(x) \in C^1(J \mapsto I)$ , з означення якої випливає рівність  $\xi(\tau(x)) = x$ ,  $x \in J$ . Таким чином, якщо ввести новий параметр  $t = \tau(x)$ , то крива  $\gamma$  виявиться графіком функції  $y(x) := \eta(\tau(x)) \in C(J \mapsto \mathbb{R})$ . Залишилося довести, що  $y(x)$  — розв'язок рівняння (1.60). У цьому легко переконатися прямим обчисленням, якщо взяти до уваги рівність

$$\frac{d\xi(\tau(x))}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \text{ і формулу (1.64):}$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \dot{\eta}(\tau(x))\tau'(x) = f(x, y(x))\dot{\xi}(\tau(x))\tau'(x) = \\ &= f(x, y(x))\frac{d\xi(\tau(x))}{dx} = f(x, y(x)) \quad \forall x \in J. \end{aligned}$$

**Висновок:** графіки розв'язків рівняння (1.60) і лише вони є інтегральними кривими його поля напрямів.

Поля напрямів рівнянь вигляду (1.60) не містять прямих, паралельних осі ординат. Отже, такими полями не вичерлюються всі можливі поля напрямів на площині. З цього погляду природнішим об'єктом є диференціальне рівняння в симетричній формі (рівняння Пфаффа)

$$M(x, y)dy + N(x, y)dx = 0, \quad (1.65)$$

де  $M(x, y), N(x, y) \in C(D \mapsto \mathbb{R})$  — функції, які задовольняють умову

$$|M(x, y)| + |N(x, y)| \neq 0 \quad \forall (x, y) \in D. \quad (1.66)$$

Пояснимо, як це рівняння визначає поле напрямів у області  $D$ .

Диференціальна форма  $\omega = M(x, y)dy + N(x, y)dx$  — це диференціально-геометричний об'єкт, який повністю характеризується такою властивістю: кожному векторові  $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ , прикладеному до точки  $(x, y)$ , форма  $\omega$  ставить у відповідність число

$$\omega((x, y); \mathbf{a}) = M(x, y)a_y + N(x, y)a_x,$$

яке називається значенням цієї форми на векторі  $\mathbf{a}$ .

Форму  $\omega$  називають *невиродженою* в області  $D$ , якщо її коефіцієнти  $M(x, y), N(x, y)$  задовольняють умову (1.66).

Нехай  $\omega$  — невивроджена в області  $D$  диференціальна форма. Розглянемо довільну точку  $(x_0, y_0) \in D$ . Множина всіх прикладених до  $(x_0, y_0)$  векторів  $\mathbf{a}$ , на яких форма  $\omega$  перетворюється в нуль, утворює пряму, що описується рівнянням

$$M(x_0, y_0)(x - x_0) + N(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \quad (1.67)$$

За допомогою цієї прямої рівняння (1.65) і задає напрям у точці  $(x_0, y_0)$ . Побудована відповідність «точка  $\mapsto$  пряма» визначає поле напрямів, породжене диференціальним рівнянням (1.65).

Навіяки, нехай в області  $D$  є деяке поле напрямів. Воно точці  $(x_0, y_0)$  ставить у відповідність пряму  $L(x_0, y_0)$ , яку завжди можна задати рівнянням вигляду (1.67). При цьому, однак, слід урахувувати, що коефіцієнти  $M(x_0, y_0), N(x_0, y_0)$  визначаються прямою  $L(x_0, y_0)$  неоднозначно, з точністю до ненульового множника. Тому надалі, говорячи про поле напрямів, припускатимемо, що відповідність  $(x_0, y_0) \mapsto L(x_0, y_0)$  задає пряму  $L(x_0, y_0)$  рівнянням (1.67) з однозначно вказаними коефіцієнтами  $M(x_0, y_0), N(x_0, y_0)$ . У цьому випадку поле напрямів можна вважати породженим диференціальним рівнянням (1.65). Інтегральну

криву такого поля напрямів природно називати *інтегральною кривою відповідного рівняння в симетричній формі*.

Зрозуміло, що крива  $\gamma$ , задана відображенням (1.62), буде інтегральною кривою рівняння (1.65) тоді й лише тоді, коли значення диференціальної форми  $\omega$  на кожному дотичному векторі до  $\gamma$  дорівнюватиме нулю, тобто

$$M(\xi(t), \eta(t))\dot{\xi}(t) + N(\xi(t), \eta(t))\dot{\eta}(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

У цьому разі пару функцій  $x = \xi(t)$ ,  $y = \eta(t)$  називатимемо *розв'язком рівняння (1.65) в параметричному вигляді*.

### □ Приклад 1.7

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними  $y' = -x/y$  визначає поле напрямів у кожній із півплощин  $y < 0$  та  $y > 0$ . Зінтегрувавши дане рівняння, приходимо до висновку, що його інтегральними кривими є півкола, які утворюються розрізанням кіл  $x^2 + y^2 = c$  ( $c > 0$  — довільна стала) по осі абсцис  $y = 0$ . Але ж ці кола мають дотичні в усіх своїх точках. Тому вихідне поле напрямів природно довизначити вертикальними прямими й на півосях осі абсцис. У такий спосіб ми дістаємо в області  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  поле напрямів диференціального рівняння  $x dx + y dy = 0$ . Легко перевірити, що інтегральні криві останнього можна задати в параметричному вигляді:

$$x = \xi(t) := \sqrt{c} \cos t, \quad y = \eta(t) := \sqrt{c} \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Питання про існування інтегральних кривих рівняння в симетричній формі з неперервними коефіцієнтами  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$ , які задовольняють умову невідродженості (1.66), розв'язується на основі теорем існування та продовжуваності розв'язків рівняння вигляду (1.60). Дійсно, в околі кожної точки  $(x_0, y_0) \in D$  поле напрямів рівняння (1.65) можна ототожити з полем напрямів того з рівнянь

$$^4 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)},$$

в якого знаменник правої частини не перетворюється в нуль при  $(x, y) = (x_0, y_0)$ . Тому локальне існування інтегральних кривих забезпечується теоремою Пеано. Якщо коефіцієнти  $M(x, y)$  і  $N(x, y)$  неперервно диференційовні, то відповідно до теореми Пікара можна стверджувати, що через довільну точку області  $D$  проходить єдина інтегральна крива.

Далі можна здійснювати процес продовження інтегральних кривих методом склеювання, аналогічно тому, як це робилося для рівняння (1.60), і діставати непродовжувані інтегральні криві. Слід зауважити, що у випадку рівняння в симетричній формі така «максимальна» крива може й не виходити з деякого компакту (див. приклад 1.7).

### 1.6.2. Схема дослідження поведінки інтегральних кривих

---

Навіть у тому випадку, коли диференціальне рівняння (1.60) удається зінтегрувати, дослідження поведінки його інтегральних кривих може виявитися непростою задачею (особливо тоді, коли розв'язки задано в неявному вигляді за допомогою загального інтеграла). За цих обставин природно було б спробувати дістати інформацію про основні геометричні характеристики інтегральних кривих безпосередньо з властивостей функції  $f$ . Елементи такого геометричного аналізу рівняння (1.60) ми зараз і розглянемо. Нижче припускається, що  $f(x, y) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$ .

**1. Області зростання й спадання інтегральних кривих.** Уведемо в розгляд дві відкриті множини

$$D_+ = \{(x, y) \in D : f(x, y) > 0\}, \quad D_- = \{(x, y) \in D : f(x, y) < 0\}.$$

Та ділянка інтегральної кривої, яка належить множині  $D_+$  ( $D_-$ ), є графіком функції  $y = y(x)$ , що монотонно зростає (спадає). Справді, на цій ділянці  $y'(x) = f(x, y(x)) > 0 (< 0)$ .

#### 2. Ізокліни.

##### ⇒ **Означення 1.10**

Множину точок  $\Gamma_k = \{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$  ( $k$  — дійсне число з області значень функції  $f$ ) називають  $k$ -ізокліною.

Інтегральна крива, що проходить через точку  $k$ -ізокліни, має в цій точці дотичну, паралельну прямій  $y = kx$ .

За певних умов не виродженості функції  $f$  кожна ізокліна складається з однієї або кількох кривих.

**3. Екстремальні точки інтегральних кривих.** Розглянемо деяку точку  $(x_0, y_0)$  0-ізокліни. За означенням у цій точці  $f(x_0, y_0) = 0$ . Якщо

$f'_x(x_0, y_0) > 0$  ( $f'_x(x_0, y_0) < 0$ ), то  $x_0$  є точкою локального мінімуму (максимуму) розв'язку  $y = y(x)$ , який задовольняє умову  $y(x_0) = y_0$ . Дійсно,

$$y''(x) = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = g(x, y(x)), \quad (1.68)$$

де

$$g(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y). \quad (1.69)$$

Якщо тепер  $f(x_0, y_0) = 0$ , то  $y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$ , і залишилося скористатись відомою достатньою умовою мінімуму (максимуму) функції.

Слід зауважити, що висновок про характер екстремуму іноді буває простіше зробити, дослідивши розташування областей  $D_+$ ,  $D_-$  відносно ділянки 0-ізокліни, яка проходить через точку  $(x_0, y_0)$ .

**4. Області опуклості вгору (вниз) інтегральних кривих.** Розглянемо дві відкриті множини

$$G_+ = \{(x, y) \in D : g(x, y) > 0\}, \quad G_- = \{(x, y) \in D : g(x, y) < 0\},$$

де функція  $g(x, y)$  визначена формулою (1.69). З (1.68) випливає, що та ділянка інтегральної кривої, яка належить множині  $G_+$  ( $G_-$ ), є графіком функції, опуклої вгору (опуклої вниз). Точки перегину інтегральних кривих слід шукати серед розв'язків рівняння  $g(x, y) = 0$ .

Щоб дістати повніше уявлення про поведінку інтегральних кривих заданого диференціального рівняння, можна наведені вище міркування доповнити побудовою поля напрямів у точках деякої досить щільної в області  $D$  дискретної множини, наприклад у вузлах доволі густої сітки вертикальних та горизонтальних прямих.

#### □ Приклад 1.8

*Відомо, що спеціальне рівняння Ріккати*

$$y' = y^2 - x \quad (1.70)$$

*не інтегрується в квадратурах. Здійснено його геометричний аналіз.*

Кожна  $k$ -ізокліна рівняння (1.70) являє собою параболу, яка задається рівнянням  $x = y^2 - k$ . Область  $D_+$  розташована ліворуч, а область  $D_-$  — праворуч від 0-ізокліни  $x = y^2$ . Оскільки в першій із цих областей інтегральні криві зростають, а в другій — спадають, то зро-

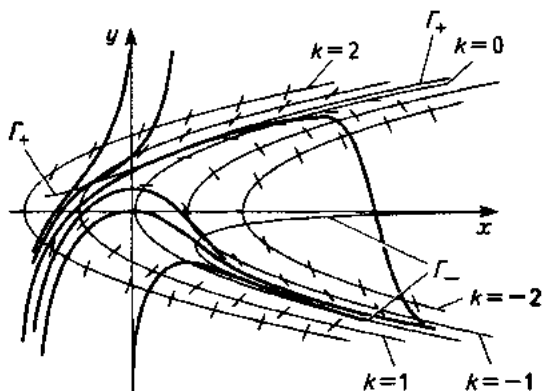


Рис. 1.12

зуміло, що 0-ізокліна заповнена точками максимумів інтегральних кривих.

Тепер знайдемо функцію (1.69):

$$g(x, y) = 2y(y^2 - x) - 1.$$

Крива перегинів  $\Gamma$  задається рівнянням

$$x = \frac{2y^3 - 1}{2y}$$

і складається з двох віток. Одна з них  $\Gamma_+$  лежить у верхній півплощині, а інша  $\Gamma_-$  — у нижній. Точки області  $G_+$ , де інтегральні криві опуклі вгору, розташовані під кривою  $\Gamma_+$  і ліворуч від кривої  $\Gamma_-$ . Над кривою  $\Gamma_+$ , а також праворуч від кривої  $\Gamma_-$  лежать точки області  $G_-$ .

Ізокліни, дві вітки кривої перегинів  $\Gamma$  та інтегральні криві (жирні лінії) досліджуваного рівняння зображено на рис. 1.12.

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Здійснити геометричний аналіз рівняння  $y' = x - \sqrt{y}$ .
- ② Дати геометричну інтерпретацію твердження, сформульованого в задачі 5 п. 1.5.
- ③ Спираючися на попередню задачу 2 та рис. 1.12, довести, що в рівняння (1.70) існує інтегральна крива, яка при продовженні вправо не виходить з



області, обмеженої ізоклінами  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_{-1}$ . Як наслідок установити існування розв'язку  $y(x)$  із властивістю  $y(x) \sim -\sqrt{x}$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Довести, що таку властивість, зокрема, має розв'язок, графік якого виходить із початку координат. Визначити, чи існує розв'язок з асимптотикою  $y(x) \sim \sqrt{x}$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

## 1.7

## Рівняння в повних диференціалах. Інтегровальний множник

Способи інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку, про які йшлося в п. 1.1, базувалися на ідеї зведення вихідного рівняння до рівняння з відокремленими змінними за допомогою вдалого вибору заміни змінних. Тут буде викладено інший підхід, який ми спочатку проілюструємо на конкретному прикладі.

### □ Приклад 1.9

*Знайдемо форму дзеркала рефлектора, яке б відбивало промені точкового джерела світла паралельно заданому напрямку.*

Форму дзеркала шукатимемо у вигляді поверхні обертання. В площині, яка проходить через вісь обертання, виберемо декартову прямокутну систему координат, розташувавши джерело світла в її початку  $O$  і спрямувавши в заданому напрямку вісь ординат. Тенер задача зводиться до відшукування кривої  $\gamma$  з такою властивістю: для довільної точки  $P \in \gamma$  кут, утворений вектором  $OP$  з вектором  $\tau$ , дотичним до  $\gamma$  у точці  $P$ , дорівнює куту між  $\tau$  та ортом осі ординат (рис. 1.13).

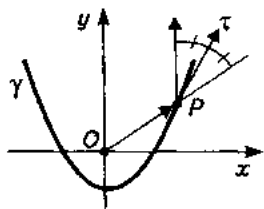


Рис. 1.13

Нехай крива  $\gamma$  є графіком деякої диференційовної функції  $y = y(x)$ . Розглянемо довільну точку  $P(x, y(x)) \in \gamma$ . Вектор  $OP$  має координати  $(x, y(x))$ , а дотичний вектор  $\tau$  — координати  $(1, y'(x))$ . Умову рівності косинусів кутів між  $OP$  і  $\tau$  та між  $\tau$  та ортом  $e_y = (0, 1)$  можна подати у вигляді

$$\frac{\langle \overline{OP}, \tau \rangle}{\|\overline{OP}\| \|\tau\|} = \frac{\langle e_y, \tau \rangle}{\|\tau\|},$$

звідки дістаємо диференціальне рівняння

$$y' - \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Це рівняння однорідне. Його можна було б розв'язати, звівши до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою  $y = xz$ . Однак, якщо зауважити, що права частина даного рівняння є повною похідною, а саме

$$y' - \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{d}{dx} \left( y - \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

то відразу дістанемо загальний розв'язок у неявному вигляді:

$$y - \sqrt{x^2 + y^2} = c, \quad c < 0.$$

Звідси  $y = c/2 - x^2/(2c)$ . Це — рівняння сім'ї парабол.

Тепер ми ставимо собі за мету з'ясувати умови, при виконанні яких диференціальне рівняння першого порядку допускає зображення у вигляді повної похідної або, якщо йдеться про рівняння в симетричній формі, — у вигляді диференціала функції двох змінних.

### 1.7.1. Рівняння в повних диференціалах

---

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\omega = 0, \tag{1.71}$$

де  $\omega = M(x, y) dx + N(x, y) dy$  — диференціальна форма з неперервними в області  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  коефіцієнтами  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$ .

#### ⇒ Означення 1.11

Форму  $\omega$  називають *точною*, або *повним диференціалом*, якщо існує така функція  $U(x, y) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$ , що

$$M(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}, \tag{1.72}$$

тобто  $\omega = dU$ . Функцію  $U(x, y)$  називають тоді потенціалом форми  $\omega$ , а диференціальне рівняння (1.71) — рівнянням у повних диференціалах.

Покажемо, що інтегральні криві рівняння  $dU = 0$  можна ототожнити з лініями рівня функції  $U(x, y)$ , тобто кривими, які описуються рівняннями

$$U(x, y) = c, \quad (1.73)$$

де  $c$  пробігає множину значень функції  $U(x, y)$ . Після того, як це твердження буде доведено, ми матимемо всі підстави називати співвідношення (1.73) загальним інтегралом рівняння (1.71).

### Теорема 1.15.

Нехай  $\omega = dU$  — точна невироджена в області  $D$  форма. Тоді кожна інтегральна крива рівняння (1.71) є лінією рівня функції  $U(x, y)$ , і навпаки, кожна крива, вздовж якої функція  $U(x, y)$  перетворюється в сталу, є інтегральною кривою рівняння (1.71).

### Доведення

Нехай

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I \quad (1.74)$$

— рівняння інтегральної кривої, яка проходить через точку  $(x_0, y_0)$ , причому цій точці відповідає значення  $t = t_0 \in I$ . Тоді, враховуючи вигляд коефіцієнтів форми  $\omega$ , а також той факт, що функції  $x(t)$ ,  $y(t)$  задають розв'язок рівняння (1.71) в параметричному вигляді, дістаємо

$$U'_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + U'_y(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0 \quad \forall t \in I, \quad (1.75)$$

тобто

$$\frac{d}{dt}U(x(t), y(t)) = 0, \quad t \in I.$$

Звідси

$$U(x(t), y(t)) = U(x(t_0), y(t_0)) = U(x_0, y_0), \quad t \in I. \quad (1.76)$$

Ця рівність означає, що інтегральна крива є лінією рівня функції  $U(x, y)$ .

Навпаки, нехай (1.74) — рівняння кривої, яка задовольняє рівність (1.76). Здиференціювавши цю рівність, дістанемо (1.75). Отже, зазначена крива є інтегральною.

#### ◆ Зауваження 1.5

Якщо взяти до уваги невинродженість форми  $\omega = dU$ , то, скориставшись теоремою про неявну функцію (див. дод. 2), можна легко довести, що рівняння (1.73) при  $c = U(x_0, y_0)$  визначає єдину криву, яка проходить через точку  $(x_0, y_0)$ . Якщо, наприклад,  $U'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , то в досить малому околі цієї точки зазначена крива є графіком функції  $y = y(x)$ . Таким способом вдається встановити існування й властивість єдиності інтегральної кривої рівняння в повних диференціалах із неперервними коефіцієнтами без посилань на теореми Пеано й Пікара.

З практичного погляду важливо вміти безпосередньо за коефіцієнтами форми  $\omega$  визначати, чи є вона точною, а для точної форми — будувати відповідний потенціал. Розв'яжемо спочатку цю задачу у випадку *опуклої області*  $D$ . (Нагадаємо, що множина називається опуклою, якщо з кожними двома своїми точками вона містить і відрізок, який ці точки сполучає.)

#### Теорема 1.16

Нехай  $M(x, y), N(x, y) \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$ . Якщо форма  $\omega = M(x, y) dx + N(x, y) dy$  точна, то

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad (x, y) \in D. \quad (1.77)$$

Навпаки, якщо справджується умова (1.77), а область  $D$  однозв'язна, то форма  $\omega$  точна.

#### Доведення

**Необхідність.** Нехай  $\omega = dU$  — точна форма. Тоді  $M(x, y) = U'_x(x, y)$ ,  $N(x, y) = U'_y(x, y)$  і функції

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y}$$

неперервні в області  $D$ . Залишилося скористатись відомим фактом про рівність мішаних частинних похідних другого порядку функції  $U(x, y)$  в разі їх неперервності (див., наприклад, [5], гл. 11, § 3).

**Достатність.** Доведення другої частини теореми буде конструктивним. Опишемо алгоритм відшукування потенціалу форми, коефіцієнти якої задовольняють умову (1.77).

I. Знаходимо всі функції  $U(x, y)$ , для яких виконується перша умова (1.72). При кожному фіксованому  $y$  функція  $F_y(x) := U(x, y)$ , яка задовольняє цю умову, має бути первісною функції  $f_y(x) := M(x, y)$ . Тому

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds + C(y),$$

де  $C(y)$  — довільна функція однієї змінної  $y$ . Зауважимо, що при обчисленні інтеграла ми користуємося тим, що відрізок, який сполучає точки  $(x_0, y)$  та  $(x, y)$ , цілком лежить у  $D$ .

II. Доберемо  $C(y)$  так, щоб виконувалася друга рівність (1.72). Якщо в неї підставити знайдений вираз для  $U(x, y)$ , то дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(s, y) ds + C'(y) = N(x, y)$$

або

$$C'(y) = N(x, y) - \int_{x_0}^x M'_y(s, y) ds.$$

Тут було використано теорему про диференціювання інтеграла, залежного від параметра (див., наприклад, [5], гл. 13, § 2). Оскільки за умовою  $M'_y(s, y) = N'_s(s, y)$ , то

$$\int_{x_0}^x M'_y(s, y) ds = \int_{x_0}^x N'_s(s, y) ds = N(x, y) - N(x_0, y).$$

Але тоді умова для визначення функції  $C(y)$  набирає вигляду

$$C'(y) = N(x_0, y).$$

Можна покласти  $C(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds$ . Отже, потенціалом форми  $\omega$  є функція

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds. \quad (1.78)$$

◆ **Зауваження 1.6**

Формула (1.78) однозначно визначає потенціал точної форми  $\omega$ , який перетворюється в нуль у точці  $(x_0, y_0)$ . Будь-який інший потенціал відрізняється від нього на деяку константу.

□ **Приклад 1.10**

*Розглянемо рівняння*

$$(x^2 + y) dx + (x + y^2) dy = 0.$$

Воно не належить жодному з раніше розглянутих інтегровних типів. Водночас  $M'_y = 1 = N'_x$ . Отже, маємо рівняння в повних диференціалах. Знайдемо відповідний потенціал.

1. З умови  $U'_x = x^2 + y$  визначаємо

$$U(x, y) = \int (x^2 + y) dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y).$$

2. Добираємо  $C(y)$  так, щоб задовольнити умову  $U'_y = x + y^2$ . Маємо  $x + C'(y) = x + y^2$ , звідки  $C'(y) = y^2$  і  $C(y) = y^3/3$ . Остаточно  $U(x, y) = x^3/3 + xy + y^3/3$ . Загальний інтеграл

$$x^3 + 3xy + y^3 = c$$

і визначає інтегральні криві розглядуваного рівняння.

Варто зауважити, що універсальність викладеної схеми побудови потенціалу ще не гарантує її максимальної раціональності. Так, подавши праву частину рівняння у вигляді

$$x^2 dx + (y dx + x dy) + y^2 dy = d\left(\frac{x^3}{3}\right) + d(xy) + d\left(\frac{y^3}{3}\right),$$

відразу дістаємо потрібний результат.

Зробимо тепер кілька зауважень стосовно випадку, коли область  $D$  не є опуклою.

⇒ **Означення 1.12**

Форму  $\omega$  з коефіцієнтами  $M(x, y), N(x, y) \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$ , які задовольняють умову (1.77), називають замкнутою.

Нехай  $\omega$  — замкнена форма в довільній області  $D$ . Зафіксувавши точку  $P_0 \in D$ , можна в кожній опуклій підобласті  $D_0 \subset D$ , яка містить

точку  $P_0$ , однозначно побудувати потенціал цієї форми  $U(x, y)$ , такий, що  $U(P_0) = 0$ . Розглянемо іншу опуклу підобласть  $D_1 \subset D$ , яка має непорожній перетин із  $D_0$ . Нехай  $P_1 \in D_0 \cap D_1$ . Існує потенціал  $U_1(x, y)$  в  $D_1$  такий, що  $U_1(P_1) = 0$ . Але тоді функція  $U_1(x, y) + U(P_1)$  є таким потенціалом форми  $\omega$  в  $D_1$ , який збігається з  $U(x, y)$  на множині  $D_0 \cap D_1$ . Отже, функція тотожно дорівнює  $U(x, y)$  в  $D_0$  і  $U_1(x, y) + U(P_1)$  в  $D_1$  коректно й однозначно визначає потенціал форми  $\omega$  в  $D_0 \cup D_1$ , який перетворюється в нуль у точці  $P_0$ . Процес розширення області визначення потенціалу  $U(x, y)$  можна продовжити.

Постає природне запитання: чи можна описаним способом поширити функцію  $U(x, y)$  з  $D_0$  на всю область  $D$ ? У курсах математичного аналізу доводиться: якщо область  $D$  однозв'язна, то відповідь на поставлене запитання ствердна (див., наприклад, [5], гл. 15, § 6). (Однозв'язність області  $D$  означає, що для довільної замкненої кривої  $\Gamma \subset D$  область, обмежена  $\Gamma$ , цілком належить  $D$ .) У загальному випадку замкнені форми в неодозв'язних областях породжують так звані багатозначні потенціали. Це зауваження проілюструємо на конкретному прикладі.

### □ Приклад 1.11

*Розглянемо форму*

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \quad (x, y) \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Легко перевірити, що умова замкненості для неї справджується, а також, що в правій півплощині  $x > 0$  за її потенціал можна взяти  $\operatorname{arctg}(y/x)$ . Значення такого потенціалу в точці  $(x, y)$  природно інтерпретувати як кутову координату  $\varphi(x, y)$  цієї точки в полярній системі координат. Функція кута  $\varphi(x, y)$  допускає неперервно диференційовне продовження в область, яка утворюється з  $\mathbb{R}^2$  вирізанням будь-якого променя з початком у точці  $(0, 0)$ , наприклад променя  $x = 0, y < 0$ . Величина стрибка функції  $\varphi(x, y)$  на цьому промені дорівнює  $2\pi$ . Таким чином, розглядувана форма в неодозв'язній області  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  має багатозначний потенціал — функцію кута  $\varphi(x, y)$ .

## 1.7.2. Інтегровальний множник

При спробі поширити описаний у п. 1.7.1 підхід на клас рівнянь вигляду (1.7.1) із незамкненими формами  $\omega$  природно виникає поняття інтегровального множника.

⇒ **Означення 1.13**

Функцію  $\mu(x, y) \in C(D \rightarrow \mathbb{R})$ , яка не перетворюється в нуль у жодній точці області  $D$ , називають **інтегрувальним множником форми**  $\omega$ , якщо  $\mu\omega$  — точна форма.

Якщо інтегрувальний множник  $\mu(x, y)$  форми  $\omega$  відомий, то процес інтегрування відповідного диференціального рівняння зводиться до відшукування потенціалу  $U(x, y)$  точної форми  $\mu\omega$  і запису загального інтеграла у вигляді (1.73).

Аби схарактеризувати клас рівнянь, для яких існують інтегрувальні множники, введемо ще одне означення.

⇒ **Означення 1.14**

Функцію  $U(x, y)$  називають **інтегралом диференціального рівняння** (1.71), якщо кожна інтегральна крива цього рівняння є лінією рівня функції  $U(x, y)$ . Інтеграл називають **невиродженим**, якщо  $|U'_x(x, y)| + |U'_y(x, y)| \neq 0$  в кожній точці області  $D$ .

Зрозуміло, що потенціал точної форми  $\omega$  є інтегралом відповідного диференціального рівняння (1.71).

**Теорема 1.17**

Рівняння (1.71) із невірдженою формою  $\omega$  має невірджений інтеграл тоді й лише тоді, коли існує інтегрувальний множник форми  $\omega$ .

**Доведення**

З урахуванням міркувань, наведених вище, залишилося довести, що наявність невірдженого інтеграла гарантує існування інтегрувального множника. Нехай  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in I$  — рівняння інтегральної кривої  $\gamma$  рівняння (1.71). Тоді за означенням інтеграла

$\frac{d}{dt}U(x(t), y(t)) = 0$ ,  $t \in I$ . Обчисливши похідну в лівій частині цієї рівності та врахувавши, що пара функцій  $x(t)$ ,  $y(t)$  задає розв'язок рівняння (1.71) у параметричному вигляді, дістанемо таку систему:

$$U'_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + U'_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

$$M(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + N(x(t), y(t)) \dot{y}(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$



Оскільки  $|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)| \neq 0$  для кожного  $t \in I$ , то наслідком цієї системи є лінійна залежність стовпців матриці

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} U'_x(x, y) & U'_y(x, y) \\ M(x, y) & N(x, y) \end{pmatrix}$$

у точках інтегральної кривої  $\gamma$ . Але інтегральну криву можна провести через довільну точку області  $D$ . Тому матриця  $A(x, y) \in$  виродженою для всіх  $(x, y) \in D$ . Тепер можна стверджувати, що її рядки лінійно залежні, а оскільки коефіцієнти  $M(x, y)$  і  $N(x, y)$  не можуть одночасно перетворюватися в нуль, то існує функція  $\mu(x, y)$  така, що

$$\mu(x, y)M(x, y) = U'_x(x, y), \quad \mu(x, y)N(x, y) = U'_y(x, y),$$

тобто  $\mu\omega = dU$ . Виписані рівності дають змогу легко знайти явний вигляд цієї функції:

$$\mu(x, y) = \frac{U'_x(x, y)M(x, y) + U'_y(x, y)N(x, y)}{M^2(x, y) + N^2(x, y)}.$$

Зрозуміло, що  $\mu(x, y) \in C(D \rightarrow \mathbb{R})$ . Нарешті, з невиводженості інтеграла  $U(x, y)$  випливає, що  $\mu(x, y)$  не перетворюється в нуль у жодній точці області  $D$ . Отже,  $\mu(x, y)$  — інтегровальний множник.

### 1.7.3. Деякі способи відшукування інтегровального множника

Розглянемо диференціальне рівняння (1.71) у припущенні, що коефіцієнти форми  $\omega$  неперервно диференційовні в області  $D$ . Аби функція  $\mu(x, y)$  була інтегровальним множником цієї форми, необхідно, а у випадку однозв'язності області  $D$  — і достатньо, щоб справджувалась умова замкненості форми  $\mu\omega$ , тобто

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)N(x, y)). \quad (1.79)$$

Співвідношення (1.79) можна трактувати як рівняння для визна-

чення невідомої функції  $\mu(x, y)$ . В загальному випадку розв'язати його зніскільки не легше, ніж рівняння (1.71). Важливо, однак, зауважити, що для наших цілей достатньо знайти не всі, а лише один, «частинний» нетривіальний розв'язок рівняння (1.79). У кожній однозв'язній підобласті області  $D$ , де такий розв'язок не перетворюється в нуль, він являтиме собою шуканий інтегрувальний множник.

**□ Приклад 1.12**

*Знайдемо інтегрувальний множник лінійного рівняння, записаного в симетричній формі*

$$(b(x) + a(x)y) dx - dy = 0, \quad a(x), b(x) \in C(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}).$$

Для нього рівність (1.79) набирає вигляду

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu(b(x) + a(x)y)) = -\mu'_x$$

або

$$(b(x) + a(x)y) \mu'_y + \mu a(x) = -\mu'_x.$$

Неважко помітити, що дане рівняння допускає частинний розв'язок як функцію лише однієї змінної  $x$ . Справді, при  $\mu = \mu(x)$  воно перетворюється на лінійне однорідне рівняння

$$\frac{d\mu}{dx} = -a(x)\mu,$$

яке має нетривіальний розв'язок  $\mu = e^{-\int a(x) dx}$ . Ця функція і є інтегрувальним множником лінійного рівняння. Процес розв'язування останнього (метод Ейлера) можна тепер подати у вигляді

$$\begin{aligned} e^{\int a(x) dx} (b(x) dx + a(x)y dx - dy) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow d \left( \int e^{\int a(x) dx} b(x) dx - ye^{\int a(x) dx} \right) &= \\ \Rightarrow \int e^{\int a(x) dx} b(x) dx - ye^{\int a(x) dx} &= c. \end{aligned}$$

Розвиваючи ідею зведення (1.79) до звичайного диференціального рівняння, шукатимемо інтегровальний множник у вигляді  $\mu = \mu(\theta(x, y))$ , де  $\theta(x, y)$  — поки що невідома функція. Підставивши такий проект розв'язку в (1.79), після нескладних обчислень дістанемо

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\theta} = \frac{M'_y - N'_x}{N\theta'_x - M\theta'_y}. \quad (1.80)$$

Якщо тепер вдасться дібрати функцію  $\theta(x, y)$  так, щоб вираз у правій частині являв собою складну функцію  $F(\theta(x, y))$ , де  $F(t)$  — деяка неперервна функція однієї змінної, то задача відшукування інтегровального множника зводиться до звичайного диференціального рівняння

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\theta} = F(\theta).$$

Його розв'язком є  $\mu = e^{\int F(\theta) d\theta}$ . Підставивши сюди  $\theta = \theta(x, y)$ , дістанемо шуканий інтегровальний множник.

#### □ Приклад 1.13

Знайдемо інтегровальний множник рівняння

$$yg(xy) dx + xh(xy) dy = 0,$$

де  $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  — довільні неперервно диференційовні функції, причому  $g(z) \neq h(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

У даному випадку права частина формули (1.80) має вигляд

$$\frac{g(xy) + xyg'(xy) - h(xy) - xyh'(xy)}{xh(xy)\theta'_x - yg(xy)\theta'_y}.$$

Неважко здогадатися, що цю функцію можна подати у вигляді  $F(\theta(x, y))$ , поклавши  $\theta(x, y) = xy$ . Тоді

$$F(\theta) = \frac{g(\theta) - h(\theta) + (g'(\theta) - h'(\theta))\theta}{(h(\theta) - g(\theta))\theta} = -\frac{d}{d\theta} \ln [(g(\theta) - h(\theta))\theta].$$

Тепер із рівняння

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta} \ln [(g(\theta) - h(\theta))\theta]$$

легко знаходимо нетривіальний частинний розв'язок  $\mu = [(g(\theta) - h(\theta))\theta]^{-1}$ .  
Отже,

$$\mu = \frac{1}{(g(xy) - h(xy))xy}.$$

Далі інтегрування рівняння здійснюється за стандартною схемою.

Інший спосіб відшукування інтегровального множника базується на його неєдиності.

### Твердження 1.8

Якщо  $\mu(x, y)$  — інтегровальний множник форми  $\omega$  і  $U(x, y)$  — потенціал форми  $\mu\omega$ , так що  $\mu\omega = dU$ , то функція  $f(U(x, y))\mu(x, y)$ , де  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  — довільна неперервна функція, теж є інтегровальним множником форми  $\omega$ .

#### Доведення

Маємо  $f(U)\mu\omega = f(U)dU = dF(U)$ , де  $F(u)$  — довільна первісна функції  $f(u)$ . Отже,  $f(U)\mu\omega$  — точна форма з потенціалом  $F(U)$ .

Припустимо, що форму  $\omega$  можна зобразити у вигляді суми двох форм, для кожної з яких інтегровальний множник легко знаходиться:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \mu_k \omega_k = dU_k, \quad k = 1, 2.$$

Із твердження 1.8 випливає, що для визначення інтегровального множника форми  $\omega$  достатньо дібрати неперервні функції  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ( $k = 1, 2$ ) так, щоб виконувалася рівність

$$\mu_1 f_1(U_1) = \mu_2 f_2(U_2) \Leftrightarrow \frac{f_1(U_1)}{f_2(U_2)} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (1.81)$$

Дійсно, якщо такі функції відшукаються, то інтегровальним множником форми  $\omega$  буде  $\mu = \mu_1 f(U_1) = \mu_2 f(U_2)$ .

#### ◆ Зауваження 1.7

Залежно від вигляду потенціалів буває зручно невідомі функції шукати у вигляді суперпозиції  $f_k(\varphi_k(z))$  із наперед заданими функціями  $\varphi_k(z)$ . А це, своєю чергою, означає, що замість потенціалів  $U_k$  у формулі (1.81) можна використовувати функції  $\varphi_k(U_k)$ .

### □ Приклад 1.14

Знайдемо інтегровальний множник форми

$$\omega = (x^3 - xy^2 - y)dx + (x^2y - y^3 + x)dy.$$

Для цього розіб'ємо її на суму двох форм:

$$\omega_1 = (x^3 - xy^2)dx + (x^2y - y^3)dy \equiv (x^2 - y^2)(x dx + y dy),$$

$$\omega_2 = -y dx + x dy \equiv xy \left( -\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right).$$

Легко переконатися, що

$$\mu_1 = \frac{1}{x^2 - y^2}, \quad U_1 = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{xy}, \quad U_2 = \ln \left| \frac{y}{x} \right|.$$

З урахуванням зауваження 1.7 будемо шукати функції  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , які б задовольняли умову

$$\frac{f_1(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2} = \frac{f_2(y/x)}{xy}.$$

Такі функції справді існують:  $f_1(z) \equiv 1$ ,  $f_2(z) = z/(1 - z^2)$ . Отже,

$$\mu = 1/(x^2 - y^2).$$

### ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

① Зінтегрувати рівняння:

а)  $(y^2 + ye^x)dx + (2xy + e^x)dy = 0$ ;      б)  $(1 + y^2 \sin 2x)dx = 2y \cos^2 x dy$ .

② Розв'язати методом інтегровального множника рівняння:

а)  $(x^2 + 3 \ln y)y dx = x dy$ ;      б)  $x dx + (xy - y^3)dy = 0$ .

✓ *Вказівка.* Визначити числа  $a$ ,  $b$  з умови, що інтегровальний множник має вигляд  $\mu = \mu(\theta)$ , де  $\theta = a \ln x + b \ln y$  у випадку а) та  $\theta = ax + by^2$  у випадку б).

③ Довести, що функція  $U(x, y)$  є невиродженим інтегралом рівняння  $\omega = 0$  з

невиродженою в області  $D$  формою  $\omega = M(x, y) dx + N(x, y) dy$  тоді й лише тоді, коли

$$U'_x(x, y)N(x, y) - U'_y(x, y)M(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D.$$

- ④ Знайти інтегрувальні множники рівняння Бернуллі та квазіоднорідного рівняння.

---

## 1.8

### Рівняння в симетричній формі та двовимірні автономні системи

#### 1.8.1. Векторне поле

---

Розглянемо ще один важливий геометричний об'єкт, споріднений із полем напрямів.

##### ⇒ Означення 1.15

*Векторним полем в області  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  називають відповідність, яка кожній точці області  $D$  зіставляє вектор, прикладений до цієї точки.*

Уведемо на площині декартові прямокутні координати  $(x, y)$ . Тоді векторне поле, задане в області  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , можна ототожнити з упорядкованою парою функцій: достатньо в кожній точці  $(x, y) \in D$  визначити координати  $(P(x, y), Q(x, y))$  прикладеного до неї вектора.

Розглянемо спочатку випадок, коли

$$(P(x, y), Q(x, y)) \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in D.$$

Тоді векторне поле  $(P, Q)$  одночасно визначає в  $D$  і поле напрямів, яке точки  $(x, y) \in D$  ставить у відповідність пряму, що проходить через  $(x, y)$  паралельно вектору  $(P(x, y), Q(x, y))$ . Визначене поле напрямів можна задати також диференціальним рівнянням

$$\omega := Q(x, y) dx - P(x, y) dy = 0. \tag{1.82}$$

Справді, в кожній точці  $r = (x, y) \in D$  значення цієї форми на вектор  $v(r) = (P(x, y), Q(x, y))$  дорівнює нулю:

$$\omega(\mathbf{r}; \mathbf{v}(\mathbf{r})) = Q(x, y)P(x, y) - P(x, y)Q(x, y) = 0. \quad (1.83)$$

Казатимемо, що векторне поле  $\mathbf{v} = (P, Q)$  паралельне полю напрямів, заданому диференціальним рівнянням (1.82).

### 1.8.2. Автономна система

Векторні поля на площині й пов'язані з ними об'єкти допускають прозору гідромеханічну інтерпретацію. А саме, розглянемо так званий ustalений плоско-паралельний рух однорідної нестисливої рідини (газу). Він характеризується двома умовами: 1) вектори швидкостей частинок рідини залишаються паралельними одній і тій самій площині  $\Pi$ ; 2) у кожній точці об'єму, який займає рідина, вектор швидкості течії залежить лише від проекції цієї точки на площину  $\Pi$ . Можна вважати, що такий рух рідини відбувається в деякій області  $D$  площини  $\mathbb{R}^2$ : адже для його опису достатньо слідкувати лише за зміною положень проєкцій частинок рідини на площину  $\Pi$ . Відповідність, яка кожній точці  $\mathbf{r} = (x, y) \in D$  зіставляє вектор швидкості течії  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (P(x, y), Q(x, y))$  у цій точці, задає в  $D$  векторне поле — поле миттєвих швидкостей.

Нехай залежність  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , або у векторній формі  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , визначає закон руху частинки рідини. Тоді її миттєва швидкість  $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  дорівнює швидкості течії  $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$  у точці  $\mathbf{r}(t)$ . Отже, цей закон визначається розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.84)$$

Її можна записати також у векторній формі:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (1.84')$$

Оскільки права частина системи (1.84) не залежить від  $t$ , то дана система називається *автономною*.

#### ⇒ Означення 1.16

*Криву, яка є образом відображення*

$$I \ni t \mapsto (x(t), y(t)),$$

де  $(x(t), y(t)), t \in I$  — розв'язок системи (1.84) на інтервалі  $I$ , називають *фазовою кривою* цієї системи (векторного поля), або *траєкторією початкової точки*  $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0)), t_0 \in I$ , на часовому інтервалі  $I$ .

У гідромеханіці фазові криві називають лініями течії.

На кожній фазовій кривій є природна орієнтація, визначена напрямом руху по ній відповідно до векторного поля. Зображаючи фазову криву, цей напрям позначають стрілкою.

Зв'язок між інтегральними кривими поля напрямів та фазовими кривими паралельного йому векторного поля встановлює така теорема.

### Теорема 1.18

Нехай  $v(r) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^2)$  і  $v(r) \neq 0$  для всіх  $(x, y) \in D$ . Тоді кожна фазова крива системи (1.84) є інтегральною кривою рівняння (1.82), і навпаки. При цьому, якщо

$$x = \xi(\tau), \quad y = \eta(\tau), \quad \tau \in J \quad (1.85)$$

— параметричне рівняння інтегральної кривої рівняння (1.82), то існує така заміна параметра  $\tau = \tau(t)$ , де  $\tau(t) \in C^1(I \mapsto J)$  — монотонне відображення інтервалу  $I$  на інтервал  $J$ , що пара функцій  $x(t) := \xi(\tau(t)), y(t) := \eta(\tau(t))$  є розв'язком системи (1.84).

### Доведення

Фазова крива системи (1.84) в кожній своїй точці дотикається векторного поля, а відтак, і паралельного йому поля напрямів. Отже, фазова крива цієї системи є інтегральною кривою рівняння (1.82).

Доведемо тепер обернене твердження. Покладемо  $\rho(\tau) = (\xi(\tau), \eta(\tau))$ . Оскільки дотичний до інтегральної кривої вектор  $\rho'(\tau)$  колінеарний вектору  $v(\rho(\tau))$ , то знайдеться така функція  $\lambda: J \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , що

$$\lambda(\tau)\rho'(\tau) = v(\rho(\tau)) \quad \forall \tau \in J.$$

Домноживши обидві частини цієї рівності скалярно на  $\rho'(\tau)$ , легко дістанемо

$$\lambda(\tau) = \frac{\langle v(\rho(\tau)), \rho'(\tau) \rangle}{\langle \rho'(\tau), \rho'(\tau) \rangle}. \quad (1.86)$$

Звідси видно, що  $\lambda(\tau) \in C(J \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\})$ .



Функцію  $\tau(t)$ , про яку йдеться у формулюванні теореми, визначимо з умови

$$\frac{d}{dt} \rho(\tau(t)) = \nu(\rho(\tau(t))) \Leftrightarrow \dot{\tau}(t) \rho'(\tau(t)) = \lambda(\tau(t)) \rho'(\tau(t)),$$

яка означає, що вектор-функція  $r(t) = \rho(\tau(t))$  задовольняє систему (1.84'). Ця умова справджуватиметься, якщо за  $\tau(t)$  взяти розв'язок автономного рівняння  $\dot{\tau} = \lambda(\tau)$ . Залишилося скористатись теоремою (1.3).

Таким чином, розв'язання системи (1.84) зводиться до інтегрування рівняння в симетричній формі (1.82) та автономного рівняння  $\dot{\tau} = \lambda(\tau)$ , де  $\lambda(\tau)$  визначена формулою (1.86). Навпаки, розв'язки автономної системи (1.84) являють собою параметричне зображення інтегральних кривих рівняння (1.82).

Досі ми обмежували наш розгляд припущенням, що векторне поле не перетворюється в нуль у жодній точці області  $D$ . Саме ця умова дає змогу коректно визначити відповідне паралельне поле напрямів. Можна, однак, поставити задачу про дослідження поведінки інтегральних кривих рівняння (1.82) у досить малому околі точки  $(x_*, y_*)$ , для якої

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_*, y_*)} P(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_*, y_*)} Q(x, y) = 0.$$

(Цю важливу задачу ми розглядатимемо в наступному пункті.) Що ж стосується таких об'єктів, як векторні поля й автономні системи, то тут умова  $\nu(r) \neq 0$  для всіх  $r \in D$  взагалі є неприродною. Навпаки, для систем, що правлять за математичні моделі різноманітних явищ і процесів, як правило, існують точки, в яких їхні праві частини перетворюються в нуль. Саме з цими точками пов'язані такі поняття, як стаціонарний режим, стан рівноваги, стан спокою. Враховуючи ці зауваження, дамо означення ще трьох важливих понять.

### ➤ Означення 1.17

*Особливою точкою диференціальної форми  $\omega = Q(x, y) dx - P(x, y) dy$  називають точку  $(x_*, y_*)$ , в якій  $P(x_*, y_*) = Q(x_*, y_*) = 0$ .*

### ➤ Означення 1.18

*Особливою точкою векторного поля  $\nu$  називають точку  $r_*$ , в якій  $\nu(r_*) = 0$ .*

Зрозуміло, що коли  $r$  — особлива точка векторного поля  $v$ , то  $r \equiv r$  являє собою сталий розв'язок відповідної автономної системи (1.84'), і навпаки.

### ⇒ Означення 1.19

*Сталий розв'язок автономної системи називають її положенням рівноваги.*

Положення рівноваги називають також *точкою спокою*, *стаціонарною точкою*.

### 1.8.3. Дослідження моделі Лотки—Вольтерра

Застосуємо викладену теорію до системи, яка моделює процес взаємодії у двовидовій популяції типу «хижак—жертва» (див. приклад В.5).

Розглянемо випадок, коли конкуренцією всередині кожного виду можна нехтувати. Тоді, поклавши  $l = q = 0$ , дістанемо автономну систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x(k - my), \\ \dot{y} = y(-p + rx). \end{cases} \quad (1.87)$$

Її назва — *модель Лотки—Вольтерра*. В. Вольтерра в роботі, датованій 1926 р., за допомогою цієї моделі пояснив коливання чисельностей двох видів риб в Адріатичному морі. Раніше (1920) А. Лотка запропонував аналогічну систему як математичну модель гіпотетичної хімічної реакції, в процесі якої відбуваються періодичні зміни концентрацій двох проміжних речовин за умови, що концентрації вихідного реагенту й остаточного продукту залишаються сталими. Цікаво, що вже через рік реальність цієї моделі було підтверджено експериментально.

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} x(k - my) = 0, \\ y(-p + rx) = 0, \end{cases}$$

знайдемо особливі точки векторного поля  $v(r) = (x(k - my), y(-p + rx))$ , пов'язаного з автономною системою (1.87). Ними є початок координат і точка  $(x_*, y_*) = (p/r, k/m)$ .

Далі зауважимо, що система (1.87) має розв'язки, для яких одна з компонент тотожно дорівнює нулю. А саме, якщо  $y \equiv 0$ , то інша компонента визначається як розв'язок рівняння  $\dot{x} = kx$ , тобто  $x = x_0 e^{kt}$ . При  $x_0 > 0$  кожен розв'язок такого типу описує процес зростання популяції жертв за відсутності хижаків. Якщо ж  $x \equiv 0$ , то  $y = y_0 e^{-pt}$ . За таким законом відбувається вимирання хижаків у разі відсутності жертв.

Для відшукування інших фазових кривих розглянемо всередині першого квадранта з виколотою точкою  $(p/r, k/m)$  відповідне рівняння в симетричній формі

$$(-py + rxy) dx - (kx - mxy) dy = 0. \quad (1.88)$$

Домноживши його на інтегрувальний множник  $\mu = \frac{1}{xy}$ , дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\left(-\frac{p}{x} + r\right) dx + \left(-\frac{k}{y} + m\right) dy = 0.$$

Воно має загальний інтеграл вигляду

$$U(x, y) := (rx - p \ln x) + (my - k \ln y) = c.$$

Інтегральні криві рівняння (1.88) (фазові криві системи (1.87)) — це лінії рівня функції  $U(x, y)$ . Якщо  $S$  — графік функції  $z = U(x, y)$  у просторі  $\mathbb{R}^3$  із декартовими координатами  $(x, y, z)$ , то ці лінії являють собою проєкції на площину  $xOy$  перерізів поверхні  $S$  площинами  $z = c$ . Аби дістати уявлення про форму поверхні  $S$ , розітнемо її площинами  $x = p/r$  та  $y = k/m$ . Утворені криві  $\gamma_1$  та  $\gamma_2$  зображено на рис. 1.14, а. Якщо криву  $\gamma_1$  переносити так, щоб вона залишалася паралельною площині  $yOz$ , а її найнижча точка рухалася по кривій  $\gamma_2$ , то перша крива й опише поверхню  $S$ . Тепер зрозуміло, що  $S$  має форму ями, а тому кожна площина  $z = c$ , де  $c > U(x_*, y_*)$ , перетинає цю поверхню по замкненій кривій (рис. 1.14, б). Таким чином, у першому квадранті всі фазові криві системи (1.87) замкнені й усі вони оточують положення рівноваги  $(x_*, y_*)$ . Орієнтація на кривих визначається довільним вектором векторного поля  $v$ . Наприклад, у точці з абсцисою  $x_0 = p/r$  і ординатою  $y_0 \in (0, k/m)$  маємо вектор  $(p(k - my_0)/r, 0)$ , напрямлений уздовж півосі  $Ox$ .

З наведених міркувань випливає, що в системі Лотки—Вольтерра спостерігаються незагасаючі коливання навколо положення рівноваги.

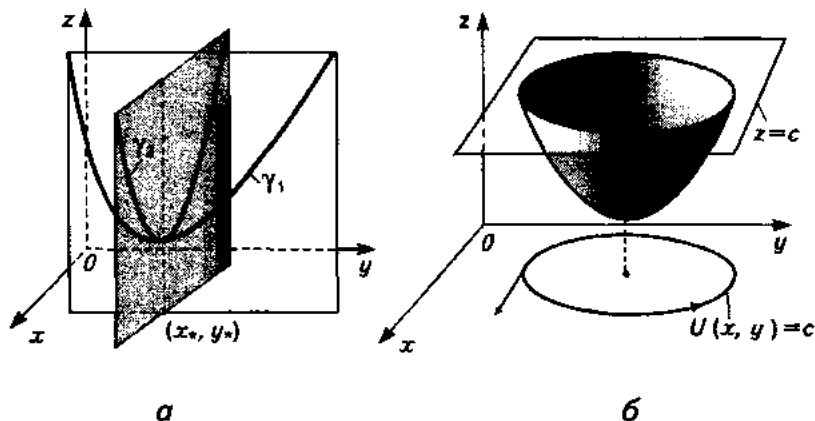


Рис. 1.14

Розмножуючися, жертви створюють сприятливі умови для розвитку популяції хижаків. Однак зростання кількості хижаків призводить до інтенсивнішого винищення ними популяції жертв. Нестача харчових ресурсів спочатку гальмує зростання кількості хижаків, а потім спричиняє зменшення їх популяції. Настає новий етап збільшення популяції жертв. Можна показати, що описані коливання чисельностей двох видів періодичні. Таким чином, жодному з видів вимирання не загрожує.

#### 1.8.4. Прямий добуток автономних рівнянь. Заміни змінних. Розщеплення

Нехай  $P(x) \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $Q(y) \in C(J \rightarrow \mathbb{R})$ . Система вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x), \\ \dot{y} = Q(y) \end{cases} \quad (1.89)$$

називається *прямим добутком автономних рівнянь*  $\dot{x} = P(x)$ ,  $\dot{y} = Q(y)$ . Її називають також *розщепленою системою*. З результатів п. 1.2 випливає, що компоненти  $x(t)$ ,  $y(t)$  розв'язку задачі Коші з початковими даними  $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times I \times J$  цієї системи визначаються зі співвідношень

$$\begin{cases} \int_{x_0}^x \frac{ds}{P(s)} = t - t_0, & \text{якщо } P(x_0) \neq 0, \\ x = x_0, & \text{якщо } P(x_0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{y_0}^y \frac{ds}{Q(s)} = t - t_0, & \text{якщо } Q(y_0) \neq 0, \\ y = y_0, & \text{якщо } Q(y_0) = 0. \end{cases}$$

Таким чином, розщеплена система інтегровна.

Система (1.84), визначена в області  $D$ , називається *розщеплюваною*, якщо заміною змінних

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v) \quad (1.90)$$

її можна звести до розщепленої системи. При цьому від функцій  $X(u, v)$ ,  $Y(u, v)$  вимагається, щоб вони були неперервно диференційовними в деякій області  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ , задовольняли умову невиврожденості

$$\Delta(u, v) := \begin{vmatrix} X'_u(u, v) & X'_v(u, v) \\ Y'_u(u, v) & Y'_v(u, v) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in G, \quad (1.91)$$

а відображення  $Z: G \rightarrow D: (u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v))$  взаємно однозначно перетворювало область  $G$  на область  $D$ . Відомо (див. дод. 2), що за цих умов обернене відображення  $Z^{-1}$  теж буде неперервно диференційовним. У диференціальній топології взаємно однозначне неперервно диференційовне відображення, обернене до якого теж є неперервно диференційовним, називають *дифеоморфізмом*. Таким чином, заміна змінних (1.84) має задавати дифеоморфізм області  $G$  на область  $D$ .

Знайдемо вигляд перетвореної системи. Результат підставлення (1.90) в (1.84) подамо у векторно-матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} X'_u(u, v) & X'_v(u, v) \\ Y'_u(u, v) & Y'_v(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X(u, v), Y(u, v)) \\ Q(X(u, v), Y(u, v)) \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_u(u, v) & X'_v(u, v) \\ Y'_u(u, v) & Y'_v(u, v) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P(X(u, v), Y(u, v)) \\ Q(X(u, v), Y(u, v)) \end{pmatrix}. \quad (1.92)$$

Це і є явний вигляд перетвореної системи.

Розглянемо в області  $G$  векторне поле  $w$ , породжене правою частиною перетвореної системи. Якщо позначити через  $Z'$  похідну відображення  $Z$  [у кожній точці  $(u, v) \in G$  вона являє собою лінійне відображення з матрицею  $\begin{pmatrix} X'_u(u, v) & X'_v(u, v) \\ Y'_u(u, v) & Y'_v(u, v) \end{pmatrix}$ ], то це векторне поле можна подати у вигляді

$$w = (Z')^{-1} v \circ Z.$$

Механізм утворення векторного поля  $w$  дуже простий: аби побудувати вектор, прикладений до заданої точки, потрібно знайти її образ при відображенні  $Z$ , взяти прикладений до одержаної точки вектор векторного поля  $v$  і перекинути його назад в область  $G$  лінійним відображенням  $(Z')^{-1}$ .

Далі заміна змінних (1.90) перетворює диференціальне рівняння в симетричній формі (1.82):

$$\begin{aligned} Q(X, Y) dX - P(X, Y) dY &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (Q(X, Y)X'_u - P(X, Y)X'_v) du + (Q(X, Y)X'_v - P(X, Y)Y'_v) dv &= 0. \end{aligned}$$

Отже, природно виникає форма

$$(Q(X, Y)X'_u - P(X, Y)X'_v) du + (Q(X, Y)X'_v - P(X, Y)Y'_v) dv =: Z^* \omega.$$

Як бачимо, відображення  $Z$  перетворює коефіцієнти диференціальної форми за правилом

$$\begin{pmatrix} Q(x, y) \\ -P(x, y) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X'_u(u, v) & X'_v(u, v) \\ Y'_u(u, v) & Y'_v(u, v) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q(X, Y) \\ -P(X, Y) \end{pmatrix},$$

де індекс  $T$  означає операцію транспонування матриці.

У п. 1.9 ми використаємо властивість розщеплюваності деяких важливих класів систем при дослідженні поведінки фазових кривих в околі положення рівноваги.

Звичайно, далеко не кожну автономну систему вдається розщепити. В загальному випадку намагаються знайти перетворення вигляду (1.90), яке б дало змогу, в певному сенсі, максимально спростити вигляд досліджуваної системи й підготувати ґрунт для

застосування інших методів. Такий підхід виявився дуже плідним: завдяки його застосуванню одержано багато тонких і глибоких результатів у теорії диференціальних рівнянь.

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Скориставшись теоремою 1.18, побудувати фазові криві систем:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 y, \\ \dot{y} = x^3(x^2 - y); \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x} = 4x^2, \\ \dot{y} = (2xy)^2 + 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dot{x} = x(y + x^2), \\ \dot{y} = -y^2; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \dot{x} = e^x, \\ \dot{y} = (e^x y)^2 - 2. \end{cases}$$

Знайти положення рівноваги. Зобразити вектори відповідних векторних полів у кількох точках площини. Вказати напрям руху по фазових кривих при зростанні часу  $t$ .

- ② Довести, що при виконанні умови (1.91) рівняння  $Z^* \omega = 0$  еквівалентне рівнянню в симетричній формі, яке відповідає системі (1.92).

## 1.9

### Класифікація фазових портретів автономних систем в околі положення рівноваги за лінійним наближенням

Припустимо, що диференціальна форма  $\omega$ , визначена в області  $D$ , має ізольовану особливу точку  $(x_*, y_*)$ . Без обмеження загальності можна вважати, що  $x_* = y_* = 0$  (інакше потрібно зробити заміну змінних  $x \mapsto x_* + x$ ,  $y \mapsto y_* + y$ ). У п. 1.8 уже було сформульовано задачу, яка стосувалася дослідження інтегральних кривих рівняння  $\omega = 0$  в околі особливої точки. Спираючися на теорему 1.18, натомість вивчатимемо поведінку фазових кривих відповідної автономної системи в околі тривіального положення рівноваги. Для цього використаємо *метод лінеаризації*.

### 1.9.1. Лінеаризація автономної системи

---

На першому етапі зазначеного методу замість вихідної системи досліджують простішу, так звану лінеаризовану систему.

Нехай функції  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  неперервно диференційовні в деякому околі початку координат і задовольняють умову

$$P(0, 0) = Q(0, 0) = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P'_x(0, 0)x + P'_y(0, 0)y + o(|x| + |y|) \\ Q(x, y) &= Q'_x(0, 0)x + Q'_y(0, 0)y + o(|x| + |y|) \end{aligned} \quad \text{при } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

#### ⇒ Означення 1.20

*Систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = P'_x(0, 0)x + P'_y(0, 0)y, \\ \dot{y} = Q'_x(0, 0)x + Q'_y(0, 0)y \end{cases}$$

*називають лінеаризованою в околі тривіального положення рівноваги щодо системи*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.93)$$

Покладемо

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} P'_x(0, 0) & P'_y(0, 0) \\ Q'_x(0, 0) & Q'_y(0, 0) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Тоді лінеаризовану систему можна подати у вигляді

$$\dot{r} = Ar. \quad (1.94)$$



### 1.9.2. Фазові портрети лінеаризованих систем

Як бачимо, кожній лінеаризованій системі можна поставити у взаємно однозначну відповідність  $(2 \times 2)$ -матрицю з дійсними елементами. Класифікуючи такі матриці за кількістю лінійно незалежних власних векторів та типом власних чисел, дістанемо класифікацію фазових портретів відповідних лінеаризованих систем. Обмежимося дослідженням лінеаризованих систем, в яких

$$\det A \neq 0.$$

Ця умова означає, що  $r = 0$  є ізольованим положенням рівноваги системи (1.94).

#### 1. Випадок, коли характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - \text{tr } A \cdot \lambda + \det A = 0,$$

де  $\text{tr } A = \alpha + \delta$  — слід матриці, має пару дійсних різних коренів  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

У цьому разі матриця  $A$  має пару лінійно незалежних власних векторів  $s_1, s_2$ :

$$As_j = \lambda_j s_j, \quad j = 1, 2. \quad (1.95)$$

Лінійна заміна змінних  $(x, y) = S(u, v)$

$$r = us_1 + vs_2 := S(u, v)$$

розщеплює систему (1.94). Дійсно, в нових змінних ця система набуває вигляду

$$\dot{u}s_1 + \dot{v}s_2 = A(us_1 + vs_2)$$

або, з урахуванням (1.95),

$$\dot{u}s_1 + \dot{v}s_2 = \lambda_1 us_1 + \lambda_2 vs_2.$$

Оскільки вектори  $s_1, s_2$  лінійно незалежні, то це співвідношення еквівалентне системі

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u, \\ \dot{v} = \lambda_2 v, \end{cases} \quad (1.96)$$

що є прямим добутком скалярних рівнянь. Фазова крива цієї системи, яка в момент  $t = 0$  стартує з точки  $(u_0, v_0)$ , описується рівняннями

$$u = u_0 e^{\lambda_1 t}, \quad v = v_0 e^{\lambda_2 t}. \quad (1.97)$$

Вигляд цих кривих легко дослідити за допомогою інтегральних кривих відповідного рівняння з відокремлюваними змінними

$$\lambda_2 v \, du - \lambda_1 u \, dv = 0.$$

Її інтегральні криві визначаються сукупністю співвідношень

$$\begin{cases} u = 0, & v \neq 0, \\ v = 0, & u \neq 0, \\ v = c |u|^{\lambda_2/\lambda_1}, & uv \neq 0, c \neq 0. \end{cases} \quad (1.98)$$

Розглянемо такі підвипадки.

#### 1.1. Власні числа одного знака:

$$\lambda_1 \lambda_2 > 0.$$

Фазовими кривими системи (1.96) є координатні півосі, а також сім'я кривих типу парабол. Лінійне відображення  $S$  переводить їх у фазові криві системи (1.94). При цьому образом орта осі  $Ou$  є вектор  $s_1$ , а образом орта осі  $Ov$  — вектор  $s_2$ . Фазовий портрет системи в цьому випадку називається *вузлом* (рис. 1.15). Напрямок стрілок на фазових

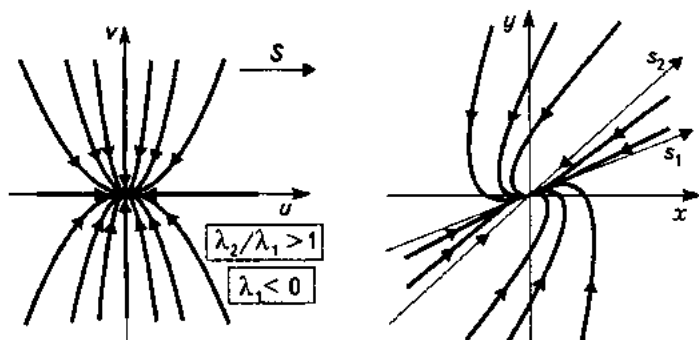


Рис. 1.15

кривих визначається знаком власних чисел. Із формули (1.97) випливає, що в разі додатних (від'ємних) власних чисел фазові криві входять у початок координат при  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ). Нарешті, зауважимо, що *параболи дотикаються в початку координат того власного вектора, який відповідає меншому за модулем власному числу.*

### 1.2. Власні числа різних знаків:

$$\lambda_1 \lambda_2 < 0.$$

Фазовий портрет системи в цьому випадку називається *сідлом* (рис. 1.16). Він відрізняється від попереднього тим, що фазові криві мають «гіперболічний» тип. На площині  $xOy$  при  $t \rightarrow +\infty$  траєкторії наближаються до тієї власної прямої, яка відповідає додатному власному числу.

**2. Випадок, коли характеристичне рівняння має кратний корінь  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ .** Розглянемо такі підвипадки.

**2.1. Матриця  $A$  діагональна** (ця властивість, очевидно, не залежить від вибору базису в  $\mathbb{R}^2$ , оскільки кожен вектор власний).

Траєкторії системи

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x, \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$$

— це всі промені, що входять у початок координат при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ), якщо  $\lambda < 0$  ( $\lambda > 0$ ). Цей факт одразу випливає з формули (1.97)

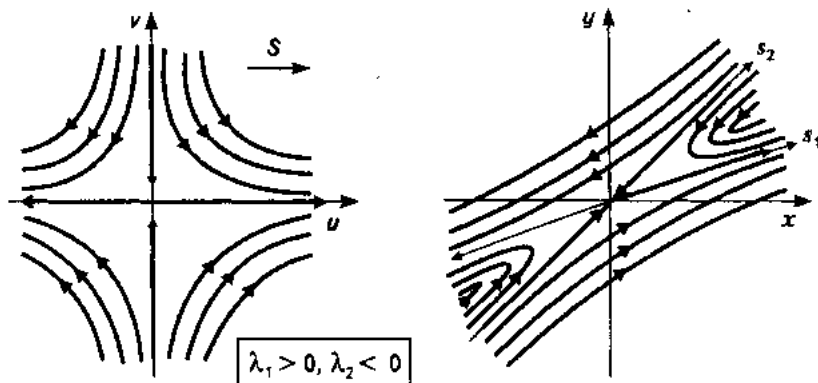


Рис. 1.16

при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Фазовий портрет називається *дикритичним вузлом* (рис. 1.17, а).

2.2. Матриця  $A$  недіагональна (простір власних векторів одновимірний). Нехай  $s_1$  — власний вектор. За теоремою Гамільтона—Кейлі (див. дод. 1) матриця  $A$  анулює свій характеристичний поліном. Отже,

$$A^2 - 2\lambda A + \lambda^2 E = \mathbf{0} \text{ або } (A - \lambda E)(A - \lambda E) = \mathbf{0},$$

де  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Тому, якщо  $s_2$  — довільний лінійно незалежний із  $s_1$

вектор, то  $(A - \lambda E)s_2 \neq \mathbf{0}$  ( $s_2$  не є власним вектором), а  $(A - \lambda E)[(A - \lambda E)s_2] = \mathbf{0}$ , тобто  $(A - \lambda E)s_2$  — власний вектор. Але тоді знайдеться таке  $\mu \neq 0$ , що  $(A - \lambda E)s_2 = \mu s_1$ . Можна вважати, що  $\mu = 1$ . Справді, для цього слід за власний вектор взяти  $\mu s_1$  замість  $s_1$ .

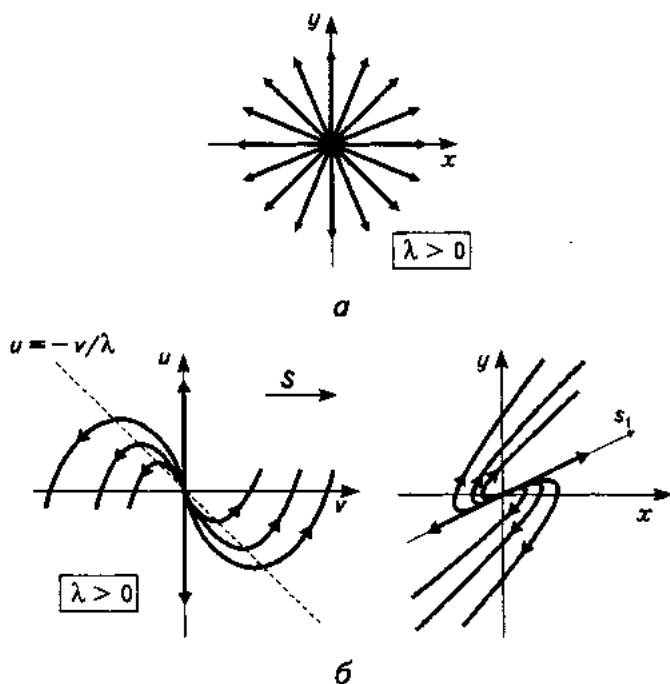


Рис. 1.17

Таким чином, для лінійно незалежних векторів  $s_1, s_2$  справджуються рівності

$$As_1 = \lambda s_1, \quad As_2 = s_1 + \lambda s_2.$$

Виконавши заміну змінних  $r = us_1 + vs_2$  у системі (1.94), матимемо

$$\dot{u}s_1 + \dot{v}s_2 = A(us_1 + vs_2) \Leftrightarrow \dot{u}s_1 + \dot{v}s_2 = (\lambda u + v)s_1 + \lambda vs_2.$$

Звідси дістаємо систему

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda u + v, \\ \dot{v} = \lambda v. \end{cases} \quad (1.99)$$

Таку систему природно назвати *напівпрямим добутком скалярних рівнянь*. Відповідне їй рівняння в симетричній формі має вигляд

$$\lambda v du - (\lambda u + v) dv = 0. \quad (1.100)$$

Це однорідне рівняння. Очевидними інтегральними кривими є  $v = 0$ ,  $u > 0$  та  $v = 0$ ,  $u < 0$ , а при  $v \neq 0$  заміна змінних  $u = vw$  зводить це рівняння до вигляду  $\lambda v dw - dv = 0$ . Звідси  $w = c + \frac{\ln v}{\lambda}$  і  $u = cv + \frac{v}{\lambda} \ln |v|$ . Остаточно інтегральні криві рівняння (1.100) визначаються сукупністю

$$\begin{cases} v = 0, & u \neq 0, \\ u = cv + \frac{v}{\lambda} \ln |v|, & v \neq 0, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тепер неважко дослідити поведінку інтегральних кривих системи (1.99). Пряма  $u = 0$  є  $k$ -ізокліною рівняння (1.100) з  $k = 1/\lambda$ , а пряма  $u = -v/\lambda$  — 0-ізокліною. При кожному фіксованому  $c$  функція  $u_c(v) = cv + \frac{v}{\lambda} \ln |v|$  має такі властивості:

$$\lim_{v \rightarrow 0} u_c(v) = 0, \quad \lim_{v \rightarrow 0} u'_c(v) = \lim_{v \rightarrow 0} \left( c + \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln |v|}{\lambda} \right) = (-\text{sign } \lambda) \infty.$$

Отже, інтегральна крива в точці перетину прямої  $u = 0$  має дотичну з кутовим коефіцієнтом  $k = 1/\lambda$ , у точці перетину прямої  $u = -v/\lambda$  досягає

свого екстремуму й, нарешті, закінчується в початку координат, дотикаючися прямої  $y = 0$ .

Фазовий портрет у розглядуваному випадку називається *виродженим вузлом* (рис. 1.17, б).

□ **Приклад 1.15**

Побудуємо портрет рівняння  $(2x - y) dx - (3x - 2y) dy = 0$ .

Відповідна автономна системи має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

1. Знаходимо власні числа матриці цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

2. Визначаємо базисний власний вектор:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, маємо вироджений вузол. Усі фазові криві системи виходять із початку координат, дотикаючися в ньому прямої  $y = x$ , напрямленої вздовж власного вектора.

Для точнішого зображення фазових кривих побудуємо кілька характерних ізоклін вихідного рівняння в симетричній формі.

Ізокліна, вздовж якої поле напрямів паралельне осі  $Ox$  (0-ізокліна), визначається умовою рівності нулю коефіцієнта при  $dx$ :  $y = 2x$ .

Ізокліна, вздовж якої поле напрямів паралельне осі  $Oy$  ( $\infty$ -ізокліна), визначається умовою рівності нулю коефіцієнта при  $dy$ :  $y = 3x/2$ .

Вісь абсцис є ізокліною, вздовж якої кутовий коефіцієнт визначається умовою  $2x dx - 3x dy = 0$ , тобто  $y' = 2/3$ .

Вісь ординат є ізокліною, вздовж якої кутовий коефіцієнт визначається умовою  $-y dx + 2y dy = 0$ , тобто  $y' = 1/2$ .

З урахуванням особливостей поведінки траєкторій у випадку виродженого вузла (див. рис. 1.17, б) фазовий портрет нашої системи матиме вигляд, як на рис. 1.18.

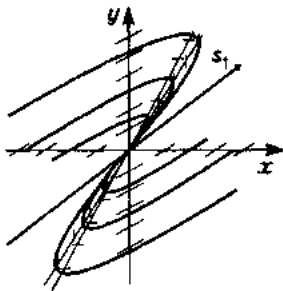


Рис. 1.18

3. Випадок, коли характеристичне рівняння має пару комплексно-спряжених коренів  $\lambda_1 = \lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ . Цим кореням відповідає пара лінійно незалежних (над полем комплексних чисел) комплексно-спряжених власних векторів  $s$ ,  $\bar{s}$ :

$$As = \lambda s, \quad A\bar{s} = \bar{\lambda}\bar{s}. \quad (1.101)$$

Виявляється, систему (1.94) можна розщепити, ввівши нові змінні  $\rho \in (0, \infty)$  та  $\varphi \in \mathbb{R}$  за формулою

$$r = \rho(e^{i\varphi}s + e^{-i\varphi}\bar{s}) =: R(\rho, \varphi).$$

Зауважимо, що відображення  $R(\rho, \varphi) \in$  взаємно однозначним на множині  $(0, \infty) \times ]0, 2\pi)$ . Підставивши  $r = R(\rho, \varphi)$  у систему (1.94), дістанемо

$$\dot{\rho}(e^{i\varphi}s + e^{-i\varphi}\bar{s}) + i\rho\dot{\varphi}(e^{i\varphi}s - e^{-i\varphi}\bar{s}) = \rho(\lambda e^{i\varphi}s + \bar{\lambda}e^{-i\varphi}\bar{s}).$$

Прирівнявши коефіцієнти при лінійно незалежних векторах, матимемо

$$\dot{\rho} + i\rho\dot{\varphi} = \lambda\rho, \quad \dot{\rho} - i\rho\dot{\varphi} = \bar{\lambda}\rho$$

(очевидно, що друга рівність є наслідком першої). Виділивши дійсну та уявну частини, дістанемо шукану розщеплену систему

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \alpha\rho, \\ \dot{\varphi} = \beta. \end{cases} \quad (1.102)$$

Для неї легко знаходиться розв'язок задачі Коші з початковими даними  $(0, \rho_0, \varphi_0)$ :

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha t}, \quad \varphi = \beta t + \varphi_0.$$

3.1. Дійсні частини власних чисел відмінні від нуля:  $\text{Re } \lambda = \alpha \neq 0$ . У цьому разі фазові криві системи (1.102) — спіралі. У випадку  $\alpha < 0$  ( $\alpha > 0$ ) вони навиваються на початок координат при  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). Фазовий портрет називається *фокусом* (рис. 1.19, а).

3.2. Дійсні частини власних чисел дорівнюють нулю:  $\text{Re } \lambda = \alpha = 0$ . У координатах  $(u, v)$  фазові криві — концентричні кола, а у вихідній

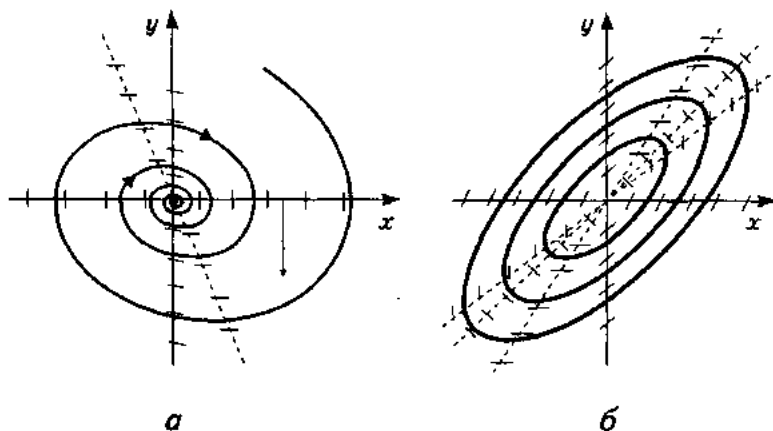


Рис. 1.19

системі координат — концентричні еліпси. Фазовий портрет називається *центром* (рис. 1.19, б).

□ **Приклад 1.16**

*Побудуємо портрет рівняння  $(2x - y) dx + (y - x) dy = 0$ .*

Запишемо відповідну автономну систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

Матрицею цієї системи є  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Корені характеристичного полінома  $\lambda^2 + 1$  суто уявні:  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ . Отже, фазовим портретом є центр, а фазовими кривими — еліпси.

Аби точніше зобразити фазовий портрет системи, знайдемо пару векторів  $r_1$ ,  $r_2$ , напрямлених уздовж головних осей еліпсів — фазових кривих. Неважко зрозуміти, що ці вектори мають задовольняти умову ортогональності

$$\langle Ar, r \rangle = 0.$$

Якщо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді  $r = (1, k)$ , то воно зведеться до квадратного рівняння  $k^2 - k - 1 = 0$ , розв'язавши яке, знайдемо



$$r_1 = \left( 1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right), \quad r_2 = \left( 1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

Укажемо ще кілька характерних ізоклін. У точках прямої  $y = x$ , відмінних від початку координат, поле напрямів вертикальне, оскільки  $\dot{x} = 0$ . Горизонтальним воно є на півпрямих  $y = 2x$  ( $x \neq 0$ ), бо тут  $\dot{y} = 0$ . Крім того,  $dy/dx = 2$  при  $y = 0$  ( $x \neq 0$ ),  $dy/dx = 1$  при  $x = 0$  ( $y \neq 0$ ).

Портрет рівняння зображено на рис. 1.19, б.

### □ Приклад 1.17

*Побудуємо фазовий портрет системи*

$$\begin{cases} \dot{x} = 13y, \\ \dot{y} = -5x - 2y. \end{cases}$$

Матриця системи  $\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$  має пару суто уявних власних чисел

$\lambda_{1,2} = -1 \pm 8i$ . Отже, фазовий портрет системи — фокус. Оскільки дійсні частини власних чисел від'ємні, то траєкторіями є спіралі, які навиваються на початок координат при  $t \rightarrow \infty$ . Аби з'ясувати, за годинниковою стрілкою чи проти неї закручуються траєкторії, достатньо побудувати хоча б один вектор векторного поля  $(13y, -5x - 2y)$ . Наприклад, вектор, прикладений до точки  $(1, 0)$ , має координати  $(0, -5)$ . Отже, напрям руху вздовж траєкторій — за годинниковою стрілкою. Характерними ізоклінами відповідного рівняння в симетричній формі  $(5x + 2y) dx + 13y dy = 0$  є:  $y = 0$  — пряма вертикальних напрямів поля ( $\infty$ -ізокліна);  $y = -5x/2$  — 0-ізокліна;  $x = 0$  —  $(-2/13)$ -ізокліна. Фазовий портрет системи зображено на рис. 1.19, а.

Викладену методику класифікації фазових портретів лінійних двовимірних систем можна з успіхом застосувати й до аналізу вироджених випадків, які характеризує умова  $\det A = 0$  (див. задачу 2).

### 1.9.3. Елементарна модель бойових дій

Розглянемо одну з моделей бойових дій, запропоновану у 1916 р. під час першої світової війни англійським дослідником Ф. В. Ланчес-

тером. Нехай у збройному конфлікті беруть участь регулярні війська двох сторін чисельністю  $x$  та  $y$  відповідно. На підставі певних міркувань Ланчестером було зроблено припущення про те, що швидкість утрат першої сторони пропорційна чисельності військ другої, і навпаки. Позначивши зазначені швидкості в момент  $t$  через  $v_1(t)$  та  $v_2(t)$  відповідно, матимемо

$$v_1(t) = ay(t), \quad v_2(t) = bx(t).$$

Додатні сталі  $a$  і  $b$  — це так звані коефіцієнти ефективності ведення бойових дій із боку другої та першої сторін відповідно.

Обмежимося аналізом ситуації, коли сторони спрямовують у район конфлікту підкріплення зі сталими швидкостями  $v_1 = f$  та  $v_2 = g$ . Тоді система диференціальних рівнянь, яка описує еволюцію чисельностей військ, матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay + f, \\ \dot{y} = -bx + g. \end{cases} \quad (1.103)$$

Паралельним перенесенням початку координат у точку  $(g/b, f/a)$

що систему можна звести до вигляду (1.94) з матрицею  $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ .

Власними числами останньої є  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{ab}$ . Отже, маємо випадок сітла.

Зауважимо, що системі (1.103) відповідає рівняння в симетричній формі з відокремленими змінними

$$a(y - f/a)dy - b(x - g/b)dx = 0,$$

загальний інтеграл якого має вигляд

$$a(y - f/a)^2 - b(x - g/b)^2 = c.$$

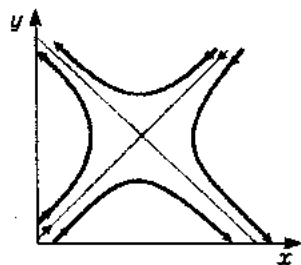


Рис. 1.20

Такий інтеграл визначає на площині  $xOy$  сім'ю гіпербол. Із зрозумілих міркувань нас цікавлять лише ті ділянки інтегральних кривих, які лежать у першому квадранті. Кілька з них зображено на рис. 1.20.

Криві, розташовані в області, виділеній сірим кольором, відповідають сценарію бойових дій, які завершуються поразкою пер-

шої сторони:  $x$ -компонента відповідного розв'язку першою перетворюється в нуль. Винятковий випадок — фазова крива належить асимптоті  $\sqrt{a}(y - f/a) - \sqrt{b}(x - g/b) = 0$  — відповідає ситуації, коли війна гриває нескінченно довго.

#### 1.9.4. Про коректність методу лінеаризації

Як уже відзначалось, аналіз лінеаризованої системи — це лише перший етап дослідження фазових кривих вихідної системи в околі положення рівноваги. На наступному етапі потрібно з'ясувати питання про те, наскільки точно фазовий портрет системи (1.94) відображає поведінку фазових кривих системи (1.93). Виявляється, відповідь на це питання в загальному випадку залежить як від характеру власних чисел матриці  $A$ , так і від диференціальних властивостей функцій  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$ . Наведемо без доведення такий результат.

#### Теорема 1.19. (Гробмана—Хартмана)

Нехай функції  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  двічі неперервно диференційовні в околі початку координат і дійсні частини власних чисел матриці

$$A = \begin{pmatrix} P'_x(0, 0) & P'_y(0, 0) \\ Q'_x(0, 0) & Q'_y(0, 0) \end{pmatrix}$$

відмінні від нуля ( $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda(A) \neq 0$ ). Тоді в деякому околі  $B$  точки  $(0, 0)$  існує взаємно однозначне неперервно диференційовне відображення

$$B \ni (x, y) \mapsto (x + X(x, y), y + Y(x, y)) \in \mathbb{R}^2,$$

яке фазові криві системи (1.93) переводить у фазові криві лінеаризованої системи (1.94). При цьому функції  $X(x, y)$  та  $Y(x, y)$  задовольняють умови

$$\begin{aligned} X(0, 0) = Y(0, 0) &= X'_x(0, 0) = X'_y(0, 0) = \\ &= Y'_x(0, 0) = Y'_y(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

З геометричної точки зору сформульоване твердження означає, що в разі виконання умови  $\operatorname{Re} \lambda(A) \neq 0$  малою деформацією деякого околу точки  $(0, 0)$  локальний фазовий портрет системи (1.93) можна перетворити у фазовий портрет відповідної лінеаризованої системи. Справді, відображення, про яке йдеться в теоремі 1.19, є локальним дифеоморфізмом (див. дод. 2). Оскільки

$$X(x, y) = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad Y(x, y) = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0,$$

то цей дифеоморфізм залишає точку  $(0, 0)$  нерухомою й поблизу неї мало відрізняється від тотожного.

Таким чином, за умови, що функції  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  двічі неперервно диференційовні, ми маємо всі підстави називати особливу точку нелінійної системи (1.93) вузлом, виродженим вузлом, дикритичним вузлом, сідлом, фокусом, якщо фазовий портрет відповідної лінеаризованої системи є відповідно вузлом, виродженим вузлом, дикритичним вузлом, сідлом, фокусом.

У випадку, коли власні числа матриці  $A$  суто уявні, тобто фазовим портретом системи (1.94) є центр, відповідь на поставлене на початку даного пункту питання вимагає аналізу нелінійних членів у розвиненнях функцій  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  за степенями  $x, y$  в околі точки  $(0, 0)$ . Ці члени можуть змінити тип фазового портрета, характерний для центра, змусивши, наприклад, фазові криві нелінійної системи навиватися на початок координат у вигляді спіралей. У зв'язку з цим виникає так звана *проблема центра й фокуса*.

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

① Визначити тип і побудувати фазові портрети таких систем:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y, \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = y - 2x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = x - 4y; \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} \dot{x} = x - 5y, \\ \dot{y} = 2x - y; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - x; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 6x - y. \end{cases}$$

- ② Здійснити класифікацію фазових портретів лінеаризованих систем у вироджених випадках, коли  $\det A = 0$ .
- ③ Визначити, для яких із вписаних рівнянь при дослідженні поведінки інтегральних кривих в околі початку координат можна користуватися методом лінеаризації:
- а)  $(2x + y + y^2) dx - (x^2 + 3x + 4y) dy = 0$ ;
- б)  $(x - 4y + x^3) dx + (3x - 2y - y^3) dy = 0$ ;
- в)  $(3y - x) dx + (y^2 - x - y) dy = 0$ ;
- г)  $(2x - y - x^2) dx + (y + x^3) dy = 0$ ;
- д)  $(2x - y + x^3) dx + (5y - x - y^3) dy = 0$ ;
- е)  $(x - y + y^4) dx + (5y - x + x^2) dy = 0$ .
- ④ Знайти особливі точки системи

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln \frac{1 - x + x^2}{3}, \end{cases}$$

лінеаризувати її в кожній особливій точці, визначити тип лінеаризованої системи, з'ясувати питання про коректність лінеаризації.

## 1.10

### Рівняння, не розв'язані відносно похідної

Нехай  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  — деяка область. Кожна функція  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$  визначає рівняння вигляду

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (1.104)$$

Його називають *диференціальним рівнянням, не розв'язаним відносно похідної*, або *неявним диференціальним рівнянням*. Розв'язком цього рівняння на інтервалі  $I$  називається диференційовна на  $I$  функція  $y = y(x)$ , яка задовольняє умови

$$(x, y(x), y'(x)) \in G \text{ і } F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

У теорії неявного рівняння декартові координати простору  $\mathbb{R}^3$  за традицією позначають через  $(x, y, p)$ .

### 1.10.1. Теорема існування та єдиності розв'язку

---

Для неявних рівнянь досить загальною є ситуація, коли фіксованій парі  $(x_0, y_0)$  початкових даних може відповідати кілька значень  $dy/dx = p_0$ , для яких виконується рівність  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ . У зв'язку з цим для однозначного виділення розв'язку потрібно не лише задавати початкову умову  $y(x_0) = y_0$ , а й додатково вибирати конкретне значення його похідної в точці  $x_0$  із кількох можливих.

#### Теорема 1.20

Нехай  $F(x, y, p) \in C^1(G \mapsto \mathbb{R})$  і  $(x_0, y_0, p_0) \in G$  — точка, в якій  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ , але  $F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0$ . Тоді на деякому інтервалі  $I$ , що містить точку  $x_0$ , існує єдиний розв'язок  $y = y(x)$  рівняння (1.104), для якого справджуються умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = p_0. \quad (1.105)$$

#### Доведення

Функція  $F(x, y, p)$  у точці  $(x_0, y_0, p_0)$  задовольняє умови теореми про неявну функцію (див. дод. 2). Згідно з цією теоремою в деякому околі точки  $(x_0, y_0, p_0)$  рівняння  $F(x, y, p) = 0$  можна однозначно розв'язати відносно  $p$ . Точніше, існують круг  $D \subset \mathbb{R}^2$  із центром у точці  $(x_0, y_0)$ , інтервал  $J \subset \mathbb{R}$  із центром у точці  $p_0$  та єдина функція  $f: D \mapsto J$  такі, що  $D \times J \subset G$  і  $F(x, y, f(x, y)) = 0$  для всіх  $(x, y) \in D$ . Крім того,  $f(x, y) \in C^1(D \mapsto J)$  і  $f(x_0, y_0) = p_0$ . Отже, множина точок з околу  $D \times J$ , які задовольняють умову  $F(x, y, p) = 0$ , збігається з графіком функції  $p = f(x, y)$ , а тому рівняння (1.104) в цьому околі еквівалентне рівнянню

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (1.106)$$

із неперервно диференційовною правою частиною. За теоремою Пікара на деякому інтервалі  $I$  з центром у точці  $x_0$  рівняння (1.106)

має єдиний розв'язок, який задовольняє першу з умов (1.105). Друга з умов теж справджується, оскільки  $y'(x_0) = f(x_0, y_0) = p_0$ .

### 1.10.2. Метод параметризації

Для відшукування розв'язків рівняння (1.104), особливо в тих випадках, коли його не вдається розв'язати відносно похідної, використовують *метод параметризації*. Він дає змогу звести неявне рівняння до деякого рівняння в симетричній формі. Якщо останнє піддається інтегруванню, розв'язки вихідного рівняння знаходять у параметричному вигляді.

#### ⇒ Означення 1.21

Пару функцій  $x(t), y(t) \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R})$  називають *розв'язком рівняння (1.104) в параметричному вигляді*, якщо

$$\dot{x}(t) \neq 0 \text{ і } F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Для застосування зазначеного методу потрібно спочатку параметризувати множину

$$S = \{(x, y, p) \in G : F(x, y, p) = 0\},$$

тобто задати її рівняннями

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad p = P(u, v), \quad (u, v) \in D, \quad (1.107)$$

за допомогою неперервно диференційовних у деякій області  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  функцій  $X, Y, P$ , які задовольняють такі умови:

1)  $\text{rank} \begin{pmatrix} X'_u(u, v) & Y'_u(u, v) & P'_u(u, v) \\ X'_v(u, v) & Y'_v(u, v) & P'_v(u, v) \end{pmatrix} = 2$ ; 2) відображення  $D \ni (u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v), P(u, v)) \in S$  взаємно однозначне і його образ збігається з  $S$ . Множина  $S$ , яка допускає параметризацію, є двовимірною поверхнею в  $\mathbb{R}^3$ . Із самого означення параметризації випливає, що

$$F(X(u, v), Y(u, v), P(u, v)) = 0 \quad \forall (u, v) \in D. \quad (1.108)$$

Припустимо, що трійка функцій  $X, Y, P$  задовольняє всі зазначені

више умови. Тоді, аби дістати диференціальне рівняння в симетричній формі, яке пов'язує між собою змінні  $u$  та  $v$ , достатньо підставити (1.107) у так зване основне диференціальне співвідношення

$$\boxed{dy = p dx}$$

і одержану рівність

$$dY(u, v) = P(u, v)dX(u, v) \quad (1.109)$$

подати у вигляді

$$(Y'_u(u, v) - P(u, v)X''_u(u, v)) du + (Y'_v(u, v) - P(u, v)X''_v(u, v)) dv = 0. \quad (1.109')$$

Природність таких дій пояснюється просто. Рівняння (1.104) можна розглядати як наслідок системи

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ dy = p dx. \end{cases} \quad (1.110)$$

Його дістають із (1.110) у результаті виключення змінної  $p$ . Оскільки виконується тотожність (1.108), то разом із (1.107) система (1.110) накладає лише одну умову (1.109) на  $u, v$ . Ця умова й являє собою шукане диференціальне рівняння (1.109'). Остаточню метод параметризації обгрунтовує таке твердження.

### Твердження 1.9

Нехай  $u = u(t), v = v(t), t \in I$  — параметричне рівняння інтегральної кривої рівняння (1.109') (або, що одне й те саме, розв'язок рівняння (1.109') в параметричному вигляді). Покладемо

$$x(t) = X(u(t), v(t)), y(t) = Y(u(t), v(t))$$

і припустимо, що  $\dot{x}(t) \neq 0$  для всіх  $t \in I$ . Тоді пара функцій  $x(t), y(t)$  є розв'язком рівняння (1.104) в параметричному вигляді.

### Доведення

Оскільки  $u(t), v(t)$  — розв'язок (1.109'), то

$$dY(u(t), v(t)) = P(u(t), v(t))dX(u(t), v(t)) \quad \forall t \in I,$$

тобто  $dy(t) = p(t) dx(t)$ , де  $p(t) = P(u(t), v(t))$ . А тоді з урахуванням (1.108) маємо



$$F(x(t), y(t), p(t)) = 0, \quad \dot{y}(t) = p(t)\dot{x}(t) \quad \forall t \in I,$$

звідки  $p(t) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$  і  $F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = 0$  для всіх  $t \in I$ .

Зауважимо, що досить загальною є ситуація, коли параметризації всієї множини  $S$  не існує, однак можна вказати скінченний набір параметризованих поверхонь  $S_i \subset S$  ( $i = 1, \dots, N$ ), об'єднання яких збігається з  $S$ . У цьому випадку метод параметризації слід застосувати до кожної множини  $S_i$ . Потім одержані розв'язки можна буде використати для утворення непродовжуваного розв'язку рівняння (1.104).

#### □ Приклад 1.18

Розглянемо рівняння Клеро

$$y = xy' + g(y').$$

Тут  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — довільна двічі неперервно диференційовна функція. В даному випадку  $F(x, y, p) = y - xp - g(p)$ . Маємо очевидну параметризацію

$$x = u, \quad y = uv + g(v), \quad p = v. \quad (1.111)$$

Підставивши її в основне диференціальне співвідношення  $dy = p dx$ , дістанемо

$$v du + u dv + g'(v) dv = v du \quad \text{або} \quad (u + g'(v)) dv = 0.$$

Інтегральні криві цього рівняння визначає сукупність

$$\begin{cases} v = c, & c \in \mathbb{R} \text{ — довільна стала,} \\ u = -g'(v). \end{cases}$$

Перша рівність цієї сукупності після підставлення в (1.111) і видалення параметра  $u$  породжує сім'ю розв'язків рівняння Клеро

$$y = cx + g(c).$$

Аналогічно друга рівність визначає частинний розв'язок цього рівняння в параметричному вигляді

$$x = -g'(v), \quad y = -g'(v)v + g(v)$$

на кожному інтервалі зміни параметра  $v$ , де  $g''(v)$  не перетворюється в нуль.

Зауважимо, що множина  $S$  допускає очевидну параметризацію, якщо рівняння  $F(x, y, p) = 0$  можна розв'язати відносно однієї зі змінних  $x$  або  $y$ . Проте диференціальне рівняння (1.109'), одержане внаслідок такої параметризації, далеко не завжди вдається зінтегрувати. Розглянемо ще один клас рівнянь, які є узагальненнями рівняння Клеро й для яких розв'язок можна знайти в квадратурах.

□ **Приклад 1.19**

*Розглянемо рівняння Лагранжа*

$$y = a(y')x + b(y').$$

Тут  $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — довільні неперервно диференційовні функції. Параметризація має вигляд

$$x = u, \quad y = a(v)u + b(v), \quad p = v.$$

Підставивши її в основне диференціальне співвідношення, дістанемо

$$a(v) du + (a'(v)u + b'(v)) dv = v du$$

або

$$(a(v) - v) du + (a'(v)u + b'(v)) dv = 0. \quad (1.112)$$

Припустимо, що функція  $a(v) - v$  має лише ізольовані нулі  $v_1, v_2, \dots$ . Їм відповідає набір розв'язків  $v = v_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) рівняння (1.112), який породжує набір розв'язків рівняння Лагранжа

$$y = v_k x + b(v_k)$$

(враховано, що  $a(v_k) = v_k$ ). Далі при  $v \neq v_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) рівняння (1.112) еквівалентне лінійному рівнянню вигляду

$$\frac{du}{dv} + \frac{a'(v)}{a(v) - v} u + \frac{b'(v)}{a(v) - v} = 0$$

і, отже, інтегрується в квадратурах.

### 1.10.3. Геометрія неявного рівняння

Припустимо, що  $F(x, y, p) \in C^1(G \mapsto \mathbb{R})$  і в точках множини  $S$  частинні похідні функції  $F$  одночасно не перетворюються в нуль. Із теореми про неявну функцію (див. дод. 2) випливає, що тоді в околі кожної точки  $(x_0, y_0, p_0) \in S$  множина  $S$  допускає параметризацію. Отже, є всі підстави називати цю множину (двовимірною) поверхнею. Нехай  $\pi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2 : (x, y, p) \mapsto (x, y)$  — ортогональна проекція простору  $\mathbb{R}^3$  на площину  $xOy$  (рис. 1.21). Образ поверхні  $S$  при відображенні  $\pi$  позначимо через  $S_{xy}$ . Отже, для кожної точки  $(x, y) \in S_{xy}$  знайдеться хоча б одна точка  $(x, y, p) \in S$ . Повний прообраз точки  $(x_0, y_0) \in S_{xy}$  на поверхні  $S$  позначимо через  $\pi^{-1}(x_0, y_0)$ , тобто

$$\pi^{-1}(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0, p) \in \mathbb{R}^3 : F(x_0, y_0, p) = 0\}.$$

Зрозуміло, що  $\pi^{-1}(x, y)$  складається з точок перетину поверхні  $S$  вертикальною прямою, яка проходить через точку  $(x, y, 0)$ . Надалі розглядатимемо не вироджений випадок, коли для кожної точки  $(x, y) \in S_{xy}$  множина  $\pi^{-1}(x, y)$  дискретна. Диференціальне рівняння (1.104) в кожній точці  $(x_0, y_0) \in S_{xy}$  визначає не менше ніж один напрям. А саме, якщо  $\pi^{-1}(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0, p_{0,k})\}_{k=1, 2, \dots, m}$ , де  $m = m(x_0, y_0)$  або натуральне, або  $\infty$ , то  $k$ -й напрям задає пряма

$$L_k(x_0, y_0) : y = p_{0,k}(x - x_0) + y_0,$$

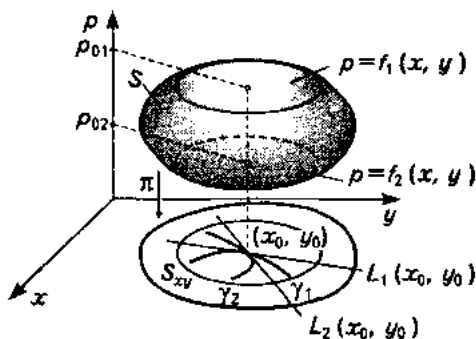


Рис. 1.21

яка проходить через  $(x_0, y_0)$  з кутовим коефіцієнтом  $p_{0k}$ . У загальному випадку виникає неоднозначна відповідність, яка кожній точці  $(x, y) \in S_{xy}$  зіставляє набір прямих  $\{L_k(x, y)\}_{k=1, \dots, m(x, y)}$ . Цю відповідність називатимемо полем напрямів неявного рівняння (1.104).

### ⇒ Означення 1.22

*Інтегральною кривою рівняння (1.104) називають таку криву, яка в кожній своїй точці дотикається хоча б однієї прямої, визначеної в цій точці полем напрямів рівняння (1.104).*

Постає природне запитання: чи для кожного напрямку в заданій точці  $(x_0, y_0)$  існує інтегральна крива, яка його дотикається? Аби відповісти на це запитання, введемо поняття регулярної точки.

### ⇒ Означення 1.23

*Точку  $(x, y, p) \in S$  називають регулярною, якщо  $F'_p(x, y, p) \neq 0$ .*

З геометричного погляду регулярність точки  $(x_0, y_0, p_0)$  означає, що дотична площина  $TS(x_0, y_0, p_0)$  до поверхні  $S$  у цій точці не є вертикальною. Справді, як відомо (див., наприклад, [16]), рівняння площини  $TS(x_0, y_0, p_0)$  має вигляд

$$F'_x(x_0, y_0, p_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, p_0)(y - y_0) + F'_p(x_0, y_0, p_0)(p - p_0) = 0,$$

а вектор  $\text{grad } F(x_0, y_0, p_0) = (F'_x(x_0, y_0, p_0), F'_y(x_0, y_0, p_0), F'_p(x_0, y_0, p_0))$  ортогональний до  $TS(x_0, y_0, p_0)$ . Площина  $TS(x_0, y_0, p_0)$  буде перпендикулярною до площини  $xOy$  тоді й лише тоді, коли третя компонента вектора  $\text{grad } F(x_0, y_0, p_0)$  дорівнюватиме нулю.

### Теорема 1.21

Якщо множина  $\pi^{-1}(x_0, y_0)$  складається лише з регулярних точок, то для кожної прямої  $L_k(x_0, y_0)$  з поля напрямів рівняння (1.104) у деякому околі точки  $(x_0, y_0)$  існує єдина інтегральна крива цього рівняння, яка дотикається  $L_k(x_0, y_0)$  у точці  $(x_0, y_0)$ .

### Доведення

Достатньо застосувати теорему 1.20 до кожної точки  $(x_0, y_0, p_{0k}) \in \pi^{-1}(x_0, y_0)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m(x_0, y_0)$ .

На рис. 1.21 точка  $(x_0, y_0)$  має два регулярних прообрази  $(x_0, y_0, p_{0k})$ ,  $k = 1, 2$ . Отже, в цій точці неявне рівняння визначає два напрями  $L_1(x_0, y_0)$  та  $L_2(x_0, y_0)$ . В околі кожної точки  $(x_0, y_0, p_{0k})$  поверхня  $S$  є графіком деякої функції  $p = f_k(x, y)$ . Тому в околі точки  $(x_0, y_0)$  неявне рівняння являє собою сукупність рівнянь  $y' = f_1(x, y)$  та  $y' = f_2(x, y)$ , і через цю точку проходять дві інтегральні криві  $\gamma_1$  та  $\gamma_2$ , які дотикаються прямих  $L_1(x_0, y_0)$  та  $L_2(x_0, y_0)$  відповідно.

Інтегральні криві неявного рівняння, яке визначає багатозначне поле напрямів, можуть утворювати дуже заплутану сітку ліній. Виявляється, однак, що на множині точок, які мають лише регулярні прообрази, цю сітку можна «розплутати», піднявши відповідним чином кожен криву на поверхню  $S$ . Після такого підняття через будь-яку регулярну точку поверхні  $S$  проходить одна(!) крива, образ якої при проектуванні на площину  $xOy$  є інтегральною кривою відповідного неявного рівняння. Локально існування потрібної системи кривих на поверхні  $S$  устанолюється дуже просто. Як уже відзначалося, в околі довільної регулярної точки  $(x_0, y_0, p_0) \in S$  ця поверхня є графіком деякої неперервно диференційовної функції  $p = f(x, y)$ . Нехай  $y = y(x)$  — розв'язок задачі Коші  $y' = f(x, y)$ ,  $y|_{x=x_0} = y_0$ . Тоді локально крива на поверхні  $S$ , яка проходить через точку  $(x_0, y_0, p_0)$  і проектується в інтегральну криву на площині  $xOy$ , описується рівняннями

$$y = y(x), \quad p = f(x, y(x)).$$

Тепер ми покажемо, що так побудовані криві є інтегральними для певного поля напрямів, заданого на деякій підмножині  $S' \subset S$ , яка містить усі регулярні точки. Важливо наголосити, що для його утворення вже не потрібно використовувати локальне зображення поверхні  $S$  у вигляді графіка функції двох змінних. Натомість головну роль у відповідній конструкції відіграє важливий геометричний об'єкт — *контактна площина*.

### ⇒ Означення 1.24

Площину  $\Pi(x_0, y_0, p_0)$ , задану в  $\mathbb{R}^3$  рівнянням

$$(y - y_0) - p_0(x - x_0) = 0,$$

називають *контактною в точці*  $(x_0, y_0, p_0)$ .

Згідно з цим означенням у  $\mathbb{R}^3$  виникає поле контактних площин, оскільки вказано правило, відповідно до якого кожній точці  $(x_0, y_0, p_0)$

зіставляється площина  $\Pi(x_0, y_0, p_0)$ . Це поле можна задати одним рівнянням Пфаффа

$$dy - p dx = 0.$$

Опишемо основні властивості контактної площини. Очевидно, що площина  $\Pi(x_0, y_0, p_0)$  проходить через точку  $(x_0, y_0, p_0)$  паралельно осі  $Oz$ . Якщо ця точка належить поверхні  $S$ , то  $\Pi(x_0, y_0, p_0)$  перетинає площину  $xOy$  по прямій, яка проходить через точку  $(x_0, y_0)$  і має кутовий коефіцієнт  $p_0$ , тобто по прямій, що належить полю напрямів диференціального рівняння (1.104). Тому контактна площина в точці  $(x_0, y_0, p_0)$  дотикається й інтегральній кривій, що проходить через точку  $(x_0, y_0)$  і має в ній  $p_0$  за кутовий коефіцієнт дотичної. Якщо точка  $(x_0, y_0, p_0)$  регулярна, то  $\Pi(x_0, y_0, p_0)$  дотикається в ній також кривій на поверхні, яка проектується в зазначену інтегральну криву (рис. 1.22).

Нехай  $S'$  — підмножина поверхні  $S$ , що складається з точок, у кожній з яких дотична й контактна площини не є паралельними й, отже, перетинаються по прямій. Ураховуючи вигляд рівнянь обох цих площин, множину  $S'$  можна задати так:

$$S' = \{(x, y, p) \in S : \text{rank } B(x, y, p) = 2\},$$

де  $B(x, y, p) = \begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_p \\ -p & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Зрозуміло, що  $S'$  містить множину регулярних точок: адже на цій множині мінор другого порядку

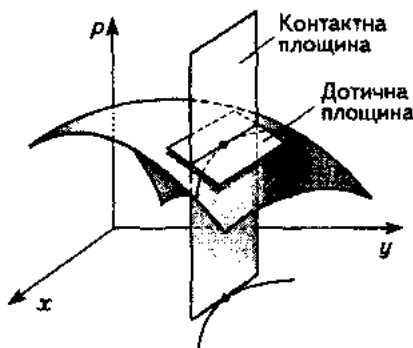


Рис. 1.22

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_p \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -F'_p$$

не перетворюється в нуль. На множині  $S'$  рівняння (1.104) природно породжує поле напрямів: кожній точці  $(x_0, y_0, p_0)$  відповідає пряма  $L(x_0, y_0, p_0)$ , по якій перетинаються дотична й контактна площини:

$$L(x_0, y_0, p_0) = TS(x_0, y_0, p_0) \cap \Pi(x_0, y_0, p_0).$$

Із властивостей контактної площини випливає, що так побудоване поле напрямів  $\mathcal{L}$  і є шуканим. Його можна розглядати також як геометричний еквівалент диференціального рівняння на поверхні, заданого у вигляді системи

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_x(x, y, p)dx + F'_y(x, y, p)dy + F'_p(x, y, p)dp = 0, \\ dy - p dx = 0. \end{cases} \quad (1.113)$$

Тут перше рівняння виділяє в  $\mathbb{R}^3$  точки поверхні  $S$ ; друге рівняння для кожної точки  $(x, y, p) \in S$  визначає дотичну площину, а третє — контактну площину, які проходять через цю точку. Зауважимо, що, користуючися методом параметризації, ми зводимо систему (1.113) до рівняння (1.109'). Якщо  $u(t), v(t)$  є розв'язком цього рівняння, то трійка

$$\begin{aligned} x(t) &= X(u(t), y(t)), \\ y(t) &= Y(u(t), y(t)), \quad p(t) = P(u(t), y(t)) \end{aligned}$$

задовольняє зазначену систему (1.113). Отже, метод параметризації можна використовувати для відшукування інтегральних кривих побудованого поля напрямів на поверхні. Ділянка кожної такої кривої, утворена з регулярних точок, проєктується в інтегральну криву рівняння (1.104). Складніша ситуація виникає, коли деяка інтегральна крива  $\Gamma$  на поверхні проходить через нерегулярну точку  $(x_*, y_*, p_*) \in S'$ . У цій точці вона має вертикальну дотичну, бо і контактна, і дотична площини в  $(x_*, y_*, p_*) \in S'$  вертикальні. Тому проєкція  $\Gamma$  на площину  $xOy$  у точці  $(x_*, y_*)$  може мати особливість типу точки звороту. Продемонструємо це явище на елементарному прикладі.

□ Приклад 1.20

Розглянемо рівняння  $x + (y')^2 = 0$ .

Поверхня  $S$  являє собою параболічний циліндр, заданий у  $\mathbb{R}^3$  рівнянням  $F(x, y, p) := x + p^2 = 0$ . Множину регулярних точок утворюють усі точки цього циліндра, крім тих, що лежать на осі ординат. Дійсно, нерегулярні точки визначаються системою умов

$$\begin{cases} F(x, y, p) := x + p^2 = 0, \\ F'_p(x, y, p) := 2p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ p = 0. \end{cases}$$

Далі, матриця  $B(x, y, p)$  має вигляд

$$B(x, y, p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2p \\ -p & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що її ранг усюди дорівнює двом. Тому  $S' = S$ , і, отже, диференціальне рівняння визначає поле напрямів на всій поверхні  $S$ . Зауважимо, що ця поверхня є графіком функції  $x = -p^2$ . Застосувавши метод параметризації, за допомогою основного диференціального співвідношення дістаємо рівняння на площину  $yOp$ :

$$dy = -2p^2 dp \Rightarrow y = -2p^3/3 + c.$$

Таким чином, інтегральні криві поля напрямів на поверхні задаються рівняннями

$$x = -p^2, \quad y = -2p^3/3 + c \quad (p \in \mathbb{R} \text{ — незалежна змінна}).$$

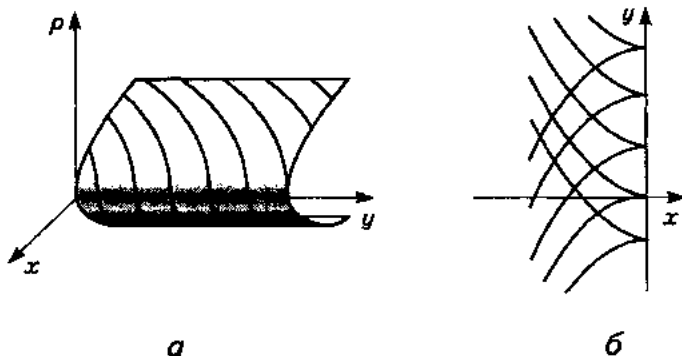


Рис. 1.23



(На рис. 1.23, *a* їх зображено жирними лініями.) Проекції цих кривих на площину  $xOy$  являють собою сім'ю напівкубічних парабол  $y = \mp 2x^{3/2}/3 + c$ . Таким чином, вісь ординат складається з точок звороту. З кожної такої точки виходить дві інтегральні криві — вітки напівкубічних парабол (рис. 1.23, *б*).

#### 1.10.4. Дискримінантні криві та особливі розв'язки

Як показує приклад 1.20, точки, де порушуються умови теореми 1.20, можуть виявитись особливими для інтегральних кривих відповідного неявного рівняння. Інший характерний тип поведінки інтегральних кривих в околі таких точок можна спостерігати на прикладі рівняння

$$y^2 + (y')^2 = 1. \quad (1.114)$$

Циліндричну поверхню  $S$ , задану рівнянням  $y^2 + p^2 = 1$ , можна параметризувати таким чином:

$$x = u, \quad y = \sin v, \quad p = \cos v.$$

Основне диференціальне співвідношення породжує на площині параметрів  $u, v$  рівняння  $(dv - du)\cos v = 0$ , розв'язки якого визначає сукупність

$$\begin{cases} \cos v = 0, \\ v = u + c. \end{cases}$$

Розв'язками ж вихідного рівняння (1.114) є пара прямих  $y = \pm 1$  та сім'я синусоїд  $y = \sin(x + c)$  (рис. 1.24, *б*). Ця сім'я, яку ми позначимо через  $\mathcal{F}$ , є проекцією на площину  $xOy$  сім'ї гвинтових ліній, що лежать на поверхні  $S$  (рис. 1.24, *a*):

$$y = \sin(x + c), \quad p = \cos(x + c).$$

Очевидно, що кожна з указаних синусоїд дотикається прямих  $y = \pm 1$ , які, з цього погляду, природно називати обвідними сім'ї  $\mathcal{F}$ . Далі,

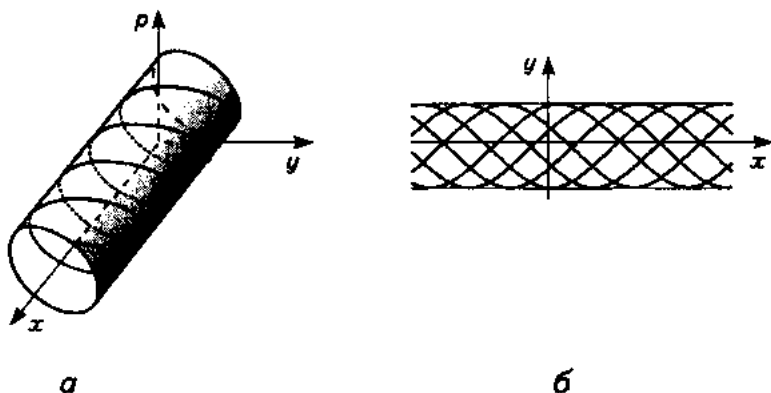


Рис. 1.24

$$\begin{cases} F(x, y, p) := y^2 + p^2 - 1 = 0, \\ F'_p(x, y, p) := 2p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1, \\ p = 0, \end{cases}$$

звідки випливає, що зазначені прямі є проєкціями на площину  $xOy$  множини нерегулярних точок, а тому вздовж них порушуються умови теореми 1.20. Між цими двома фактами існує тісний зв'язок, який зараз досліджуватиметься.

Як нам уже відомо, множина нерегулярних точок поверхні  $S$  визначається системою

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0. \end{cases} \quad (1.115)$$

### ⇒ Означення 1.25

*Проекцію множини нерегулярних точок на площину  $xOy$  називають  $p$ -дискримінантою.*

Припустивши, що з (1.115) можна виключити змінну  $p$ , як наслідок дістанемо співвідношення  $\Phi(x, y) = 0$ . За певних умов воно визначає одну або кілька кривих, які називають  $p$ -дискримінантними.

### ⇒ Означення 1.26

*Точку  $(x_0, y_0)$  називають точкою розгалуження інтегральних кривих рівняння (1.104), якщо вона є точкою дотику принаймні двох його*

*інтегральних кривих, які не збігаються в як завгодно малому околі цієї точки.*

У літературі з диференціальних рівнянь як синонім уведеного поняття застосовується також термін *точка неєдиності розв'язку*.

### ⇒ **Означення 1.27**

*Криву  $\gamma$  називають особливою інтегральною кривою, якщо для кожної точки  $P \in \gamma$  знайдеться інша інтегральна крива, яка дотикається кривій  $\gamma$  у точці  $P$  і не збігається з  $\gamma$  у будь-якому околі цієї точки. Розв'язок, графік якого є особливою інтегральною кривою, називають особливим.*

Зрозуміло, що особлива інтегральна крива складається з точок розгалуження інтегральних кривих.

### **Твердження 1.10**

Особлива інтегральна крива є  $p$ -дискримінантною кривою.

### **Доведення**

Згідно з теоремою 1.21 у точці, прообраз якої складається лише з регулярних точок, дотик інтегральних кривих неможливий.

### ⊙ **Наслідок 1.5**

*Якщо жодна  $p$ -дискримінантна крива рівняння (1.104) не є інтегральною, то це рівняння не має особливих розв'язків.*

З іншого боку, якщо  $p$ -дискримінантна крива є інтегральною, то не виключено, що вона є особливою. Опишемо кілька підходів до відшукування особливих розв'язків рівняння (1.104).

• **Спосіб прямої перевірки.** Припустимо, що нам удалося знайти однопараметричну сім'ю розв'язків рівняння (1.104):

$$y = \varphi(x, c). \quad (1.116)$$

Нехай  $p$ -дискримінантна крива є інтегральною, описується рівнянням  $y = \eta(x)$ ,  $x \in I$  і будь-яка її ділянка не збігається з жодною кривою сім'ї (1.116). Аби визначити, що ця крива є особливою, достатньо для довільного  $x_0 \in I$  встановити існування розв'язку  $c = c(x_0)$  системи

$$\begin{cases} \varphi(x_0, c) = \eta(x_0), \\ \varphi'_x(x_0, c) = \eta'(x_0). \end{cases}$$

Виконання цих двох умов при  $c = c(x_0)$  означає, що крива, задана рівнянням  $y = \varphi(x, (c(x_0)))$ , дотикається  $p$ -дискримінантної кривої. А оскільки  $x_0$  — довільна точка з інтервалу  $I$ , то  $p$ -дискримінантна крива є особливою.

**□ Приклад 1.21**

*Застосуємо описаний спосіб відшукування особливих розв'язків до рівняння Клеро з прикладу 1.18 за додаткової умови  $g'(p) \neq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}$ .*

Як було показано, рівняння Клеро має сім'ю розв'язків  $y = \varphi(x, c) := cx + g(c)$ . Його  $p$ -дискримінанта визначається системою

$$\begin{cases} y - xp - g(p) = 0, \\ x + g'(p) = 0, \end{cases}$$

і, отже, її можна подати в параметричному вигляді рівняннями

$$x = -g'(\tau), \quad y = -g'(\tau)\tau + g(\tau).$$

У прикладі 1.18 було показано, що ці співвідношення визначають частинний розв'язок рівняння Клеро. Це означає, що  $p$ -дискримінанта є інтегральною кривою. Оскільки функція  $-g'(\tau)$  монотонна, то вона має обернену  $\tau = \tau(x)$ , визначену на деякому інтервалі  $I$ , а тоді рівняння  $p$ -дискримінантної кривої можна подати у вигляді  $y = \eta(x) := x\tau(x) + g(\tau(x))$ .

Тепер покажемо, що дана крива є особливою. Для цього потрібно переконатися в тому, що для кожного  $x_0 \in I$  система

$$\begin{cases} cx_0 + g(c) = x_0\tau(x_0) + g(\tau(x_0)), \\ c = \tau(x_0) + x_0\tau'(x_0) + g'(\tau(x_0))\tau'(x_0) \end{cases}$$

має розв'язок  $c = c(x_0)$ . Оскільки  $-g'(\tau(x)) \equiv x$ , то очевидно, що шуканим розв'язком є  $c(x_0) = \tau(x_0)$ . Отже, в точці з абсцисою  $x_0 \in I$   $p$ -дискримінанта дотикається прямої  $y = cx + g(c)$  при  $c = \tau(x_0)$ .

Нарешті зауважимо, що оскільки  $\tau(x)$  є строго монотонною функцією, а  $\eta'(x) = \tau(x)$ , то жодна ділянка  $p$ -дискримінантної кривої не збігається з лінійною функцією. Таким чином,  $p$ -дискримінанта рівняння Клеро зі строго опуклою функцією  $g(p)$  є особливою інтегральною кривою.

• **Метод обвідної.** Нехай сім'я інтегральних кривих рівняння (1.104) відома й описується рівнянням

$$\Phi(x, y, c) = 0, \tag{1.117}$$

де  $\Phi \in C^1(\mathcal{G} \mapsto \mathbb{R})$  ( $\mathcal{G}$  — область у просторі  $\mathbb{R}^3$ ).

### ⇒ Означення 1.28

Криву  $\gamma$  називають *обвідною сім'ї* (1.117), якщо для кожної точки  $P \in \gamma$  знайдеться крива цієї сім'ї, яка дотикається кривої  $\gamma$  у точці  $P$  і не збігається з  $\gamma$  у будь-якому околі точки  $P$ .

Безпосередньо з означення 1.28 випливає, що обвідна сім'ї інтегральних кривих є особливою інтегральною кривою.

Відзначимо, що обвідні природно виникають при дослідженні закономірностей поширення хвильових фронтів. Так, згідно з принципом Гюйгенса кожна точка поверхні, якої досягла в даний момент хвиля, стає джерелом вторинних елементарних хвиль. Хвильовий фронт у кожен наступний момент часу являє собою обвідну цих вторинних хвиль.

Обвідна, задана рівняннями  $x = \xi(\tau)$ ,  $y = \eta(\tau)$ ,  $\tau \in J$ , визначає так званий закон прикріплення  $c = c(\tau)$ . Він показує, що в точці  $(\xi(\tau), \eta(\tau))$  кривої  $\gamma$  дотикається саме та крива сім'ї, яка відповідає значенню  $c = c(\tau)$ . Оскільки точка  $(\xi(\tau), \eta(\tau))$  належить цій кривій із сім'ї, то

$$\Phi(\xi(\tau), \eta(\tau), c(\tau)) = 0 \quad \forall \tau \in J. \quad (1.118)$$

Укажемо умови існування обвідної. Для цього введемо поняття *c-дискримінантної кривої*.

### ⇒ Означення 1.29

Криву  $\gamma$ , задану рівняннями  $x = \xi(\tau)$ ,  $y = \eta(\tau)$ ,  $\tau \in J$ , називають *c-дискримінантною кривою* із законом прикріплення  $c = c(\tau)$ , якщо для кожного  $\tau \in J$  трійка  $(\xi(\tau), \eta(\tau), c(\tau))$  задовольняє систему

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0, \\ \Phi'_c(x, y, c) = 0. \end{cases}$$

Усюди надалі йтиметься про обвідні та *c-дискримінантні криві* з диференційовними законами прикріплення, для яких функція  $c(\tau)$  не перетворюється в сталу на жодному інтервалі своєї області визначення. Такий закон прикріплення називатимемо *нетривіальним*.

### Твердження 1.11

Обвідна з нетривіальним законом прикріплення є *c-дискримінантною кривою*.

### Доведення

З одного боку, якщо  $x = x_c(t)$ ,  $y = y_c(t)$ ,  $t \in I_c$  — рівняння кривої сім'ї, яка відповідає параметру  $c$ , то

$$\begin{aligned} \Phi(x_c(t), y_c(t), c) &= 0 \quad \forall t \in I_c \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi'_x(x_c(t), y_c(t), c)\dot{x}_c(t) + \Phi'_y(x_c(t), y_c(t), c)\dot{y}_c(t) &= 0 \quad (1.119) \\ &\forall t \in I_c. \end{aligned}$$

З іншого боку, якщо здиференціювати тотожність (1.118), то дістанемо

$$\begin{aligned} \Phi'_x(\xi(\tau), \eta(\tau), c(\tau))\xi'(\tau) + \Phi'_y(\xi(\tau), \eta(\tau), c(\tau))\eta'(\tau) + \\ + \Phi'_c(\xi(\tau), \eta(\tau), c(\tau))c'(\tau) = 0. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Але для кожного  $\tau \in J$  знайдеться крива сім'ї, яка відповідає значенню параметра  $c = c(\tau)$  і при деякому  $t = t(\tau)$  дотикається обвідної  $\gamma$  у точці  $(\xi(\tau), \eta(\tau)) = (x_{c(\tau)}(t(\tau)), y_{c(\tau)}(t(\tau)))$ . Це означає, що дотичні вектори  $(\dot{x}_{c(\tau)}(t(\tau)), \dot{y}_{c(\tau)}(t(\tau)))$  і  $(\xi'(\tau), \eta'(\tau))$  колінеарні. Тенер із (1.119), (1.120) та припущення про нетривіальність закону прикріплення (не існує інтервалу, на якому  $c'(\tau) \equiv 0$ ) впливає рівність

$$\Phi'_c(\xi(\tau), \eta(\tau), c(\tau)) = 0, \quad (1.121)$$

яка разом із (1.118) означає, що  $\gamma$  —  $c$ -дискримінантна крива. Достатню умову існування обвідної встановлює така теорема.

### Теорема 1.22

Нехай сім'я кривих (1.117) має  $c$ -дискримінантну криву

$$\gamma: x = \xi(\tau), \quad y = \eta(\tau), \quad \tau \in J$$

з нетривіальним законом прикріплення  $c = c(\tau)$ . Припустимо також, що існує  $\Phi''_{cc} \in C(\mathcal{G} \mapsto \mathbb{R})$  і при кожному  $\tau \in J$  та при  $x = \xi(\tau)$ ,  $y = \eta(\tau)$ ,  $c = c(\tau)$  справджуються умови

$$\left| \Phi'_x \right| + \left| \Phi'_y \right| \neq 0, \quad \Phi''_{cc} \neq 0.$$

Тоді  $\gamma$  є обвідною сім'ї кривих (1.117).

### Доведення

Нехай  $(x_0, y_0)$  — довільна точка кривої  $\gamma$ , а  $c_0$  — значення параметра  $c$ , яке відповідає точці  $(x_0, y_0)$  згідно із законом прикріплення. Без обмеження загальності міркувань припустимо, що  $\Phi'_y(x_0, y_0, c_0) \neq 0$ . Тоді в околі точки  $(x_0, y_0)$  параметром кривої  $\gamma$  можна вважати змінну  $x$ .

Справді, нехай  $c$ -дискримінантну криву задано рівняннями  $x = \xi(\tau)$ ,  $y = \eta(\tau)$ ,  $\tau \in J$  і їй відповідає нетривіальний закон прикріплення  $c = c(\tau)$ . Із (1.118) дістаємо (1.120), а оскільки для  $c$ -дискримінантної кривої виконується рівність (1.121), то

$$\Phi'_x(\xi(\tau), \eta(\tau), c(\tau))\xi'(\tau) + \Phi'_y(\xi(\tau), \eta(\tau), c(\tau))\eta'(\tau) = 0. \quad (1.122)$$

Нехай  $\tau_0 \in J$  — таке значення, що  $\xi(\tau_0) = x_0$ ,  $\eta(\tau_0) = y_0$ ,  $c(\tau_0) = c_0$ . Тоді з (1.121) й умови  $|\xi'(\tau)| + |\eta'(\tau)| \neq 0$  випливає, що  $\xi'(\tau) \neq 0$ , принаймні в околі точки  $\tau_0$ . Отже,  $\xi(\tau)$  — монотонна функція в околі  $\tau_0$ , і ми маємо право зробити заміну параметра за формулою  $\xi(\tau) = x$ . Надалі, аби не ускладнювати позначень, вважатимемо, що  $\tau = x$ .

Таким чином, в околі точки  $(x_0, y_0)$   $c$ -дискримінантна крива є графіком функції  $y = \eta(x)$ ,  $x \in J$ . З (1.120) при  $\tau = x$  легко знаходимо

$$\eta'(x_0) = -\frac{\Phi'_x(x_0, y_0, c_0)}{\Phi'_y(x_0, y_0, c_0)}.$$

Далі, за теоремою про неявну функцію в околі  $(x_0, y_0)$  інтегральна крива, яка відповідає значенню параметра  $c_0$  і проходить через цю точку, теж є графіком функції  $y = y(x)$ , визначеної на деякому інтервалі  $I$ , що містить точку  $x_0$ . При цьому  $y(x) \in C^1(I \mapsto \mathbb{R})$ ,  $\Phi(x, y(x), c_0) = 0$  для всіх  $x \in I$ ,  $y(x_0) = y_0$  і

$$y'(x_0) = -\frac{\Phi'_x(x_0, y_0, c_0)}{\Phi'_y(x_0, y_0, c_0)}.$$

Таким чином,  $y(x_0) = \eta(x_0)$  і  $y'(x_0) = \eta'(x_0)$ . Це означає, що в точці  $(x_0, y_0)$  зазначена інтегральна крива дотикається  $c$ -дискримінантної кривої. Залишилося довести, що ці дві криві не збігаються в як завгодно малому околі точки  $x_0$ . Припустимо, навпаки, що

$y(x) = \eta(x)$  у деякому околі точки  $x_0$ . Тоді з урахуванням (1.122) в цьому околі маємо

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \Phi(x, y(x), c_0) = \Phi(x, \eta(x), c_0) = \\ &= \Phi(x, \eta(x), c(x) + (c_0 - c(x))) = \\ &= \Phi(x, \eta(x), c(x)) + \Phi'_c(x, \eta(x), c(x))(c_0 - c(x)) + \\ &+ \frac{1}{2} \Phi''_{cc}(x, \eta(x), c(x))(c_0 - c(x))^2 + o((c_0 - c(x))^2) = \\ &= \frac{1}{2} \Phi''_{cc}(x, \eta(x), c(x))(c_0 - c(x))^2 + o((c_0 - c(x))^2) \neq 0, \end{aligned}$$

оскільки закон прикріплення нетривіальний.

□ **Приклад 1.22**

*Застосуємо метод обвідних для відшукування особливих розв'язків рівняння Клеро з прикладу 1.18 за додаткової умови  $g''(p) \neq 0 \forall p \in \mathbb{R}$ .*

Як було показано, рівняння Клеро має сім'ю розв'язків  $y = \varphi(x, c) := cx + g(c)$ . Його  $c$ -дискримінантна крива визначається системою

$$\begin{cases} y - xc - g(c) = 0, \\ x + g'(c) = 0 \end{cases}$$

і, отже, її можна подати в параметричному вигляді рівняннями

$$x = -g'(\tau), \quad y = -g'(\tau)\tau + g(\tau)$$

з нетривіальним законом прикріплення  $c = \tau$ . Оскільки в даному випадку  $\Phi'_y = 1$ ,  $\Phi''_{cc} = g''(c) \neq 0$ , то  $c$ -дискримінантна крива є обвідною, а її рівняння визначають особливий розв'язок рівняння Клеро (рис. 1.25, а).

Наголосимо, що  $c$ -дискримінантна крива може виявитись обвідною й у разі порушення умов теореми 1.22. Наприклад, рівняння  $(y')^3 - y = 0$  має сім'ю інтегральних кривих  $\Phi(x, y, c) := y^2 - (2(x + c)/3)^3 = 0$ , для якої пряма  $y = 0$  є  $c$ -дискримінантною із законом прикріплення  $c = -x$ . Оскільки  $\Phi'_x(x, y, -x) = \Phi'_y(x, y, -x) = 0$ , то умови теореми 1.22 порушу-



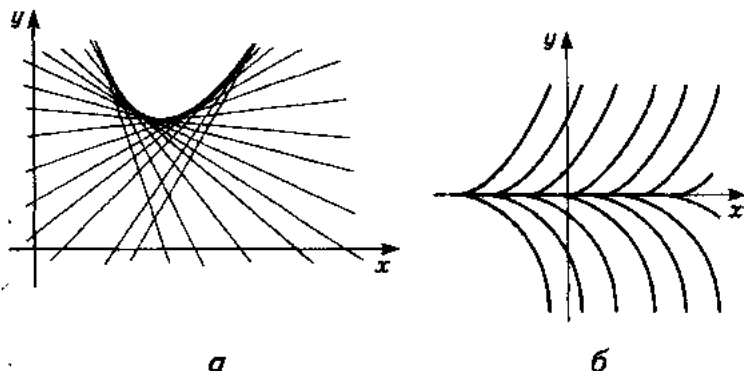


Рис. 1.25

ються. Водночас графік кожного розв'язку  $y = \pm(2(x+c)/3)^{3/2}$  дотикається осі  $Ox$  у точці з абсцисою  $x = -c$  (рис. 1.25, б). Отже, тривіальний розв'язок особливий.

• **Метод  $p$ -дискримінантної кривої.** Перевага цього методу над іншими підходами полягає в тому, що для його застосування не потрібно інтегрувати відповідне неявне диференціальне рівняння.

### Твердження 1.12

Нехай  $F(x, y, p) \in C^2(G \rightarrow \mathbb{R})$  і на множині нерегулярних точок справджуються умови

$$F'_x + pF'_p = 0; \quad (1.123)$$

$$F'_y F''_{pp} \neq 0. \quad (1.124)$$

Тоді  $p$ -дискримінанта є об'єднанням особливих інтегральних кривих рівняння (1.104).

### Доведення\*

Нехай  $(x_0, y_0, p_0)$  — довільна нерегулярна точка. В її околі множина нерегулярних точок є кривою, яка описується рівняннями

$$y = \eta(x), \quad p = \zeta(x), \quad x \in I, \quad (1.125)$$

де  $I$  — деякий інтервал із центром у точці  $x_0$ . При цьому  $F(x, \eta(x),$

$\zeta(x) \equiv 0$ ,  $\eta(x_0) = y_0$ ,  $\zeta(x_0) = p_0$ . Дійсно, оскільки з огляду на (1.124) справджується умова

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_p \\ F''_{yp} & F''_{pp} \end{vmatrix}_{x=x_0, y=y_0, p=p_0} = (F'_y F''_{pp})_{x=x_0, y=y_0, p=p_0} \neq 0,$$

то систему (1.115) можна розв'язати відносно  $y$  та  $p$  за теоремок про неявну функцію. Таким чином, у досить малому околі точки  $(x_0, y_0)$  графік функції  $y = \eta(x)$  є  $p$ -дискримінантною кривою.

Покажемо, що ця крива є інтегральною. Дійсно, оскільки

$$F(x, \eta(x), \zeta(x)) = 0, \quad F'_p(x, \eta(x), \zeta(x)) = 0 \quad \forall x \in I, \quad (1.126)$$

то диференціюванням першої із цих рівностей та з урахуванням другої дістаємо

$$F'_x(x, \eta(x), \zeta(x)) + \eta'(x) F'_y(x, \eta(x), \zeta(x)) = 0.$$

Але згідно з (1.123) маємо

$$F'_x(x, \eta(x), \zeta(x)) + \zeta(x) F'_y(x, \eta(x), \zeta(x)) = 0.$$

Якщо взяти до уваги умову (1.124), то з останніх двох рівностей випливає, що  $\eta'(x) \equiv \zeta(x)$ , а тому  $F(x, \eta(x), \eta'(x)) \equiv 0$ , тобто функції  $\eta(x)$  є розв'язком рівняння (1.104).

Тепер потрібно показати, що графіка функції  $y = \eta(x)$  у кожній його точці дотикається деяка інша інтегральна крива рівняння (1.104). Зрозуміло, що відповідні міркування достатньо застосувати лише до точки  $x_0$ , адже  $(x_0, y_0, p_0)$  — довільна точка  $p$ -дискримінанти. Скористаємося методом параметризації. Оскільки  $F'_y(x_0, y_0, p_0) \neq 0$ , то за теоремою про неявну функцію в околі точки  $(x_0, y_0, p_0)$  поверхня  $S$  є графіком деякої функції  $y = f(x, p) \in C^2(D \mapsto \mathbb{R})$ , де  $D$  — круг із центром у точці  $(x_0, p_0)$ . При цьому виконуються рівності

$$\begin{aligned} F(x, f(x, p)) &= 0 \quad \forall (x, p) \in D, \quad f(x_0, p_0) = y_0, \\ f(x, \zeta(x)) &= \eta(x) \end{aligned} \quad (1.127)$$

для всіх  $x \in J$ , де  $J \subseteq I$  — деякий інтервал із центром у точці  $x_0$ . Згідно з методом параметризації за допомогою основного диферен

ціального співвідношення  $dy = p dx$  у крузі  $D$  виникає диференціальне рівняння

$$df(x, p) = p dx \Leftrightarrow (f'_x - p) dx + f'_p dp = 0. \quad (1.128)$$

План наших подальших дій такий (рис. 1.26). Покажемо, що це рівняння, крім розв'язку  $p = \zeta(x)$ , породженого  $p$ -дискримінантною кривою, має інший розв'язок, який можна подати у вигляді  $p = \zeta(x) + z(x)$ , де функція  $z(x)$  не є тотожним нулем у жодному досить малому околі точки  $x_0$ , і водночас  $z(x_0) = 0$ . Такі два розв'язки відповідно до методу параметризації породжують пару розв'язків рівняння (1.104)

$$y = f(x, \zeta(x)) \equiv \eta(x), \quad y = f(x, \zeta(x) + z(x)) := y(x), \quad (1.129)$$

для яких, з урахуванням першого рівняння у (1.128), виконується умова дотику при  $x = x_0$ :

$$y(x_0) = \eta(x_0), \quad y'(x_0) = \zeta(x_0) + z(x_0) = \zeta(x_0) = \eta'(x_0).$$

Насамкінець буде показано, що не існує околу точки  $x_0$ , де  $\eta(x) \equiv y(x)$ .

Перейдемо до реалізації наміченого плану й насамперед дослідимо властивості коефіцієнтів рівняння (1.128). Спочатку покажемо, що вони перетворюються в нуль уздовж кривої  $p = \zeta(x)$ ,  $x \in J$ . Дійсно, за формулою похідної неявної функції маємо

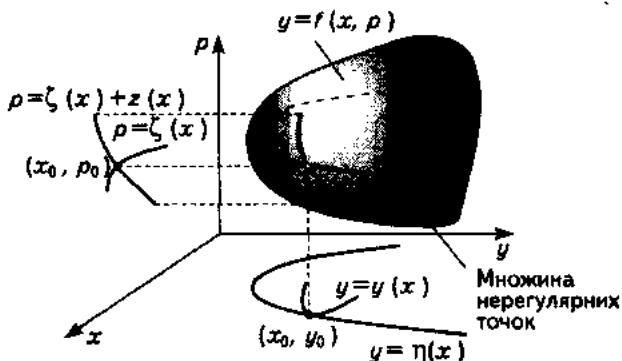


Рис. 1.26

$$f'_p = -\frac{F'_p}{F'_y} \Big|_{y=f(x,p)}, \quad f'_x - p = -\frac{F'_x}{F'_y} \Big|_{y=f(x,p)} \quad -p = -\frac{F'_x + pF'_y}{F'_y} \Big|_{y=f(x,p)}$$

Якщо тепер взяти до уваги (1.123), (1.126) та (1.127), то дістанемо

$$f'_p(x, \zeta(x)) \equiv 0, \quad f'_x(x, \zeta(x)) - \zeta(x) \equiv 0. \quad (1.130)$$

Далі,

$$f''_{pp} = -\frac{(F''_{yp}f'_p + F''_{pp})F'_y - F'_p(F''_{yy}f'_p + F''_{yp})}{(F'_y)^2} \Big|_{y=f(x,p)}$$

Звідси, зважаючи на рівності (1.126), (1.127) та (1.130), дістаємо

$$f''_{pp}(x, \zeta(x)) = \frac{F''_{pp}}{F'_y} \Big|_{y=f(x,p)} \neq 0.$$

Тепер у рівнянні (1.128) зробимо заміну змінної  $p = \zeta(x) + z$  з урахуванням формул

$$\begin{aligned} f'_p(x, \zeta(x) + z) &= f'_p(x, \zeta(x) + z) - f'_p(x, \zeta(x)) = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} f'_p(x, \zeta(x) + sz) ds = \left[ \int_0^1 f''_{pp}(x, \zeta(x) + sz) ds \right] z := \psi(x, z)z, \\ f'_x(x, \zeta(x) + z) - \zeta(x) &= f'_x(x, \zeta(x) + z) - f'_x(x, \zeta(x)) = \\ &= \left[ \int_0^1 f''_{xp}(x, \zeta(x) + sz) ds \right] z := \varphi(x, z)z \end{aligned}$$

Його можна подати у вигляді

$$\psi(x, z)z \left( \frac{dz}{dx} + \zeta'(x) \right) + (\varphi(x, z) - 1)z = 0.$$

Відтак досліджуватимемо рівняння

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1 - \varphi(x, z)}{\psi(x, z)} - \zeta'(x) =: g(x, z) \quad (1.131)$$

із неперервною функцією  $g(x, z)$  в околі точки  $(x_0, 0)$ . За теоремою Пеано воно має розв'язок  $z = z(x)$ , який задовольняє початкову умову  $z(x_0) = 0$ . Покажемо, що не існує інтервалу, на якому  $z(x)$  є тотожним нулем. Для цього достатньо перевірити, що  $g(x, 0)$  не перетворюється в нуль в околі точки  $x_0$ . Здиференціювавши першу з рівностей (1.130), знайдемо

$$\zeta'(x) = -\frac{f_{xp}''(x, \zeta(x))}{f_{pp}''(x, \zeta(x))},$$

а оскільки  $\psi(x, 0) = f_{pp}''(x, \zeta(x))$  і  $\varphi(x, 0) = f_{xp}''(x, \zeta(x))$ , то маємо потрібну властивість функції  $g(x, z)$ :

$$g(x, 0) = \frac{1}{f_{pp}''(x, \zeta(x))} \neq 0.$$

Таким чином, встановлено, що рівняння (1.128) має пару розв'язків, які породжують розв'язки (1.129) досліджуваного неявно-го рівняння.

Аби завершити доведення твердження, зауважимо, що з урахуванням (1.129) та формули Тейлора маємо

$$\begin{aligned} y(x) - \eta(x) &= f(x, \zeta(x) + z(x)) - f(x, \zeta(x)) = \\ &= \frac{1}{2} f_{pp}''(x, \zeta(x) + \theta(x)z(x))z^2(x), \end{aligned}$$

де функція  $\theta(x)$  визначена в досить малому околі точки  $x_0$  і набуває значень на інтервалі  $(0, 1)$ . Оскільки  $f_{pp}''(x_0, p_0) \neq 0$  і функція  $z(x)$  не є тотожним нулем у жодному досить малому околі точки  $x_0$ , то не існує околу цієї точки, в якому  $y(x) \equiv \eta(x)$ .

#### □ Приклад 1.23

Застосуємо метод  $p$ -дискримінантної кривої до рівняння Клеро з прикладу 1.18 за додаткової умови  $g''(p) \neq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}$ .

У цьому разі  $F = y - xp - g(p)$ ,  $F'_x = -p$ ,  $F'_y = 1$ ,  $F''_{pp} = -g''(p)$ . Усі умови твердження 1.12 справджуються, а тому  $p$ -дискримінантна крива, рівняння якої одержується виключенням змінної  $p$  із системи

$$\begin{cases} y - xp - g(p) = 0, \\ x + g'(p) = 0, \end{cases}$$

є особливою інтегральною кривою.

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

① Зінтегрувати рівняння:

а)  $y = 2xy' - 4(y')^2$ ;      б)  $y' = \exp(xy'/y)$ .

② Знайти криву з такою властивістю: а) координатні осі відтинають від ноніс, проведеної через довільну точку кривої, відрізок сталої довжини. б) координатні осі відтинають від дотичної, проведеної через довільну точку кривої, відрізок сталої довжини  $a$ .

③ Знайти криві, ортогональні інтегральним кривим рівняння  $y(y')^2 + xy' + 1 = 0$  (див. приклад В.7).

④ Визначити, скільки інтегральних кривих рівняння  $\ln y' - y' + x + y = 0$  проходить через точку  $(2, 2)$ .

⑤ Нехай  $a_k(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R})$ ,  $k = 1, \dots, n$  і для деякої точки  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  поліном  $z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n$ , де  $\alpha_k = a_k(x_0, y_0)$ , має  $m$  простих дійсних коренів. Показати, що в деякому околі  $B(x_0, y_0)$  зазначеної точки немає рівняння

$$(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + a_n(x, y) = 0$$

еквівалентне сукупності рівнянь  $\{y' = f_k(x, y)\}_{k=1, \dots, m}$ , де  $f_k(x, y) \in C^1(B(x_0, y_0) \mapsto \mathbb{R})$ .

⑥ Знайти загальні та особливі розв'язки рівнянь:

а)  $2(y')^2(y - xy') = 1$ ;      б)  $y - xy' + e^{xy'} = 0$ .

⑦ Довести, що рівняння  $x^2 + y^2 + (y')^2 = 1$  не має особливих інтегральних кривих.

⑧ Показати, що умова (1.123) твердження 1.12 означає, що на множині нерівнянних точок контактна й дотична площини збігаються.

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ  
РІВНЯННЯ

## 2.1

## Основні факти лінійної теорії

Систему рівнянь

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

в якій  $a_{ij}(t), f_i(t)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) — задані скалярні функції, визначені на інтервалі (відрізку)  $I$ , а  $x_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — шукані функції, називають *n*-вимірною лінійною системою диференціальних рівнянь у нормальній формі (скорочено — ЛС). Спочатку, для визначеності, в ролі скалярів виступатимуть дійсні числа. Однак при цьому слід урахувувати, що всі основні факти лінійної теорії легко поширюються на випадок поля  $\mathbb{C}$ .

Увівши позначення

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

систему (2.1) можна записати у вигляді векторного рівняння

$$\dot{x} = A(t)x + f(t). \quad (2.1')$$

Якщо  $f(t) \neq 0$  на  $I$ , то (2.1') називається *лінійною неоднорідною системою* (ЛНС). Навпаки, при  $f(t) \equiv 0$  маємо *лінійну однорідну систему* (ЛОС)

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (2.)$$

Виділення лінійних систем в окремий об'єкт дослідження зумовлене кількома причинами. По-перше, такі системи правлять за математичні моделі різноманітних процесів та явищ і становлять значний інтерес із погляду застосувань у механіці, фізиці, біології, економіці. По-друге, лінійні системи є неодмінним атрибутом такого важливого інструменту аналізу диференціальних рівнянь, як метод лінеаризації (див. п. 1.9); у цій якості їх використовують для одержання інформації про системи складнішої структури. Нарешті, ЛС цікаві з суто математичного погляду: сучасна теорія цих систем є яскравим прикладом взаємодії таких дисциплін, як алгебра, аналіз, геометрія, топологія та ін.

У лінійній теорії поряд із системами в нормальній формі досліджують скалярні та векторні диференціальні рівняння вищих порядків вигляду

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)x = f(t) \quad (2.3)$$

та

$$A_0(t) \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t) \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + A_m(t)x = f(t), \quad (2.4)$$

де  $a_i(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) та елементи  $(n \times n)$ -вимірних матриць  $A_j(t)$  ( $j = 0, \dots, m$ ) є скалярними функціями, визначеними на інтервалі (відривку)  $I$ . Нижче буде показано, що за умов  $a_0(t) \neq 0$ ,  $t \in I$  та  $\det A_0(t) \neq 0$ ,  $t \in I$  більшість теоретичних фактів, які стосуються рівнянь (2.3) і (2.4), є наслідками відповідних тверджень про ЛС у нормальній формі. Тому спочатку зосередимо увагу на вивченні саме цих систем.



### 2.1.1. Теорема існування та єдиності розв'язку ЛОС

Важлива особливість системи (2.2) полягає в тому, що для неї розв'язок задачі Коші з довільними початковими даними існує й має властивість єдиності на всьому інтервалі  $I$  неперервності елементів матриці  $A(t)$ . Більше того, такий розв'язок можна побудувати як границю послідовних наближень, рівномірно збіжних на будь-якому відрізку, що міститься в  $I$ . Для обґрунтування цього результату нам знадобиться кілька допоміжних тверджень.

Надалі символом  $\|x\|$  позначатимемо евклідову норму вектора  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|x\| := \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

За узгоджену з нею норму матриці  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  візьмемо

$$\|A\| := \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

З нерівності Коші—Буняковського негайно випливає така оцінка:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|. \quad (2.5)$$

#### Лема 2.1

Нехай  $x(t) \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$  і  $t_0, t \in I$ . Покладемо

$$\int_{t_0}^t x(s) ds = \left( \int_{t_0}^t x_1(s) ds, \dots, \int_{t_0}^t x_n(s) ds \right).$$

Тоді

$$\left\| \int_{t_0}^t x(s) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|x(s)\| ds \right|.$$

### Доведення

Для визначеності вважаємо, що  $t > t_0$ . Розіб'ємо відрізок інтегрування  $[t_0, t]$  на  $N$  рівних частин точками  $t_k = t_0 + k\Delta(N)$ ,  $k = 1, \dots, N$  де  $\Delta(N) = (t - t_0)/N$ . Тоді, використовуючи відомі властивості евклідової норми та інтеграла Рімана, дістанемо

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t x(s) ds \right\| &= \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N x(t_k) \Delta(N) \right\| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \|x(t_k)\| \Delta(N) = \\ &= \int_{t_0}^t \|x(s)\| ds. \end{aligned}$$

Розглянемо послідовність вектор-функцій  $x_k : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  Рівномірна збіжність цієї послідовності до вектор-функцій  $x(t)$  означає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in [a, b]} \|x(t) - x_k(t)\| = 0.$$

Вектор-функція  $x(t)$  як границя рівномірно збіжної послідовності вектор-функцій сама є неперервною на  $[a, b]$ .

### Лема 2.2

Якщо виконуються нерівності

$$\max_{t \in [a, b]} \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq a_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

і числовий ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  збіжний, то послідовність  $\{x_k(t)\}_{k=0, 1, 2, \dots}$  рівномірно збігається на  $[a, b]$ .

### Доведення

Вектор-функція  $x_k(t)$  є частковою сумою функціонального ряду

$$x_0(t) + \sum_{i=1}^k (x_i(t) - x_{i-1}(t)).$$

Оскільки модуль кожної компоненти вектор-функції не переви-

шує її норми, то потрібний нам результат є простим наслідком ознаки Вейерштрасса.

### Теорема 2.1

Нехай елементи матриці  $A(t)$  є неперервними функціями на відрізку  $[a, b]$ . Тоді для довільних  $t_0 \in [a, b]$  і  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  система (2.2) має єдиний розв'язок  $x(t)$ , визначений на всьому відрізку  $[a, b]$ , і такий, що  $x(t_0) = x_0$ .

#### Доведення

Повторюючи міркування з доведення теореми Пікара, легко встановлюємо, що задача Коші з початковими даними  $(t_0, x_0)$  для системи (2.2) еквівалентна векторному інтегральному рівнянню

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s) ds \quad (2.6)$$

у класі неперервних на  $[a, b]$   $\mathbb{R}^n$ -значних функцій.

Згідно з методом послідовних наближень утворюємо послідовність функцій  $x_k(t) \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ , визначених рекурентними співвідношеннями

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0, \\ x_k(t) &= \int_{t_0}^t A(s)x_{k-1}(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Покладемо  $L = \max_{t \in [a, b]} \|A(t)\|$ . Тоді, скориставшись лемою 2.1 та нерівністю (2.5), послідовно встановлюємо такі оцінки:

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_0\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t A(s)x_0 ds \right\| \leq L|t - t_0| \|x_0\|, \\ \|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t A(s)(x_1(s) - x_0) ds \right\| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t L|s - t_0| \|x_0\| ds \right| \leq \frac{L^2}{2} |t - t_0|^2 \|x_0\|, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t A(s)(x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)) ds \right\| \leq \\ &\leq L \left\| \int_{t_0}^t \frac{L^{k-1}}{(k-1)!} |s - t_0|^{k-1} \|x_0\| ds \right\| \leq \frac{L^k}{k!} |t - t_0|^k \|x_0\|. \end{aligned}$$

Звідси

$$\max_{t \in [a, b]} \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \frac{L^k}{k!} |a - b|^k \|x_0\| := a_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Оскільки ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  збіжний, то за лемою 2.2 послідовність  $\{x_k(t)\}_{k=0, 1, 2, \dots}$  рівномірно збігається до деякої функції  $x(t) \in C([a, b] \mapsto \mathbb{R}^n)$ . Тоді

$$\int_{t_0}^t A(s)x_{k-1}(s) ds \rightarrow \int_{t_0}^t A(s)x(s) ds \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

і, перейшовши до границі в (2.7), переконуємося в тому, що  $x(t)$  - розв'язок системи (2.2), який задовольняє умову  $x(t_0) = x_0$ .

Для встановлення єдиності цього розв'язку використаємо той самий спосіб, що й при доведенні теореми Пікара, і покажемо, що для кожної функції  $x(t) \in C(I \mapsto \mathbb{R}^n)$ , яка на відрізку  $I \subseteq [a, b]$  задовольняє рівняння (2.6), справджується нерівність

$$\|x(t) - x_k(t)\| \leq \frac{L^{k+1}}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1} \max_{t \in I} \|x(t)\| \quad (2.8)$$

при будь-якому  $k = 0, 1, 2, \dots$

Дійсно, при  $k = 0$  дана нерівність виконується:

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq \left\| \int_{t_0}^t A(s)x(s) ds \right\| \leq L |t - t_0| \max_{t \in I} \|x(t)\|.$$

Припустивши, що вона справджується для  $k = i - 1$ , при  $k = i$  мати мемо

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_i(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t A(s)(x(s) - x_{i-1}(s)) ds \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \frac{L^i}{i!} |s - t_0|^i \max_{t \in I} \|x(t)\| ds \right| \leq \frac{L^{i+1}}{(i+1)!} |t - t_0|^{i+1} \max_{t \in I} \|x(t)\|. \end{aligned}$$

Отже, послідовність  $\{x_k(t)\}_{k=0,1,2,\dots}$  збігається до кожного розв'язку рівняння (2.6), звідки й випливає його єдиність.

◆ **Зауваження 2.1**

Очевидним наслідком доведеної теореми є результат про існування й єдиність розв'язку задачі Коші для ЛОС із неперервною матрицею на інтервалі  $I \subseteq (-\infty, \infty)$ .

◆ **Зауваження 2.2**

Для тих, хто знайомий із принципом відображень стиску (див., наприклад, [5]), можна запропонувати компактніше доведення теореми 2.1.

А саме, на множині функцій  $C([a, b] \mapsto \mathbb{R}^n)$  уведемо структуру повного метричного простору, задавши метрику формулою

$$\rho(x_1(t), x_2(t)) = \max_{t \in [a, b]} \left( e^{-L|t-t_0|} \|x_1(t) - x_2(t)\| \right).$$

Очевидно, що оператор

$$\varphi[x(\cdot)](t) := x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s) ds$$

відображає цей простір у себе. Крім того,

$$\begin{aligned} &\rho(\varphi[x_1(\cdot)](t), \varphi[x_2(\cdot)](t)) = \\ &= \max_{t \in [a, b]} \left\| e^{-L|t-t_0|} \int_{t_0}^t A(s) e^{L|s-t_0|} \left( e^{-L|s-t_0|} (x_1(s) - x_2(s)) \right) ds \right\| \leq \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} \left| e^{-L|t-t_0|} \int_{t_0}^t L e^{L|s-t_0|} ds \right| \rho(x_1(t), x_2(t)) \leq \\ &\leq \left( 1 - e^{-L|a-b|} \right) \rho(x_1(t), x_2(t)). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що  $\phi$  є відображенням стиску й, отже, має єдину нерухому точку  $x(t) \in C([a, b] \mapsto \mathbb{R}^n)$ , яка і є розв'язком рівняння (2.6).

У п. 2.4 буде показано, що з теореми 2.1 випливає існування розв'язку з довільними початковими даними й для ЛНС.

### 2.1.2. Фундаментальна система розв'язків та загальний розв'язок лінійної однорідної системи

Надалі без додаткових застережень припускатимемо, що кожен елемент матриці  $A(t)$  є неперервною функцією на відрізку (інтервал  $I \subseteq (-\infty, \infty)$ ). З ЛОС (2.2) пов'яжемо відображення

$$L : C^1(I \mapsto \mathbb{R}^n) \mapsto C(I \mapsto \mathbb{R}^n),$$

яке кожній функції  $x(t) \in C^1(I \mapsto \mathbb{R}^n)$  ставить у відповідність функцію  $\hat{x}(t) = A(t)x(t) \in C(I \mapsto \mathbb{R}^n)$ . Кажуть, що відображення  $L$  породжене диференціальною операцією  $\frac{d}{dt} - A(t)$ .

Легко бачити, що множина  $C^1(I \mapsto \mathbb{R}^n)$  має структуру лінійного простору над полем  $\mathbb{R}$ : у цьому просторі природні операції додавання елементів та множення їх на скаляри задовольняють усі необхідні аксіоми. (Це зауваження стосується й будь-якого простору  $C^r(I \mapsto \mathbb{R}^n)$  де  $0 \leq r \leq \infty$ .) Важливою властивістю відображення  $L$  є його лінійність. Для довільного набору функцій  $x_i(t) \in C^1(I \mapsto \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, \dots, k$  і для довільного набору скалярів  $c_1, \dots, c_k$  виконується рівність

$$L(c_1 x_1(t) + \dots + c_k x_k(t)) = c_1 Lx_1(t) + \dots + c_k Lx_k(t). \quad (2.9)$$

У зв'язку з цим  $L$  називають (векторним) *лінійним диференціальним оператором* (першого порядку).

Системі (2.2) відповідає еквівалентне операторне рівняння

$$Lx = 0. \quad (2.10)$$

З рівності (2.9) негайно випливає простий, але дуже важливий результат

#### Твердження 2.1

Якщо  $x_i(t) \in C^1(I \mapsto \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, \dots, k$  — довільний набір розв'язків системи (2.2) [рівняння (2.10)], то для довільного набору скалярів  $c_1, \dots, c_k$  лінійна комбінація  $c_1 x_1(t) + \dots + c_k x_k(t)$  теж буде розв'язком цієї системи [рівняння (2.10)].

Нагадаємо, що множина  $\{x(t) \in C^1(I \mapsto \mathbb{R}^n) : Lx(t) = 0 \forall t \in I\}$  всіх розв'язків рівняння (2.10) називається ядром оператора  $L$  і позначається через  $\ker L$ . Твердження 2.1 — добре відомий факт теорії лінійних операторів:  $\ker L$  є лінійним підпростором у  $C^1(I \mapsto \mathbb{R}^n)$ .

Тепер перед нами постає завдання з'ясувати, як улаштовано підпростір  $\ker L$ . Для цього визначимо поняття лінійної залежності й незалежності вектор-функцій.

### ☞ Означення 2.1

Систему вектор-функцій  $x_i : I \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$  називають *лінійно залежною* на множині  $I$ , якщо знайдеться набір скалярів  $c_1, \dots, c_k$  такий, що

$$|c_1| + \dots + |c_k| \neq 0, \text{ але } c_1 x_1(t) + \dots + c_k x_k(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

У протилежному разі, тобто коли

$$c_1 x_1(t) + \dots + c_k x_k(t) = 0 \quad \forall t \in I \Leftrightarrow c_1 = \dots = c_k = 0,$$

дану систему функцій називають *лінійно незалежною*.

### □ Приклад 2.1

Система функцій  $1, t, \dots, t^k$  лінійно незалежна на будь-якому інтервалі  $I \subseteq (-\infty, \infty)$ . Справді, лінійна комбінація  $c_1 \cdot 1 + c_2 t + \dots + c_{k+1} t^k$  є поліномом, який за умови  $|c_1| + \dots + |c_{k+1}| \neq 0$  перетворюється в нуль не більше ніж у  $k$  точках дійсної осі.

Тепер зрозуміло, що лінійно незалежною є й система вектор-функцій  $t^j e_j$ ,  $i = 0, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, n$ , де  $e_j$  —  $j$ -й базисний орт простору  $\mathbb{R}^n$ , тобто вектор, усі компоненти якого дорівнюють нулю, крім  $j$ -ї, що дорівнює 1.

### □ Приклад 2.2

Система функцій  $1, \cos^2 t, \sin^2 t$  лінійно залежна на будь-якому інтервалі  $I \subseteq (-\infty, \infty)$ . Достатньо взяти  $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = -1$ .

### □ Приклад 2.3

Система функцій

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 0], \\ t^2, & t \in (1, 0], \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [-1, 0], \\ 0, & t \in (0, 1] \end{cases}$$

лінійно незалежна на  $[-1, 1]$ . Дійсно, з тотожності  $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \equiv 1$   $t \in [-1, 1]$  при  $t = -0,5$  випливає, що  $c_2 = 0$ , а при  $t = 0,5$  маємо рівність  $c_1 = 0$ . Водночас ця система функцій лінійно залежна на кожному відрізку  $[-1, 0]$  та  $[0, 1]$ .

Не слід плутати лінійну залежність та незалежність системи функцій  $x_i : I \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$  із поточною лінійною залежністю та незалежністю системи векторів  $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$  при кожному фіксованому  $t \in I$ . З лінійної залежності системи функцій  $x_i : I \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$ , очевидно, випливає й поточкова лінійна залежність системи векторів  $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$  при кожному  $t \in I$ . Обернене твердження в загальному випадку може виявитися хибним. Водночас лінійна незалежність системи векторів  $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$  хоча при одному  $t \in I$  зумовлює лінійну незалежність системи функцій  $x_i : I \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Повернемося до ЛОС (2.2) і дамо таке означення.

### ➤ Означення 2.2

*Фундаментальною системою розв'язків (ФСР) ЛОС (2.2) називають набір із  $n$  лінійно незалежних розв'язків цієї системи. Матрицю*

$$X(t) = [x_1(t); \dots; x_n(t)],$$

*стовпцями якої є елементи ФСР, називають фундаментальною матрицею системи (2.2).*

### Теорема 2.2

Якщо елементи матриці  $A(t)$  є неперервними функціями на  $I$ , то ФСР системи (2.2) існує.

### Доведення

Зафіксуємо  $t_0 \in I$ . За теоремою 2.1 для кожного  $j = 1, \dots, n$  існує розв'язок  $x_j(t)$  системи (2.2), який задовольняє умову  $x_j(t_0) = e_j$ , де  $e_j$  —  $j$ -й базисний орт простору  $\mathbb{R}^n$ . Оскільки вектори  $e_1, \dots, e_n$  лінійно незалежні й  $t_0 \in I$ , то побудована система функцій буде лінійно незалежною на  $I$ .

Фундаментальна матриця, утворена з розв'язків, про які йдеться в доведенні теореми 2.2, перетворюється на одиничну при  $t = t_0$ . Так фундаментальна матриця називається *нормованою* в точці  $t_0$ . З доведення випливає неєдиність ФСР ЛОС, адже замість ортів  $e_j$  як набір



**векторів** — початкових значень розв'язків системи (2.2) — можна було вибрати довільний базис простору  $\mathbb{R}^n$ .

Дуже важливим для подальших міркувань є твердження про те, що залежність значень розв'язків ЛОС хоча б при одному  $t_0$  має наслідком лінійну залежність цих розв'язків на  $I$ .

### Твердження 2.2

Набір розв'язків  $x_1(t), \dots, x_k(t)$  системи (2.2) лінійно залежний, якщо для деякого  $t_0 \in I$  вектори  $x_1(t_0), \dots, x_k(t_0)$  лінійно залежні.

#### Доведення

За умовою знайдуться числа  $c_1, \dots, c_k$ , серед яких є відмінні від нуля, такі, що

$$c_1 x_1(t_0) + \dots + c_k x_k(t_0) = \mathbf{0}.$$

Згідно з твердженням 2.1 функція  $\sum_{i=1}^k c_i x_i(t)$  є розв'язком ЛОС (2.2). Цей розв'язок перетворюється в нуль при  $t = t_0$ . Таку саму властивість має й тривіальний розв'язок ЛОС  $x \equiv \mathbf{0}$ . З єдиності розв'язку задачі Коші (теорема 2.1) випливає рівність  $\sum_{i=1}^k c_i x_i(t) = \mathbf{0}$  для всіх  $t \in I$ , а з нею й лінійна залежність розглядуваної системи розв'язків.

#### □ Наслідок 2.1

*Фундаментальна матриця  $X(t)$  ЛОС є невідродженою ( $\det X(t) \neq 0 \forall t \in I$ ) і, отже, має обернену  $X^{-1}(t)$  у кожній точці  $t \in I$ .*

Тепер можемо з'ясувати структуру загального розв'язку системи (2.2).

### Теорема 2.3

Нехай  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  — ФСР системи (2.2). Тоді для будь-якого її розв'язку  $x^*(t)$  існує набір сталих  $c_1^*, \dots, c_n^*$  такий, що

$$x^*(t) = c_1^* x_1(t) + \dots + c_n^* x_n(t) \quad \forall t \in I. \quad (2.11)$$

#### Доведення

Нехай  $X(t)$  — фундаментальна матриця, стовпцями якої є розв'язки  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ . Зафіксуємо довільну точку  $t_0$  і розгля-

немо лінійну алгебричну систему  $X(t_0)c = x^*(t_0)$  відносно невідомих  $c_1, \dots, c_n$  — компонент вектор-стовпця  $c$ . За наслідком 2.1 вона має розв'язок  $c = c^* := X^{-1}(t_0)x^*(t_0)$ . Нехай  $c_1^*, \dots, c_n^*$  — компоненти

вектора  $c^*$ . Лінійна комбінація  $\sum_{i=1}^n c_i^* x_i^*(t) = X(t)c^*$ , є розв'язком ЛОС (2.2), причому цей розв'язок у точці  $t_0$  набуває того самого значення, що й розв'язок  $x^*(t_0)$ . Рівність (2.11) впливає тепер із властивості єдиності розв'язку задачі Коші.

### ☉ Наслідок 2.2

*Формула*

$$\boxed{x = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = X(t)c}, \quad (2.12)$$

де  $c_1, \dots, c_n$  — довільні сталі, охоплює всі розв'язки ЛОС (2.2).

Тепер у нас є всі підстави називати  $n$ -параметричну сім'ю функцій у правій частині рівності (2.12) загальним розв'язком ЛОС (2.2). Інтегрування ЛОС зводиться, таким чином, до відшукування  $n$  лінійно незалежних частинних розв'язків цієї системи й запису формули (2.12).

Мовою теорії лінійних операторів теорема 2.3 означає, що

$$\dim \ker L = n.$$

Зауважимо, що простір  $C^1(I \mapsto \mathbb{R}^n)$ , на якому діє оператор  $L$ , — нескінченновимірний.

Поряд із ЛОС (2.2) розглянемо матричне рівняння

$$\dot{X} = A(t)X, \quad (2.13)$$

де  $X = [x_1, \dots, x_n]$  —  $(n \times n)$ -вимірна матриця, утворена з вектор-стовпців  $x_1, \dots, x_n$ . Оскільки  $\dot{X} = [\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]$  і  $A(t)X = [A(t)x_1, \dots, A(t)x_n]$  то матрична система є не що інше, як компактний запис такої  $n^2$ -вимірної ЛОС:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A(t)x_1, \\ \dots \dots \dots \\ \dot{x}_n = A(t)x_n. \end{cases}$$

Тепер зрозуміло, що матриця  $X(t)$  із неперервно диференційовними

на  $I$  елементами задовольняє матричне рівняння (2.13) тоді й лише тоді, коли кожен стовпець цієї матриці є розв'язком ЛОС (2.2). Із наслідку 2.1 і теореми 2.3 випливає така теорема.

### Теорема 2.4

Кожна фундаментальна матриця ЛОС (2.2) є невідродженим розв'язком матричного рівняння (2.13). Навпаки, якщо значення розв'язку  $X(t)$  рівняння (2.13) хоча б при одному  $t \in I$  є невідродженою матрицею, то цей розв'язок є фундаментальною матрицею ЛОС (2.2). При цьому множина всіх розв'язків рівняння (2.13) має вигляд  $X(t)C$ , де  $C$  —  $(n \times n)$ -вимірна матриця, елементами якої є довільні сталі.

#### 2.1.3. ФСР та загальний розв'язок скалярного лінійного однорідного рівняння $n$ -го порядку

Рівняння (2.3), в якому  $f(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$ , називається *скалярним лінійним однорідним рівнянням (ЛОР)  $n$ -го порядку*. Припустимо, що коефіцієнт  $a_0(t)$  рівняння (2.3) не перетворюється в нуль у жодній точці  $t \in I$ . Тоді без обмеження загальності можна вважати, що  $a_0(t) = 1$ . Усюди нижче йтиметься про ЛОР, в якому  $a_i(t) \in C(I \mapsto \mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Визначивши відображення  $\mathcal{L} : C^n(I \mapsto \mathbb{R}) \mapsto C(I \mapsto \mathbb{R})$ , де

$$\mathcal{L}x(t) := \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t) x(t),$$

запишемо таке рівняння у вигляді

$$\mathcal{L}x = 0. \tag{2.14}$$

Зауважимо, що  $\mathcal{L}$  — лінійне відображення: для будь-яких функцій  $x_i(t) \in C^n(I \mapsto \mathbb{R})$  ( $i = 1, \dots, k$ ) і чисел  $c_1, \dots, c_k$  виконується рівність

$$\mathcal{L}(c_1 x_1(t) + \dots + c_k x_k(t)) = c_1 \mathcal{L}x_1(t) + \dots + c_k \mathcal{L}x_k(t).$$

Це відображення називають *лінійним диференціальним оператором  $n$ -го порядку*. Наслідком лінійності є таке твердження.



ЛОС із матрицею (2.16) називається *еквівалентною* рівнянню (2.14). Підставою для цього є таке твердження.

### Твердження 2.4

Якщо функція  $x(t) \in C^n(I \mapsto \mathbb{R})$  є розв'язком рівняння (2.14), то вектор-функція  $x(t) := px(t)$  задовольняє ЛОС із матрицею (2.16). Навпаки, якщо вектор-функція  $x(t) \in C^1(I \mapsto \mathbb{R}^n)$  є розв'язком ЛОС із матрицею (2.16), то перша компонента  $x(t) := x_1(t)$  належить класу  $C^n(I \mapsto \mathbb{R})$  і задовольняє рівняння (2.14).

### Доведення

Правильність першої частини даного твердження впливає із самого означення фазового вектора. Доведемо другу частину. Оскільки  $n$ -на компонента  $x_n(t)$  вектор-функції  $x(t)$  неперервно диференційовна, а з  $(n-1)$ -го рівняння ЛОС випливає, що  $\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$ , то  $x_{n-1}(t) \in C^2(I \mapsto \mathbb{R})$ . Аналогічно доводимо, що  $x_{n-i} \in C^{1+i}(I \mapsto \mathbb{R})$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ . Отже,  $x_1(t) \in C^n(I \mapsto \mathbb{R})$ . Далі, з цих самих міркувань випливає, що

$$\begin{aligned} x_1^{(n)}(t) &= \dot{x}_n(t) = -a_n(t)x_1(t) - a_{n-1}(t)x_2(t) - \dots - a_1(t)x_n(t) = \\ &= -a_n(t)x_1(t) - a_{n-1}(t)\dot{x}_1(t) - \dots - a_1(t)x_1^{(n-1)}(t), \end{aligned}$$

тобто  $\mathcal{L}x_1(t) = 0$ .

За допомогою твердження 2.4 основні факти загальної теорії рівняння (2.14) можна досить просто дістати на підставі результатів п. 2.1.2. Оскільки ЛОР вищих порядків особливо часто виникають у прикладних задачах, то варто окремо навести всі необхідні формулювання. По можливості, буде подано також незалежні доведення відповідних тверджень.

Як нам уже відомо, набір початкових даних  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  та початкова умова  $x(t_0) = x_0$  однозначно визначають розв'язок ЛОС. З урахуванням структури фазового вектора (2.15) природно приходимо до такої постановки задачі Коші для лінійного рівняння  $n$ -го порядку: для заданого  $t_0 \in I$  та заданого набору чисел  $x_0^{(0)}, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)}$  знайти розв'язок  $x(t)$  рівняння (2.14), який би задовольняв початкові умови

$$x(t_0) = x_0^{(0)}, \dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (2.17)$$

З теореми 2.1, застосованої до системи з матрицею (2.16), та з твердження 2.4 впливає така теорема.

### Теорема 2.5

Нехай  $a_i(t) \in C(I \mapsto \mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тоді для довільного  $t_0 \in I$  і довільного набору чисел  $x_0^{(0)}, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)}$  ЛОР (2.14) має єдиний розв'язок  $x(t) \in C^n(I \mapsto \mathbb{R})$ , який задовольняє початкові умови (2.17).

### ⇒ Означення 2.3

*Фундаментальною системою розв'язків ЛОР  $n$ -го порядку називають набір із  $n$  лінійно незалежних розв'язків цього рівняння.*

Нехай  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  — розв'язки ЛОР (2.14). Тоді відповідні фазові вектори  $px_1(t), \dots, px_n(t)$  є розв'язками ЛОС із матрицею (2.16). Але, як нам уже відомо, фундаментальність  $n$  розв'язків ЛОС можна з'ясувати за допомогою визначника матриці, стовпцями якої є ці розв'язки. Таким чином, у наших міркуваннях виникає визначник

$$W[x_1(t), \dots, x_n(t)] := \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \ddot{x}_1(t) & \ddot{x}_2(t) & \dots & \ddot{x}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \quad (2.18)$$

стовпцями якого є фазові вектор-функції  $px_1(t), \dots, px_n(t)$ .

### ⇒ Означення 2.4

*Визначник вигляду (2.18) називають вронскіаном системи функцій  $x_i(t) \in C^{n-1}(I \mapsto \mathbb{R})$  ( $i = 1, \dots, n$ ).*

Цей функціональний визначник уперше запровадив у 1812 р. Ю. Вронський.

Розглянемо найпростіші властивості вронскіана.

**Твердження 2.5**

Якщо система функцій  $x_i(t) \in C^{n-1}(I \rightarrow \mathbb{R})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) лінійно залежна на  $I$ , то її вронскіан є тотожним нулем.

**Доведення**

Існує набір чисел  $c_1, \dots, c_n$ , серед яких є відмінні від нуля, такий, що

$$c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Цю рівність можна послідовно здиференціювати  $n - 1$  разів. Як наслідок дістанемо рівність

$$c_1 p x_1(t) + \dots + c_n p x_n(t) = 0 \quad \forall t \in I, \quad (2.19)$$

яка означає лінійну залежність фазових векторів — стовпців вронскіана  $W[x_1(t), \dots, x_n(t)]$ .

**О Наслідок 2.3**

Якщо вронскіан системи функцій  $x_i(t) \in C^{n-1}(I \rightarrow \mathbb{R})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) не перетворюється в нуль хоча б в одній точці, то така система функцій лінійно незалежна.

Система функцій  $x_i(t) \in C^{n-1}(I \rightarrow \mathbb{R})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) лінійно залежна на  $I$  тоді й лише тоді, коли таку саму властивість має система відповідних фазових вектор-функцій  $p x_1(t), \dots, p x_n(t)$ .

Справджується такий критерій фундаментальності системи  $n$  розв'язків ЛОР.

**Твердження 2.6**

Нехай  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  — розв'язки ЛОР (2.14). Якщо існує  $t_0 \in I$  таке, що  $W[x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)] = 0$ , то ці розв'язки лінійно залежні. Якщо ж  $W[x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)] \neq 0$  хоча б для одного  $t_0 \in I$ , то розв'язки  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  утворюють фундаментальну систему, причому їх вронскіан не перетворюється в нуль у жодній точці  $t \in I$ .

**Доведення**

Якщо існує  $t_0 \in I$  таке, що  $W[x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)] = 0$ , то стовпці вронскіана лінійно залежні, так що виконується рівність (2.19) при  $t = t_0$  з деякими сталими  $c_1, \dots, c_n$ , серед яких є відмінні від нуля.

Тоді функція  $x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$  є розв'язком ЛОР (2.14), для якого

$$px(t_0) = \sum_{i=1}^n c_i px_i(t_0) = 0, \text{ тобто}$$

$$x(t_0) = \dot{x}(t_0) = \dots x^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Але з єдиності розв'язку задачі Коші випливає, що таку умову задовольняє лише тривіальний розв'язок. Тому

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

і отже, досліджувані розв'язки лінійно залежні.

Друга частина твердження випливає з наслідку 2.3 і з уже доведеної першої частини.

Зауважимо, що рівність нулю вронскіана системи  $n$  функцій у разі, якщо ці функції не є розв'язками ЛОР  $n$ -го порядку з неперервними коефіцієнтами, ще не означає їх лінійну залежність. Так, при  $n = 2$  вронскіан лінійно незалежної пари функцій із прикладу 2.3 є тотожним нулем на кожному відрізку  $[-1, 0]$  та  $[0, 1]$ , а отже, на  $[-1, 1]$ .

### Теорема 2.6

Нехай  $a_i(t) \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тоді ФСР рівняння (2.14) існує.

#### Доведення

Зафіксуємо  $t_0 \in I$ . За теоремою 2.5 для кожного  $i = 1, \dots, n$  ЛОР (2.14) має розв'язок  $x_i(t)$ , який задовольняє початкову умову  $px_i(t_0) = e_i$ , де  $e_i$  —  $i$ -й базисний орт у  $\mathbb{R}^n$ . Оскільки вронскіан цих розв'язків у точці  $t_0$  перетворюється в одиницю, то вони лінійно незалежні.

Із теореми 2.3 і твердження 2.4 випливає, що ФСР рівняння (2.14) утворює базис  $\ker \mathcal{L}$ . Наведемо пряме доведення цього факту.

### Теорема 2.7

Нехай  $a_i(t) \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$ . Якщо  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  — ФСР рівняння (2.14), то для кожного його розв'язку  $x'(t)$  існує набір сталих  $c_1^*, \dots, c_n^*$  такий, що

$$x'(t) = c_1^* x_1(t) + \dots + c_n^* x_n(t).$$



## Доведення

Нехай  $t_0 \in I$  фіксоване. Розглянемо лінійну алгебричну систему відносно  $c_1, \dots, c_n$  вигляду

$$c_1 p x_1(t_0) + \dots + c_n p x_n(t_0) = p x^*(t_0).$$

Визначником матриці цієї системи є  $W[x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)] \neq 0$ . Тому

існує єдиний розв'язок  $c_1 = c_1^*, \dots, c_n = c_n^*$ . Функція  $x(t) = \sum_{i=1}^n c_i^* x_i(t)$  є розв'язком ЛОР (2.14), який задовольняє початкову умову  $p x(t_0) = p x^*(t_0)$ . З єдиності такого розв'язку випливає, що  $x(t) \equiv x^*(t)$ ,  $t \in I$ .

## ❶ Наслідок 2.4

Формула

$$x = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t),$$

де  $c_1, \dots, c_n$  — довільні сталі, визначає загальний розв'язок ЛОР (2.14).

Аналогічно можна дістати основні положення загальної теорії векторного ЛОР вигляду

$$x^{(m)} + A_1(t) x^{(m-1)} + \dots + A_m(t) x = 0,$$

де  $A_1(t), \dots, A_m(t)$  —  $(n \times n)$ -вимірні матриці з неперервними елементами на  $I \subseteq (-\infty, \infty)$ . Зокрема, можна довести, що розв'язки цього рівняння утворюють  $nm$ -вимірний лінійний підпростір у просторі  $C^m(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ . Критерій фундаментальності системи розв'язків  $x_1(t), \dots, x_m(t)$  зводиться до перевірки відмінності від нуля вронскіана

$$W[x_1(t), \dots, x_{nm}(t)] := \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_{nm}(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dots & \dot{x}_{nm}(t) \\ \ddot{x}_1(t) & \ddot{x}_2(t) & \dots & \ddot{x}_{nm}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_{nm}^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

(матриця вронскіана в даному випадку  $(nm \times nm)$ -вимірна).

### 2.1.4. Побудова ЛОР за його ФСР. Формула Остроградського—Ліувілля

Розглянемо систему функцій  $x_i(t) \in C^n(I \rightarrow \mathbb{R})$  ( $i = 1, \dots, n$ ), вронскіан якої не перетворюється в нуль у жодній точці  $t \in I$ . Знайдемо ЛОР, що має дану систему функцій своєю ФСР.

Запишемо рівняння

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) & x \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dots & \dot{x}_n(t) & \dot{x} \\ \ddot{x}_1(t) & \ddot{x}_2(t) & \dots & \ddot{x}_n(t) & \ddot{x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) & x^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.20)$$

Розклавши цей визначник за останнім стовпцем, дістанемо рівняння

$$w_0(t) x - w_1(t) x' + \dots + (-1)^n w_n(t) x^{(n)} = 0, \quad (2.20')$$

де, зокрема,  $w_0(t) = W[x_1(t), \dots, x_n(t)]$ , а

$$w_1(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & \dots & x_n^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Оскільки за припущенням  $w_0(t)$  не перетворюється в нуль у жодній точці  $t \in I$ , то (2.20') можна переписати у вигляді

$$x + a_1(t) x' + \dots + a_n(t) x^{(n)} = 0, \quad (2.21)$$

де

$$a_i(t) = (-1)^i w_i(t)/w_0(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

Одержане в такий спосіб ЛОР має за ФСР набір функцій  $x_i(t) \in C^n(I \mapsto \mathbb{R})$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Справді, якщо  $x_i(t)$  підставити у (2.20) замість  $x$ , то визначник у лівій частині матиме два однакових стовпці, а отже, буде тотожним нулем.

### Твердження 2.7

Якщо рівняння (2.21) та

$$x^{(n)} + b_1(t)x^{(n-1)} + \dots + b_n(t)x = 0 \quad (2.23)$$

з неперервними на  $I$  коефіцієнтами мають спільну ФСР, то  $a_i(t) \equiv b_i(t)$ ,  $t \in I$ .

### Доведення

Спільний розв'язок зазначених рівнянь є водночас і розв'язком рівняння

$$[a_1(t) - b_1(t)]x^{(n-1)} + [a_2(t) - b_2(t)]x^{(n-2)} + \dots + [a_n(t) - b_n(t)]x = 0. \quad (2.24)$$

Покажемо, що  $a_1(t) \equiv b_1(t)$ . Справді, якщо припустити існування точки  $t_0 \in I$ , для якої  $a_1(t_0) \neq b_1(t_0)$ , то  $|a_1(t) - b_1(t)| > 0$  на деякому інтервалі  $I_1 \subseteq I$ ,  $t_0 \in I_1$ . Тоді на інтервалі  $I_1$  рівняння (2.24) буде еквівалентним ЛОР  $(n-1)$ -го порядку з коефіцієнтом 1 при старшій похідній, і це рівняння матиме набір із  $n$  лінійно незалежних розв'язків, яким є спільна ФСР рівнянь (2.23) та (2.24). Це неможливо, оскільки базис розв'язків ЛОР  $(n-1)$ -го порядку містить  $n-1$  елемент. Джерело суперечності міститься в припущенні, що  $a_1(t)$  не збігається з  $b_1(t)$ .

Аналогічно послідовно доводимо, що  $a_i(t) \equiv b_i(t)$ ,  $t \in I$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

### □ Приклад 2.4

Знайдемо ЛОР другого порядку з ФСР  $x_1(t) = t$ ,  $x_2(t) = t^2$ .

Обчислимо вронскіан цієї системи:

$$W\{t, t^2\} = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2.$$

Розкладемо за останнім стовпцем визначник

$$\begin{vmatrix} t & t^2 & x \\ 1 & 2t & \dot{x} \\ 0 & 2 & \ddot{x} \end{vmatrix} = t^2 \ddot{x} - 2t\dot{x} + 2x.$$

Тепер шукане рівняння подамо у вигляді

$$\ddot{x} - \frac{2}{t}\dot{x} + \frac{2}{t^2}x = 0.$$

Виведемо важливу формулу, яка показує, як відбувається еволюція вронскіана розв'язків ЛОР із плином часу.

### Теорема 2.8

Нехай  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  — розв'язки рівняння вигляду (2.21) і  $t_0 \in I$  — фіксована точка. Тоді справджується формула Остроградського—Ліувілля

$$W[x_1(t), \dots, x_n(t)] = W[x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)] e^{\int_{t_0}^t a_1(s) ds} \quad \forall t \in I. \quad (2.25)$$

### Доведення

Якщо розв'язки  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  лінійно залежні, то їх вронскіан є тотожним нулем і в цьому випадку формула Остроградського—Ліувілля правильна.

Нехай тепер ці розв'язки утворюють ФСР. Тоді згідно з (2.22) і твердженням 2.7

$$a_1(t) = -w_1(t)/w_0(t). \quad (2.26)$$

Доведемо, що  $w_1(t) = \dot{w}_0(t)$ .

Розглянемо матрицю  $X(t) = \{x_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$  із неперервно диференційовними елементами. З того, що визначник є лінійною функцією кожного свого рядка, впливає формула

$$\frac{d}{dt} \det X(t) = \sum_{i=1}^n \det X_i(t),$$

де матриця  $X_i(t)$  відрізняється від матриці  $X(t)$  лише своїм  $i$ -м рядком, який має вигляд  $(\dot{x}_{i1}(t), \dots, \dot{x}_{in}(t))$ .

Нехай  $X(t)$  — це матриця, яка фігурує у вронскіані  $w_0(t)$ . Зрозуміло, що тоді кожна з матриць  $X_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  має пару однакових рядків і, отже, її визначник є тотожним нулем. (Наприклад, першими двома рядками матриці  $X_1(t) \in (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ , тому  $\det X_1(t) = 0$ .) Водночас матриця  $X_n(t)$  утворюється диференціюванням останнього рядка матриці вронскіана. Таким чином,  $\dot{w}_0(t) = \det X_n(t) = w_1(t)$ , і формула (2.26) набирає вигляду

$$\frac{\dot{w}_0(t)}{w_0(t)} = -a_1(t).$$

Зінтегруємо обидві частини цієї рівності в межах від  $t_0$  до  $t$ . Матимемо

$$\ln |w_0(t)| - \ln |w_0(t_0)| = - \int_{t_0}^t a_1(s) ds.$$

Звідси, врахувавши, що вронскіан не змінює знака на  $I$  (твердження 2.6), легко дістаємо формулу (2.25).

Формулу (2.25) було незалежно виведено М. В. Остроградським та Ж. Ліувіллем, і вона з'явилася в їх публікаціях, датованих 1838 р. При  $n = 2$  у 1827 р. її знайшов Н. Абель.

### 2.1.5. Про інтегрування ЛОР у квадратурах

Далеко не для кожного ЛОР удається відшукати ФСР у явному вигляді. Відомо, наприклад, що розв'язки такого простого на вигляд лінійного рівняння, як  $\ddot{x} + tx = 0$ , не можна виразити через елементарні функції та інтеграли від них. Покажемо, однак, що формула (2.25) дає змогу зінтегрувати ЛОР другого порядку

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + g(t)x = 0, \quad p(t), g(t) \in C(I \mapsto \mathbb{R}), \quad (2.27)$$

якщо відомий будь-який його нетривіальний розв'язок  $x_1(t)$ .

Зафіксуємо  $t_0 \in I$  так, щоб  $x_1(t_0) \neq 0$ . Будемо шукати розв'язок  $x(t)$  рівняння (2.27), який задовольняє умови

$$\begin{cases} x(t_0) = 0, \\ W[x_1(t_0), x(t_0)] = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t_0) = 0, \\ \dot{x}(t_0) = 1/x_1(t_0). \end{cases}$$

Існування й єдиність такого розв'язку гарантовані теоремою 2.5. Розкривши визначник  $W[x_1(t), x(t)]$  у формулі Остроградського—Ліувіля, матимемо

$$\dot{x}(t)x_1(t) - \dot{x}_1(t)x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

Якщо обидві частини цієї рівності поділити на  $x_1^2(t)$ , то на інтервалі, який містить точку  $t_0$  і в якому  $x_1(t)$  не перетворюється в нуль, дістанемо

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{x(t)}{x_1(t)} \right) = \frac{e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}}{x_1^2(t)}.$$

Зінтегрувавши обидві частини даної рівності в межах від  $t_0$  до  $t$  і врахувавши, що  $x(t_0) = 0$ , однозначно знаходимо

$$\boxed{x(t) = x_1(t) \int_{t_0}^t \frac{e^{-\int_{t_0}^{\tau} p(s) ds}}{x_1^2(\tau)} d\tau.} \quad (2.28)$$

Це й є *формула Абеля* для відшукування другого, лінійно незалежного з  $x_1(t)$  розв'язку ЛОР (2.27).

Зауважимо, що формулу

$$x = x_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t) dt}}{x_1^2(t)} dt,$$

яка містить дві довільні сталі інтегрування, можна тлумачити як запис загального розв'язку ЛОР (2.27).

**□ Приклад 2.5**

Рівняння  $(t-1)\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0$  має очевидний розв'язок  $x_1(t) = t$ . Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння, користуючися формулою Абеля.

У нашому випадку  $p(t) = -t/(t-1)$ . Виконаємо необхідні обчислення:

$$\begin{aligned} -\int p(t) dt &= \int \frac{t}{t-1} dt = t + \ln c_2(t-1) \Rightarrow e^{-\int p(t) dt} = c_2(t-1)e^t; \\ \int \frac{e^{-\int p(t) dt}}{x_1^2(t)} dt &= c_2 \int \frac{(t-1)e^t}{t^2} dt = c_2 \int \frac{de^t}{t} - c_2 \int \frac{e^t dt}{t^2} = \\ &= c_2 \frac{e^t}{t} - c_2 \int e^t d\left(\frac{1}{t}\right) - c_2 \int \frac{e^t dt}{t^2} = c_2 \frac{e^t}{t} + c_1. \end{aligned}$$

Тепер запишемо загальний розв'язок

$$x = x_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t) dt}}{x_1^2(t)} dt = c_1 t + c_2 e^t.$$

Повернемося до загального ЛОР (2.14). Виявляється, якщо відомі  $r$  його частинних розв'язків, то порядок даного рівняння можна знизити на  $r$  одиниць.

**Твердження 2.8**

Нехай  $x_1(t), \dots, x_r(t)$  — лінійно незалежні розв'язки ЛОР (2.21) і  $x_1(t)$  не перетворюється в нуль на  $I$ . Тоді підстановка  $x = x_1(t)z$ ,  $\dot{z} = y$  зводить це рівняння до ЛОР  $(n-r)$ -го порядку відносно невідомої функції  $y$ , яке має  $r-1$  лінійно незалежних розв'язків

$$\text{вигляду } y_i(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{x_{i+1}(t)}{x_1(t)} \right), \quad i = 1, \dots, r-1.$$

**Доведення**

Скориставшись формулою Лейбніца

$$\frac{d^m}{dt^m} (uv) = u^{(m)} v + C_m^{m-1} u^{(m-1)} \dot{v} + \dots + C_m^1 u \dot{v}^{(m-1)} + u v^{(m)},$$

після підставлення  $x = x_1(t)z$  у (2.14) дістанемо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1(t)z) &\equiv \left( x_1^{(n)}(t)z + \dots + x_1(t)z^{(n)} \right) + \\ &+ a_1(t) \left( x_1^{(n-1)}(t)z + \dots + x_1(t)z^{(n-1)} \right) + \dots \\ &\dots + a_{n-1}(t) \left( \dot{x}_1(t)z + \dots + x_1(t)z \right) + a_n(t) x_1(t)z = 0 \end{aligned}$$

або

$$\mathcal{L}(x_1(t)z) \equiv (\mathcal{L}x_1(t))z + x_1(t)z^{(n)} + \tilde{a}_1(t)z^{(n-1)} + \dots + \tilde{a}_{n-1}(t)z = 0,$$

де  $\tilde{a}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) — деякі неперервні на  $I$  функції. Зрозуміло, що це рівняння відносно  $z$  має розв'язки  $z_i(t) = x_i(t)/x_1(t)$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Оскільки  $\mathcal{L}x_1(t) \equiv 0$  і  $x_1(t) \neq 0$  для всіх  $t \in I$ , то відносно  $\dot{z} = y$  дістаємо ЛОР  $(n-1)$ -го порядку, яке має розв'язки  $y_i(t) = \dot{z}_{i+1}(t)$ ,  $i = 1, \dots, r-1$ .

Залишилося довести, що ці розв'язки лінійно незалежні. Припустимо, навпаки, що існують сталі  $c_1, \dots, c_{r-1}$ , не всі рівні нулю, такі, що

$$c_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{x_2(t)}{x_1(t)} \right) + \dots + c_{r-1} \frac{d}{dt} \left( \frac{x_r(t)}{x_1(t)} \right) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Тоді знайдеться стала  $c_r$  така, що

$$c_1 \frac{x_2(t)}{x_1(t)} + \dots + c_{r-1} \frac{x_r(t)}{x_1(t)} = c_r \quad \forall t \in I.$$

Легко бачити, що ця рівність можлива лише за умови лінійної залежності функцій  $x_1(t), \dots, x_r(t)$ . Дійшли протиріччя.

Доведене твердження відкриває шлях для послідовного зниження порядку ЛОР, а отже, може стати в нагоді при його інтегруванні. Зокрема, якщо  $r = n-1$ , то відповідне рівняння інтегрує в квадратурах.

#### □ Приклад 2.6

Розглянемо рівняння  $t^3 \ddot{x} - 3t^2 \dot{x} + 4tx - 4x = 0$ .

Легко помітити, що воно має частинний розв'язок  $x_1(t) = t$ . Якщо



зробити підстановку  $x = tz$ , а потім покласти  $\dot{z} = y$ , то дістанемо рівняння  $t^2 \ddot{y} - 2\dot{y} = 0$ . Для нього теж неважко вказати частинний розв'язок:  $y_1(t) = t^2$ . Тепер покладемо  $y = t^2 u$ ,  $\dot{y} = w$ . Рівняння для функції  $w$  має вигляд  $t\dot{w} + w = 0$ . Його нетривіальним розв'язком є  $w = 1/t$ . Тоді  $v = \ln|t|$ , звідки  $y_2(t) = t^2 \ln|t|$  і  $z_1(t) = \frac{t^3}{3}$ ,  $z_2(t) = \frac{t^3}{3} \ln|t| - \frac{t^1}{9}$ . Нарешті, за допомогою цих функцій утворюємо три лінійно незалежні розв'язки вихідного рівняння  $x_1(t) = t$ ,  $x_2(t) = t^4$ ,  $x_3(t) = t^4 \ln|t|$ .

### 2.1.6. Формула Ліувілля—Якобі

Покажемо, що закон еволюції визначника матриці  $X(t) = \{x_{ij}(t)\}_{i,j}^n$ , стовпцями якої є розв'язки системи  $\dot{x} = A(t)x$ , де  $A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$ ,  $a_{ij}(t) \in C(I \mapsto \mathbb{R})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), визначається формулою Ліувілля—Якобі

$$\det X(t) = \det X(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds} \quad \forall t_0, t \in I,$$

де  $\operatorname{tr} A(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$  — слід матриці  $A(t)$ .

Скориставшись формулою диференціювання визначника матриці, маємо

$$\frac{d}{dt} \det X(t) = \sum_{i=1}^n \det X_i(t),$$

де

$$X_i(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{i-1,1}(t) & \dots & x_{i-1,n}(t) \\ \dot{x}_{i1}(t) & \dots & \dot{x}_{in}(t) \\ x_{i+1,1}(t) & \dots & x_{i+1,n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Візьмемо до уваги, що кожен стовпець матриці  $X(t)$  є розв'язком ЛОС, а отже, виконуються рівності

$$\dot{x}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kj}(t) \quad \forall t \in I, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Звідси випливає, що  $i$ -й рядок у матриці  $X_i(t)$  є лінійною комбінацією рядків матриці  $X(t)$ , причому коефіцієнтом при  $k$ -му рядкові в цій комбінації буде функція  $a_{ik}(t)$ . Оскільки визначник є лінійною функцією кожного свого рядка, то

$$\det X_i(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{i-1,1}(t) & \dots & x_{i-1,n}(t) \\ x_{k1}(t) & \dots & x_{kn}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{i+1,1}(t) & \dots & x_{i+1,n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Але визначник, що фігурує під знаком суми, при  $k = i$  збігається з  $\det X(t)$ , а при всіх інших значеннях  $k$  дорівнює нулю, бо має пару однакових рядків. Таким чином,  $\det X_i(t) = a_{ii}(t) \det X(t)$  і

$$\frac{d}{dt} \det X(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) \det X(t). \quad (2.29)$$

Звідси випливає, що функція  $w(t) = \det X(t)$  є розв'язком такої задачі Коші для скалярного ЛОР:

$$\dot{w} = \operatorname{tr} A(t)w, \quad w|_{t=t_0} = \det X(t_0).$$

Розв'язавши цю задачу, дістаємо потрібну формулу

$$w(t) = \det X(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds}.$$

При  $n = 3$  формула Ліувілля—Якобі має прозорий геометричний

міст. Як відомо, модуль визначника  $(3 \times 3)$ -вимірної матриці, стовпцями якої є вектори  $x_1, x_2, x_3$ , дорівнює об'єму паралелепіпеда, натягнутого на ці вектори. Отже, формула Ліувілля—Якобі показує, як змінюється в часі об'єм паралелепіпеда, натягнутого на лінійно незалежні розв'язки ЛОС.

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① З'ясувати, чи можна в загальному випадку стверджувати, що: а) лінійно незалежні на інтервалі  $I$  функції утворюють лінійно незалежну систему й на інтервалі  $J \subset I$ ; б) визначені на  $I$  і лінійно незалежні на  $J \subset I$  функції утворюють лінійно незалежну систему на всьому  $I$ .
- ② Зінтегрувати рівняння  $t\ddot{x} - (t+2)\dot{x} + 2x = 0$  за допомогою формули Абеля, попередньо знайшовши його частинний розв'язок у вигляді полінома. Знайти розв'язок, який задовольняє початкові умови  $x(1) = 0, \dot{x}(1) = 1$ .
- ③ Довести, що підстановка  $y = \dot{x}/x$  зводить ЛОР (2.27) до рівняння Ріккати.
- ④ Визначити, чи можуть лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння 2-го порядку мати спільні нулі; досягати екстремуму при спільному значенні незалежної змінної.
- ⑤ Пояснити, чому розв'язки  $x_1(t) = t^2$  та  $x_2(t) = t^3$  рівняння  $t^2\ddot{x} - 4t\dot{x} + 6x = 0$ , вронскіан яких перетворюється в нуль при  $t = 0$ , лінійно незалежні.
- ⑥ Графіки чотирьох різних розв'язків рівняння  $\ddot{x} + tx = 0$  дотикаються один одного в спільній точці. Визначити, скільки серед цих розв'язків лінійно незалежних.
- ⑦ Довести, що побудований у теоремі 2.3 набір сталих  $c_1^*, \dots, c_n^*$  не залежить від вибору  $t_0$ .
- ⑧ Записати лінійне однорідне рівняння найнижчого порядку з фундаментальною системою розв'язків  $\{e^t, t^{-1}\}$ .
- ⑨ Знайти лінійну однорідну систему, якщо відома її фундаментальна матриця.
- ⑩ Вивести формулу Остроградського—Ліувілля за допомогою формули Ліувілля—Якобі.
- ⑪ Нехай усі розв'язки рівняння (2.27) із неперервними на  $[0, \infty)$  коефіцієнтами  $p(t), q(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  прямують до нуля разом зі своїми похідними. Знайти  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t p(s) ds$ .
- ⑫ Нехай  $x(t; x_1, x_2)$  — розв'язок рівняння (2.27), який задовольняє початкову умову  $x(0; x_1, x_2) = x_1, \dot{x}(0; x_1, x_2) = x_2$ , і  $\varphi: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  — відображення,

яке кожній точці  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  ставить у відповідність точку  $(x(1; x_1, x_2), \dot{x}(1; x_1, x_2))$ . Довести, що  $\varphi$  відображає паралелограм одиничної площі взаємно однозначно на паралелограм, площа якого дорівнює  $\exp\left(-\int_0^1 p(t) dt\right)$ .

## 2.2

### Лінійні однорідні рівняння $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Для ЛОР зі сталими коефіцієнтами

$$\mathcal{L}x := \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0, \quad (2.30)$$

$$a_i \equiv \text{const}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}$$

існує чіткий алгоритм побудови ФСР. В його основі лежать такі міркування. Спробуємо знайти розв'язок рівняння (2.30) у вигляді  $x = e^{\lambda t}$ . Оскільки

$$\mathcal{L}e^{\lambda t} = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n) e^{\lambda t},$$

то функція  $e^{\lambda t}$  буде розв'язком ЛОР (2.30) тоді й лише тоді, коли число  $\lambda$  буде коренем полінома

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n. \quad (2.31)$$

#### ⇒ Означення 2.5

Поліном  $P(\lambda)$  називають *характеристичним поліномом оператора  $\mathcal{L}$* .

Досі ми неявно припускали, що  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Однак основна теорема алгебри гарантує існування коренів поліномів у полі комплексних чисел. Таким чином, виникає необхідність поширити дію оператора  $\mathcal{L}$  на комплекснозначні функції, зокрема на функції

$$e^{\lambda t} := e^{\alpha t} \cos \beta t + i e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \alpha = \text{Re } \lambda, \quad \beta = \text{Im } \lambda.$$

### 2.2.1. Комплексифікація лінійних диференціальних операторів

Нехай  $x : I \mapsto \mathbb{C}^n$  — комплекснозначна вектор-функція дійсного аргументу  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ . Із нею пов'язана пара дійснозначних вектор-функцій  $u(t) = \operatorname{Re} x(t)$ ,  $v(t) = \operatorname{Im} x(t)$  — дійсна та уявна частини функції  $x(t)$  — так, що  $x(t) = u(t) + iv(t)$ . Позначимо через  $C^1(I \mapsto \mathbb{C}^n)$  простір комплекснозначних вектор-функцій, в яких дійсна й уявна частини  $r$  разів неперервно диференційовні. Дію оператора диференціювання  $\frac{d}{dt} : C^1(I \mapsto \mathbb{R}^n) \mapsto C(I \mapsto \mathbb{R}^n)$  можна природно перенести в простір  $C^1(I \mapsto \mathbb{C}^n)$ , поклавши за означенням

$$\dot{x}(t) = \dot{u}(t) + i\dot{v}(t) \quad \forall x(t) = u(t) + iv(t) \in C^1(I \mapsto \mathbb{C}^n).$$

Зокрема, для похідної функції  $e^{\lambda t}$ ,  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  маємо ту саму формулу, що й при дійсному  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \frac{de^{\lambda t}}{dt} &= \frac{d(e^{\alpha t} \cos \beta t)}{dt} + i \frac{d(e^{\alpha t} \sin \beta t)}{dt} = \\ &= (\alpha + i\beta)(e^{\alpha t} \cos \beta t + ie^{\alpha t} \sin \beta t) = \lambda e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Взагалі дію кожного лінійного диференціального оператора  $m$ -го порядку

$$\mathcal{L} : C^m(I \mapsto \mathbb{R}^n) \mapsto C(I \mapsto \mathbb{R}^n) \quad (2.32)$$

можна перенести в  $C^m(I \mapsto \mathbb{C}^n)$  за формулою

$$\mathcal{L}x(t) = \mathcal{L}u(t) + i\mathcal{L}v(t) \quad \forall x(t) = u(t) + iv(t) \in C^m(I \mapsto \mathbb{C}^n). \quad (2.33)$$

Оператор, одержаний унаслідок такого розширення області визначення дійсного оператора  $\mathcal{L}$ , називається його *комплексифікацією*. Для того щоб розрізнити ці два об'єкти, комплексифікацію оператора  $\mathcal{L}$  іноді позначають через  $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ . Ми, однак, цього не робитимемо.

Розглянемо тепер рівняння

$$\mathcal{L}x = 0. \quad (2.34)$$

З (2.33) випливає, що функція  $x(t) = u(t) + iv(t) \in C^m(I \rightarrow C^n)$  буд його розв'язком тоді й лише тоді, коли

$$\mathcal{L}u(t) = 0 \quad \text{і} \quad \mathcal{L}v(t) = 0.$$

При цьому спряжена функція  $\bar{x}(t) := u(t) - iv(t)$  теж задовольнятим рівняння (2.34).

Таким чином, якщо в рівнянні (2.34) оператор  $\mathcal{L}$  є комплексифікацією дійсного оператора (2.32), то комплекснозначні розв'язки цього рівняння утворюють комплексно-спряжені пари, і кожна така пара породжує пару дійснозначних розв'язків.

Означення лінійної залежності й незалежності системи комплекснозначних вектор-функцій відрізняються від дійсного випадку лише тим, що коефіцієнтами в лінійних комбінаціях цих функцій є комплексні числа.

Покажемо, що в разі заміни в деякій системі вектор-функцій кожної комплексно-спряженої пари парою дійснозначних функцій властивість лінійної незалежності зберігається.

### Твердження 2.9

Нехай  $x_1(t), \dots, x_m(t)$  — лінійно незалежна над полем комплексних чисел система функцій на інтервалі  $I$ , в якій перші  $2k \leq m$  функцій належать класу  $C(I \rightarrow C)$ , а решта (якщо  $2k < m$ ) — класу  $C(I \rightarrow \mathbb{R})$ , причому  $x_{2j}(t) = \bar{x}_{2j-1}(t)$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Тоді система функцій  $u_1(t), v_1(t), \dots, u_k(t), v_k(t), x_{2k+1}(t), \dots, x_m(t)$ , де  $u_j(t) = \operatorname{Re} x_{2j-1}(t)$ ,  $v_j(t) = \operatorname{Im} x_{2j-1}(t)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , лінійно незалежна над полем дійсних чисел.

### Доведення

Оскільки

$$u_j(t) = \frac{x_{2j-1}(t) + \bar{x}_{2j-1}(t)}{2}, \quad v_j(t) = \frac{x_{2j-1}(t) - \bar{x}_{2j-1}(t)}{2i},$$

то потрібний нам висновок можна легко дістати міркуваннями від супротивного.

Зауважимо, що вся викладена в попередніх пунктах теорія лінійних систем та рівнянь вищих порядків легко переноситься на випадок, коли їх коефіцієнтами є неперервні комплекснозначні функції. Наголосимо, однак, що розв'язки таких систем і рівнянь уже не обов'язково мають утворювати комплексно-спряжені пари.

### 2.2.2. Випадок простих коренів характеристичного полінома

#### Твердження 2.10

Якщо характеристичний поліном оператора  $\mathcal{L}$  має  $n$  попарно різних коренів  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , то функції  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  утворюють ФСР рівняння (2.30).

#### Доведення

Оскільки  $P(\lambda_j) = 0$ , то й  $\mathcal{L}e^{\lambda_j t} = P(\lambda_j)e^{\lambda_j t} = 0$ . Залишилося довести, що система функцій  $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^n$  лінійно незалежна. Для цього покажемо, що її вронскіан при  $t = 0$  не перетворюється в нуль. Скориставшись формулою для визначника Вандермонда, дістанемо

$$W[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] \Big|_{t=0} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda_k - \lambda_j) \neq 0.$$

Якщо серед коренів полінома є комплексні, то їм відповідають комплекснозначні розв'язки. Основний інтерес для застосувань становить випадок, коли коефіцієнти оператора  $\mathcal{L}$  дійсні. Природно вимагати, щоб у цьому разі й ФСР складалася з функцій, які набувають дійсних значень. Таку ФСР легко побудувати, замінивши кожну пару комплексно-спряжених розв'язків парою дійсних розв'язків згідно з твердженням 2.9. А саме, нехай  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  — будь-який комплексний корінь полінома  $P(\lambda)$ . Тоді число  $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$  теж буде його коренем. Цій парі комплексно-спряжених коренів відповідає пара комплексно-спряжених розв'язків  $e^{\lambda_j t}, e^{\bar{\lambda}_j t}$ , а отже, й пара дійсних розв'язків вигляду

$$\operatorname{Re} e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t, \quad \operatorname{Im} e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t.$$

#### □ Приклад 2.7

Рівнянню  $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$  відповідає характеристичний поліном  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 3$ , що має пару комплексно-спряжених коренів  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$ . Комплексна ФСР має вигляд

$$e^{\lambda t} = e^{-t} \left( \cos \sqrt{2}t + i \sin \sqrt{2}t \right), \quad e^{\bar{\lambda}t} = e^{-t} \left( \cos \sqrt{2}t - i \sin \sqrt{2}t \right),$$

а тоді дійсну ФСР утворюють функції  $e^{-t} \cos \sqrt{2}t$ ,  $e^{-t} \sin \sqrt{2}t$ . Таким чином, загальний розв'язок розглядуваного рівняння можна подати у вигляді

$$x = c_1 e^{-t} \cos \sqrt{2}t + c_2 e^{-t} \sin \sqrt{2}t,$$

де  $c_1, c_2$  — дійсні довільні сталі.

### 2.2.3. Випадок кратних коренів характеристичного полінома. Формула зсуву

Якщо характеристичний поліном має кратні корені, то функції вигляду  $e^{\lambda t}$  недостатньо для побудови ФСР рівняння (2.30).

Аби зрозуміти, як треба діяти в цій ситуації, розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли  $r$ -кратним коренем полінома  $P(\lambda)$  є число 0, а отже, цей поліном має вигляд  $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-r} \lambda^r$ . Очевидно, що тоді  $\mathcal{L}x = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-r} x^{(r)}$ , отже,  $\mathcal{L}(t^k) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, r-1$ . Таким чином, якщо характеристичний поліном має  $r$ -кратний корінь  $\lambda = 0$ , то цьому кореню відповідає  $r$  лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.30), які мають вигляд  $1, t, \dots, t^{r-1}$ .

Тепер покажемо, як загальний випадок ненульового  $r$ -кратного кореня можна звести до шойно розглянутого. Для цього введемо таї звану *формулу зсуву*

$$\mathcal{L}(e^{\mu t} y) = e^{\mu t} \left( y + \frac{P^{(n-1)}(\mu)}{(n-1)!} y' + \frac{P^{(n-2)}(\mu)}{(n-2)!} y'' + \dots + P(\mu) y \right).$$

Запровадимо оператор

$$\mathcal{L}_\mu : C^n(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}) \mapsto C(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}),$$

який на кожну функцію  $y(t) \in C^n(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C})$  діє за правилом

$$\mathcal{L}_\mu y(t) = e^{-\mu t} \mathcal{L}(e^{\mu t} y(t)). \quad (2.35)$$



**Твердження 2.11**

$\mathcal{L}_\mu$  — лінійний диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами й характеристичним поліномом  $P_\mu(\lambda) = P(\mu + \lambda)$ .

**Доведення**

Оскільки  $\mathcal{L}_\mu y(t)$  можна подати у вигляді лінійної комбінації функцій  $y(t)$ ,  $y'(t)$ ,  $y''(t)$ , ...,  $y^{(n)}(t)$  із деякими коефіцієнтами, можливо, залежними від  $t$ , то  $\mathcal{L}_\mu$  — лінійний диференціальний оператор. Подивимось, як цей оператор діє на пробні функції  $e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Маємо

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mu e^{\lambda t} &= e^{-\mu t} \mathcal{L}(e^{\mu t} e^{\lambda t}) = e^{-\mu t} \mathcal{L}(e^{(\mu+\lambda)t}) = \\ &= e^{-\mu t} P(\mu + \lambda) e^{(\mu+\lambda)t} = P(\mu + \lambda) e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Легко зрозуміти, що в такий спосіб на функції  $e^{\lambda t}$  може діяти лише лінійний диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами: адже при кожному  $\mu$  функція  $P(\mu + \lambda)$  аргументу  $\lambda \in \mathbb{C}$  поліномом степеня  $n$  із коефіцієнтами, що не залежать від  $t$ . За означенням цей поліном є характеристичним для оператора  $\mathcal{L}_\mu$ .

Знайдемо явний вигляд оператора  $\mathcal{L}_\mu$ . За формулою Тейлора

$$P(\mu + \lambda) = P(\mu) + P'(\mu)\lambda + \dots + \frac{P^{(n-1)}(\mu)}{(n-1)!} \lambda^{n-1} + \lambda^n.$$

Для того щоб за характеристичним поліномом відновити сам оператор, потрібно параметр  $\lambda$  замінити операцією  $\frac{d}{dt}$  (а отже,  $\lambda^k$  замінити на  $\frac{d^k}{dt^k}$ ). Таким чином, маємо

$$\mathcal{L}_\mu y = y + \frac{P^{(n-1)}(\mu)}{(n-1)!} y' + \dots + P(\mu) y,$$

і, аби дістати формулу зсуву, достатньо зауважити, що

$$\mathcal{L}(e^{\mu t} y(t)) = e^{\mu t} \mathcal{L}_\mu(y(t)).$$

Тепер покажемо, що  $r$ -кратному кореню  $\mu$  характеристичного полінома відповідає  $r$ -параметрична сім'я розв'язків ЛОР, яка має вигляд

$$x = e^{\mu t} (c_1 + c_2 t + \dots + c_r t^{r-1}),$$

де  $c_1, \dots, c_r$  — довільні сталі. Функцію в правій частині цієї формули називають *квазіполіномом* степеня  $r$ .

### Твердження 2.12

Нехай  $\mu$  —  $r$ -кратний корінь характеристичного полінома  $P(\lambda)$ , тобто

$$P(\mu) = P'(\mu) = \dots = P^{(r-1)}(\mu) = 0, \quad P^{(r)}(\mu) \neq 0. \quad (2.36)$$

Тоді цьому кореню відповідає серія таких  $r$  розв'язків рівняння (2.30):

$$e^{\mu t}, t e^{\mu t}, \dots, t^{r-1} e^{\mu t}. \quad (2.37)$$

### Доведення

З (2.36) та знайденого нами явного вигляду оператора  $\mathcal{L}_\mu$  випливає, що

$$\mathcal{L}_\mu y = y + \dots + \frac{P^{(r)}(\mu)}{r!} y^{(r)}.$$

Тому  $\mathcal{L}_\mu t^k = 0$  при кожному  $k = 0, \dots, r-1$ . Тепер з урахуванням формули зсуву маємо

$$\mathcal{L}(t^k e^{\mu t}) = e^{\mu t} \mathcal{L}_\mu t^k = 0 \quad \forall k = 0, \dots, r-1.$$

Отже, кожна функція із серії (2.37) є розв'язком рівняння (2.30).

Сформулюємо тепер підсумковий результат у вигляді такого *правила побудови ФСР* рівняння (2.30):

- утворюємо характеристичний поліном, який відповідає оператору  $\mathcal{L}$ ;
- знаходимо корені цього характеристичного полінома й визначаємо їх кратність;

- для кожного кореня  $\lambda_j$  кратності  $r_j$  ( $r_j = 1$  означає, що корінь  $r_j$  простий) виписуємо серію з  $r_j$  розв'язків:

$$e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, \dots, t^{r_j-1} e^{\lambda_j t}$$

і, таким чином, дістаємо систему з  $n$  розв'язків рівняння (2.30), яка в загальному випадку може містити комплекснозначні функції;

- якщо коефіцієнти оператора  $\mathcal{L}$  дійсні, характеристичне рівняння має комплексні корені й вимагається побудувати дійсну ФСР, то додатково кожному парі комплексно-спряжених розв'язків вигляду  $t^k e^{\lambda_j t}$ ,  $t^k e^{\bar{\lambda}_j t}$  ( $k = 0, \dots, r_j - 1$ ) заміняємо парою функцій

$$t^k e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t, t^k e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t,$$

де  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ , а  $r_j$  — кратність числа  $\lambda_j$  як кореня характеристичного полінома.

Для обґрунтування цього правила залишилося тільки показати, що утворена система розв'язків є фундаментальною. Позначимо ці розв'язки через  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  і припустимо, навпаки, що вони лінійно залежні. Тоді їх вронскіан є тотожним нулем. Оскільки його рядки лінійно залежні при кожному  $t \in \mathbb{R}$ , зокрема при  $t = 0$ , то існує набір сталих  $c_0, c_1, \dots, c_k = 1$ , де  $k \leq n - 1$ , такий, що

$$c_0 x_j(0) + c_1 \dot{x}_j(0) + \dots + \overset{(k)}{x}_j(0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Якщо ввести лінійний диференціальний оператор  $\Lambda : C^k(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}) \mapsto C(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C})$ , поклавши

$$\Lambda x(t) = c_0 x(t) + c_1 \dot{x}(t) + \dots + c_k \overset{(k)}{x}(t),$$

то дістанемо набір рівностей

$$\Lambda x_j(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.38)$$

Нехай  $P(\lambda)$  — характеристичний поліном оператора  $\Lambda$ ,  $\mu$  — будь-який

корінь характеристичного полінома  $P(\lambda)$  оператора  $\mathcal{L}$ , а  $r$  — кратність цього кореня. Покажемо, що  $\mu$  є водночас і коренем кратності, не меншої ніж  $r$ , полінома  $\Pi(\lambda)$ .

Оскільки функції  $e^{\mu t}$ ,  $te^{\mu t}$ , ...,  $t^{r-1}e^{\mu t}$  входять до системи розв'язків  $x_1(t)$ , ...,  $x_n(t)$ , то з урахуванням (2.38) маємо рівності

$$\Lambda(t^j e^{\mu t}) \Big|_{t=0} = 0 \quad \forall j = 0, 1, \dots, r-1,$$

які за допомогою формули зсуву можна подати у вигляді

$$e^{\mu t} \left( \frac{\Pi^{(j)}(\mu)}{j!} \frac{d^j t^j}{dt^j} + \frac{\Pi^{(j-1)}(\mu)}{(j-1)!} \frac{d^{j-1} t^j}{dt^{j-1}} + \dots + \Pi(\mu) t^j \right) \Big|_{t=0} = 0,$$

де  $j = 0, 1, \dots, r-1$ . Звідси послідовно дістаємо

$$\Pi(\mu) = 0, \quad \Pi'(\mu) = 0, \quad \dots, \quad \Pi^{(r-1)}(\mu) = 0.$$

Але тоді  $\mu$  — корінь полінома  $\Pi(\lambda)$  кратності, не меншої за  $r$ , тобто не меншої ніж кратність числа  $\mu$  як кореня полінома  $P(\lambda)$ .

Цей висновок стосується кожного кореня полінома  $P(\lambda)$ . Але ж степінь полінома  $\Pi(\lambda)$  не перевищує  $n-1$ , а  $P(\lambda)$  — поліном степеня  $n$ . Дійшли протиріччя, джерелом якого є припущення про лінійну залежність розв'язків  $x_1(t)$ , ...,  $x_n(t)$ .

### □ Приклад 2.8

*Знайдемо загальний розв'язок рівняння*

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 14x + 20\dot{x} + 25x = 0.$$

Утворюємо відповідний характеристичний поліном

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 14\lambda^2 + 20\lambda + 25 = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)^2.$$

Він має 2-кратний корінь  $-1 + 2i$  та корінь  $-1 - 2i$  такої самої кратності. Отже, комплексна ФСР має вигляд

$$e^{(-1+2i)t} = e^{-t}(\cos 2t + i \sin 2t), \quad te^{(-1+2i)t} = te^{-t}(\cos 2t + i \sin 2t),$$

$$e^{(-1-2i)t} = e^{-t}(\cos 2t - i \sin 2t), \quad te^{(-1-2i)t} = te^{-t}(\cos 2t - i \sin 2t).$$

Відокремивши в цих функціях дійсні та уявні частини, дістанемо дійсну ФСР, а тоді загальний розв'язок розглядуваного рівняння можна подати у вигляді

$$x = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 t \cos 2t + c_3 \sin 2t + c_4 t \sin 2t).$$

### 2.2.4. Лінійне однорідне рівняння Ейлера

З лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами тісно пов'язане так зване лінійне однорідне рівняння Ейлера

$$\mathcal{L}_E x := \tau^n \frac{d^n x}{d\tau^n} + b_1 \tau^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + b_n x = 0. \quad (2.39)$$

Л. Ейлер почав вивчати його у 1740 р. Проте близько 1700 р. рівняння (2.39) зумів розв'язати Й. Бернуллі.

Якщо рівняння Ейлера переписати в стандартному вигляді з коефіцієнтом 1 при старшій похідній, то решта ненульових коефіцієнтів при цьому матимуть особливість у точці  $\tau = 0$ . З пізнавального погляду рівняння (2.39) цікаве, зокрема, саме тим, що на його прикладі ми маємо змогу спостерігати складну поведінку розв'язків при  $\tau \rightarrow 0$ , зумовлену особливостями коефіцієнтів у точці  $\tau = 0$ .

Спочатку вивчимо рівняння (2.38) на лівосі  $(0, \infty)$ : Покажемо, що для оператора Ейлера  $\mathcal{L}_E$  можна природно визначити поняття характеристичного полінома. Справді, подіємо цим оператором на функцію вигляду  $\tau^\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . (Для  $\lambda \in \mathbb{C}$ , за означенням,  $\tau^\lambda = e^{\lambda \ln \tau}$ .) Неважко обчислити, що

$$\mathcal{L}_E \tau^\lambda = [\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + b_1 \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) + \dots + b_n] \tau^\lambda. \quad (2.40)$$

#### Означення 2.6

Поліном

$$P_E(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + b_1 \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) + \dots + b_n$$

називають *характеристичним поліномом оператора  $\mathcal{L}_E$* .

Таким чином, функція  $\tau^\lambda$  для оператора  $\mathcal{L}_E$  відіграє ту саму роль що й функція  $e^{\lambda t}$  для оператора  $\mathcal{L}$  зі сталими коефіцієнтами. Оскільки перша з названих функцій переходить у другу після підстановки  $\tau = e^t$ , то природно припустити, що рівняння Ейлера перетворюється на рівняння зі сталими коефіцієнтами, якщо в ньому зробити заміну незалежної змінної за формулою  $\tau = e^t$ . Це припущення виявляється правильним. Відкладемо його обґрунтування на кінець даного підпункту, а зараз, як наслідок, сформулюємо таке *правило побудови ФСР рівняння Ейлера* на кожній із півосей  $(-\infty, 0)$  та  $(0, \infty)$ :

- утворюємо характеристичний поліном  $P_E(\lambda)$  відповідно до формули (2.40) і записуємо його в стандартному вигляді

$$P_E(\lambda) = P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n;$$

- поставивши у відповідність цьому поліному рівняння зі сталими коефіцієнтами, в якому незалежною змінною є  $t$ , застосовуємо правило побудови ФСР такого рівняння, викладене в п. 2.2.3;
- в одержаній ФСР робимо заміну змінної  $t = \ln |\tau|$  і таким чином дістаємо ФСР рівняння (2.39).

Продемонструємо, як це правило застосовується на практиці.

### □ Приклад 2.9

Знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$\tau^4 x'''' + 10\tau^3 x'''' + 33\tau^2 x'' + 39\tau x' + 25x = 0.$$

Його характеристичний поліном має вигляд

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) + 10\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 33\lambda(\lambda - 1) + 39\lambda + 25 = \\ = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 14\lambda^2 + 20\lambda + 25. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Йому відповідає рівняння з прикладу 2.8, для якого ФСР уже було побудовано. Після заміни  $t = \ln |\tau|$  дістанемо шукану фундаментальну систему

$$\frac{1}{\tau} \cos(2 \ln |\tau|), \quad \frac{1}{\tau} \ln |\tau| \cos(2 \ln |\tau|), \quad \frac{1}{\tau} \sin(2 \ln |\tau|), \quad \frac{1}{\tau} \ln |\tau| \sin(2 \ln |\tau|).$$

Зауважимо, що кожна функція даної ФСР насправді визначає два розв'язки: один — на півосі  $(0, \infty)$ , а інший — на півосі  $(-\infty, 0)$ . З цієї причини та з урахуванням того, що розв'язок будь-якого ЛОР, помножений на  $-1$ , знову є розв'язком цього ЛОР, ми пишемо  $1/\tau$  замість  $1/|\tau|$ .

Для обґрунтування сформульованого вище правила розв'язання рівняння Ейлера доведемо таке твердження.

### Твердження 2.13

Заміна незалежної змінної  $\tau = e^t$  перетворює рівняння Ейлера на рівняння зі сталими коефіцієнтами, характеристичним поліномом якого є  $P_E(\lambda)$ .

#### Доведення

Нехай  $x(\tau) \in C^n((0, \infty) \rightarrow \mathbb{C})$  — довільна функція. Заміна змінної  $\tau = e^t$  перетворює її на функцію  $x(e^t) \in C^n(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C})$ . Прослідкуємо, як перетворюються при цьому похідні функції  $x(\tau)$ . Маємо

$$x'(\tau) = \frac{dx(\tau)}{d\tau} \mapsto e^{-t} \frac{dx(e^t)}{dt} = x'(\tau) \Big|_{\tau=e^t},$$

звідки за індукцією

$$x^{(k)}(\tau) = \underbrace{\frac{d}{d\tau} \dots \frac{d}{d\tau}}_k x(\tau) \mapsto \underbrace{e^{-t} \frac{d}{dt} \dots e^{-t} \frac{d}{dt}}_k x(e^t) = x^{(k)}(\tau) \Big|_{\tau=e^t}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Тепер зрозуміло, що оператор  $\mathcal{L}$ , який утворюється з оператора Ейлера внаслідок заміни  $\tau \mapsto e^t$ , характеризується такою властивістю:

$$\left[ \mathcal{L}_E x(\tau) \right] \Big|_{\tau=e^t} = \mathcal{L}x((e^t)). \quad (2.42)$$

Інакше кажучи, оператор  $\mathcal{L}$  визначається комутативною діаграмою

$$\left| \begin{array}{ccc} C^n((0, \infty) \mapsto \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathcal{L}_E} & C((0, \infty) \mapsto \mathbb{C}) \\ \tau = e^t \downarrow & & \downarrow \tau = e^t \\ C^n(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & C(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}) \end{array} \right|$$

Поклавши в (2.42)  $x(\tau) = \tau^\lambda$ , дістанемо

$$\mathcal{L}_E \tau^\lambda \Big|_{\tau=e^t} = P_E(\lambda) e^{i\lambda t} = \mathcal{L} e^{i\lambda t}.$$

Але ця рівність означає, що  $\mathcal{L}$  є оператором зі сталими коефіцієнтами й  $P_E(\lambda)$  є його характеристичним поліномом.

Доведене твердження обґрунтовує правило розв'язання рівняння Ейлера на півосі  $(0, \infty)$ . Для відшукування розв'язків на півосі  $(-\infty, 0)$  можна було б у цьому рівнянні зробити заміну незалежної змінної за формулою  $\tau = -e^t$ . Однак простіше скористатися таким спостереженням: рівняння Ейлера не змінює свого вигляду (тобто є інваріантним) при відбитті  $\tau \mapsto -\tau$  (перевірте). З цього факту випливає, що коли функція  $x(\tau)$  є розв'язком рівняння Ейлера на півосі  $(0, \infty)$ , то функція  $x(-\tau) = x(|\tau|)$ , а з нею й  $-x(-\tau) = -x(|\tau|)$  задовольнятиме це рівняння на півосі  $(-\infty, 0)$ .

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

① Розв'язати рівняння:

а)  $\ddot{x} - 8x = 0$ ;                      б)  $x + 2\ddot{x} + x = 0$ .

② Розв'язати рівняння:

а)  $t^2 \ddot{x} + t\dot{x} - 2x = 0$ ;              б)  $t^3 \ddot{x} + t\dot{x} - x = 0$ .

③ Сформулювати правило побудови розв'язків рівняння Лагранжа

$$(\alpha\tau + \beta)^n x^{(m)} + b_1(\alpha\tau + \beta)^{n-1} x^{(m-1)} + \dots + b_n x = 0,$$

де  $\tau$  — незалежна змінна,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .



## 2.3

### Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами

**Основний об'єкт** дослідження даного параграфу — ЛОС вигляду

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.43)$$

де  $A$  — матриця з незалежними від часу  $t$  елементами (дійсними або комплексними).

#### 2.3.1. Метод Ейлера

З досвіду вивчення ЛОР зі сталими коефіцієнтами шукатимемо розв'язок системи (2.43) у вигляді

$$x = e^{\lambda t} h,$$

де  $h$  — шуканий ненульовий сталий вектор,  $\lambda$  — шукане число. Підставивши цей проект розв'язку в систему (2.43) та поділивши обидві частини одержаної рівності на  $e^{\lambda t}$ , матимемо

$$A h = \lambda h$$

або

$$(A - \lambda E)h = 0, \quad E := \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_n) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Це — задача на власні числа й власні вектори. Для існування розв'язку  $(\lambda, h)$  системи (2.44) такого, що  $h \neq 0$ , необхідно й достатньо, аби число  $\lambda$  було коренем *характеристичного рівняння*

$$P(\lambda) = 0,$$

де  $P(\lambda) := \det(A - \lambda E)$  — *характеристичний поліном* матриці  $A$ . Нехай

$\lambda = \mu$  — довільний корінь характеристичного полінома  $P(\lambda)$ , тобто власне число матриці  $A$ . Підставивши це число в (2.44) замість  $\lambda$ , дістаємо лінійну однорідну систему для визначення відповідного власного вектора. Якщо  $\mu$  — простий корінь полінома  $P(\lambda)$ , то всі власні вектори, які відповідають власному числу  $\mu$ , пропорційні будь-якому фіксованому власному векторові (коефіцієнт пропорційності в загальному випадку — комплексне число). Така ситуація має місце тоді і лише тоді, коли

$$\text{rank}(A - \mu E) = n - 1.$$

Добре відомо [6], що власні вектори, які відповідають різним власним числам, лінійно незалежні над  $\mathbb{C}$ . Отже, якщо  $P(\lambda)$  не має кратних коренів, то існує  $n$  лінійно незалежних власних векторів матриці  $A$  які, таким чином, утворюють базис простору  $\mathbb{C}^n$ . Базис із власних векторів існує й тоді, коли кожному власному числу відповідає така кількість лінійно незалежних власних векторів, якою є кратність цього числа як кореня характеристичного полінома. В обох цих випадках описаним вище методом, який пов'язує з ім'ям Л. Ейлера, можна побудувати ФСР системи (2.43). Сформулюємо цей висновок у вигляді такої теореми.

### Теорема 2.9

Нехай  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — корені характеристичного полінома  $P(\lambda)$ , виписані з урахуванням їх кратностей (тобто, якщо  $\lambda_j$  є коренем кратності  $r_j$ , то він повторюється  $r_j$  разів). Припустимо, що матриця  $A$  має  $n$  лінійно незалежних власних векторів  $h_1, \dots, h_n$ , так що вектор  $h_j$  відповідає власному числу  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). (Еквівалентна умова: кратність кожного кореня  $\lambda_j$  дорівнює  $n - \text{rank}(A - \lambda_j E)$ .) Тоді вектор-функції

$$\boxed{e^{\lambda_1 t} h_1, \dots, e^{\lambda_n t} h_n} \quad (2.45)$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (2.43).

### Доведення

Оскільки кожна пара  $(\lambda_j, h_j)$  справджує рівність (2.44), то кожна вектор-функція  $e^{\lambda_j t} h_j$  є розв'язком системи (2.43). Лінійна не-

залежність розв'язків (2.45) є наслідком незалежності їх значень при  $t = 0$ .

### О Наслідок 2.5

Фундаментальна матриця системи (2.43) у випадку, коли справджуються умови теореми 2.9, має вигляд

$$X(t) = H \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}),$$

де  $H$  — матриця,  $j$ -м стовпцем якої є власний вектор  $h_j$ , що відповідає власному числу  $\lambda_j$ , а  $\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$  — матриця, в якій на головній діагоналі знаходяться функції  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ , а решта елементів — нулі.

Розглянемо тепер детальніше випадок, коли елементи матриці  $A$  — дійсні числа, але серед коренів характеристичного полінома є комплексні. Задача полягає в побудові дійсної ФСР.

Нехай  $\lambda = \mu = \alpha + i\beta$  — комплексний корінь полінома  $P(\lambda)$ . Тоді матриця  $A$  має пару комплексно-спряжених власних чисел  $\mu, \bar{\mu}$  і пару відповідних комплексно-спряжених власних векторів  $h = f + ig, \bar{h} = f - ig$ , де  $f, g \in \mathbb{R}^n$ . Оскільки  $Ah = \mu h$ , то  $Af + iAg = (\alpha + i\beta)(f + ig)$ . Відокремивши в цій рівності дійсну й уявну частини, дістанемо

$$Af = \alpha f - \beta g, \quad Ag = \beta f + \alpha g. \quad (2.46)$$

Система (2.43) має пару комплексно-спряжених розв'язків  $x(t) = e^{\mu t} h, \bar{x}(t) = e^{\bar{\mu} t} \bar{h}$ . Подавши перший із цих розв'язків у вигляді

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)(f + ig) = \\ &= e^{\alpha t} [(\cos \beta t f - \sin \beta t g) + i(\sin \beta t f + \cos \beta t g)], \end{aligned}$$

відокремимо дійсну й уявну частини. Матимемо пару вектор-функцій

$$u(t) = \operatorname{Re} x(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t f - \sin \beta t g),$$

$$v(t) = \operatorname{Im} x(t) = e^{\alpha t} (\sin \beta t f + \cos \beta t g),$$

які згідно з викладеним у п. 2.2.1 утворюють пару лінійно незалежних дійсних розв'язків системи (2.43). Якщо в такий спосіб у наборі (2.45) кожену пару комплексно-спряжених розв'язків замінити парою дійсних, то й дістанемо шукану дійсну ФСР.

□ **Приклад 2.10**

Знайдемо загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z - x, \\ \dot{y} = -x - y, \\ \dot{z} = -3x - z. \end{cases}$$

Матриця системи має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Власні числа знаходимо з рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \equiv -(\lambda+1)^3 - 4(\lambda+1) = 0.$$

Маємо  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ ,  $\lambda_3 = -1$ . Координати  $(x, y, z)$  власного вектора  $h$ , що відповідає власному числу  $\lambda_1$ , знаходимо з системи

$$(A - \lambda_1 E)h = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2ix + y + z = 0, \\ -x - 2iy = 0, \\ -3x - 2iz = 0. \end{cases}$$

Можемо покласти  $x = 2i$ ,  $y = -1$ ,  $z = -3$ . Таким чином дістаємо спочатку частинний комплексний розв'язок

$$e^{-t}(\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ -\cos 2t \\ -3 \cos 2t \end{pmatrix} + ie^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ -\sin 2t \\ -3 \sin 2t \end{pmatrix},$$

а потім пару дійсних

$$e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ -\cos 2t \\ -3 \cos 2t \end{pmatrix}, \quad e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ -\sin 2t \\ -3 \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Координати власного вектора, що відповідає власному числу  $\lambda_3 = -1$ , визначаємо із системи

$$(A + E)h = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0, \\ -x = 0, \\ -3x = 0. \end{cases}$$

Можна покласти  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = -1$ . Відповідний розв'язок має вигляд

$$e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тепер виписуємо загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ -\cos 2t \\ -3 \cos 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ -\sin 2t \\ -3 \sin 2t \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\dot{x} = Ax$$

Розглянемо систему (2.43) із загальніших позицій. Визначаючи її, ми вважали, що  $x$  — числовий вектор-стовпець і  $A$  — деяка матриця чисел. Тепер будемо тлумачити цю систему як векторне рівняння в абстрактному  $n$ -вимірному векторному просторі  $\mathcal{V}^n$  (над полем дійсних або комплексних чисел), визначене певним лінійним оператором  $A: \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}^n$ . З усяким базисом  $\{e_j\}_{j=1}^n$  простору  $\mathcal{V}^n$  пов'язане координатне зображення рівняння (2.43). А саме, нехай  $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — матриця оператора  $A$  в цьому базисі:

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, \quad j = 1, \dots, n. \text{ У координатах } (x_1, \dots, x_n): x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

рівняння (2.43) набуває вигляду ЛОС:

$$\sum_{i=1}^n \dot{x}_i e_i = \sum_{j=1}^n x_j Ae_j = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) e_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Природно спробувати вибрати такий базис простору  $\mathcal{V}^n$ , в якому матриця оператора  $A$  мала б найпростіший вигляд. Так, нехай справджуються умови теореми 2.9, тобто існує власний базис  $\{h_j\}_{j=1}^n$  оператора  $A$ . Тоді простір  $\mathcal{V}^n$  розпадається на пряму суму

одновимірних інваріантних відносно  $A$  підпросторів (дод. 2). Запровадивши координати  $(x_1, \dots, x_n)$  рівністю

$$x = x_1 h_1 + \dots + x_n h_n,$$

дістанемо найпростіше координатне зображення векторного рівняння (2.43):

$$\dot{x}_1 h_1 + \dots + \dot{x}_n h_n = x_1 A h_1 + \dots + x_n A h_n \equiv \lambda_1 x_1 h_1 + \dots + \lambda_n x_n h_n.$$

Ця ЛОС є прямим добутком скалярних рівнянь  $\dot{x}_j = \lambda_j x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  і елементарно розв'язується. Зокрема, розв'язок задачі Коші з початковою умовою  $x_j(t_0) = x_{0j}$  для  $j$ -го рівняння має вигляд

$$x_j(t) = x_{0j} e^{\lambda_j (t - t_0)}.$$

Таким чином, за зроблених припущень щодо існування власного базису оператора  $A$  розв'язок векторного рівняння (2.43), який задовольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$ , можна подати у вигляді

$$x(t) = \sum_{j=1}^n x_{0j} e^{\lambda_j (t - t_0)} h_j, \quad (2.47)$$

де  $(x_{01}, \dots, x_{0n})$  — координати вектора  $x_0$  у власному базисі.

Одновимірний підпростір  $V_j^1$ , натягнений на вектор  $h_j$ , природно називати інваріантним підпростором рівняння (2.43). Для цього є такі підстави: якщо початкове значення розв'язку  $x(t)$  належить  $V_j^1$ , тобто  $x_0 = x_{0j} h_j$ , то значення цього розв'язку належатиме  $V_j^1$  і в будь-який інший момент. Цей факт безпосередньо випливає з формули (2.47), якщо покласти  $x_{0k} = 0$ ,  $k \neq j$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Окремо розглянемо випадок, коли  $V^n$  — дійсний векторний простір, а характеристичний поліном оператора  $A$  має комплексний корінь  $\lambda = \mu + i\beta$ . [Характеристичний поліном оператора  $A$  — це характеристичний поліном матриці цього оператора в деякому (а тоді й у будь-якому) базисі.] В цьому випадку викладені вище в даному підпункті міркування стосовно побудови дійсної ФСР дають змогу зробити висновок, що існує пара лінійно незалежних векторів  $f, g$ , для яких виконуються рівності (2.46). Зрозуміло тоді, що двовимірний підпростір  $V_{\mu}^2$ , натягнений на  $f, g$ , є інваріантним відносно оператора  $A$ . Цей підпростір буде інваріантним і відносно рівняння (2.43). Справді,  $V_{\mu}^2$  можна задати в параметричному вигляді рівнянням  $x = uf - vg$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{R}$  (із міркувань суто технічного характеру ми пишемо  $-v$  замість  $+v$ ). Параметри  $u, v$  можна при цьому розглядати як внутрішні координати в  $V_{\mu}^2$ . З урахуванням (2.46) рівняння (2.43) допускає звуження на підпростір  $V_{\mu}^2$ :

$$\dot{u}f - \dot{v}g = uAf - vAg = u(\alpha f - \beta g) - v(\beta f + \alpha g).$$

Звідси після прирівнювання коефіцієнтів при векторах  $f, g$  дістаємо двовимірну ЛОС

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha u - \beta v, \\ \dot{v} = \beta u + \alpha v. \end{cases} \quad (2.48)$$

Зауважимо, що її можна переписати у вигляді одного рівняння в  $\mathbb{C}$

$$\dot{w} = \mu w, \quad w := u + iv \quad (2.49)$$

(у цьому легко переконатися, відокремивши в (2.49) дійсну та уявну частини), загальний розв'язок якого має вигляд

$$w = ce^{\mu t} = (c_1 + ic_2)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t).$$

Звідси

$$u = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t - c_2 \sin \beta t), \quad v = e^{\alpha t}(c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t).$$

Тепер зрозуміло, що матриця

$$e^{\alpha t} = \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

є фундаментальною матрицею системи (2.48). Отже, у випадку, коли матриця оператора  $A$  в деякому (а тоді й у будь-якому) базисі задовольняє умови теореми 2.9, дійсний простір  $\mathcal{V}^n$  можна розкласти в пряму суму одно- й двовимірних інваріантних відносно оператора  $A$  підпросторів, і існує такий базис цього простору, в якому координатне зображення рівняння (2.43) набуває вигляду прямого добутку скалярних ЛОР першого порядку й двовимірних ЛОС вигляду (2.48).

### 2.3.2. Узагальнення методу Ейлера

Розглянемо тепер випадок, коли характеристичний поліном матриці  $A$  має кратні корені, але відповідних лінійно незалежних векторів не вистачає для побудови ФСР системи (2.43). Саме така ситуація виникає тоді, коли (2.43) є системою, еквівалентною ЛОР  $n$ -го порядку

зі сталими коефіцієнтами. Легко перевірити, що характеристичний поліном матриці такої системи з точністю до знака збігається з характеристичним поліномом відповідного ЛОР. Оскільки при  $r$ -кратному корені характеристичного полінома таке диференціальне рівняння має розв'язок у вигляді добутку показникової функції на поліном степеня  $r - 1$ , тобто у вигляді квазіполінома  $(r - 1)$ -го степеня, то й серед розв'язків еквівалентної ЛОС мають бути вектор-квазіполіноми. Керуючися цими міркуваннями, в загальному випадку шукатимемо розв'язок системи (2.43) у вигляді вектор-квазіполінома деякого степеня  $k - 1$

$$x = e^{\lambda t} \left( \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} h_1 + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} h_2 + \dots + h_k \right), \quad (2.50)$$

де  $\lambda$  — невідоме число,  $h_1, h_2, \dots, h_k$  — невідомі вектори. При цьому вимагаємо, щоб  $h_1 \neq 0$ . Наявність факторіалів у проекті розв'язку зумовлена зручністю диференціювання функцій вигляду  $t^j/j!$ , а саме  $\frac{d}{dt} t^j/j! = t^{j-1}/(j-1)!$ . Підставимо (2.50) у (2.43). Після скорочення на  $e^{\lambda t}$  дістанемо

$$\begin{aligned} & \lambda \left( \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} h_1 + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} h_2 + \dots + h_k \right) + \\ & + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} h_1 + \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} h_2 + \dots + h_{k-1} = \\ & = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} Ah_1 + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} Ah_2 + \dots + Ah_k. \end{aligned}$$

Прирівняємо вектор-коефіцієнти при однакових степенях  $t$ :

$$\begin{aligned} Ah_1 &= \lambda h_1, \\ Ah_2 &= \lambda h_2 + h_1, \\ &\dots \dots \dots \\ Ah_k &= \lambda h_k + h_{k-1}. \end{aligned} \quad (2.51)$$



Перше з рівнянь цієї системи являє собою задачу на власні числа й власні вектори. Власні числа є коренями характеристичного полінома матриці  $A$ .

Нехай  $\lambda = \mu$  — *корінь кратності  $r$*  цього полінома. Підставимо  $\lambda = \mu$  у (2.51) і перепишемо одержану систему у вигляді

$$\begin{aligned}(A - \mu E)h_1 &= 0, \\(A - \mu E)h_2 &= h_1, \\&\dots\dots\dots \\(A - \mu E)h_k &= h_{k-1}.\end{aligned}\tag{2.52}$$

Вона складається з  $n$ -вимірних підсистем. Будемо послідовно розв'язувати ці підсистеми. Число довільних сталих (параметрів), від яких залежить загальний розв'язок першої підсистеми, дорівнює  $n - \text{rank}(A - \mu E)$  — числу лінійно незалежних власних векторів, що відповідають  $\mu$ . Підставимо цей загальний розв'язок у другу підсистему. Умова Кронекера--Капеллі сумісності одержаної лінійної неоднорідної системи виражається рівністю рангів основної й розширеної матриць

$$\text{rank}(A - \mu E) = \text{rank}(A - \mu E | h_1)$$

і накладає певні зв'язки на параметри, від яких залежить  $h_1$ . Якщо виписана умова сумісності не має своїм наслідком рівність  $h_1 = 0$ , то, знайшовши загальний розв'язок другої підсистеми, переходимо до третьої і т. д. Цей процес завершується на деякому  $k$ -му кроці,  $1 \leq k \leq r$ , коли вперше наслідком сумісності системи з матрицею  $A - \mu E$  і правою частиною  $h_k$  є рівність  $h_1 = 0$ . Ця умова визначає *максимальне значення  $k = k_\mu$* , для якого система (2.43) має розв'язок вигляду (2.50) з  $\lambda = \mu$ .

Оскільки з (2.52) випливає, що  $h_1 = (A - \mu E)^{k-1}h_k$ , а  $(A - \mu E)h_1 = (A - \mu E)^k h_k = 0$ , то число  $k_\mu$  є те найбільше натуральне  $k$ , при якому система  $(A - \mu E)^k x = 0$  має розв'язок такий, що  $(A - \mu E)^{k-1}x \neq 0$ . На практиці можна скористатися й таким твердженням.

#### Твердження 2.14

Число  $k_\mu$  дорівнює найменшому натуральному  $k$ , при якому

$$\boxed{\text{rank}(A - \mu E)^k = \text{rank}(A - \mu E)^{k+1}}\tag{2.53}$$

### Доведення

Виписана рівність еквівалентна рівності вимірностей просторів розв'язків систем  $(A - \mu E)^k x = 0$  та  $(A - \mu E)^{k+1} x = 0$ . Але простір розв'язків першої системи належить простору розв'язків другої. Тому рівність (2.53) виконується тоді й лише тоді, коли ці два простори збігаються. Отже, якщо  $\text{rank}(A - \mu E)^{k-1} > \text{rank}(A - \mu E)^k$  і водночас виконується рівність (2.53), то система  $(A - \mu E)^k x = 0$  має розв'язок такий, що  $(A - \mu E)^{k-1} x \neq 0$ , але з  $(A - \mu E)^{k+1} x = 0$  випливає, що й  $(A - \mu E)^k x = 0$ .

Із подальших міркувань буде видно, що  $k_\mu$  — це максимальний із розмірів клітин Жордана, які відповідають власному числу  $\mu$  у нормальній жордановій формі матриці  $A$ .

Виявляється, знайдені вектори  $h_1, h_2, \dots, h_{k_\mu}$  у сукупності містять рівно  $r$  довільних сталих і за формулою (2.50) породжують  $r$ -параметричну сім'ю розв'язків ЛОС (2.43). Якщо описані вище дії виконати для всіх коренів характеристичного рівняння й взяти суму одержаних розв'язків, то результат залежатиме від  $n$  довільних сталих і утворюватиме загальний розв'язок системи (2.43).

Обґрунтування такого висновку спирається на деякі факти структурної теорії лінійних операторів (див., наприклад, дод. 1). У цій теорії встановлено, що кожному  $r$ -кратному кореню  $\mu$  характеристичного полінома лінійного оператора  $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  відповідає  $r$ -вимірний кореневий підпростір. Цей кореневий підпростір є інваріантним відносно  $A$  й або сам має структуру циклічного підпростору, або розпадається на пряму суму кількох циклічних підпросторів. Кожен циклічний підпростір вимірності, скажімо,  $m$  характеризується тим, що в ньому є базис, утворений ланцюжком векторів  $e_1, \dots, e_m$ , які задовольняють систему (2.51) при  $\lambda = \mu$ ,  $h_j = e_j$ ,  $j = 1, \dots, k = m$ . Матриця обмеження оператора  $A$  на такий циклічний підпростір у базисі  $\{e_j\}_{j=1}^m$  має вигляд  $(m \times m)$ -вимірної жорданової клітини

$$J_m(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Оскільки для ланцюжка  $h_1 = e_1, \dots, h_m = e_m$  рівності (2.52) виконуються при  $k = 1, \dots, m$  ( $h_0 := 0$ ), то ЛОС (2.43) має набір із  $m$  розв'язків вигляду

$$e^{it} e_1, e^{it} (te_1 + e_2), \dots, e^{it} \left( \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e_1 + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e_2 + \dots + e_m \right). \quad (2.54)$$

Очевидно, що значення цих розв'язків при  $t = 0$  лінійно незалежні, а тому й самі розв'язки лінійно незалежні.

Якщо розв'язки вигляду (2.54) побудувати за базисними векторами кожного циклічного підпростору, що є прямим доданком у кореневому підпросторі  $r$ -кратного кореня  $\mu$ , то дістанемо рівно  $r$  лінійно незалежних розв'язків системи (2.43). Їх лінійна комбінація з довільними коефіцієнтами утворює  $r$ -параметричну сім'ю розв'язків вигляду (2.50), де  $k = k_\mu$ , яка відповідає  $r$ -кратному кореню характеристичного полінома. Тепер зрозуміло, що, побудувавши для оператора  $A$  базис, в якому його матриця набирає вигляду нормальної жорданової форми, ми зможемо легко знайти систему з  $n$  квазіполіноміальних розв'язків, значення яких при  $t = 0$  являють собою базисні вектори простору  $S$ . Набір таких розв'язків утворює ФСР системи (2.43).

Для побудови дійсної ФСР системи (2.43) у випадку матриці  $A$  з дійсними елементами достатньо, як і в п. 2.3.1, скористатися твердженням 2.9.

Розглянемо три приклади застосування викладеної методики розв'язання ЛОС зі сталими коефіцієнтами.

### □ Приклад 2.11

*Знайдемо загальний розв'язок системи*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 2z, \\ \dot{y} = x - 2z, \\ \dot{z} = 2x - 3z. \end{cases}$$

Матриця системи має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

має корені  $\lambda_{1,2} = -1$ ,  $\lambda_3 = 1$ . Ранг матриці

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

дорівнює 2. Тому власному числу  $\lambda_1 = -1$  відповідає двовимірний простір Жордана. Згідно з узагальненим методом Ейлера двопараметричну сім'ю розв'язків, що відповідає цьому власному числу, шукаємо у вигляді  $x = e^{-t}(th_1 + h_2)$ . Вектори

$$h_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ та } h_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

мають задовольняти систему

$$(A + E)h_1 = 0 \wedge (A + E)h_2 = h_1,$$

тобто

$$\begin{cases} -3x_1 - y_1 - 2z_1 = 0, \\ x_1 + y_1 - 2z_1 = 0, \\ 2x_1 - 2z_1 = 0; \end{cases} \wedge \begin{cases} -3x_2 - y_2 - 2z_2 = x_1, \\ x_2 + y_2 - 2z_2 = y_1, \\ 2x_2 - 2z_2 = z_1. \end{cases}$$

Ураховуючи, що в першій підсистемі перший рядок є наслідком двох останніх, маємо  $z_1 = x_1$ ,  $y_1 = x_1$ , де  $x_1$  розглядається тепер як параметр. Підставивши ці залежності в другу підсистему, з двох її останніх рівнянь знаходимо  $z_2 = x_2 - x_1/2$ ,  $y_2 = x_2$ . Покладемо для зручності  $x_1 = 2c_1$ ,  $x_2 = c_2$ . Тоді

$$h_1 = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 2c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2 \\ c_2 - c_1 \end{pmatrix}.$$

Координати власного вектора, що відповідає власному числу  $\lambda_3 = 1$ , визначаємо із системи

$$(A - E)h = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 0, \\ x - y - 2z = 0, \\ 2x - 4z = 0. \end{cases}$$

Її однопараметрична сім'я розв'язків має вигляд

$$h = \begin{pmatrix} 2c_3 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Тепер випишемо загальний розв'язок ЛОС

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{-t} \left[ t \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 2c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2 \\ c_2 - c_1 \end{pmatrix} \right] + e^{-t} \begin{pmatrix} 2c_3 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

#### □ Приклад 2.12

Знайдемо загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z - 2x, \\ \dot{y} = y + 2z - 2x, \\ \dot{z} = x - y - 2z. \end{cases}$$

Матриця системи має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3 = 0$$

має трикратний корінь  $\lambda = \lambda_{1,2,3} = -1$ . Ранг матриці

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

дорівнює 1. Тому власному числу  $\lambda = -1$  відповідає два лінійно незалежних власних вектори, а отже, нормальна жорданова форма матриці  $A$  містить двовимірну клітину Жордана. Згідно з узагальненим методом Ейлера трипараметричну сім'ю розв'язків шукаємо у вигляді  $x = e^{-t}(th_1 + h_2)$ . Вектори

$$h_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ та } h_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

мають задовольняти систему

$$(A + E)h_1 = 0 \wedge (A + E)h_2 = h_1.$$

Перша підсистема еквівалентна одному рівнянню

$$-x_1 + y_1 + z_1 = 0.$$

Звідси  $z_1 = x_1 - y_1$ , де  $x_1, y_1$  — вільні параметри. Тепер друга підсистема набирає вигляду

$$\begin{cases} -x_2 + y_2 + z_2 = x_1, \\ -2x_2 + 2y_2 + 2z_2 = y_1, \\ x_2 - y_2 - z_2 = x_1 - y_1. \end{cases}$$

Умова Кронекера—Капеллі накладає зв'язок на параметри  $x_1$  та  $y_1$ :  $2x_1 = y_1$ . Після цього друга підсистема стає еквівалентною одному рівнянню

$$-x_2 + y_2 + z_2 = x_1.$$

Переозначивши вільні параметри  $x_1 = c_1, y_2 = c_2, z_2 = c_3$ , дістаємо  $y_1 = 2c_1, z_1 = -c_1, x_2 = c_2 + c_3 - c_1$ . Тепер запишемо загальний розв'язок ЛОС

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{-t} \left[ t \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 + c_3 - c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right].$$

Економічніший спосіб розв'язання системи даного прикладу полягає в побудові жорданового базису. Легко перевірити, що  $(A + E)^2 = \text{нульова}$

матриця. Отже, якщо вектор  $e_3$  вибрати так, щоб  $(A + E)e_3 =: e_2 \neq 0$ , то  $e_2$  буде власним вектором матриці  $A$ , а пара  $e_2, e_3$  утворюватиме базис циклічного підпростору. Наприклад,

$$e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Залишилося знайти ще один власний вектор, лінійно незалежний з  $e_2$ . Як уже було показано вище, координати власних векторів задовольняють рівність  $z_1 = x_1 - y_1$ . Зручно покласти  $x_1 = y_1 = 1$ . Тоді матимемо власний вектор  $e_1$ , в якого перші дві компоненти — одиниці, а третя — нуль. Таким чином, на підставі формул (2.54) знаходимо фундаментальну систему розв'язків

$$e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -t+1 \end{pmatrix}.$$

### □ Приклад 2.13

*Знайдемо загальний розв'язок системи*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 4x, \\ \dot{y} = z - 3x - y, \\ \dot{z} = -x - z. \end{cases}$$

Характеристичний поліном матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

має трикратний корінь  $\lambda = -2$ . Оскільки  $\text{rank}(A + 2E) = 2$ , то жорданова нормальна форма матриці  $A$  складається з однієї клітини. Отже, розв'язок можна знайти у вигляді (2.50), де  $k = 2$ ,  $\lambda = -1$ , визначивши вектори  $h_1, h_2, h_3$  із системи (2.52) при  $\mu = -2$ . Але простіше побудувати ланцюжок векторів, що утворює жорданів базис. Для цього випишемо матриці

$$A + 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A + 2E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця  $(A + 2E)^3 = (A + 2E)(A + 2E)^2$  нульова. Звідси випливає, що кожен стовпець матриці  $(A + 2E)^2$  є власним вектором матриці  $A$ . Виберемо вектор  $e_3$  так, щоб  $e_1 := (A + 2E)^2 e_3 \neq 0$ , і покладемо  $e_2 := (A + 2E)e_3$ . Тоді  $(A + 2E)e_2 = e_1$ ,  $(A + 2E)e_1 = 0$ . Отже, вектори  $e_1, e_2, e_3$  утворюють шуканий ланцюжок. Можна, наприклад, покласти

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер за формулами (2.54) виписуємо фундаментальну систему розв'язків

$$e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-2t} \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ t+1 \end{pmatrix}, \quad e^{-2t} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t^2+t \\ t^2/2+t+1 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.3. Лінійні однорідні системи в $\mathbb{R}^3$

Розглянемо систему (2.43) з дійсною матрицею  $A$  при  $n = 3$ . Кожен розв'язок такої системи задає в параметричному вигляді криву в  $\mathbb{R}^3$ , яка називається *фазовою кривою* або *траєкторією*. Частина фазової кривої, яка відповідає невід'ємним значенням параметра  $t$ , називається додатною *півтраєкторією*. Аналогічно випадку  $n = 2$ , який уже було розглянуто в п. 1.9, здійснимо класифікацію таких систем відповідно до типів нормальних жорданових форм матриць їхніх коефіцієнтів. Водночас для системи кожного класу проаналізуємо основні властивості її фазових кривих. Обмежимося вивченням систем із невідродженими матрицями  $A$ .

**Матриця  $A$  має трійку лінійно незалежних дійсних власних векторів  $h_1, h_2, h_3$ . Нехай  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — відповідні власні числа (серед них**



можуть бути й однакові). Введемо координати  $(x, y, z)$  співвідношенням  $x = xh_1 + yh_2 + zh_3$ . У цих координатах система (2.43) зобразиться у вигляді прямого добутку трьох скалярних рівнянь

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \lambda_2 y, \quad \dot{z} = -\lambda_3 z.$$

У випадку, коли всі власні числа від'ємні (додатні), кожна траєкторія входить у початок координат при  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). Проекції фазових кривих на будь-яку координатну площину становлять плоскі фазові криві й утворюють картину, що являє собою вузол (в окремому випадку принаймні двох рівних коренів вузол може бути дикритичним). На рис 2.1, а зображено кілька півтраєкторій системи, матриця якої має три дійсних числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , таких, що  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Всі ці криві в момент  $t = 0$  стартують із кола, заданого рівняннями  $z = 1, x^2 + y^2 = 1$ .

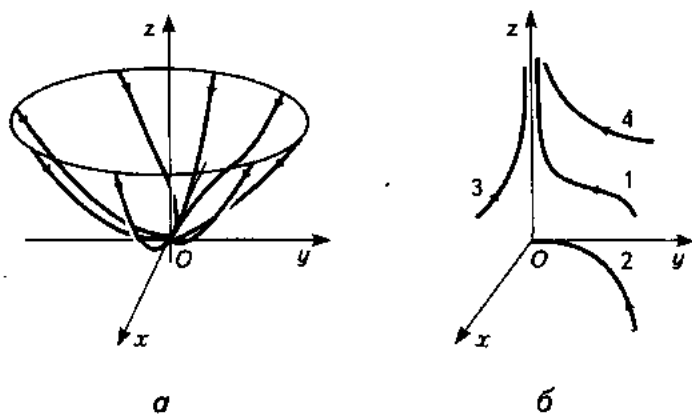


Рис. 2.1

Півтраєкторії системи у випадку  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$  зображено на рис. 2.1, б. Фазова крива 1 лежить у першому квадранті. Її проекцією на площину  $xOy$  є фазова крива 2. У цій площині траєкторії утворюють вузол. Проекціями кривої 1 на площини  $xOz$  та  $yOz$  є криві 3 та 4 відповідно. В кожній із цих площин траєкторії утворюють сідло.

Серед власних чисел матриці  $A$  є пара комплексно-спряжених. Парі комплексно-спряжених власних чисел  $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$  відповідає пара власних векторів  $f + ig, f - ig$  ( $f, g \in \mathbb{R}^3$ ). Через  $h$  позначимо

власний вектор, що відповідає дійсному власному числу  $\mu$ . Введемо координати  $(x, y, z)$  за формулою  $x = xf - yg + zh$ . З урахуванням (2.48) у нових координатах вихідна система зобразиться у вигляді прямого добутку двовимірної системи та скалярного рівняння

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y, \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y, \\ \dot{z} = \mu z. \end{cases}$$

Фазовим портретом двовимірної системи є фокус (центр, якщо  $\alpha = 0$ ), а розв'язки скалярного рівняння прямують до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , якщо  $\mu < 0$ , і при  $t \rightarrow -\infty$ , якщо  $\mu > 0$ .

Ситуації, коли  $\alpha < 0$ ,  $\mu < 0$ , відповідає рис. 2.2, а.

Нормальна форма матриці  $A$  містить двовимірну жорданову клітину. В цьому випадку існує базис  $e_1, e_2, e_3$  такий, що

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Ae_2 = \lambda_1 e_2 + e_1, \quad Ae_3 = \lambda_3 e_3.$$

Увівши координати  $(x, y, z)$  за формулою  $x = xe_1 + ye_2 + ze_3$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \dot{x}e_1 + \dot{y}e_2 + \dot{z}e_3 &= xAe_1 + yAe_2 + zAe_3 \equiv \\ &\equiv (\lambda_1 x + y)e_1 + \lambda_1 ye_2 + \lambda_3 ze_3, \end{aligned}$$

звідки

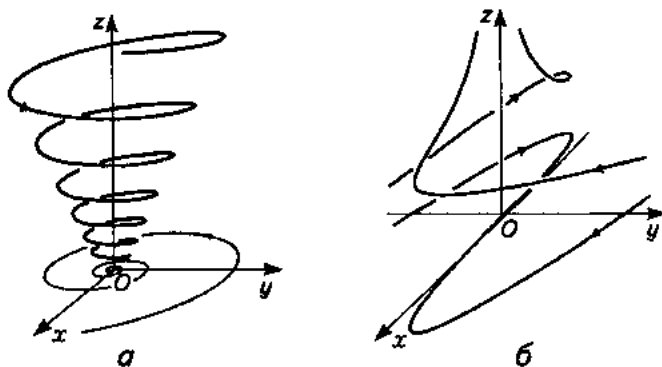


Рис. 2.2

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + y, \\ \dot{y} = \lambda_1 y, \\ \dot{z} = \lambda_3 z. \end{cases}$$

Ця системам являє собою прямий добуток двовимірної системи, фазовим портретом якої є вироджений вузол, та скалярного рівняння.

Ситуації, коли  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_3 > 0$ , відповідає рис. 2.2, б. На площині  $xOy$  траєкторії утворюють вироджений вузол. Оскільки  $y(t) \equiv 0$ , якщо  $y(0) = 0$ , то система має також плоскі фазові криві, які лежать на площині  $xOz$  і утворюють сідло. Просторові фазові криві мають вертикальну асимптоту — вісь аплікату.

Якщо  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ , то всі розв'язки прямують до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , це відміну від попереднього випадку, в площині  $xOz$  маємо вузол (дискритичний вузол, якщо  $\lambda_1 = \lambda_3$ ).

Матриця  $A$  має єдиний лінійно незалежний власний вектор. У цьому випадку характеристичний поліном матриці  $A$  має трикратний корінь  $\lambda = \mu$  і  $\text{rank}(A - \mu E) = 2$ . Існує базис  $e_1, e_2, e_3$  такий, що  $Ae_1 = \mu e_1$ ,  $Ae_2 = \mu e_2 + e_1$ ,  $Ae_3 = \mu e_3 + e_2$ . Згідно з формулами (2.54) можемо виписати фундаментальну систему розв'язків

$$e^{\mu t} e_1, e^{\mu t} (te_1 + e_2), e^{\mu t} \left( \frac{t^2}{2} e_1 + te_2 + e_3 \right). \quad (2.55)$$

У координатах  $(x, y, z)$ , уведених рівністю  $x = xe_1 + ye_2 + ze_3$ , система набирає вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y, \\ \dot{y} = \mu y + z, \\ \dot{z} = \mu z. \end{cases}$$

Зн допомогою фундаментальної системи (2.55) легко виписати розв'язок

$$x = e^{\mu t} \left( x_0 + y_0 t + z_0 \frac{t^2}{2} \right),$$

$$y = e^{\mu t} (y_0 + z_0 t),$$

$$z = e^{\mu t} z_0,$$

який задовольняє початкову умову  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $z(0) = z_0$ .

Оскільки  $z(t) \equiv 0$ , якщо  $z_0 = 0$ , то система має плоскі фазові криві, які лежать на площині  $xOy$  і які є траєкторіями двовимірної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y, \\ \dot{y} = \mu y. \end{cases}$$

Звідси випливає, що такі плоскі фазові криві утворюють вироджений вузол. На рис. 2.3, а, який відповідає випадку  $\mu < 0$ , плоску фазову криву позначено цифрою 0.

Дослідимо просторові траєкторії. Їх проекції на площину  $yOz$  задовольняють систему

$$\begin{cases} \dot{y} = \mu y + z, \\ \dot{z} = \mu z \end{cases}$$

і, отже, також утворюють вироджений вузол. Кожна проекція має одну точку перетину з віссю аплікат і входить у початок координат із напрямом осі ординат. Звідси можна зробити висновок, що просторова траєкторія лише один раз перетинає площину  $xOz$ .

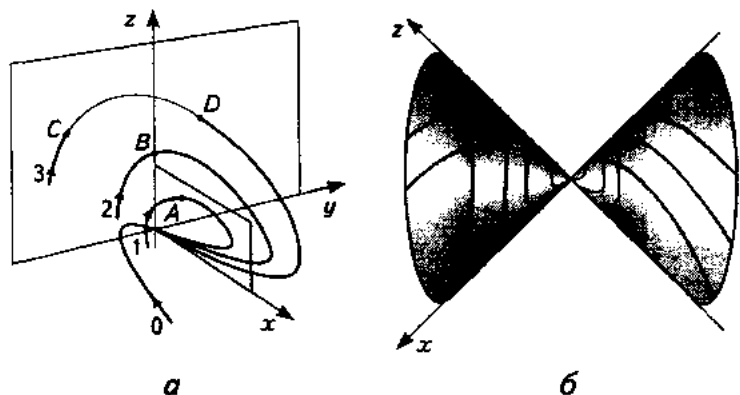


Рис. 2.3

Скільки разів така траєкторія перетинає площину  $yOz$ ? Очевидно стільки, скільки нулів має компонента  $x(t)$  розв'язку, тобто скільки коренів має квадратний тричлен  $z_0 t^2 + 2y_0 t + 2x_0$ . Обчисливши дискримінант, доходимо висновку: функція  $x(t)$  має два нулі, якщо  $y_0^2 > 2x_0 z_0$ ; один нуль, якщо  $y_0^2 = 2x_0 z_0$ ; жодного, якщо  $y_0^2 < 2x_0 z_0$ .

Зауважимо, що рівняння  $y^2 = 2xz$  задає в тривимірному просторі конус  $K$ , який дотикається осі абсцис та осі аплікват (рис. 2.3, б). Легко перевірити, що  $y^2(t) \equiv 2x(t)z(t)$  за умови  $y_0^2 = 2x_0 z_0$  (або, що одне й те саме, за умови, що  $y^2(t_0) = 2x(t_0)z(t_0)$  хоча б при одному  $t_0 \in \mathbb{R}$ ). Звідси випливає: траєкторія, яка має спільну точку з конусом  $K$ , цілком йому належить. Це означає, що конус  $K$  є інваріантною поверхнею для досліджуваної системи.

Таким чином, просторові траєкторії досліджуваної системи можна поділити на три класи. До першого належать ті з них, що лежать усеюди в області, обмеженої конусом  $K$ . Усі вони не мають спільних точок із площиною  $yOz$ . На рис. 2.3, а криву з першого класу позначено цифрою 1. Вона перетинає площину  $xOz$  у точці  $A$ . Траєкторії з другого класу лежать на конусі  $K$ . Кожна така траєкторія має одну точку дотику з площиною  $yOz$ . На рис. 2.3, а криву з другого класу позначено цифрою 2. Вона в точці  $B$  дотикається площини  $yOz$  і після цього переходить у півплощину  $y > 0$ . Нарешті, до третього класу належать траєкторії, які лежать назовні конуса  $K$ . Кожна траєкторія з такого класу двічі перетинає площину  $yOz$ . Траєкторія з третього класу, яку на рис. 2.3, а позначено цифрою 3, перетинає площину  $yOz$  у точках  $C$  та  $D$ .

### 2.3.4. Експонента матриці

Нехай  $a$  — дійсне або комплексне число. Як добре відомо, показникова функція  $e^{at}$  змінної  $t \in \mathbb{R}$  має дві такі характеристичні властивості:

- функція  $e^{at}$  задовольняє скалярне диференціальне рівняння  $\dot{x} = ax$  водночас із початковою умовою  $x|_{t=0} = 1$ ;
- функція  $e^{at}$  допускає розвинення в степеневий ряд

$$1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \dots + \frac{(at)^k}{k!} + \dots,$$

рівномірно збіжний на будь-якому відрізку дійсної прямої.

Кожну з цих властивостей можна взяти за означення показникової функції.

Користуючися цим зауваженням, можна визначити матричнозначну показникову функцію змінної  $t \in \mathbb{R}$  — експоненту матриці  $t \cdot A$ , де  $A$  —  $(n \times n)$ -вимірна матриця з дійсними або комплексними елементами. В курсі диференціальних рівнянь при визначенні експоненти матриці природно за основу взяти першу характеристичну властивість показникової функції.

### ⇒ Означення 2.7

*Експонентою матриці  $t \cdot A$  називають фундаментальну матрицю  $X(t)$  лінійної однорідної системи  $\dot{x} = Ax$ , нормовану початковою умовою  $X(0) = E$ , тобто розв'язок матричної задачі Коші*

$$\dot{X} = AX, \quad X|_{t=0} = E. \quad (2.56)$$

Експоненту матриці  $t \cdot A$  позначають через  $e^{At}$  або  $\text{Exp}(At)$ , причому за усталеною традицією аргумент під знаком експоненти пишуть у вигляді  $At$  замість  $t \cdot A$ . Таким чином, за означенням

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}, \quad e^{At}|_{t=0} = E. \quad (2.57)$$

Опишемо тепер основні властивості експоненти.

1. Експонента матриці  $t \cdot A$  є сумою матричного ряду

$$E + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots,$$

який збігається рівномірно щодо  $t \in [a, b]$ , де  $[a, b] \in \mathbb{R}$  — довільний відрізок.

Справді, матричне рівняння  $\dot{X} = AX$  можна розглядати як  $n^2$ -вимірну ЛОС. На підставі міркувань, наведених у доведенні теореми 2.1, розв'язок задачі Коші (2.56) можна побудувати як границю послідовних наближень

$$X_0(t) \equiv E, \quad X_k(t) = E + \int_0^t AX_{k-1}(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

Легко бачити, що

$$X_1(t) = E + tA,$$

$$X_2(t) = E + tA + \frac{t^2}{2} A^2,$$

$$\dots$$

$$X_k(t) = E + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots$$

При цьому на будь-якому відрізку  $[a, b] \in \mathbb{R}$  послідовність  $\{X_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$  рівномірно збігається до матричнозначної функції  $X(t)$ , що, таким чином, є неперервним на  $\mathbb{R}$  розв'язком рівняння

$$X(t) = E + \int_0^t AX(s) ds,$$

я отже, і задачі Коші (2.56). Залишається зауважити, що розв'язок цієї задачі Коші має властивість єдиності.

2. Для будь-якого  $t \in \mathbb{R}$  справджується рівність  $\det e^{At} = e^{t \operatorname{tr} A}$ .

Ця властивість впливає з формули Якобі.

3. Якщо матриці  $A$  і  $B$  комутують між собою, то виконуються рівності

$$\boxed{Be^{At} = e^{At}B, \quad e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At} = e^{(A+B)t}}$$

Справді, оскільки  $\frac{d}{dt} Be^{At} = BAe^{At} = ABe^{At}$ , то матричнозначна функція  $Be^{At}$  є єдиним розв'язком системи  $\dot{X} = AX$ , який при  $t = 0$  набуває значення  $B$ . Але таку саму властивість має матричнозначна функція  $e^{At}B$ . Тому ці функції тотожно рівні.

Далі,

$$\frac{d}{dt} e^{At}e^{Bt} = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt},$$

звідки випливає, що  $e^{At}e^{Bt}$  — це розв'язок задачі Коші  $\dot{X} = (A+B)X$ ,  $X|_{t=0} = E$ . Але за означенням таким розв'язком є  $e^{(A+B)t}$ .

4. Для всіх  $t, s \in \mathbb{R}$  справджуються рівності

$$e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}, \quad (e^{At})^{-1} = e^{-At}.$$

Перша з цих рівностей є прямим наслідком властивості 2. Для того, щоб переконатися в правильності другої рівності, достатньо в першій покласти  $s = -t$  і врахувати, що  $e^{A0} = E$ .

У п. 2.3.1 уже відзначалося, що систему (2.43) можна тлумачити як векторне рівняння в абстрактному  $n$ -вимірному векторному просторі  $\mathcal{V}^n$  (над полем дійсних або комплексних чисел), визначене лінійним оператором  $A: \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}^n$ . Розв'язок задачі Коші (2.56), в якій  $E = \text{Id}$  трактуємо як тотожний оператор, визначає сім'ю невідроджених операторів  $\{e^{At}\}_{t \in \mathbb{R}}$ , залежну від параметра  $t$ . Зрозуміло, що властивості 1–4 залишаються в силі, якщо в них матриці замінити лінійними операторами. На особливу увагу заслуговує властивість 4. Вона означає, що множина операторів  $\{e^{At}\}_{t \in \mathbb{R}}$  утворює однопараметричну комутативну групу перетворень простору  $\mathcal{V}^n$ . Далі буде показано, що однопараметричні групи перетворень породжують не лише лінійні, а й нелінійні системи диференціальних рівнянь.

5. Якщо  $A$  є кронекеровою сумою квадратних матриць  $A_1, \dots, A_p$ , тобто  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_p)$ , то  $e^{At} = \text{diag}(e^{A_1 t}, \dots, e^{A_p t})$ .

Дійсно, в тому, що  $\text{diag}(e^{A_1 t}, \dots, e^{A_p t})$  є розв'язком задачі Коші (2.56), де  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_p)$ , легко переконатися прямою перевіркою.

6. Для довільної невідродженої матриці  $H$  справедлива формула

$$e^{At} = S e^{S^{-1} A S} S^{-1}.$$

Дійсно,  $\frac{d}{dt} S^{-1} e^{At} S = S^{-1} A S S^{-1} e^{At} S$ . Отже,  $S^{-1} e^{At} S$  є розв'язком матричної системи  $\dot{X} = S^{-1} A S X$ , який до того ж перетворюється на одиничну матрицю при  $t = 0$ . Таку саму властивість має  $e^{S^{-1} A S t}$ .

На підставі встановлених властивостей матричної експоненти з'ясуємо структуру матричнозначної функції  $e^{At}$ . Нехай  $H$  — матриця перетворення подібності, яке зводить матрицю  $A$  до нормальної жорданової форми:

$$H^{-1} A H = J(A) := \text{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), \dots, J_{m_p}(\lambda_p)), \quad m_1 + \dots + m_p = n.$$

Тоді



$$e^{At} = H \operatorname{diag} (e^{\lambda_1 t} T_{m_1}(t), \dots, e^{\lambda_p t} T_{m_p}(t)) H^{-1}, \quad (2.58)$$

де для довільного натурального  $m$  через  $T_m(t)$  позначено матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дійсно, на підставі властивостей 5 та 6 маємо

$$e^{At} = H \operatorname{diag} (e^{J_{m_1}(\lambda_1)t}, \dots, e^{J_{m_p}(\lambda_p)t}) H^{-1}.$$

Тепер залишається вивчити будову матриці  $e^{J_m(\lambda)t}$ . Для цього зобразимо клітину Жордана у вигляді суми діагональної та нільпотентної матриць:

$$J_m(\lambda) = \lambda \cdot E_m + N_m, \quad E_m := \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_m), \quad N_m := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

На підставі властивості 3 маємо  $e^{J_m(\lambda)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{N_m t}$ . Для обчислення елементів матриці  $e^{N_m t}$  використаємо властивість 1. При піднесенні матриці  $N_m$  до степеня  $k < m$  діагональ з одиниць зсувається на  $(k-1)$  місце в напрямі до правого верхнього кута, а  $N_m^m = 0$ . Тому

$$e^{N_m t} = E + tN_m + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N_m^{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◆ **Зауваження 2.3**

Якщо  $\hat{X}(t)$  — довільна фундаментальна матриця системи (2.43), то для будь-якої невинродженої ( $n \times n$ )-вимірної матриці  $C$  матриця  $\hat{X}(t)C$  теж буде фундаментальною. Зокрема, при  $C = \hat{X}^{-1}(0)$  дістанемо фундаментальну матрицю, нормовану одиничною в точці  $t = 0$ . Отже,

$$\boxed{\hat{X}(t)\hat{X}^{-1}(0) = e^{At}}$$

□ **Приклад 2.14**

Нехай  $A$  —  $(2 \times 2)$ -матриця, для якої  $\text{tr } A = 0$  і  $\det A = \omega^2$ , де  $\omega$  — деяке дійсне число. Покажемо, що за цих умов

$$e^{At} = \cos \omega t \cdot E_2 + \frac{\sin \omega t}{\omega} A.$$

Для обчислення степенів матриці  $A$  зауважимо, що її характеристичний поліном має вигляд  $\lambda^2 - \text{tr } A \lambda + \det A = \lambda^2 + \omega^2$ . Тому за теоремою Гамільтона—Кейлі (див. дод. 1) маємо рівність  $A^2 = -\omega^2 E_2$ . Звідси

$$A^{2k} = (-1)^k \omega^{2k} E_2, \quad A^{2k-1} = \frac{1}{\omega} (-1)^k \omega^{2k-1} A.$$

Оскільки матричний ряд для експоненти абсолютно збіжний, то, перегрупувавши його члени, дістанемо

$$e^{At} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k}}{(2k)!} \right) E_2 + \frac{1}{\omega} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) A.$$

Залишилося скористатися відомими розвиненнями синуса та косинуса в степеневі ряди.

**□ Приклад 2.15**

Знайдемо  $e^A$ , де  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

У прикладі 2.13 буде знайдено ФСР ЛОС із матрицею  $-A$ . Отже, така ЛОС має фундаментальну матрицю

$$\hat{X}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 2 & 2t+1 & t^2+t \\ 1 & t+1 & t^2/2+t+1 \end{pmatrix},$$

причому

$$\hat{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\hat{X}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \hat{X}(-1) = e^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

то

$$e^A = \hat{X}(-1) \hat{X}^{-1}(0) = e^2 \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & 1/2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

**□ Приклад 2.16**

Знайдемо фундаментальну матрицю  $2n$ -вимірної системи

$$\begin{cases} \dot{u} = J_m(\alpha) u - \beta v, \\ \dot{v} = \beta u + J_m(\alpha) v \end{cases} \quad (2.59)$$

*i*, як наслідок, експоненту матриці

$$B_m(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} J_m(\alpha) & -\beta E_m \\ \beta E_m & J_m(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Насамперед зауважимо, що (2.59) можна подати у вигляді системи в  $\mathbb{C}^n$  вигляду

$$\dot{x} = J_m(\mu)x, \quad x := u + iv, \quad \mu = \alpha + i\beta. \quad (2.60)$$

Справді,  $\dot{x} = \dot{u} + i\dot{v}$  і

$$J_m(\mu)x = (J_m(\alpha) + i\beta E_m)(u + iv) = J_m(\alpha)u - \beta v + i(\beta u + J_m(\alpha)v).$$

Якщо в розв'язку  $x(t) = e^{J_m(\mu)t}(u_0 + iv_0)$  системи (2.60) виділити дійсну й уявну частини, то в такий спосіб буде знайдено розв'язок  $(u(t), v(t))$  системи (2.59) такий, що  $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ . Оскільки за формулою (2.58)  $e^{J_m(\mu)t} = e^{\mu t} T_m(t)$ , то

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) T_m(t) (u_0 + iv_0) = \\ &= e^{\alpha t} [\cos \beta t \cdot T_m(t) u_0 - \sin \beta t \cdot T_m(t) v_0 + \\ &\quad + i(\sin \beta t \cdot T_m(t) u_0 + \cos \beta t \cdot T_m(t) v_0)]. \end{aligned}$$

**Звідси**

$$u(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t \cdot T_m(t) u_0 - \sin \beta t \cdot T_m(t) v_0),$$

$$v(t) = e^{\alpha t} (\sin \beta t \cdot T_m(t) u_0 + \cos \beta t \cdot T_m(t) v_0).$$

Тепер зрозуміло, що матриця

$$e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t \cdot T_m(t) & -\sin \beta t \cdot T_m(t) \\ \sin \beta t \cdot T_m(t) & \cos \beta t \cdot T_m(t) \end{pmatrix}$$

є фундаментальною для системи (2.59). Оскільки ця фундаментальна матриця при  $t = 0$  перетворюється на одиничну, то вона збігається з  $e^{B_m(\alpha, \beta)t}$ . Зокрема,

$$\text{Exp} \begin{pmatrix} \alpha t & -\beta t \\ \beta t & \alpha t \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

### 2.3.5. Експоненціальне відображення. Матричний логарифм\*

Досі при вивченні матричнозначної функції  $e^{At}$  ми вважали, що  $A$  — деяка фіксована матриця. Тепер розглянемо матричну експоненту як функцію  $2n^2$  змінних. А саме, нехай  $\text{Mat}(n; \mathbb{R})$  — множина  $(n \times n)$ -вимірних матриць, елементами яких є дійсні числа. Ця множина має природну структуру  $n^2$ -вимірного лінійного простору над полем дійсних чисел. Уведемо до розгляду також множину  $\text{Mat}(n; \mathbb{C})$ , яка складається з матриць вигляду  $Z = \{z_{ij}\}_{i,j=1}^n = X + iY$ , де  $X = \{x_{ij}\}_{i,j=1}^n \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ ,  $Y = \{y_{ij}\}_{i,j=1}^n \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ . Кожній матриці  $Z \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$  поставимо у відповідність матрицю  $e^Z = e^{Zt} \Big|_{t=1} \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ . Таким чином виникає експоненціальне відображення

$$\text{Exp} : \text{Mat}(n; \mathbb{C}) \mapsto \text{Mat}(n; \mathbb{C}) : Z \mapsto e^Z.$$

Його можна також трактувати як відображення з  $2n^2$ -вимірного простору  $\text{Mat}(n; \mathbb{R}) \times \text{Mat}(n; \mathbb{R})$  у себе.

#### Твердження 2.15

Експоненціальне відображення нескінченно диференційовне в  $\text{Mat}(n; \mathbb{R}) \times \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ .

#### Доведення

Для доведення потрібно скористатися тим, що  $\text{Exp}(X + iY)$  є сумою ряду  $\sum_{k=1}^{\infty} (X + iY)^k / k!$ . Цей ряд рівномірно збігається на будь-якій компактній підмножині простору  $\text{Mat}(n; \mathbb{R}) \times \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ , оскільки при довільному  $r > 0$  і  $\|X + iY\| := \sqrt{\|X\|^2 + \|Y\|^2} \leq r$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \|(X + iY)^k\| / k!$  мажорується збіжним числовим рядом  $\sum_{k=1}^{\infty} r^k / k!$ . Звідси негайно випливає неперервність експоненціального відображення.

Так само можна довести, що в разі послідовного почленного диференціювання ряду  $\sum_{k=1}^{\infty} (X + iY)^k / k!$  за змінними  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$

( $i, j = 1, \dots, n$ ) кожного разу утворюватиметься ряд, рівномірно збіжний на будь-якій компактній підмножині простору  $\text{Mat}(n; \mathbb{R}) \times \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ . Тому матричнозначна функція  $\text{Exp}(X + iY)$  дійсних змінних  $x_{ij}, y_{kl}, i, j, k, l = 1, \dots, n$  має неперервні частинні похідні довільного порядку.

Зауважимо, що, оскільки  $e^{Zt}$  являє собою фундаментальну матрицю ЛОС  $\dot{x} = Zx$ , то область значень експоненціального відображення належить множині  $GL(n; \mathbb{C}) \subset \text{Mat}(n; \mathbb{C})$  усіх невідроджених ( $n \times n$ )-вимірних матриць із комплексними елементами. При цьому значення  $\text{Exp}(X)$  при  $X \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$  належить множині  $GL(n; \mathbb{R})$  усіх дійсних ( $n \times n$ )-вимірних невідроджених матриць. Відносно операції добутку матриць множина  $GL(n; \mathbb{C})$  ( $GL(n; \mathbb{R})$ ) утворює групу, яка називається *повною групою лінійних перетворень простору  $\mathbb{C}^n$*  (відповідно  $\mathbb{R}^n$ ).

Виявляється, образ відображення  $\text{Exp} : \text{Mat}(n; \mathbb{C}) \rightarrow GL(n; \mathbb{C})$  збігається з усією множиною  $GL(n; \mathbb{C})$ . Для того щоб обґрунтувати цей важливий факт, введемо поняття матричного логарифма.

### ⇒ Означення 2.8

Нехай для матриці  $W \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$  існує така матриця  $Z \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ , що  $e^Z = W$ . Тоді матрицю  $Z$  називають *логарифмом матриці  $W$*  і позначають через  $\text{Ln } W$ .

### Теорема 2.10

Для кожної матриці  $W \in GL(n; \mathbb{C})$  існує її логарифм  $\text{Ln } W$ .

#### Доведення

Природно спочатку довести існування логарифма жорданової клітини  $J_m(\lambda) = \lambda E_m + N_m = \lambda \left( E_m + \frac{1}{\lambda} N_m \right)$ , де  $\lambda \neq 0$ ,  $m \geq 2$ . Ця задача, своєю чергою, зводиться до побудови логарифма матриці

$$E_m + \frac{1}{\lambda} N_m.$$

Скориставшись відомим розвиненням

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \quad |x| < 1,$$

утворимо матрицю

$$Z(t) := \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} N_m^k = tN_m - \frac{t^2}{2} N_m^2 + \dots + \frac{(-1)^{m-2} t^{m-1}}{m-1} N_m^{m-1}$$

І переконаємося в тому, що

$$e^{Z(t)} = E_m + tN_m \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.61)$$

Тоді буде доведено, що

$$\text{Ln}(E_m + tN_m) := tN_m - \frac{t^2}{2} N_m^2 + \dots + \frac{(-1)^{m-2} t^{m-1}}{m-1} N_m^{m-1}.$$

Оскільки  $\dot{Z}(t)Z(t) = Z(t)\dot{Z}(t)$ , то  $\frac{d}{dt} Z^k(t) = kZ^{k-1}(t)\dot{Z}(t) = k\dot{Z}(t)Z^{k-1}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), звідки  $\frac{d}{dt} e^{Z(t)} = \dot{Z}(t)e^{Z(t)}$ . Крім того,  $e^{Z(0)} = E_m$ . Отже,  $e^{Z(t)}$  є розв'язком такої задачі Коші для матричного рівняння:  $\dot{X} = \dot{Z}(t)X$ ,  $X|_{t=0} = E_m$ . Але цю саму властивість має матричнозначна функція  $E_m + tN_m$ . Справді,  $\frac{d}{dt}(E_m + tN_m) = N_m$ , а оскільки  $N_m^m = 0$ , то

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t)(E_m + tN_m) &= \\ &= (N_m - tN_m^2 + \dots + (-1)^{m-2} t^{m-2} N_m^{m-1})(E_m + tN_m) = N_m. \end{aligned}$$

З єдиності розв'язку задачі Коші випливає рівність (2.61), а з нею й формула для  $\text{Ln}(E_m + tN_m)$ .

Зауважимо, що при обґрунтуванні рівності (2.61) було використано лише властивість нільпотентності матриці  $N_m$ , а саме  $N_m^m = 0$ , а конкретний вигляд цієї матриці ніякої ролі не відіграв. Тому замість  $N_m$  у (2.61) можна покласти й  $zN_m$  при довільному  $z \in \mathbb{C}$ . Інакше кажучи, зазначена рівність справджується для всіх  $t \in \mathbb{C}$ .

Далі, нехай  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  довільне. Для кожного цілого  $k$  виконується рівність  $e^{\ln|\lambda| + i \arg \lambda - 2\pi k} = |\lambda| e^{i \arg \lambda} = \lambda$ . Послідовність  $\{\ln|\lambda| + i \arg \lambda + 2i\pi k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  природно називати логарифмом комплексного числа  $\lambda \neq 0$ . Застосовуватимемо для неї позначення  $\text{Ln } \lambda$ . Те-

пер уже легко показати, що логарифмом матриці  $J_m(\lambda)$  при  $\lambda \neq 0 \in$  мнозначна матричнозначна функція

$$\text{Ln } J_m(\lambda) = \text{Ln } \lambda \cdot E_m + \text{Ln} \left( E_m + \frac{1}{\lambda} N_m \right).$$

Дійсно, на підставі властивостей 3 і 5 експоненти маємо

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left( \text{Ln } \lambda \cdot E_m + \text{Ln} \left( E_m + \frac{1}{\lambda} N_m \right) \right) &= e^{\text{Ln } \lambda \cdot E_m} \text{Exp } \text{Ln} \left( E_m + \frac{1}{\lambda} N_m \right) = \\ &= \lambda \cdot \left( E_m + \frac{1}{\lambda} N_m \right) = J_m(\lambda). \end{aligned}$$

Нехай тепер  $W$  — довільна невивроджена матриця. Зведемо її до нормальної жорданової форми за допомогою оборотної матриці  $S$ :

$$W = S \text{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), \dots, J_{m_p}(\lambda_p)) S^{-1}.$$

Зрозуміло, що серед чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  немає нулів. З урахуванням властивостей 5 і 6 експоненти остаточно дістаємо

$$\boxed{\text{Ln } W = S \text{diag}(\text{Ln } J_{m_1}(\lambda_1), \dots, \text{Ln } J_{m_p}(\lambda_p)) S^{-1}}.$$

Доведена теорема має важливі застосування в теорії лінійних систем із періодичними коефіцієнтами (див. п. 2.6), а також в аналітичній теорії диференціальних рівнянь, що вивчає властивості розв'язків як функцій незалежної комплексної змінної.

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Знайти загальний розв'язок тривимірної системи  $\dot{x} = Ax$ , матриця якої має вигляд:

а)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

б)  $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix};$



$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

У кожному випадку описати якісні властивості розв'язків.

- У теорії матриць відома така теорема Шура: для довільної матриці  $A$  існує унітарна матриця  $T$  така, що  $T^*AT$  є верхньою трикутною матрицею ( $T^*$  позначає матрицю, ермітово спряжену з  $T$ ). Показати, як цю теорему можна використати для розв'язання системи (2.43).

- Знайти експоненти матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Знайти  $e^{At}$ , де  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

- Нехай  $A$ ,  $B$  та  $X_0$  — задані  $(n \times n)$ -вимірні матриці. Знайти розв'язок матричного рівняння

$$\dot{X} = AX + XB,$$

який задовольняє початкову умову  $X(0) = X_0$ .

- ✓ ● Нехай  $A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$ ,  $a_{ij}(t) \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$ . Довести, що матричнозначна функція  $X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right)$ , де  $t_0 \in I$ , є фундаментальною матрицею системи  $\dot{x} = A(t)x$  тоді й лише тоді, коли

$$A(t) \int_{t_0}^t A(s) ds = \int_{t_0}^t A(s) ds A(t).$$

## 2.4

### Лінійні неоднорідні рівняння й системи

Лінійні неоднорідні рівняння (системи) мають чудову властивість: розв'язки кожного такого рівняння (системи) можна знайти в квадратурах, якщо відома ФСР відповідного однорідного рівняння (системи).

### 2.4.1. Структура множини розв'язків лінійного неоднорідного рівняння

Розглянемо загальне векторне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ЛНР)

$$\mathcal{L}x := A_0(t) \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t) \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + A_m(t)x = f(t), \quad (2.62)$$

в якому елементи  $(n \times n)$ -вимірних матриць  $A_j(t)$  ( $j = 0, \dots, m$ ) та  $n$ -вимірної вектор-функції  $f(t)$  визначені на деякому інтервалі (відрізку)  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Вектор-функцію  $f(t)$  називатимемо *вільним членом лінійного неоднорідного рівняння* (2.62).

#### Твердження 2.16

Нехай  $x_*(t)$ ,  $t \in I$  — деякий фіксований розв'язок ЛНР (2.62). Тоді для будь-якого розв'язку  $x_0(t)$  відповідного ЛОР  $\mathcal{L}x = 0$  функція  $x_0(t) + x_*(t)$  теж є розв'язком рівняння (2.62). Навпаки, будь-який розв'язок  $x(t)$ ,  $t \in I$  ЛНР (2.62) можна подати у вигляді  $x(t) = x_0(t) + x_*(t)$ , де  $x_0(t)$  — деякий розв'язок ЛОР  $\mathcal{L}x = 0$ .

#### Доведення

Якщо  $\mathcal{L}x_0(t) = 0$ ,  $t \in I$ , то  $\mathcal{L}(x_0(t) + x_*(t)) = \mathcal{L}x_0(t) + \mathcal{L}x_*(t) = f(t)$ ,  $t \in I$ , тобто функція  $x_0(t) + x_*(t)$  теж задовольняє ЛНР (2.62). Навпаки, якщо  $\mathcal{L}x(t) = 0$ ,  $t \in I$ , то  $x_0(t) := x(t) - x_*(t) \in$  розв'язком ЛОР

$$\mathcal{L}x_0(t) = \mathcal{L}(x(t) - x_*(t)) = \mathcal{L}x(t) - \mathcal{L}x_*(t) = 0, \quad t \in I.$$

#### ○ Наслідок 2.6

*Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (2.62) являє собою суму частинного розв'язку цього рівняння та загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння.*

Цей факт допускає таке геометричне тлумачення. Множина розв'язків ЛОР, яке відповідає рівнянню (2.62), утворює лінійний підпростір  $\ker \mathcal{L}$  у просторі, де діє оператор  $\mathcal{L}$ . Із твердження 2.6 випливає, що сукупність усіх розв'язків ЛНР (2.62) являє собою афінний підпростір, що утворюється зсувом  $\ker \mathcal{L}$  на вектор  $x_*(t)$ .

При відшуванні частинних розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь важливу роль відіграє так званий *принцип суперпозиції*. Його застосування полягає в тому, що вільний член  $f(t)$  намагаються подати у вигляді суми, в певному сенсі, простіших функцій  $f_1(t), \dots, f_N(t)$  так, щоб можна було знайти частинний розв'язок кожного ЛНР із вільним членом  $f_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Далі користуються таким твердженням.

### Твердження 2.17

Якщо  $x_k(t)$ ,  $t \in I$  — розв'язок рівняння  $\mathcal{L}x = f_k(t)$ , то  $x(t) := \sum_{k=1}^N x_k(t)$  — розв'язок рівняння (2.62) з вільним членом  $f(t) = \sum_{k=1}^N f_k(t)$ .

### Доведення

Справді,

$$\mathcal{L} \sum_{k=1}^N x_k(t) = \sum_{k=1}^N \mathcal{L}x_k(t) = \sum_{k=1}^N f_k(t) = f(t).$$

### 2.4.2. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа) відшування розв'язків лінійних неоднорідних систем

Цей метод дає змогу інтегрувати  $n$ -вимірну лінійну неоднорідну систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \quad (2.63)$$

за такою схемою.

- Знаходимо ФСР відповідної однорідної системи

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2.63')$$

і утворюємо її фундаментальну матрицю  $X(t)$ . Загальний розв'язок ЛОС (2.63') подаємо у вигляді  $X(t)c$ , де  $c$  — вектор, компонентами якого є довільні сталі  $c_1, \dots, c_n$ .

- Розв'язок ЛНС шукаємо у вигляді

$$\boxed{x = X(t)c(t)}, \quad (2.64)$$

де  $c(t)$  — вектор-функція з невідомими компонентами  $c_1(t), \dots, \dots, c_n(t)$ .

- Компоненти вектор-функції  $c(t)$  знаходимо із системи

$$\boxed{X(t)\dot{c}(t) = f(t)} \Leftrightarrow \dot{c}(t) = X^{-1}(t)f(t). \quad (2.65)$$

Загальний розв'язок системи (2.65) має вигляд

$$c(t) = c + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s) ds,$$

де  $c$  — вектор, компонентами якого є довільні сталі  $c_1, \dots, c_n$ , а  $t_0$  — фіксована точка інтервалу визначення коефіцієнтів системи (2.63).

- Підставивши  $c(t)$  у (2.64), дістаємо загальний розв'язок системи (2.63) у вигляді

$$\boxed{x = X(t)c + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s) ds}. \quad (2.66)$$

Обгрунтуємо викладений метод. Підставимо (2.64) у (2.63):

$$\frac{d}{dt}(X(t)c(t)) = \dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) = A(t)X(t)c(t) + f(t).$$

Звідси з урахуванням рівності  $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$  (теорема 2.4) дістаємо систему (2.65) для визначення  $c(t)$ . Подальші дії, які приводять до формули (2.66), додаткових пояснень не потребують.

#### □ Приклад 2.17

*Розв'яжемо систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Відповідна однорідна система легко розв'язується зведенням її до лінійного рівняння другого порядку:

$$\ddot{x} + x = 0 \Rightarrow x = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Тоді  $y = \dot{x} = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$ , тобто

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Отже, в нашому випадку фундаментальна матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Розв'язок неоднорідної системи шукаємо методом варіації довільних сталих: невідомі функції  $c_1(t)$  та  $c_2(t)$  знаходимо із системи

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}.$$

Маємо:  $\dot{c}_1(t) = -\cos t$ ,  $\dot{c}_2(t) = \sin^3 t / \cos^2 t$ . Після інтегрування дістаємо:  $c_1(t) = c_1 - \sin t$ ,  $c_2(t) = c_2 + \frac{1}{\cos t} + \cos t$ . Загальний розв'язок нашого рівняння запишемо тепер у вигляді

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \operatorname{tg} t, \quad y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 2.$$

Випишемо формулу загального розв'язку початкової задачі  $x_0(t_0) = -x_0$ ,  $t_0 \in I$  для системи (2.63). Покладемо в (2.66)  $t = t_0$ ,  $x = x_0$ . Дістанемо систему для знаходження вектора довільних сталих:  $X(t_0)c = x_0$ . Підставивши її розв'язок  $c = X^{-1}(t_0)x_0$  в (2.66), маємо шукану формулу розв'язку задачі Коші

$$x = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds. \quad (2.67)$$

Формулу (2.67) записують також у вигляді

$$x = \Omega_{t_0}^t x_0 + \int_{t_0}^t \Omega_{t_0}^s f(s) ds, \quad (2.67')$$

$$\Omega'_s := X(t)X^{-1}(s). \quad (2.68)$$

Ця матричнозначна функція двох змінних називається *матрицантом*, або *еволюційним оператором*, лінійної однорідної системи (2.63').

Безпосередньо з формули (2.68) випливають такі властивості матрицанту:

$$\Omega'_t = E; \quad \Omega'_t \Omega'_s = \Omega'_s; \quad \Omega'_s = (\Omega'_t)^{-1}. \quad (2.69)$$

Припустимо, що матриця системи (2.63) визначена на всій дійсній осі. Будемо тлумачити розв'язок системи (2.63) як реакцію ЛОС (2.63') на зовнішнє збурення  $f(t)$ . Природно вважати, що за відсутності збурення ( $f(t) = 0$ ) система перебуває в спокої ( $x(t) = 0$ ). Нехай зовнішнє збурення діє, починаючи лише з певного скінченного моменту часу. Тоді згідно з формулою (2.67') реакція системи описуватиметься формулою

$$x(t) = \int_{t_0}^t \Omega'_s f(s) ds.$$

Вираз зліва в цій формулі являє собою *лінійне інтегральне перетворення* функції  $f(t)$ , ядром якого є матрицант.

Покажемо, що розв'язок  $\Omega'_t x_0$  ЛОС (2.63') при  $t > t_0$  можна інтерпретувати як реакцію системи на зовнішнє «миттєве» збурення вигляду  $\delta(t - t_0)x_0$ . Тут  $\delta(t)$  — це знаменита  *$\delta$ -функція Дірака*. Фізики тлумачать її як миттєвий імпульс нескінченної інтенсивності, котрий діє в момент часу  $t = 0$  і виконує одиничну роботу в тому сенсі, що  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) ds = 1$ . Для строгого математичного означення такого миттєвого імпульсу математикам довелося ввести поняття *узагальненої функції*. Основна характеристична властивість  $\delta$ -функції Дірака полягає в тому, що для будь-якої неперервної на  $\mathbb{R}$  функції  $\varphi(t)$  справджується рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - s) \varphi(s) ds = \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Хоча функції у звичайному розумінні з такою властивістю не існує, однак цей об'єкт у певному сенсі можна вважати границею послідовності короточасних імпульсів великої інтенсивності, кожен з яких здійснює одиничну роботу. Розглянемо, наприклад, сім'ю східчастих функцій

$$\sigma_\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -\epsilon/2) \cup (\epsilon/2, \infty), \\ 1/\epsilon, & t \in [-\epsilon/2, +\epsilon/2]. \end{cases}$$

Користуючися теоремою про середнє значення, легко показати, що

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\epsilon(\tau-s)\varphi(s)ds &= \frac{1}{\epsilon} \int_{\tau-\epsilon/2}^{\tau+\epsilon/2} \varphi(\xi) d\xi \rightarrow \varphi(\tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-s)\varphi(s)ds, \quad \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

для всіх  $\tau \in \mathbb{R}$ . У цьому сенсі вважають, що  $\sigma_\epsilon(t) \rightarrow \delta(t)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Розглянемо реакцію системи (2.63') на зовнішнє збурення  $f(t) = \sigma_\epsilon(t-t_0)x_0 = \sigma_\epsilon(t_0-t)x_0$ . При  $t > t_0$  маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t \Omega'_s \sigma_\epsilon(s-t_0)x_0 ds &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 \Omega'_s \sigma_\epsilon(t_0-s)x_0 ds = \Omega'_{t_0} x_0 = \\ &= \int_{-\infty}^0 \Omega'_s \delta(t_0-s)x_0 ds. \end{aligned}$$

Виходячи з цих міркувань, функцію  $\Omega'_{t_0} x_0$  при  $t > t_0$  інтерпретують як реакцію ЛОС (2.63') на «імпульс»  $\delta(t-t_0)x_0$ .

### 2.4.3. Метод варіації довільних сталих відшукування розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь n-го порядку

Застосування методу Лагранжа до скалярного лінійного неоднорідного рівняння

$$\mathcal{L}x = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t) \quad (2.70)$$

полягає у виконанні таких дій.

- Знаходимо ФСР  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  відповідного однорідного рівняння.
- Розв'язок ЛНР шукаємо у вигляді

$$\boxed{x(t) = c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t),} \quad (2.71)$$

де  $c_1(t), \dots, c_n(t)$  — функції, що підлягають визначенню.

- Похідні цих функцій знаходимо із системи

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.} \quad (2.72)$$

Нехай звідси визначено  $\dot{c}_k(t) = \varphi_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тоді

$$c_k(t) = c_k + \int_{t_0}^t \varphi_k(s) ds, \quad k = 1, \dots, n,$$

де  $c_1, \dots, c_n$  — довільні сталі, а  $t_0$  — фіксована точка інтервалу визначення коефіцієнтів рівняння (2.70).

- Підставивши знайдені функції у (2.71), дістаємо загальний розв'язок рівняння (2.70) у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та деякого частинного розв'язку ЛНР:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=1}^n c_k x_k(t) + \sum_{k=1}^n x_k(t) \int_{t_0}^t \varphi_k(s) ds.} \quad (2.73)$$

Аби обґрунтувати викладений метод, достатньо було б зауважити, що (2.72) збігається із системою (2.65) у випадку, коли (2.63) являє собою ЛНС, еквівалентну рівнянню (2.70), яка утворюється введенням фазового вектора (2.15) (див. п. 2.1.3). Вільний член такої ЛНС має саме вигляд правої частини системи (2.72). Корисно, однак, навести незалежне обґрунтування.

Диференціальне рівняння (2.70) накладає лише одну умову на шукані функції  $c_1(t), \dots, c_n(t)$ . Інші умови, яких не вистачає для однозначного визначення цих функцій, будемо накладати в процесі



послідовного диференціювання виразу (2.71), так щоб максимально спростити відповідні обчислення. А саме:

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t),$$

$$\dot{x}(t) = c_1(t)\dot{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\dot{x}_n(t) + \underbrace{\dot{c}_1(t)x_1(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n(t)}_0, \quad (1\text{-ша умова})$$

$$\ddot{x}(t) = c_1(t)\ddot{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\ddot{x}_n(t) + \underbrace{\dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dots + \dot{c}_n(t)\dot{x}_n(t)}_0, \quad (2\text{-га умова})$$

.....

$$x^{(n-1)}(t) = c_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t)x_n^{(n-1)}(t) + \underbrace{\dot{c}_1(t)x_1^{(n-2)}(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n^{(n-2)}(t)}_0, \quad ((n-1)\text{-ша умова})$$

$$x^{(n)}(t) = c_1(t)x_1^{(n)}(t) + \dots + c_n(t)x_n^{(n)}(t) + \dot{c}_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n^{(n-1)}(t).$$

Якщо до останньої з цих рівностей додати першу, помножену на  $a_n(t)$ , другу, помножену на  $a_{n-1}(t)$ , ...,  $(n-1)$ -шу, помножену на  $a_1(t)$ , то результат набере вигляду

$$\mathcal{L}x(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t)\mathcal{L}x_k(t) + \sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t)x_k^{(n-1)}(t).$$

З урахуванням того, що  $\mathcal{L}x_k(t) = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $n$ -на умова, яка полягає в тому, що  $\mathcal{L}x(t) = f(t)$ , зобразиться так:

$$\dot{c}_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + \dot{c}_n(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t).$$

Очевидно, що всі  $n$  умов можна записати у вигляді (2.72). Визначник матриці цієї системи являє собою вронскіан ФСР. Отже, він не перетворюється в нуль у жодній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів рівняння (2.70). Подальші дії, які приводять до остаточної формули (2.73), не потребують додаткових пояснень.

◆ **Зауваження 2.4**

Наведені вище міркування разом із системою (2.72) дають змогу дістати рівності

$$x^{(i)}(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) x_k^{(i)}(t), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2.74)$$

якими зручно користуватися при відшукуванні розв'язку задачі Коші. А саме, запишемо початкові умови такої задачі:

$$x(t_0) = x_0^{(0)}, \quad \dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}.$$

Підставивши сюди загальний розв'язок (2.73), матимемо систему для визначення конкретних значень довільних сталих, яка з урахуванням формул (2.74) набирає вигляду

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \dots & x_n(t_0) \\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0) & \dots & \dot{x}_n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & x_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^{(0)} \\ x_0^{(1)} \\ \vdots \\ x_0^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

□ **Приклад 2.18**

У різноманітних застосуваннях (див. п. 2.4.4) виникає диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad f(t) \in C(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Доцільно мати готові формули для розв'язку задачі Коші з початковими умовами загального вигляду

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0.$$

Для того щоб дістати ці формули, застосуємо метод варіації довільних сталих.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд  $x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ . Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$x = c_1(t) \cos \omega t + c_2(t) \sin \omega t. \quad (2.76)$$

Похідні функцій  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  визначаємо із системи

$$\begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{\sin \omega t}{\omega} f(t), \quad \dot{c}_2(t) = \frac{\cos \omega t}{\omega} f(t),$$

звідки

$$\begin{aligned} c_1(t) &= c_1 - \int_{t_0}^t \frac{\sin \omega s}{\omega} f(s) ds, \\ c_2(t) &= c_2 + \int_{t_0}^t \frac{\cos \omega s}{\omega} f(s) ds. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Довільні сталі  $c_1$ ,  $c_2$  знаходимо із системи вигляду (2.75):

$$\begin{pmatrix} \cos \omega t_0 & \sin \omega t_0 \\ -\omega \sin \omega t_0 & \omega \cos \omega t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$c_1 = x_0 \cos \omega t_0 - \frac{1}{\omega} \dot{x}_0 \sin \omega t_0, \quad c_2 = x_0 \sin \omega t_0 + \frac{1}{\omega} \dot{x}_0 \cos \omega t_0.$$

Підставивши функції (2.77) при цих значеннях довільних сталих у (2.76), після незначних спрощень дістаємо остаточний результат у вигляді

$$x = x_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{1}{\omega} \dot{x}_0 \sin \omega(t - t_0) + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t \sin \omega(t - s) f(s) ds.$$

#### 2.4.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо важливий для застосувань окремий випадок ЛНР, в якому відповідне ЛОР має сталі коефіцієнти, а вільний член є квазі-поліномом:

$$\mathcal{L}x = x + a_1 x^{(1)} + \dots + a_n x^{(n)} = e^{\sigma t} (b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \dots + b_m). \quad (2.78)$$

Тут  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $b_j$  ( $j = 0, \dots, m$ ) та  $\sigma$  — дійсні або комплексні числа. Звичайно, до цього рівняння можна застосувати метод варіації довільних сталих. Однак існує інший, раціональніший спосіб відшукування його частинного розв'язку. Це так званий *метод невизначених коефіцієнтів*. Він є суто алгебричним і дає змогу побудувати квазіполіномний розв'язок рівняння (2.78) без обчислення інтегралів.

Умовимося називати число  $\sigma$ , яке фігурує у вільному члені, *контрольним*. При застосуванні методу невизначених коефіцієнтів слід розрізнити два випадки: *нерезонансний*, коли контрольне число не є коренем характеристичного полінома  $P(\lambda)$  оператора  $\mathcal{L}$ , і *резонансний*, коли  $\sigma$  є коренем  $P(\lambda)$  деякої кратності  $r$ .

**Нерезонансний випадок.** Покажемо, що коли  $P(\sigma) \neq 0$ , то завжди можна знайти єдиний розв'язок рівняння (2.78) у вигляді квазіполінома того самого степеня, що й вільний член:

$$x_*(t) = e^{\sigma t} \left( q_1 \frac{t^m}{m!} + q_2 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + q_{m+1} \right). \quad (2.79)$$

При цьому невідомі (невизначені) коефіцієнти  $q_1, q_2, \dots, q_{m+1}$  однозначно знаходяться з лінійної алгебричної системи з невідродженою трикутною матрицею, яку дістають після підставлення проекту розв'язку (2.79) у рівняння (2.78) і наступного прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях  $t$ .

Переходячи до обґрунтування методу, відзначимо, що хоча писати факторіали у формулі (2.79) і необов'язково, однак, як буде видно з подальшого, їх наявність дещо спрощує відповідні обчислення.

Зробимо заміну шуканої функції  $x = e^{\sigma t} y$ . На основі формули зсуву (див. п. 2.2.3) для нової невідомої функції у дістаємо рівняння зі сталими коефіцієнтами та поліномним вільним членом

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma y &\equiv y + \frac{P^{(n-1)}(\sigma)}{(n-1)!} y' + \frac{P^{(n-2)}(\sigma)}{(n-2)!} y'' + \dots + P(\sigma) y = \\ &= b_0 t^m + \dots + b_m. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Тепер потрібно знайти поліномний розв'язок цього рівняння.

Нехай  $\mathfrak{B}_m$  — лінійний простір поліномів степеня, не вищого за  $m$ , коефіцієнти яких належать тому самому полю, що й  $a, b, \sigma$ . Легко помітити, що простір  $\mathfrak{B}_m$  — інваріантний відносно оператора  $\mathcal{L}_\sigma$ . За базис  $\{e_i\}_m$  візьмемо мономи

$$e_1 = t^m/m!, \quad e_2 = t^{m-1}/(m-1)!, \quad \dots, \quad e_{m-1} = 1$$

Обчислимо в ньому матрицю оператора  $\mathcal{L}_\sigma$ . Цей оператор є лінійною комбінацією степенів оператора диференціювання  $\frac{d}{dt}$ . Оскільки

$$\frac{d}{dt} e_1 = e_2, \quad \frac{d}{dt} e_2 = e_3, \quad \dots, \quad \frac{d}{dt} e_m = e_{m-1}, \quad \frac{d}{dt} e_{m+1} = 0,$$

то  $(m+1) \times (m+1)$ -вимірна матриця оператора  $\frac{d}{dt}$  має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Піднісши її до  $k$ -го степеня, знайдемо матрицю оператора  $\frac{d^k}{dt^k}$ . Остання утворюється з матриці оператора  $\frac{d}{dt}$  зсувом діагоналі з одиниць на  $(k-1)$  місце в напрямі до нижнього лівого кута. Тепер неважко зрозуміти, що матриця  $\mathcal{A}$  оператора  $\mathcal{L}_\sigma$  має вигляд

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} P(\sigma) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ P'(\sigma) & P(\sigma) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{P''(\sigma)}{2!} & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{P^{(m)}(\sigma)}{m!} & \dots & \frac{P''(\sigma)}{2!} & P'(\sigma) & P(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \dots + b_m = m! b_0 e_1 + (m-1)! b_1 e_2 + \dots + b_m e_m,$$

то задача відшукування розв'язку рівняння (2.80) у вигляді

$$y_*(t) = q_1 e_1 + \dots + q_{m-1} e_{m-1}$$

еквівалентна лінійній неоднорідній алгебричній системі

$$\mathcal{A}q = b,$$

де

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{m+1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} m! b_0 \\ (m-1)! b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Умова  $P(\sigma) \neq 0$  гарантує невинродженість матриці  $\mathcal{A}$ , а отже, й єдиність розв'язку цієї системи.

**Резонансний випадок.** Нехай контрольне число  $\sigma$  є  $r$ -кратним коренем характеристичного полінома  $P(\lambda)$ , так що

$$P(\sigma) = P'(\sigma) = \dots = P^{(r-1)}(\sigma) = 0, \quad P^{(r)}(\sigma) \neq 0.$$

Покажемо, що в цьому разі завжди можна знайти єдиний розв'язок рівняння (2.78) у вигляді квазіполінома того самого степеня, що й вільний член, домноженого на  $t^r$ :

$$x_*(t) = e^{\sigma t} \left( q_1 \frac{t^{m+r}}{(m+r)!} + q_2 \frac{t^{m+r-1}}{(m+r-1)!} + \dots + q_{m+1} \frac{t^r}{r!} \right). \quad (2.81)$$

При цьому невизначені коефіцієнти  $q_1, q_2, \dots, q_{m+1}$  однозначно знаходяться за тим самим принципом, що й у нерезонансному випадкові.

Справді, якщо аналогічно попередньому зробити заміну невідомої

функції  $x = e^{\sigma t} y$ , то дістанемо рівняння вигляду (2.80), в якому коефіцієнти при функції  $y$  та її похідних до  $(r-1)$ -го порядку включно є нулями. Ввівши функцію  $z = \frac{P^{(r)}(\sigma)}{r!} y$ , одержимо рівняння

$$z^{(m-r)} + \dots + \frac{P^{(r)}(\sigma)}{r!} z = b_0 t^m + \dots + b_{m+1},$$

яке з урахуванням міркувань, проведених у нерезонансному випадку, має єдиний розв'язок у вигляді полінома

$$z_*(t) = q_1 \frac{t^m}{m!} + \dots + q_{m+1}.$$

Інтегрувавши цю функцію  $r$  разів у межах від 0 до  $t$ , дістанемо розв'язок рівняння (2.80) у вигляді

$$y_*(t) = q_1 \frac{t^{m+r}}{(m+r)!} + q_2 \frac{t^{m+r-1}}{(m+r-1)!} + \dots + q_{m+1} \frac{t^r}{r!}.$$

### ■ Приклад 2.19

*Розв'яжемо рівняння*

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = (t^3 + 1)e^{-2t}.$$

Характеристичним поліномом відповідного однорідного рівняння є  $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ . Отже,  $\lambda = -2$  — корінь кратності 2. Контрольне число  $\sigma = -2$ . Маємо резонансний випадок, причому  $r = 2$ . Частинний розв'язок ЛНР шукаємо, таким чином, у вигляді

$$x_*(t) = e^{-2t} \left( q_1 \frac{t^5}{5!} + q_2 \frac{t^4}{4!} + q_3 \frac{t^3}{3!} + q_4 \frac{t^2}{2!} \right).$$

Практична реалізація методу невизначених коефіцієнтів полегшується, якщо її здійснювати за такою схемою. Випишемо функцію  $x_*(t)$ , її першу та другу похідні в стовпець і зліва проставимо коефіцієнти, з якими вони входять у рівняння. Для того щоб уникнути зайвих перетворень, доцільно при обчисленні похідних вищих порядків від добутку функцій користуватися формулою Лейбніца. Таким чином, маємо

$$\begin{array}{l}
 4 \\
 4 \\
 1
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 x = e^{-2t} \left( q_1 \frac{t^5}{5!} + q_2 \frac{t^4}{4!} + q_3 \frac{t^3}{3!} + q_4 \frac{t^2}{2!} \right); \\
 \dot{x} = -2e^{-2t} \left( q_1 \frac{t^5}{5!} + q_2 \frac{t^4}{4!} + q_3 \frac{t^3}{3!} + q_4 \frac{t^2}{2!} \right) + \\
 \quad + e^{-2t} \left( q_1 \frac{t^4}{4!} + q_2 \frac{t^3}{3!} + q_3 \frac{t^2}{2!} + q_4 t \right); \\
 \ddot{x} = 4e^{-2t} \left( q_1 \frac{t^5}{5!} + q_2 \frac{t^4}{4!} + q_3 \frac{t^3}{3!} + q_4 \frac{t^2}{2!} \right) - \\
 \quad - 4e^{-2t} \left( q_1 \frac{t^4}{4!} + q_2 \frac{t^3}{3!} + q_3 \frac{t^2}{2!} + q_4 t \right) + \\
 \quad + e^{-2t} \left( q_1 \frac{t^3}{3!} + q_2 \frac{t^2}{2!} + q_3 t + q_4 \right).
 \end{array}
 \right.$$

Привіряємо коефіцієнти при однакових степенях  $t$  у лівій і правій частинах рівняння:

$$\begin{array}{l}
 t^5 \\
 t^4 \\
 t^3 \\
 t^2 \\
 t \\
 1
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 4q_1 - 8q_1 + 4q_1 = 0; \\
 4q_2 - 8q_2 + 4q_1 + 4q_2 - 4q_1 = 0; \\
 4q_3 - 8q_3 + 4q_2 + 4q_3 - 4q_2 + q_1 = 3!; \\
 4q_4 - 8q_4 + 4q_3 + 4q_4 - 4q_3 + q_2 = 0; \\
 4q_4 - 4q_4 + q_3 = 0; \\
 q_4 = 1.
 \end{array}
 \right.$$

Звідси  $q_1 = 3!$ ,  $q_2 = 0$ ,  $q_3 = 0$ ,  $q_4 = 1$ .

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + e^{-2t} \left( \frac{t^5}{20} + \frac{t^2}{2} \right).$$

Як бачимо, в процесі відшукування цього розв'язку нам довелося виконати досить значний обсяг обчислень. Рациональніший спосіб розв'язання розгляданого рівняння полягає у використанні формули зсуву. Справді, оскільки в даному випадку  $P(-2) = P'(-2) = 0$ (!!!), то, зробивши заміну  $x = e^{-2t}u$ , для функції  $u$  дістанемо рівняння  $\ddot{u} = t^3 + 1$ (!!!), поліномний розв'язок якого знаходиться тривіально:



$$y = \frac{t^5}{20} + \frac{t^2}{2}.$$

### Приклад 2.20

Розв'яжемо рівняння  $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 2t + t^2 e^{-2t}$ .

Характеристичний поліном  $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$  має коренями  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ . Для відшукування частинного розв'язку скористаємося принципом суперпозиції. Розв'язок першого рівняння

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^{t \ln 2}$$

шукаємо у вигляді  $ae^{t \ln 2}$ , оскільки відповідне контрольне число  $\ln 2$  не є коренем характеристичного полінома. Легко знаходимо  $a = 1/(\ln^2 2 + 3 \ln 2 + 2)$ .

Для відшукування розв'язку другого рівняння, яке має вигляд

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = t^2 e^{-2t},$$

скористаємося формулою зсуву. Покладемо  $x = e^{-2t}y$ . Тоді, оскільки  $P(-2) = 0$ ,  $P'(-2) = -1$ , то рівняння для  $y$  має вигляд  $\ddot{y} - \dot{y} = t^2$ . Знизимо його порядок підстановкою  $\dot{y} = z$ . Частинний розв'язок одержаного рівняння  $\dot{z} - z = t^2$  шукаємо за схемою

-1	$z = q_1 t^2/2 + q_2 t + q_3;$
1	$\dot{z} = q_1 t + q_2;$
$t^2$	$-q_1 = 2;$
$t$	$-q_2 + q_1 = 0;$
1	$-q_3 + q_2 = 0$
$\Rightarrow q_1 = -2, q_2 = -2, q_3 = -2.$	

Звідси  $z_*(t) = -t^2 - 2t - 2$ ,  $y_*(t) = -t^3/3 - t^2 - 2t$  і, нарешті,  $x_*(t) = -e^{-2t}(t^3/3 + t^2 + 2t)$ . Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{2t}{\ln^2 2 + 3 \ln 2 + 2} - e^{-2t} \left( \frac{t^3}{3} + t^2 + 2t \right).$$

**Загальне правило та метод комплексних амплітуд.** Узагальнимо метод невизначених коефіцієнтів на випадок, коли вільний член містить тригонометричні функції.

Нехай у рівнянні

$$\mathcal{L}x = e^{\alpha t} (P_{m_1}^1(t) \cos \beta t + P_{m_2}^2(t) \sin \beta t) \quad (2.82)$$

$P_{m_1}^1(t)$  та  $P_{m_2}^2(t)$  — поліноми степеня  $m_1$  та  $m_2$  відповідно з дійсними коефіцієнтами, а  $\alpha$  та  $\beta$  — дійсні числа. Припустимо, що коефіцієнти оператора  $\mathcal{L}$  також дійсні. В цьому разі частинний розв'язок завжди можна знайти за таким *правилом*.

- Утворюємо контрольне число  $\sigma = \alpha + i\beta$  і перевіряємо, чи є воно коренем характеристичного полінома оператора  $\mathcal{L}$ . Якщо  $P(\sigma) \neq 0$ , то покладемо  $r = 0$ . Якщо ж  $P(\sigma) = 0$ , то  $r$  вважаємо рівним кратності контрольного числа як кореня характеристичного полінома.
- Частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_*(t) = e^{\alpha t} t^r (Q_m^1(t) \cos \beta t + Q_m^2(t) \sin \beta t),$$

де  $Q_m^1(t)$  та  $Q_m^2(t)$  — поліноми степеня  $m := \max(m_1, m_2)$  з невизначеними коефіцієнтами.

- Підставляємо даний проект розв'язку в рівняння (2.82) і прирівнюємо коефіцієнти при функціях  $e^{\alpha t} t^k \cos \beta t$ ,  $e^{\alpha t} t^k \sin \beta t$  ( $k = 0, \dots, m+r$ ) в обох частинах одержаної рівності. Таким чином утворюємо лінійну неоднорідну алгебричну систему відносно невідомих коефіцієнтів поліномів  $Q_m^1(t)$  та  $Q_m^2(t)$ . Розв'язавши її, знаходимо шуканий частинний розв'язок.

Водночас з обґрунтуванням цього правила буде викладено ще один різновид методу невизначених коефіцієнтів розв'язання рівняння вигляду (2.82) — так званий *метод комплексних амплітуд*. Він базується на такому простому спостереженні. Якщо оператор  $\mathcal{L}$  має дійсні коефіцієнти й комплекснозначна функція  $z(t)$  задовольняє рівняння  $\mathcal{L}z = f(t)$  із комплекснозначним вільним членом  $f(t)$ , то  $\mathcal{L} \operatorname{Re} z(t) = \operatorname{Re} (\mathcal{L}z(t)) = \operatorname{Re} f(t)$ , а тому функція  $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$  являє собою дійсний розв'язок рівняння  $\mathcal{L}x = \operatorname{Re} f(t)$ .

Для застосування методу комплексних амплітуд, зауваживши, що

$$\cos \beta t = \operatorname{Re} e^{i\beta t}, \quad \sin \beta t = \operatorname{Re} (-ie^{i\beta t}),$$

перепишемо (2.82) у вигляді

$$\mathcal{L}x = \operatorname{Re} (e^{\alpha t} P_m(t)).$$

де  $\sigma = \alpha + i\beta$ ,  $P_m(t) = P_{m_1}^1(t) - iP_{m_2}^2(t)$ . Методом невизначених коефіцієнтів знайдемо комплекснозначний розв'язок рівняння

$$\mathcal{L}z = e^{\sigma t} P_m(t)$$

у вигляді

$$z_*(t) = e^{\sigma t} t^r Q_m(t),$$

де  $r$  — кратність контрольного числа  $\sigma$  як кореня характеристичного полінома, а  $Q_m(t)$  — поліном степеня  $m$  із комплексними коефіцієнтами. Функція

$$x_*(t) := \operatorname{Re}(e^{\sigma t} t^r Q_m(t))$$

і є шуканим розв'язком рівняння (2.82), причому  $Q_m^1(t) = \operatorname{Re} Q_m(t)$ ,  $Q_m^2(t) = \operatorname{Im} Q_m(t)$ .

◆ **Зауваження 2.5**

Може статися, що рівняння (2.82) зручніше подати у вигляді

$$\mathcal{L}x = \operatorname{Im}(e^{\sigma t} P_m(t)).$$

Тоді за його частинний розв'язок слід брати  $x_*(t) = \operatorname{Im} z_*(t)$ .

■ **Приклад 2.21**

Розв'яжемо рівняння  $x^{(4)} - x = t \sin t$ .

Характеристичний многочлен  $P(\lambda) = \lambda^4 - 1$  має коренями  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i$ . Контрольне число  $\sigma = i$ . Отже,  $r = 1$ . Якщо обчислення проводити в полі дійсних чисел, то частинний розв'язок слід шукати за такою схемою:

-1	$x = (a_1 t^2 + b_1 t) \cos t + (a_2 t^2 + b_2 t) \sin t;$
1	$x^{(4)} = -12a_1 \cos t + 4(2a_1 t + b_1) \sin t + (a_1 t^2 + b_1 t) \cos t -$ $- 12a_1 \sin t - 4(a_2 t + b_2) \cos t + (a_2 t^2 + b_2 t) \sin t;$
$t^2 \cos t$	$-a_1 + a_1 = 0;$
$t^2 \sin t$	$-a_2 + a_2 = 0;$
$t \cos t$	$-b_1 + b_1 - 8a_2 = 0;$
$t \sin t$	$-b_2 + 8a_1 + b_2 = 1;$
$\cos t$	$-12a_1 - 4b_2 = 0;$
$\sin t$	$4b_1 - 12a_2 = 0$
$\Rightarrow a_2 = 0, a_1 = \frac{1}{8}; b_2 = -\frac{3}{8}, b_1 = 0.$	

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t + \frac{t^2}{8} \cos t - \frac{3}{8} t \sin t.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок цього самого рівняння методом комплексних амплітуд. Оскільки  $\sin t = \operatorname{Im} e^{it}$ , то допоміжне рівняння матиме вигляд  $z'' - z = te^{it}$ . Його частинний розв'язок знайдемо за схемою

$$\begin{array}{l|l} -1 & z = e^{it} \left( \frac{at^2}{2} + bt \right); \\ 1 & z^{(4)} = e^{it} \left( \frac{at^2}{2} + bt \right) - 4ie^{it}(at + b) - 6ae^{it}; \\ \hline t^2 & -a + a = 0; \\ t & -b + b - 4ia = 1; \\ 1 & -4ib - 6a = 0 \\ \hline & \Rightarrow a = \frac{i}{4}; \quad b = -\frac{3}{8}. \end{array}$$

Отже  $z_*(t) = e^{it} \left( \frac{it^2}{8} - \frac{3t}{8} \right)$ , звідки  $x_*(t) = \operatorname{Im} z_*(t) = \frac{t^2}{8} \cos t - \frac{3}{8} t \sin t$ . Як бачимо, другий спосіб порівняно з першим є економнішим.

Метод невизначених коефіцієнтів можна застосувати до відшукування частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння

$$\mathcal{L}_E x = \tau^\alpha (P_{m_1}^1(\ln \tau) \cos(\beta \ln \tau) + P_{m_2}^2(\ln \tau) \sin(\beta \ln \tau)),$$

де  $\mathcal{L}_E$  — оператор Ейлера (див. п. 2.2.4),  $P_{m_k}^k(t)$  — поліном степеня  $m_k$  ( $k = 1, 2$ ),  $\alpha, \beta$  — дійсні числа. Якщо зробити заміну незалежної змінної  $\tau = e^t$ , то таке рівняння набере вигляду (2.82). При цьому, як було показано в п. 2.2.4,  $\mathcal{L}$  являє собою оператор зі сталими коефіцієнтами й характеристичним поліномом  $P_E(\lambda)$ , визначеним рівністю  $\mathcal{L}\tau^\lambda = P_E(\lambda)\tau^\lambda$ . Тепер потрібно лише розв'язати рівняння (2.82) і в одержаному розв'язку покласти  $t = \ln \tau$ .

### 2.4.5. Лінійна неоднорідна система зі сталою матрицею та квазіполіномним вільним членом

Розглянемо систему

$$\dot{x} = Ax + e^{\sigma t} P_m(t), \quad (2.83)$$

де  $A$  —  $n$ -вимірна матриця з дійсними або комплексними елементами, коефіцієнти полінома  $P_m(t) := t^m p_1 + t^{m-1} p_2 + \dots + p_{m+1}$  є векторами з  $\mathbb{R}^n$  або  $\mathbb{C}^n$ , контрольне число  $\sigma$  теж може бути дійсним або комплексним. Опишемо спосіб побудови частинного розв'язку системи (2.83), що ґрунтується на методі невизначених коефіцієнтів.

**Нерезонансний випадок.** Нехай контрольне число  $\sigma$  не є коренем характеристичного полінома  $P(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ . Тоді частинний розв'язок системи (2.83) завжди можна знайти у вигляді

$$x_*(t) = e^{\sigma t} \left( \frac{t^m}{m!} q_1 + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} q_2 + \dots + q_{m+1} \right). \quad (2.84)$$

При цьому невідомі вектори  $q_j$  ( $j = 1, \dots, m+1$ ) однозначно визначаються з алгебричної системи рівнянь, яка утворюється після підставлення проекту розв'язку (2.84) у (2.83), скорочення обох частин одержаної рівності на  $e^{\sigma t}$  і прирівнювання вектор-коефіцієнтів при однакових степенях  $t$ .

Дійсно, виконавши ті самі дії, що й у п. 2.3.2, дістанемо систему

$$\begin{aligned} (A - \sigma E) q_1 &= -m! p_1, \\ (A - \sigma E) q_2 &= q_1 - (m-1)! p_2, \\ &\dots \dots \dots \\ (A - \sigma E) q_{m+1} &= q_m - p_{m+1}. \end{aligned}$$

Оскільки  $\det(A - \sigma E) \neq 0$ , а отже, матриця  $A - \sigma E$  має обернену, то з цієї системи можна послідовно єдиним чином визначити вектори  $q_1, \dots, q_{m+1}$ .

**Резонансний випадок.** Нехай контрольне число  $\sigma$  є коренем характеристичного полінома  $P(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ . Визначимо число  $k$  як мак-

симальний із розмірів клітин Жордана в нормальній формі матриці  $A$ , що відповідають власному числу  $\sigma$ . Як зазначалося в п. 2.3.2,  $k$  — це таке мінімальне натуральне число, для якого

$$\text{rank}(A - \sigma E)^k = \text{rank}(A - \sigma E)^{k+1}.$$

Покажемо, що частинний розв'язок системи (2.83) завжди можна знайти у вигляді

$$x_*(t) = e^{\sigma t} \left( \frac{t^{m-k}}{(m+k)!} q_1 + \frac{t^{m-k-1}}{(m+k-1)!} q_2 + \dots + q_{m-k+1} \right), \quad (2.85)$$

де невідомі вектори  $q_j$  ( $j = 1, \dots, m+k+1$ ) визначаються за тим самим принципом, як і в нерезонансному випадкові.

◆ **Зауваження 2.6**

У разі грубішого вибору числа  $k$  його покладають рівним кратності числа  $\sigma$  як кореня характеристичного полінома. Так діють тоді, коли з якихось причин обчислення розмірів клітин Жордана небажане.

Нехай  $S$  — така невідроджена матриця, що  $J(A) = S^{-1}AS$  є нормальною жордановою формою для  $A$ . Зробимо заміну змінних  $x = Sy$ . Тоді

$$S\ddot{y} = ASy + e^{\sigma t} P_m(t) \Leftrightarrow \ddot{y} = J(A)y + e^{\sigma t} S^{-1}P_m(t).$$

Зрозуміло, що перетворена система розпадається на прямий добуток незалежних підсистем відповідно до того, як матриця  $J(A)$  розпадається на клітини Жордана. Тепер обґрунтування методу невизначених коефіцієнтів достатньо провести у випадку  $l$ -вимірної системи вигляду

$$\ddot{u} = J_l(\mu)u + e^{\sigma t} R_m(t), \quad (2.86)$$

де  $J_l(\mu)$  —  $l$ -вимірна матриця, в якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють  $\mu$ , над головною діагоналлю стоять одиниці, а решта елементів — нулі;  $R_m(t)$  — поліном степеня  $m$  із векторними коефіцієнтами.

Якщо  $\mu \neq \sigma$ , то маємо нерезонансний випадок, і частинний розв'язок можна тоді знайти у вигляді квазіполінома степеня  $m$ . Якщо ж  $\mu = \sigma$ , то, зробивши заміну змінних  $u = e^{\sigma t}v$ , дістанемо систему з матрицею  $J_l(0)$  і поліномним вільним членом. Записана по координатах така система набирає вигляду

$$\dot{u}_1 = u_2 + R_{1,m}(t),$$

$$\dot{u}_2 = u_3 + R_{2,m}(t),$$

$$\dots$$

$$\dot{u}_{l-1} = u_l + R_{l-1,m}(t),$$

$$\dot{u}_l = R_{l,m}(t).$$

Останнє рівняння має частинний розв'язок  $u_l(t) = \int_0^t R_{l,m}(s) ds$ , який є поліномом степеня  $\deg(u_l(t)) \leq m + 1$ . Підставивши  $u_l(t)$  у  $(m-1)$ -ше рівняння замість  $u_l$ , знайдемо  $u_{l-1}(t) = \int_0^t (u_l(s) + R_{l-1,m}(s)) ds$ . Тут  $\deg(u_{l-1}(t)) \leq m + 2$ . Продовжуючи цей процес, урешті-решт дійдемо до рівняння вигляду  $\dot{u}_1 = u_2(t) + R_{1,m}(t)$ , в якому  $\deg(u_2(t)) \leq m + l - 1$ . Воно має поліномний розв'язок  $u_1(t)$ , і при цьому  $\deg(u_1(t)) \leq m + l$ . Іншим чином, система (2.86) при  $\mu = \sigma$  завжди має розв'язок у вигляді кінцевого полінома степеня, не вищого за  $m + l$ .

**Загальне правило та метод комплексних амплітуд.** Сформулюємо *правило* відшукування частинного розв'язку системи

$$\dot{x} = Ax + e^{\alpha t} (P_{m_1}^1(t) \cos \beta t + P_{m_2}^2(t) \sin \beta t), \quad (2.87)$$

де  $A$  — матриця з дійсними елементами,  $P_{m_1}^1(t)$  та  $P_{m_2}^2(t)$  — вектор-поліноми степеня  $m_1$  та  $m_2$  відповідно з дійсними коефіцієнтами, а  $\alpha$  та  $\beta$  — дійсні числа.

- Утворюємо контрольне число  $\sigma = \alpha + i\beta$  і перевіряємо, чи є воно коренем характеристичного полінома  $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ . Якщо  $P(\sigma) \neq 0$ , то покладаємо  $k = 0$ . Якщо  $P(\sigma) = 0$ , то  $k$  вважаємо рівним максимальному з розмірів клітин Жордана в нормальній формі матриці  $A$ , які відповідають власному числу  $\sigma$ , тобто такому мініимальному натуральному числу  $k$ , при якому

$$\text{rank}(A - \sigma E)^k = \text{rank}(A - \sigma E)^{k+1}.$$

(Стосовно іншого вибору числа  $k$  див. зауваження 2.6.)

- Частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_k(t) = e^{\alpha t} (Q_{m-k}^1(t) \cos \beta t + Q_{m-k}^2(t) \sin \beta t),$$

де  $Q_{m-k}^1(t)$  та  $Q_{m-k}^2(t)$  — поліноми степеня  $m+k := \max(m_1, m_2) + k$  з невизначеними коефіцієнтами.

- Підставляємо даний проект розв'язку в (2.87) і прирівнюємо коефіцієнти при функціях  $e^{\alpha t} t^k \cos \beta t$ ,  $e^{\alpha t} t^k \sin \beta t$  ( $k = 0, \dots, m+k$ ) в обох частинах одержаної рівності. Таким чином утворюємо лінійну неоднорідну алгебричну систему відносно невідомих коефіцієнтів поліномів  $Q_m^1(t)$  та  $Q_m^2(t)$ . Розв'язавши її, знаходимо шуканий частинний розв'язок.

При обґрунтуванні цього правила можна скористатися методом комплексних амплітуд. Для цього слід подати вільний член у вигляді  $\operatorname{Re}(e^{\alpha t} P_m(t))$ , встановити існування квазіполіномного розв'язку допоміжної системи  $\dot{z} = Az + e^{\alpha t} P_m(t)$  і виділити в ньому дійсну частину.

### □ Приклад 2.22

*Знайдемо періодичний розв'язок системи рівнянь*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5 \cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

Оскільки контрольне число  $\sigma = i$  не є коренем характеристичного полінома матриці  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  цієї системи, то методом невизначених коефіцієнтів знайдемо частинний розв'язок вигляду

$$x = a_1 \sin t + b_1 \cos t, \quad y = a_2 \sin t + b_2 \cos t.$$

Підставивши ці вирази в систему й прирівнявши коефіцієнти при  $\cos t$  та  $\sin t$ , дістанемо:

$$\begin{aligned} a_1 - b_2 &= -5, & b_1 + a_2 &= 0, \\ a_2 - 2b_1 - b_2 &= 0, & 2a_1 + b_2 + a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Звідси  $a_1 = -2$ ,  $b_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $b_2 = 3$  і, отже,  $x_*(t) = -2 \sin t - \cos t$ ,  $y_*(t) = \sin t + 3 \cos t$ .

Покажемо, як можна цю саму задачу розв'язати методом комплексних амплітуд. Вільний член допоміжної комплексної системи має вигляд  $e^{it} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Згідно з п. 2.4.5 коефіцієнти її частинного розв'язку  $e^{it} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$  знаходимо із системи



$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо:  $q_1 = -1 + 2i$ ,  $q_2 = 3 - i$ . Тепер потрібний нам частинний розв'язок знаходимо виділенням дійсної частини:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left[ e^{it} \begin{pmatrix} -1+2i \\ 3-i \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\cos t - 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Насамкінець зауважимо, що розглядувану систему легко розв'язати також зведенням до рівняння другого порядку. Достатньо виразити  $z$  з першого рівняння й підставити в друге. Матимемо  $\ddot{x} - \dot{x} + 2x = -5(\cos t + \sin t)$ . До цього рівняння можна застосувати метод, викладений у п. 2.4.4.

### □ Приклад 2.23

*Розв'яжемо систему рівнянь*

$$\dot{x} = 2x + y + 2e^t, \quad \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}.$$

Знаходимо корені характеристичного полінома матриці  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0; \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Кореню 1 відповідає власний вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , а кореню 3 — вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Отже, маємо загальний розв'язок однорідної системи:

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{3t}, \quad y = -c_1 e^t + c_2 e^{3t}.$$

Для відшукування частинного розв'язку неоднорідної системи користуємося принципом суперпозиції. Її вільний член є сумою вектор-функцій  $e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  та  $e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Контрольне число першої —  $\sigma_1 = 1$  є однократним коренем характеристичного полінома, а при  $\lambda = \sigma_2 = 4$  цей поліном у нуль не перетворюється. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x = (a_1 t + a_2) e^t + a_3 e^{3t}, \quad y = (b_1 t + b_2) e^t + b_3 e^{4t}.$$

Стандартним способом дістаємо систему для визначення невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 0, & a_1 - a_2 - b_2 &= 2, & -b_1 + a_2 + b_2 &= 0, \\ 2a_3 - b_3 &= 0, & 2b_3 - a_3 &= 3. \end{aligned}$$

Звідси  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = -1$ ,  $b_1 = -1$ ,  $b_2 = -1$ ,  $b_3 = -2$ . Отже, загальний розв'язок системи має вигляд

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + t e^t - e^{4t}, \quad y = -c_1 e^t + c_2 e^{3t} - (t+1) e^t - 2e^{4t}.$$

### □ Приклад 2.24

*Розглянемо задачу про рух зарядженої частинки в однорідних електричному та магнітному полях.*

Нехай  $r$  — радіус-вектор частинки,  $q$  — її заряд,  $m$  — маса,  $E$  — напруженість електричного поля,  $B$  — вектор магнітної індукції. Рівняння руху мають вигляд

$$m \ddot{r} = \frac{q}{c} [\dot{r}, B] + qE, \quad (2.88)$$

де  $[\cdot, \cdot]$  — операція векторного добутку,  $c$  — швидкість світла. Виберемо орти  $e_1, e_2, e_3$  так, щоб  $[e_1, e_2] = e_3, B = B e_3$ , де  $B = \|B\|$ , і покладемо  $x_i := \langle r, e_i \rangle, E_i := \langle E, e_i \rangle, f_i = qE_i/m, i = \overline{1, 3}, \omega = qB/(mc)$ . Підставивши  $r = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$  в систему (2.88) і взявши до уваги, що  $[e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = e_1$ , дістанемо систему

$$\ddot{x}_1 = \omega \dot{x}_2 + f_1, \quad \ddot{x}_2 = -\omega \dot{x}_1 + f_2, \quad \ddot{x}_3 = f_3, \quad (2.89)$$

де  $f_i = qE_i/m, i = \overline{1, 3}; \omega = qB/(mc)$ . Позначимо  $\dot{x}_i = y_i, i = \overline{1, 3}$ . Тоді

$$\dot{y}_1 = \omega y_2 + f_1, \quad \dot{y}_2 = -\omega y_1 + f_2, \quad \dot{y}_3 = f_3. \quad (2.90)$$

Перші два рівняння цієї системи утворюють незалежну підсистему. Розв'яжемо її. У п. 2.3.4 було показано, що фундаментальною матрицею відповідної однорідної системи є

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Цим методом невизначених коефіцієнтів шукаємо частинний розв'язок неоднорідної системи у вигляді  $y_1 = a_1$ ,  $y_2 = a_2$  і легко знаходимо  $a_1 = -f_1/\omega = -cE_2/B$ ,  $a_2 = f_1/\omega = cE_1/B$ . Отже, загальний розв'язок системи (2.90) має вигляд

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t - \frac{cE_2}{B}, \\ y_2 &= -c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t + \frac{cE_1}{B}, \\ y_3 &= c_3 + f_3 t. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Підставивши сюди  $y_i = \dot{x}_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  й зінтегрувавши обидві частини одержаних рівностей, дістанемо

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{c_1}{\omega} \sin \omega t - \frac{c_2}{\omega} \cos \omega t - \frac{cE_2 t}{B} + c_4, \\ x_2 &= \frac{c_1}{\omega} \cos \omega t + \frac{c_2}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_1 t}{B} + c_5, \\ x_3 &= c_3 t + \frac{f_3 t^2}{2} + c_6. \end{aligned}$$

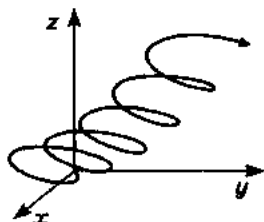


Рис. 2.4

Поклавши в (2.91)  $t = 0$ , знайдемо

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1^0 := \dot{x}_1(0) + \frac{cE_2}{B}, \quad c_2 = c_2^0 := \dot{x}_2(0) - \frac{cE_1}{B}, \\ c_3 &= c_3^0 := \dot{x}_3(0). \end{aligned}$$

Нарешті, поклавши  $t = 0$  в (2.1), матимемо

$$\begin{aligned} c_4 &= x_1(0) + \frac{c_2^0}{\omega}, \quad c_5 = x_2(0) - \frac{c_1^0}{\omega}, \\ c_6 &= x_3(0). \end{aligned}$$

Траєкторію електрона зображено на рис. 2.4.

### ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Зінтегрувати рівняння  $\ddot{x} + x = \sec t$ .
- ② Знайти розв'язок задачі Коші  $\ddot{x} + 4x = 16t \cos 2t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ .
- ③ Методом комплексних амплітуд знайти  $2\pi$ -періодичний розв'язок рівняння  $\ddot{x} + 2x = \sin t$ .
- ④ Використавши формулу зсуву, розв'язати рівняння

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 12x + 8x = t^{100}e^{-2t}.$$

- ⑤ Записати, в якому вигляді слід шукати частинний розв'язок рівняння  $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = t^l e^t + t^m e^{2t} + t^n \sin t$ , де  $l, m, n \in \mathbb{N}$ , методом невизначених коефіцієнтів.
- ⑥ Зінтегрувати рівняння:

а)  $t^2 \ddot{x} - 6x = 5t^3 + 8t^2$ ;      б)  $t^2 \ddot{x} - 2y = \sin \ln t$ .

- ⑦ Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dot{x} + 5x + y = e^t, \\ \dot{y} + 3y - x = e^{2t}. \end{cases}$$

- ⑧ Довести, що розв'язок рівняння (2.70), який задовольняє нульові початкові умови  $x(t_0) = 0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = 0$ , виражається формулою

$$x(t) = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \frac{x_i(t) W_{ni}(s)}{W(s)} f(s) ds,$$

де  $W(t)$  — вронскіан деякої фундаментальної системи розв'язків відповідної однорідної системи, а  $W_{ni}(t)$  — алгебричне доповнення  $i$ -го елемента  $n$ -го рядка вронскіана.

- ⑨ Довести, що матрицант є сумою ряду

$$\begin{aligned} E + \int_s^t A(t_1) dt_1 + \int_s^t A(t_1) \int_s^{t_1} A(t_2) dt_2 dt_1 + \dots \\ \dots + \int_s^t A(t_1) \int_s^{t_1} A(t_2) \dots \int_s^{t_{k-1}} A(t_k) dt_k \dots dt_2 dt_1 + \dots \end{aligned}$$

- ✓ *Вказівка.* Застосувати метод послідовних наближень до матричної задачі Коші  $\dot{X} = A(t)X$ ,  $X|_{t=s} = E$ .

- ⓐ Показати, що кожну неперервну на  $I \times I$  матричнозначну функцію  $\Omega_t^t$ , яка є неперервно диференційовною щодо  $t \in I$  при кожному фіксованому  $s \in I$  і має властивості (2.69), можна подати у вигляді (2.68), де  $X(t)$  — фундаментальна матриця деякої лінійної однорідної системи.

*Вказівка.*  $X(t) := \Omega_{t_0}^t$ ,  $A(t) := \left( \frac{d}{dt} \Omega_{t_0}^t \right) \Omega_{t_0}^{t_0}$ ,  $t_0 \in I$ .

- ⓑ Знайти обмежений на всій дійсній осі розв'язок системи  $\dot{x} = A(t)x + f(t)$  за умови, що  $f(t) \in C(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n)$ ,  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty$  і для матрицанта відповідної ЛОС існують додатні сталі  $\alpha$  та  $K$  такі, що  $\|\Omega_t^s\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \forall s \in \mathbb{R}, \forall t \geq s$ .

## 2.5

Аналіз найпростіших задач  
теорії коливань

Розглянемо дві типові задачі теорії коливань.

**Задача 1.** До тіла масою  $m$ , що може рухатися лише вздовж горизонтальної осі  $Ox$ , прикріплено дві пружини так, як це зображено на рис. 2.5, а. Нехай положення рівноваги тіла збігається з точкою  $x = 0$ . Вважаємо, що для пружини виконується закон Гука. Тоді пружина сила, що діє на тіло, коли воно знаходиться в точці з координатою  $x$ , дорівнює  $-ax$ , де  $a$  — деякий додатний коефіцієнт (жорсткість). Припустимо далі, що рівнодійна сил тертя й опору середовища пропорційна швидкості руху тіла, тобто дорівнює  $-bx$ , де  $b > 0$ . Нехай,

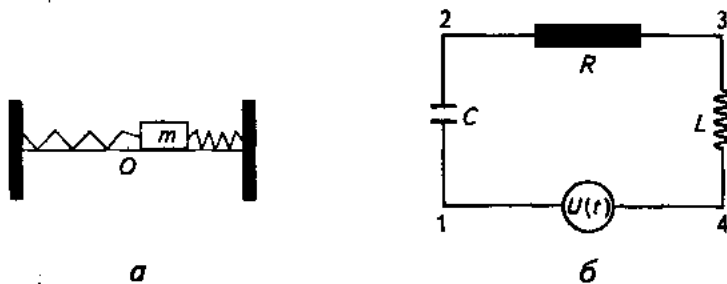


Рис. 2.5

нарешті, тіло зазнає впливу деякої зовнішньої сили, яка є відомою функцією часу  $F(t)$ . Потрібно описати залежність координати тіла від часу.

Диференціальне рівняння руху тіла є наслідком другого закону Ньютона й має вигляд

$$m\ddot{x} = -ax - b\dot{x} + F(t).$$

Переконаємося, що рівняння такого самого типу виникає й у задачі, яка стосується теорії електричних коливань.

**Задача 2.** Розглянемо електричне коло, утворене послідовно з'єднаними конденсатором  $C$ , резистором  $R$ , котушкою індуктивності  $L$  та джерелом напруги, величина якої є відомою функцією часу  $U(t)$  (рис. 2.5, б). Потрібно дослідити, як змінюється заряд на обкладинках конденсатора з часом.

Надалі літери  $C$ ,  $R$ ,  $L$  використовуватимуться також для позначення відповідно електроємності конденсатора, опору резистора та індуктивності котушки. Через  $u_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 4$ ,  $i \neq j$ ) позначимо різницю потенціалів у вузлах  $i$  та  $j$  (спад напруги на ділянці кола  $ij$ ). Зокрема,  $u_{14} = U(t)$ . Згідно з другим правилом Кірхгофа маємо рівність

$$u_{12} + u_{23} + u_{34} + u_{41} = 0.$$

Нехай  $q(t)$  — заряд конденсатора, а  $I(t) := \dot{q}(t)$  — сила струму в колі в момент часу  $t$ . Тоді, як відомо,  $u_{12} = q/C$ ,  $u_{23} = RI = R\dot{q}$ ,  $u_{34} = LI = L\dot{q}$ ,  $u_{41} = -u_{14} = -U(t)$ . Отже, диференціальне рівняння, що описує закон зміни заряду на обкладинках конденсатора, має вигляд

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = U(t).$$

Менш традиційною є задача дослідження коливань в економічних системах. Припустимо, що в деякій такій системі національний дохід ( $Y$ ) пов'язаний зі споживанням ( $C$ ), капіталовкладеннями ( $I$ ) та урядовими видатками ( $G$ ) рівністю

$$Y = C + I + G.$$

Складаючи відповідну математичну модель, ураховують фактор запізнення: на споживання в момент  $t$  спрямовується певна частка доходу, одержаного на момент  $t - \tau$ ,  $\tau > 0$ . Якщо запізнення  $\tau$  вважати досить малим, то можна покласти

$$C(t) = (1-s)Y(t-\tau) \approx (1-s)(Y(t) - \tau\dot{Y}(t)),$$

де  $\tau$  — коефіцієнт, який характеризує схильність до ошадливості.

Припустимо, що вибір стратегії капіталовкладень обумовлений так званим принципом «акселератора» — намаганням досягти рівності  $I(t) = aY(t)$ , де  $a$  — деякий додатний параметр. Якщо й тут урахувати фактор запізнення, то в першому наближенні залежність  $I$  від  $Y$  відповідно моделюється рівністю  $I(t) + \theta\dot{I}(t) = a\dot{Y}(t)$ ,  $\theta > 0$ .

Нехай, нарешті, величина урядових видатків є деякою відомою функцією часу:  $G = G(t)$ . Тоді з урахуванням наведених вище міркувань для визначення  $I$  та  $Y$  дістаємо систему вигляду

$$\begin{cases} \dot{I} = b(a\dot{Y} - I), & b := 1/\theta, \\ (1-s)\tau\dot{Y} = -sY + I + G(t). \end{cases}$$

Диференціюємо друге рівняння за змінною  $t$  і виключимо з одержаної системи  $I$  та  $\dot{I}$ . Дістанемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$(1-s)\tau\ddot{Y} + (s-ab + (1-s)\tau b)\dot{Y} + sbY = bG(t) + \dot{G}(t).$$

Об'єднаємо дослідження одержаних диференціальних рівнянь, записавши їх в універсальній формі

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = f(t). \quad (2.92)$$

Параметри  $\omega$  та  $2k$  називають відповідно власною частотою та коефіцієнтом тертя, а функцію  $f(t) \in C(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$  — зовнішньою силою.

### 2.5.1. Вільні коливання

Розглянемо спочатку випадок, коли зовнішня сила відсутня:  $f(t) = 0$ . Корені характеристичного полінома  $\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2$  відповідного лінійного однорідного рівняння мають вигляд

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}.$$

Можливі такі випадки:

- 1)  $k > \omega$  — дійсні різні від'ємні корені;
- 2)  $k = \omega$  — двократний від'ємний корінь;
- 3)  $k < \omega$  — пара комплексно-спряжених коренів із від'ємною дійсною частиною.

Описуючи характер розв'язків рівняння в цих випадках, водночас будемо зображати фазовий портрет еквівалентної йому двовимірної системи, яка утворюється після запровадження вектора  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$  і має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - y. \end{cases} \quad (2.93)$$

При її дослідженні будемо користуватися результатами п. 1.9.

У випадку 1 коливань не спостерігається, оскільки загальний розв'язок рівняння має вигляд  $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \equiv e^{\lambda_1 t} (c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t})$  і зрозуміло, кожна нетривіальна функція з цієї сім'ї перетворюється в нуль не більше ніж один раз.

Для зображення фазового портрета системи (2.93) знайдемо власні вектори  $\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}$  її матриці ( $j = 1, 2$ ). Маємо:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_j & 1 \\ -\omega^2 & -2k - \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Отже, кутовий коефіцієнт прямої власних векторів, що відповідають власному числу  $\lambda_j$ , дорівнює  $\lambda_j$ . Тип фазового портрета — вузол (рис. 2.6, а). Більшість фазових кривих дотикаються в початку координат прямої  $y = \lambda_1 x$  ( $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ ). Оскільки  $\dot{x} = y$ , то рух по траєкторії у верхній півплощині при зростанні  $t$  відбувається зліва направо, а в нижній — навпаки. Якщо координати початкової точки лежать у секторі, обмеженому прямими  $y = \lambda_j x$ ,  $j = 1, 2$ , то компонента  $x(t)$  відповідного розв'язку системи (2.93) прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , не змінюючи знака. Маємо так званий *випадок жорсткого демпфування* (в цьому разі в задачі 1 тіло необмежено наближається до положення рівноваги, перебуваючи весь час по один бік від нього). Для початкової точки, яка знаходиться назовні зазначеного сектора, функція  $x(t)$  один раз змінює знак — *випадок нежорсткого демпфування*. (Тіло спо-



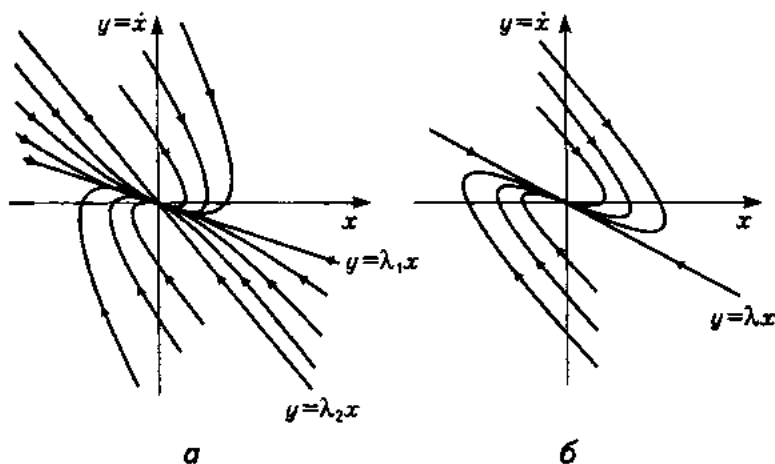


Рис. 2.6

Чітку мінає положення рівноваги, а потім необмежено наближається до нього з одного боку. Таку особливість руху використовують у техніці, наприклад, при розробці амортизаторів.)

У випадку 2 загальний розв'язок рівняння має вигляд  $x = e^{-kt}(c_1 + c_2 t)$ , а тип фазового портрета — вироджений вузол (дикритичного вузла бути не може, оскільки матриця системи недіагональна) (рис. 2.6, б). Облисть жорсткого демпфування зникає за рахунок того, що власні прямі зливаються. Кажуть, що в цій ситуації рух відбувається в умовах *критичного демпфування*.

У випадку 3 загальний розв'язок запишемо спочатку в комплексній формі:

$$x = ce^{(-k - i\Omega)t}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad \Omega := \sqrt{\omega^2 - k^2}.$$

Якщо покласти  $A = |c|$ ,  $\varphi = \arg c$ , так що  $c = Ae^{i\varphi}$ , то дістанемо дійсний загальний розв'язок у вигляді

$$x = \operatorname{Re}(Ae^{(-k - i\Omega)t - i\varphi}) = Ae^{-kt} \cos(\Omega t + \varphi). \quad (2.94)$$

Числа  $A$ ,  $\varphi$  та  $\Omega$  називаються відповідно *амплітудою*, *початковою фазою* та *умовною частотою коливань*. Оскільки  $k > 0$ , то формула (2.94) описує коливання, що згасають при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 2.7, б). Маємо так званий випадок *слабкого демпфування*. Тип фазового портрета — фокус (рис. 2.7, а).

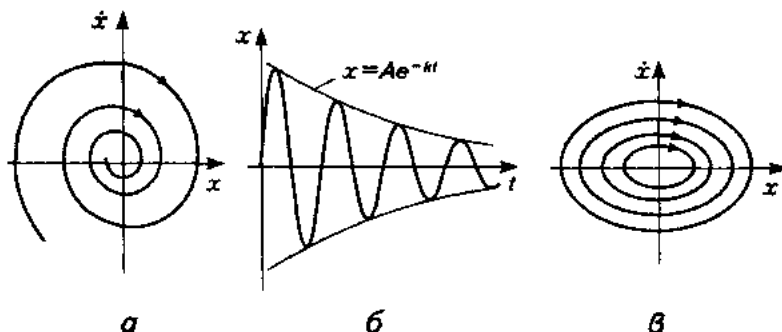


Рис. 2.7

В ідеальному випадку за відсутності тертя ( $k = 0$ ) відбуваються гармонічні коливання. Тип фазового портрета — центр (рис. 2.7, в).

Залежність типу фазового портрета системи (2.93) від значень  $k$ , « зображають у вигляді так званої *біфуркаційної діаграми*. (В теорії диференціальних рівнянь поняття «біфуркація» в широкому розумінні вживають для позначення явищ, пов'язаних із перебудовою фазових портретів систем диференціальних рівнянь, залежних від параметрів. Термін «біфуркація» походить від латинського bifurcus — роздвоєний.) Побудова цієї діаграми полягає в тому, що область зміни параметрів розбивають на зв'язні підмножини, кожній з яких відповідає певний тип фазового портрета. Після цього кожен таку область разом із відповідним фазовим портретом зображають на одному рисунку.

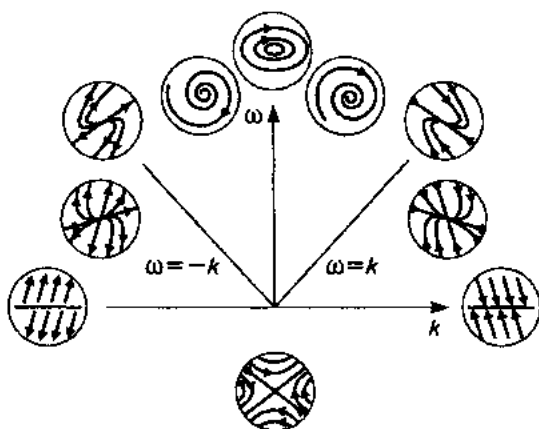


Рис. 2.8

Заради більшої загальності на рис. 2.8 показано біфуркаційну діаграму для системи, еквівалентної двопараметричній сім'ї рівнянь

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega|\omega|x = 0, \quad (k, \omega) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Прямі  $\omega = 0$ ,  $k = 0$ ,  $\omega = \pm k$  природно назвати критичними: саме тоді, коли точка  $(k, \omega)$  їх перетинає, відбувається якісна перебудова фазового портрета досліджуваної системи.

### 2.5.2. Вимушені коливання

Дослідимо випадок, коли сила змінюється з часом за гармонічним законом:  $f(t) = a \cos vt$ , де  $|a| > 0$  — амплітуда, а  $v \geq 0$  — частота зовнішньої сили. Припустимо також, що  $k > 0$ .

Для відшукування частинного розв'язку рівняння (2.92), зауваживши, що  $f(t) = \operatorname{Re} ae^{ivt}$ , скористаємося методом комплексних амплітуд. Діономіжне комплексне рівняння має вигляд

$$\ddot{z} + 2k\dot{z} + \omega^2 z = ae^{ivt}. \quad (2.95)$$

Його розв'язок шукаємо у вигляді  $z = qe^{ivt}$ . Підставивши цей вираз у (2.95), знаходимо  $q = a/(\omega^2 - v^2 + 2kvi)$  або

$$q = a \frac{\omega^2 - v^2 - 2kvi}{(\omega^2 - v^2)^2 + 4k^2v^2} =: Ae^{i\psi},$$

де

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 - v^2)^2 + 4k^2v^2}},$$

$$\psi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{2kv}{v^2 - \omega^2}\right) & \text{при } 0 \leq v < \omega, \\ -\pi/2 & \text{при } v = \omega, \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2kv}{v^2 - \omega^2}\right) - \pi & \text{при } v > \omega. \end{cases} \quad (2.96)$$

Звідси  $z = Ae^{i(vt + \psi)}$ , а шуканий дійсний частинний розв'язок рівняння (2.92) ( $f(t) = a \cos vt$ ) має вигляд

$$x_*(t) = A \cos(\nu t + \psi). \quad (2.97)$$

Будь-який інший розв'язок такого рівняння є сумою деякого розв'язку відповідного однорідного рівняння та розв'язку (2.97). Але оскільки при  $k > 0$  кожен розв'язок однорідного рівняння прямує до нуля, якщо  $t \rightarrow \infty$ , то найбільше практичне значення має саме розв'язок (2.97). Кажуть, що цей розв'язок описує *усталені вимушені коливання*, а всякий інший розв'язок — *перехідний процес*. Параметри  $|A|$  та  $\psi$  називають відповідно *амплітудою* та *зсувом фази вимушених коливань*. Криві залежностей  $A = A(\nu; k)$  (при  $a > 0$ ) та  $\psi = \psi(\nu; k)$  від частоти  $\nu$  зображено на рис. 2.9, а, б відповідно. Кривій із більшим номером відповідає більше значення параметра  $k$ .

Оскільки  $\psi < 0$  при  $\nu > 0$ , то фаза вимушених коливань відстає від фази зовнішньої сили. Амплітуда таких коливань набуває найбільшого значення при  $\nu = \nu_* = \sqrt{\omega^2 - 2k^2}$  (звичайно, за умови, що  $\omega^2 > 2k^2$ ). Якщо коефіцієнт тертя досить малий, то при наближенні частоти вимушених коливань до значення  $\nu_*$  спостерігається явище *резонансу*: амплітуда вимушених коливань стає істотно більшою за амплітуду зовнішньої сили. Зауважимо, що в границі при  $k \rightarrow 0$  залежність зсуву фази від частоти  $\nu$  набуває розривного характеру:

$$\psi(\nu; 0) := \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \nu < \omega, \\ -\pi & \text{при } \nu > \omega. \end{cases}$$

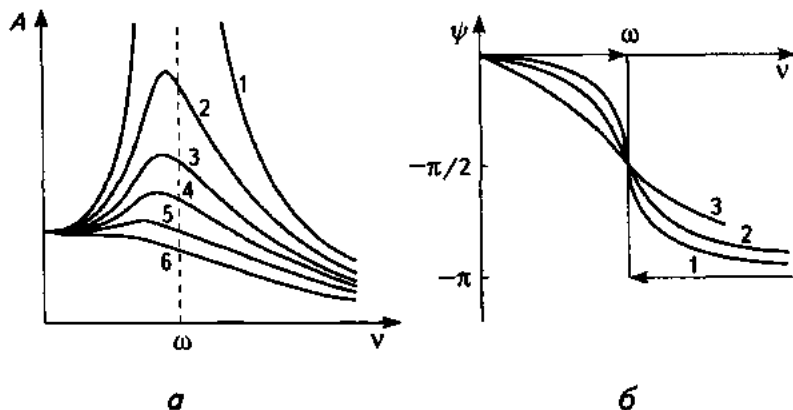


Рис. 2.9

### Приклад 2.25

Два окремих кола трансформатора (рис. 2.10, а), перше з яких складається з джерела змінної напруги  $U(t) = a \cos \nu t$ , резистора  $R_1$  та котушки індуктивності  $L_1$ , а друге — з резистора  $R_2$  та котушки індуктивності  $L_2$ , взаємодіють за рахунок взаємодукції  $M$ . Знайдемо амплітуду усталених коливань струму в другому колі.

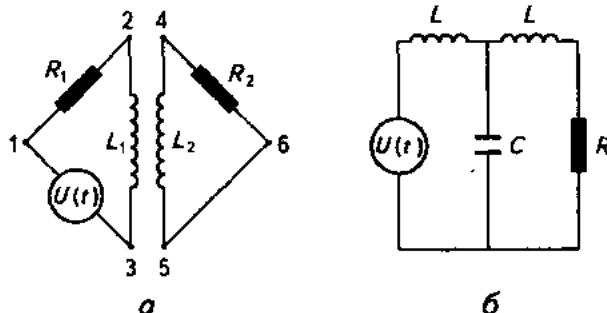


Рис. 2.10

Орієнтацію кіл виберемо так, як показано на рис. 2.10, а. Через  $I_1$  та  $I_2$  позначимо силу струму відповідно в першому та другому колах, а через  $u_{ij}$  — спад напруги на ділянці між вузлами  $i$  та  $j$ . Згідно з другим правилом Кірхгофа маємо:

$$u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0, \quad u_{45} + u_{56} + u_{64} = 0.$$

Враховуючи співвідношення  $u_{12} = R_1 I_1$ ,  $u_{23} = L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2$ ,  $u_{31} = -U(t)$ ,  $u_{45} = L_2 \dot{I}_2 + M \dot{I}_1$ ,  $u_{56} = R_2 I_2$ ,  $u_{64} = 0$ , приходимо до системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 + R_1 I_1 = U(t), \\ M \dot{I}_1 + L_2 \dot{I}_2 + R_2 I_2 = 0. \end{cases} \quad (2.98)$$

Виключимо з цієї системи  $I_1$ . Домноживши перше рівняння на  $M$  і віднявши від одержаного результату друге рівняння, домножене на  $L_1$ , легко знаходимо

$$M I_1 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{R_1} \dot{I}_2 + \frac{L_1 R_2}{R_1} I_2 + \frac{M}{R_1} U(t).$$

Тепер з урахуванням другого із співвідношень (2.98) та нерівності  $L_1 L_2 > M^2$  дістаємо шукане диференціальне рівняння, яке описує залежність сили струму в другому колі від часу:

$$\ddot{i}_2 + \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2 - M^2} \dot{i}_2 + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2} i_2 = -\frac{\nu M E}{L_1 L_2 - M^2} \cos \nu t.$$

Порівнявши це рівняння з (2.95), бачимо, що в даному випадку

$$2k = \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \omega^2 = \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2}, \quad a = -\frac{\nu M E}{L_1 L_2 - M^2}.$$

Амплітуду усталених коливань струму в другому колі знаходимо на основі формули (2.96):

$$|A| = \frac{\nu M E}{\sqrt{(R_1 R_2 - \nu^2 (L_1 L_2 - M^2))^2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 \nu^2}}. \quad (2.99)$$

Якісний трансформатор характеризується тим, що  $R_1 \ll 1$ ,  $L_1 L_2 - M^2 \ll 1$ . У границі при  $R_1 \rightarrow 0$ ,  $M \rightarrow \sqrt{L_1 L_2}$ ,  $R_2 \rightarrow R > 0$  дістаємо вираз для  $|A|$  у випадку ідеального трансформатора:

$$|A| = \frac{M E}{L_1 R} = \frac{E}{R} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}.$$

На підставі цієї формули можна зробити такий висновок: для ідеального трансформатора відношення амплітуди спаду напруги на резисторі другого кола до амплітуди напруги джерела змінного струму дорівнює  $\sqrt{L_2/L_1}$ .

Користуючися принципом суперпозиції, можна вивчити загальніший випадок, коли зовнішня сила є сумою гармонік:

$$f(t) = \sum_{m \geq 0} a_m \cos \nu_m t + b_m \sin \nu_m t = \operatorname{Re} \left( \sum_{m \geq 0} g_m e^{i \nu_m t} \right). \quad (2.100)$$

Тут  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $\nu_m$  — дійсні числа,  $g_m := a_m - i b_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  Якщо сума нескінченна, то припускаємо, що справджується умова

$$\sum_{m \geq 0} |g_m| < \infty. \quad (2.101)$$

яка гарантує абсолютну збіжність ряду (2.100). За цієї умови функція  $f(t)$  належить класу так званих *майже періодичних функцій*. Характеристична властивість майже періодичної функції полягає ось у чому: для довільного  $\epsilon > 0$  можна вибрати число  $l(\epsilon) > 0$  так, щоб у кожному інтервалі довжини  $l(\epsilon)$  існувало таке число  $T(\epsilon)$ , що

$$|f(t + T(\epsilon)) - f(t)| < \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Число  $T(\epsilon)$  називається  $\epsilon$ -*майже періодом* функції  $f(t)$ .

В окремому випадку, коли існує число  $v > 0$  таке, що  $v_m/v \in \mathbb{Z}$ , функція  $f(t)$  є періодичною з періодом  $2\pi/v$ . Якщо ж існує скінченний набір раціонально незалежних чисел  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  ( $N \geq 2$ ) таких, що кожна  $v_m$  є лінійною комбінацією  $k_1(m)\sigma_1 + \dots + k_N(m)\sigma_N$  із цілими коефіцієнтами  $k_j(m)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , то функцію  $f(t)$  називають *квазіперіодичною*. (Загальне означення: квазіперіодичною називається функція вигляду  $f(t) = F(\sigma_1 t, \dots, \sigma_N t)$ , де функція  $F(\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in C(\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R})$  має період  $2\pi$  по кожному аргументу, а числа  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  — раціонально незалежні, тобто рівність  $k_1\sigma_1 + \dots + k_N\sigma_N = 0$  з цілими  $k_1, \dots, k_N$  можлива в єдиному випадку, коли  $k_1 = \dots = k_N = 0$ ; набір  $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$  називається *частотним базисом* функції  $f(t)$ .)

Взявши суму частинних розв'язків рівнянь (2.95) з  $a = g_m$ ,  $v = v_m$ , дістаємо розв'язок, що описує усталені коливання в рівнянні (2.92) із зовнішньою силою (2.100):

$$x_m(t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{m \neq 0} \frac{g_m}{\omega^2 - v^2 + 2kv_{mi}} e^{iN\omega t} \right). \quad (2.102)$$

Складним і цікавим є випадок, коли  $f(t)$  квазіперіодична й  $k = 0$ . Якщо сума (2.100) нескінченна, то навіть у разі виконання умови (2.101) ряд (2.102) може розбігатися. Це обумовлено тим, що, як виявляється, існує підпослідовність  $\{v_{m_j}\}_{j=1,2,\dots}$  для якої  $\lim_{j \rightarrow \infty} v_{m_j} = \infty$ . У цій ситуації при дослідженні збіжності ряду (2.102) виникає знаменита проблема «малих знаменників», відома в небесній механіці ще з XVIII ст. Без додаткових обмежень на швидкість збіжності до нуля послідовностей  $\{\omega^2 - v_{m_j}\}$  та  $\{g_{m_j}\}$  довести збіжність зазначеного ряду неможливо.

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- (1) Іdealізацією амортизатора є така механічна система: тіло масою  $m$  підтримується знизу вертикально розташованою пружиною. Нижній кінець пруж-

жини прикріплено до нерухої основи. Крім того, пружина обвивається навколо поршня, який рухається в циліндрі, заповненому рідиною. Верхній кінець поршня кріпиться до тіла. Завдяки цьому на тіло в процесі його переміщення діє сила опору, пропорційна з коефіцієнтом  $\alpha$  кількості руку тіла. За умови, що для пружини виконується закон Гука, вибрати її жорсткість так, щоб рух тіла відбувався в умовах критичного демпфування.

- ② Дослідити явище резонансу у випадку, коли  $k = 0$ .
- ③ На рис. 2.10, б зображено схему фільтра низьких частот. Для випадку  $U(t) = E \sin vt$  знайти амплітуду  $|A(E; v)|$  спаду напруги на резисторі  $R$  в установившому режимі коливань і показати, що  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|A(E; v)|}{E} = 1$ ,  $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{|A(E; v)|}{E} = 0$ .
- ④ Довести, що сума ряду (2.102) справді є двічі неперервно диференційовною функцією, якщо  $k > 0$ .
- ✓ *Вказівка:* взяти до уваги той факт, що кожна з функцій  $G_j(x) := \frac{x^j}{\omega^2 - x^2 + 2kxi}$ ,  $j = 0, 1, 2$  обмежена за модулем на всій дійсній осі.
- ⑤ Нехай у рівнянні (2.92)  $k = 0$ , а  $f(t)$  є періодичною функцією вигляду (2.100), яка задовольняє умову (2.101), і  $v_m^2 \neq \omega^2$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  Довести, що сума ряду (2.102) при  $k = 0$  є періодичним розв'язком рівняння (2.92).

## 2.6

### Лінійні системи з періодичними коефіцієнтами

У складніших задачах теорії коливань нерідко виникають системи лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (2.103)$$

де матричнозначна функція  $A(t)$  та вектор-функція  $f(t)$  неперервні й періодичні з деяким періодом  $T$ :

$$A(t+T) = A(t), \quad f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.104)$$

Систему (2.103) в цьому випадку будемо називати *T-періодичною*. Для більшої загальності вважатимемо, що  $x \in \mathbb{C}^n$ . Елементами  $A(t)$  та  $f(t)$  теж можуть бути комплекснозначні функції.



Основну властивість розв'язків  $T$ -періодичної системи сформулюємо у вигляді такого твердження.

### Твердження 2.18

Якщо  $x(t)$  — розв'язок  $T$ -періодичної системи, то функція  $x(t+T)$  теж є її розв'язком.

#### Доведення

Дійсно, оскільки  $\dot{x}(t) \equiv A(t)x(t) + f(t)$ , то  $\dot{x}(t+T) \equiv A(t+T)x(t+T) + f(t+T)$ . Тепер як наслідок (2.104) маємо потрібну тотожність

$$\dot{x}(t+T) \equiv A(t)x(t+T) + f(t).$$

### 2.6.1. Лінійні однорідні $T$ -періодичні системи

Базовим результатом теорії лінійних  $T$ -періодичних систем є теорема Флоке, датована 1883 р. Вона демонструє спорідненість таких систем з ЛОС зі сталими коефіцієнтами.

#### Теорема 2.11 (Флоке)

Нормована в точці  $t=0$  фундаментальна матриця  $X(t)$   $T$ -періодичної ЛОС

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2.105)$$

допускає зображення у вигляді

$$X(t) = \Phi(t)e^{Bt}, \quad (2.106)$$

де  $\Phi(t)$  — неперервно диференційовна,  $T$ -періодична, невиврождена при кожному  $t \in \mathbb{R}$  матричнозначна функція, а

$$B = \frac{1}{T} \text{Lp } X(T) \quad (\text{див. п. 2.3.5}).$$

#### Доведення

З огляду на твердження 2.18 стовпці матриці  $X(t+T)$  є розв'язками системи (2.105). Зрозуміло, що  $X(t+T)$  невиврождена. Таким чином, вона, як і  $X(t)$ , є фундаментальною матрицею ЛОС

(2.105). Але тоді знайдеться стала невідроджена матриця  $C$  така, що  $X(t+T) = X(t)C$ . Поклавши в цій рівності  $t = 0$ , маємо  $X(T) = X(0)C = C$ . Тому  $C = X(T)$ . Отже,

$$X(t+T) = X(t)X(T). \quad (2.107)$$

Невідродженість  $X(T)$  забезпечує існування матриці  $B$ , визначеної у формулюванні теореми. Покладемо  $\Phi(t) := X(t)e^{-Bt}$ . Очевидно, що тоді  $X(t) = \Phi(t)e^{Bt}$ . Тепер залишається лише перевірити, що  $\Phi(t)$  —  $T$ -періодична. На підставі формули (2.107) маємо:

$$\begin{aligned} \Phi(t+T) &= X(t+T)e^{-B(t+T)} = X(t)X(T)[e^{-\ln X(T)}]^{-1}e^{-Bt} = \\ &= X(t)e^{-Bt} = \Phi(t). \end{aligned}$$

#### ◆ Зауваження 2.7

У загальному випадку матриці  $\Phi(t)$  та  $B$  мають комплексні елементи.

#### ⇒ Означення 2.9

*Матрицю  $X(\omega)$  називають матрицею монодромії, а її власні числа — мультиплікаторами системи (2.105).*

Пояснимо природність запровадження терміна «мультиплікатор». Із нормованості в точці  $t = 0$  фундаментальної матриці  $X(t)$  випливає, що формула  $x(t) = X(t)x_0$  визначає розв'язок ЛОС (2.105), який задовольняє початкову умову  $x(0) = x_0$ . З урахуванням (2.107)

$$x(t+T) = X(t)X(T)x_0. \quad (2.108)$$

Нехай тепер  $\rho$  — мультиплікатор. Візьмемо за  $x_0$  власний вектор матриці монодромії, який відповідає власному числу  $\rho$ :  $X(T)x_0 = \rho x_0$ . Тоді дістанемо

$$x(t+T) = \rho x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.109)$$

Розв'язок із властивістю (2.108) називається *нормальним*. Як бачимо, перетворення нормального розв'язку, що полягає у зсуві його аргументу на період, еквівалентне домноженню такого розв'язку на відповідний мультиплікатор.

Навпаки, припустимо, що для деякого нетривіального розв'язку  $x(t)$ ,  $x(0) := x_0$  існує число  $\rho$  (можливо, комплексне) таке, що вико-

нується рівність (2.109), тобто  $X(t+T)x_0 = \rho X(t)x_0$ . Тоді з урахуванням (2.108) і невідродженості матриці  $X(t)$  матимемо  $X(T)x_0 = \rho x_0$ . Ця рівність означає, що  $\rho$  — мультиплікатор, а  $x_0$  — відповідний власний вектор.

Матриця монодромії та мультиплікатори визначають основні властивості  $T$ -періодичної ЛОС. Розглянемо, наприклад, задачу про існування в системі (2.105)  $T$ -періодичних розв'язків (порівняти з п. 1.3.2).

### Теорема 2.12

$T$ -періодична ЛОС (2.105) має нетривіальний  $T$ -періодичний розв'язок тоді й лише тоді, коли число 1 є її мультиплікатором.

#### Доведення

Нетривіальний розв'язок  $x(t)$  буде  $T$ -періодичним тоді й лише тоді, коли він є нормальним розв'язком, який відповідає мультиплікатору, що дорівнює 1.

## 2.6.2. Існування $T$ -періодичного розв'язку неоднорідної системи \_\_\_\_\_

Сформулюємо й доведемо достатню умову існування  $T$ -періодичного розв'язку ЛНС (2.103).

### Теорема 2.13

Якщо  $T$ -періодична система (2.105) не має мультиплікаторів, що дорівнюють 1 (тобто не має нетривіальних  $T$ -періодичних розв'язків), то неоднорідна система (2.103) має єдиний  $T$ -періодичний розв'язок.

#### Доведення

Якщо  $x(t)$  — розв'язок системи (2.103), то згідно з твердженням 2.18 умову  $T$ -періодичності  $x(t+T) = x(t)$  можна інтерпретувати як збіг розв'язків  $x(t)$  та  $x(t+T)$ . Оскільки існує єдиний розв'язок із фіксованою початковою умовою, то

$$x(t+T) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x(T) = x(0). \quad (2.170)$$

Запишемо для системи (2.103) формулу розв'язку задачі Коші з початковою умовою  $x(0) = x_0$  [див. формулу (2.67)]:

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Якщо покласти  $a := -\int_0^T X(T)X^{-1}(s)f(s)ds$ , то з урахуванням (2.110) розв'язок  $x(t)$  буде  $T$ -періодичним тоді й лише тоді, коли його початкове значення задовольняє рівність

$$x_0 = X(T)x_0 - a \Leftrightarrow (X(T) - 1 \cdot E)x_0 = a.$$

Оскільки за умовою  $\det(X(T) - 1 \cdot E) \neq 0$ , то таке  $x_0$  існує й визначається однозначно:  $x_0 = (X(T) - E)^{-1}a$ .

### ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Знайти матрицю монодромії  $T$ -періодичної лінійної однорідної системи з матрицею  $A(t)$ , яка задовольняє умову  $A(t) \int_0^t A(s)ds = \int_0^t A(s)dsA(t)$ .
- ② Довести, що з існування мультиплікатора  $\rho = \exp\left(\frac{2\rho\pi i}{q}\right)$ , де  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , випливає існування  $qT$ -періодичного розв'язку  $T$ -періодичної ЛОС (2.105).
- ③ Довести, що  $T$ -періодичну ЛОС (2.105) можна звести до ЛОС зі сталою матрицею (з, можливо, комплексними елементами) за допомогою заміни змінних  $x = \Phi(t)y$ , де  $\Phi(t)$  — матриця, про яку йдеться в теоремі Флоке.
- ④ Довести, що  $T$ -періодична система (2.103), в якій  $A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$ ,  $a_{ij}(t) = 0$  при  $j > i$  і  $\int_0^T a_{ii}(t)dt \neq 0$ , має єдиний  $T$ -періодичний розв'язок.
- ⑤ Довести, що для  $n$ -вимірної  $T$ -періодичної системи  $\dot{x} = J(t)x + f(t)$ , де  $J(0)$  — жорданова клітина з нулями на головній діагоналі й під нею, існує  $T$ -періодичний розв'язок тоді й лише тоді, коли  $n$ -на компонента вектор-функції  $f(t)$  має нульове середнє за період:  $\int_0^T f_n(t)dt = 0$ .

## ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

### 3.1

#### Канонічні форми ЛОР другого порядку

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку дуже часто виникають під час розв'язування різноманітних теоретичних і практичних задач механіки, фізики, біології та інших наук. Наприклад, відшукання амплітуди малих вільних коливань мембрани здійснюється за допомогою розв'язків так званого *рівняння Бесселя*

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) u = 0,$$

де  $r$  — незалежна змінна — відстань до вибраного початку координат;  $k$  — дійсний параметр (хвильове число);  $n \in \mathbb{Z}$ . Ж. Лагранж досліджував це рівняння у зв'язку з проблемами небесної механіки.

У квантовій механіці для опису розсіяння двох частинок у випадку, коли потенціал взаємодії залежить лише від відстані  $r$  між частинками, необхідно знати розв'язки так званого *радіального рівняння Шрьодінгера*

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \left( \frac{2m_1 m_2 \varepsilon}{\hbar^2 (m_1 + m_2)} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m_1 m_2}{\hbar^2 (m_1 + m_2)} U(r) \right) \psi = 0,$$

де  $h$  — стала Планка;  $m_1, m_2$  — маси частинок;  $U(r)$  — потенціал;  $E$  — енергія системи;  $l \in \mathbb{Z}$ .

Перелік подібних прикладів можна було б продовжувати, і це є вагомим аргументом на користь детальнішого аналізу лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Запишемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку загального вигляду

$$a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = F(t). \quad (3.1)$$

Тут  $a_i(t)$ ,  $F(t)$  — неперервні на деякому інтервалі  $I \subseteq \mathbb{R}$  функції,  $i = 0, 1, 2$ . Якщо  $a_0(t) \neq 0$  для всіх  $t \in I$ , то рівняння (3.1) можна переписати так:

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t), \quad (3.2)$$

де  $p(t) = \frac{a_1(t)}{a_0(t)}$ ,  $q(t) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)}$ ,  $f(t) = \frac{F(t)}{a_0(t)}$ . Аналіз рівняння (3.1) або (3.2), як правило, розпочинають зі зведення їх до найзручнішого вигляду, що диктується типом розв'язуваної задачі.

### 3.1.1. Зведення лінійного рівняння до самоспряженого вигляду \_\_\_\_\_

Покажемо, що рівняння (3.2) можна подати в так званому самоспряженому вигляді

$$\frac{d}{dt}(\varrho(t)\dot{x}) + r(t)x = g(t), \quad (3.3)$$

де  $\varrho(t) \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $r(t), g(t) \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$ .

Справді, якщо функція  $\varrho(t)$  неперервно диференційовна, то (3.3) еквівалентне рівнянню

$$\varrho(t)\ddot{x} + \dot{\varrho}(t)\dot{x} + r(t)x = g(t), \quad (3.3')$$

в якому коефіцієнт біля  $\dot{x}$  є похідною коефіцієнта при  $\ddot{x}$ . Навпаки, рівняння (3.3') можна записати у вигляді (3.3). Тепер зрозуміло, що після домноження обох частин рівняння (3.2) на таку неперервно диференційовну функцію  $\varrho(t)$ , яка задовольняє умову

$$\dot{\varrho}(t) = p(t)\varrho(t),$$

Його можна буде подати у формі (3.3') й при цьому

$$r(t) = \varrho(t)q(t), \quad g(t) = \varrho(t)f(t).$$

Зазначена умова на функцію  $\varrho(t)$  — це ЛОР першого порядку. Його розв'язком є, наприклад,

$$\varrho(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s) ds},$$

де  $t_0$  — довільна точка інтервалу  $I$ .

### □ Приклад 3.1

*Зведемо до самоспряженого вигляду рівняння Бесселя*

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{t} + \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right)x = 0. \quad (3.4)$$

Тут  $p(t) = 1/t$  і, отже, можна взяти  $\varrho(t) = e^{\ln t} = t$ . Домноживши обидві частини рівняння Бесселя на  $t$ , результат запишемо в потрібному вигляді:

$$\frac{d}{dt}(t\dot{x}) + \left(t - \frac{v^2}{t}\right)x = 0.$$

### 3.1.2. Спрощення лінійного рівняння заміною незалежної змінної

---

Зведемо рівняння (3.2) до самоспряженого вигляду (3.3) і знову домножимо його обидві частини на  $\varrho(t)$ . В одержаному рівнянні

$$\varrho(t) \frac{d}{dt} (\varrho(t)\dot{x}) + \varrho^2(t)q(t)x = \varrho^2(t)f(t) \quad (3.5)$$

перейдемо до нової незалежної змінної  $s$  із тим розрахунком, щоб виконувалася рівність

$$\boxed{ds = dt/\varrho(t)}$$

Для цього достатньо пов'язати  $s$  із  $t$  співвідношенням  $s = S(t) := \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\varrho(\tau)}$ , де  $t_0$  — довільна точка з  $I$ . Оскільки похідна  $\dot{S}(t) = 1/\varrho(t)$  не перетворюється в нуль на всьому інтервалі  $I$ , то  $S(t)$  монотонна, а отже, існує обернена функція  $t(s) \in C^1(J \mapsto I)$ , визначена на деякому інтервалі  $J$ . Поклавши тепер у (3.5)  $t = t(s)$ , дістанемо рівняння, яке не містить члена з першою похідною шуканої функції:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + Q(s) = \Phi(s),$$

де  $Q(s) := \varrho^2(t(s))q(t(s))$ ,  $\Phi(s) := \varrho^2(t(s))f(t(s))$ .

### 3.1.3. Інваріант лінійного рівняння другого порядку

Покажемо, що коли в рівнянні (3.2) функція  $p(t)$  неперервно диференційовна, то анулювати коефіцієнт біля першої похідної можна також лінійною заміною шуканої функції.

Уведемо нову залежну змінну  $y$  за формулою

$$x = \alpha(t)y, \tag{3.6}$$

вважаючи, що  $\alpha(t) \in C^2(I \mapsto \mathbb{R})$ . Тоді

$$\dot{x} = \dot{\alpha}(t)y + \alpha(t)\dot{y}, \quad \ddot{x} = \ddot{\alpha}(t)y + 2\dot{\alpha}(t)\dot{y} + \alpha(t)\ddot{y}.$$

Підставивши всі ці вирази в рівняння (3.2), дістанемо

$$\alpha(t)\ddot{y} + (2\dot{\alpha}(t) + p(t)\alpha(t))\dot{y} + (\ddot{\alpha}(t) + p(t)\dot{\alpha}(t) + q(t)\alpha(t))y = f(t).$$

Виберемо функцію  $\alpha(t)$  такою, щоб  $2\dot{\alpha}(t) + p(t)\alpha(t) = 0$ . Можна, наприклад, покласти

$$\boxed{\alpha(t) = e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t p(s) ds}}$$



де  $t_0$  — довільно вибрана точка з інтервалу  $I$ . Тоді диференціальне рівняння для нової шуканої функції  $y = y(t)$  набуває вигляду

$$\ddot{y} + \left( q(t) - \frac{1}{2} \dot{p}(t) - \frac{1}{4} p^2(t) \right) y = \varphi(t),$$

де  $\varphi(t) = f(t) e^{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t p(s) ds}$ .

Функцію

$$I(t) = q(t) - \frac{1}{2} \dot{p}(t) - \frac{1}{4} p^2(t)$$

називають *інваріантом лінійного однорідного рівняння*

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0.$$

Неважко зрозуміти, що коли в цьому рівнянні зробити лінійну заміну залежної змінної вигляду

$$x \mapsto \beta(t)x, \tag{3.7}$$

де  $\beta(t) \in C^2(I \mapsto \mathbb{R})$ ,  $\beta(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ , і потім для одержаного рівняння знайти інваріант, то дістанемо ту саму функцію  $I(t)$ . Узагалі рівність інваріантів двох лінійних однорідних рівнянь другого порядку є необхідною й достатньою умовою того, щоб одне з них можна було замінити (3.7) перетворити на інше.

### □ Приклад 3.2

Анулюємо коефіцієнт біля  $\dot{x}$  у рівнянні Бесселя (3.4).

Оскільки в даному випадку  $p(t) = 1/t$ , то це досягається заміною  $x = \alpha(t)y$ , в якій

$$\alpha(t) = e^{-\frac{1}{2} \int_1^t p(s) ds} = e^{-\frac{1}{2} \ln t} = t^{-\frac{1}{2}}.$$

Обчисливши інваріант рівняння Бесселя, щодо нової шуканої функції у матимемо рівняння

$$\ddot{y} + \left( 1 - \frac{v^2 - 1/4}{t^2} \right) y = 0.$$

### ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Розв'язати рівняння, звівши їх до самоспряженого вигляду й зробивши відповідну заміну незалежної змінної:

а)  $2t\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$ ;

б)  $\ddot{x} + 2t\dot{x} + e^{-2t^2}x = 0$ .

- ✓ *Вказівка.* У випадку б) використати спеціальну функцію  $\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$  — так званий інтеграл імовірностей.

- ② Знайти інваріанти й розв'язати диференціальні рівняння:

а)  $\ddot{x} + 2t^2\dot{x} + (1 + 2t + t^4)x = 0$ ;

б)  $\ddot{x} + 2 \sin t \dot{x} + (\cos t + \sin^2 t + 1)x = 0$ .

## 3.2

### Коливність розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Розглянемо деякі якісні властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку. З урахуванням викладеного в п. 3.1, без обмеження загальності міркувань вважатимемо, що досліджуване рівняння вже зведено до вигляду

$$\ddot{x} + q(t)x = 0, \quad q(t) \in C(I \rightarrow \mathbb{R}), \quad I \subseteq \mathbb{K}. \quad (3.8)$$

#### 3.2.1. Основні теореми про коливність

Розпочнемо з випадку, коли  $q(t) \equiv \text{const}$ , і розглянемо два простих диференціальних рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\ddot{x} + a^2x = 0, \quad (3.9)$$

$$\ddot{x} - a^2x = 0, \quad (3.10)$$

де  $a$  — додатне число. Загальні розв'язки цих рівнянь мають відповідно такий вигляд:

$$x = c_1 \cos at + c_2 \sin at \quad \text{та} \quad x = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}.$$

Очевидно, що ці функції виявляють принципово різні типи поведінки: кожен нетривіальний розв'язок рівняння (3.9) має безліч нулів на числовій осі  $t \in (-\infty, \infty)$ , і відстань між будь-якими сусідніми нулями дорівнює  $\pi/a$ ; разом із тим будь-який нетривіальний розв'язок рівняння (3.10) набирає нульового значення не більше ніж в одній точці.

### ⇒ Означення 3.1

*Називатимемо розв'язок  $x(t)$  рівняння (3.8) неколивним на заданому проміжку  $J \subseteq I$ , якщо він перетворюється в нуль не більше ніж в одній точці з цього проміжку; якщо ж на  $J$  існує принаймні дві точки, в яких  $x(t)$  перетворюється в нуль, то такий розв'язок називатимемо коливним.*

Таким чином, будь-який нетривіальний розв'язок рівняння (3.9) є коливним на кожному проміжку завдовжки  $2\pi/a$ , тоді як усякий нетривіальний розв'язок рівняння (3.10) на довільному проміжку числової осі є неколивним.

Дослідимо питання коливності й неколивності нетривіальних розв'язків рівняння (3.8). Спочатку доведемо таке твердження.

### Твердження 3.1

Нулі будь-якого нетривіального розв'язку  $x(t)$  рівняння (3.8) не мають граничних точок усередині проміжку  $I$ .

### Доведення

Припустимо, навпаки, що існує така послідовність нулів  $\{t_k\}_{k=1, 2, \dots}$  розв'язку  $x(t)$ , що  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_*$ , причому  $t_* \in I$ . Зрозуміло, що  $x(t_*) = 0$ . За теоремою Ролля для кожного  $k = 1, 2, \dots$  у проміжку між  $t_k$  і  $t_{k+1}$  знайдеться точка  $t'_k$ , для якої  $\dot{x}(t'_k) = 0$ . Але тоді й  $\dot{x}(t_*) = 0$ . З єдиності розв'язку задачі Коші випливає тепер, що  $x(t) \equiv 0$ . Дійшли суперечності.

### Теорема 3.1 (про неколивність)

Якщо виконується нерівність  $q(t) \leq 0$  для всіх  $t \in I$ , то всі нетривіальні розв'язки рівняння (3.8) неколиві на  $I$ .

### Доведення

Скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо, що деякий розв'язок  $x(t)$  рівняння (3.8) має принаймні два

нули на  $I$ . З огляду на твердження 3.1 знайдуться таких два нулі  $t_1, t_2$  цього розв'язку, що  $t_1 < t_2$ , і на проміжку  $(t_1, t_2)$  функція  $x(t)$  не перетворюється в нуль. Оскільки ця функція неперервна, то вона зберігає знак на  $(t_1, t_2)$ . Можна вважати, що  $x(t) > 0$  (в протилежному разі подальші міркування стосувалися б розв'язку  $-x(t)$ ). Із цього припущення випливає, що  $\dot{x}(t_1) > 0$ . Справді,  $\dot{x}(t_1) \neq 0$ , бо  $x(t)$  — нетривіальний розв'язок, а випадок  $\dot{x}(t_1) < 0$  неможливий з урахуванням додатності  $x(t)$  на  $(t_1, t_2)$ .

Оскільки за умовою теореми  $q(t) \leq 0$ , то з рівняння (3.8) випливає, що  $\ddot{x}(t) \geq 0$  для кожного  $t \in [t_1, t_2]$ . Отже,  $\dot{x}(t)$  не спадає на всьому проміжку  $[t_1, t_2]$ , і тоді  $\dot{x}(t) \geq \dot{x}(t_1)$  для всіх  $t \in [t_1, t_2]$ . Звідси на підставі теореми про скінченні прирости маємо нерівність

$$x(t_2) \geq x_1(t_1) + \dot{x}(t_1)(t_2 - t_1) = \dot{x}(t_1)(t_2 - t_1) > 0,$$

яка суперечить припущенню, що  $x(t_2) = 0$ .

Дві важливі теореми про властивості коливних розв'язків, які наведено нижче, належать Ж. Штурму й датуються 1836 р.

### Теорема 3.2. (Штурма)

Якщо  $t_1$  і  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) — два послідовних нулі розв'язку  $x_1(t)$  рівняння (3.8), то будь-який інший лінійно незалежний з  $x_1(t)$  розв'язок  $x_2(t)$  цього рівняння має рівно один нуль на відкритому проміжку  $(t_1, t_2)$ .

#### Доведення

Припустимо, навпаки, що на всьому проміжку  $(t_1, t_2)$  розв'язок  $x_2(t)$  не має нулів. Тоді  $x_2(t_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Справді, якби, наприклад,  $x_2(t_1) = 0$ , то в точці  $t_1$  перетворювався б у нуль і вронскіан

$$w(t) := W(x_1(t), x_2(t)) = x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t), \quad (3.11)$$

а це суперечить відомій властивості цього функціонального визначника: він зберігає знак на всьому проміжку  $I$ .

Не обмежуючи загальності міркувань, вважатимемо, що  $w(t) > 0$  (в протилежному разі слід було б замінити розв'язок  $x_2(t)$  на  $-x_2(t)$ ). Поділивши обидві частини (3.11) на  $x_2^2(t)$ , одержане співвідношення перепишемо у вигляді

$$\frac{w(t)}{x_2^2(t)} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{x_1(t)}{x_2(t)} \right).$$

Зінтегруємо цю рівність у межах від  $t_1$  до  $t_2$ . Тоді, враховуючи, що  $x_1(t_1) = x_1(t_2) = 0$ , матимемо

$$0 < \int_{t_1}^{t_2} \frac{w(t)}{x_2^2(t)} dt = - \left[ \frac{x_1(t)}{x_2(t)} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} = 0.$$

На підставі одержаної суперечності робимо висновок, що між двома послідовними нулями розв'язку  $x_1(t)$  є принаймні один нуль розв'язку  $x_2(t)$ . Коли б таких нулів було два, так що  $t_1 < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < t_2$ ,  $x_2(\bar{t}_1) = x_2(\bar{t}_2) = 0$ , то помінявши місцями  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  у наведених вище міркуваннях, ми довели б існування нуля  $\bar{t}_3 \in (\bar{t}_1, \bar{t}_2)$  розв'язку  $x_1(t)$ , а це суперечило б припущенню про відсутність нулів функції  $x_1(t)$  на проміжку  $(t_1, t_2)$ .

Доведену теорему часто формують ще й так: *нули двох лінійно незалежних розв'язків ЛОР другого порядку взаємно розмежовують один одного.*

Ілюстрацією твердження теореми Штурма можуть бути функції  $\cos t$  і  $\sin t$  — два лінійно незалежних розв'язки рівняння  $\ddot{x} + x = 0$ . Між будь-якими двома послідовними нулями однієї з цих функцій є рівно один нуль іншої.

### □ Наслідок 3.1

*Якщо на проміжку  $J \subseteq I$  один із нетривіальних розв'язків рівняння (3.8) має більше ніж два нулі, то всі розв'язки цього рівняння коливні.*

Доведемо ще одну теорему, яку можна використовувати для порівняння характеру коливності розв'язків двох різних лінійних рівнянь вигляду (3.8):

Поряд із рівнянням (3.8) розглянемо таке:

$$\ddot{y} + Q(t)y = 0, \quad Q(t) \in C(I \mapsto \mathbb{R}). \quad (3.12)$$

### Теорема 3.3 (порівняння)

Якщо  $Q(t) \geq q(t)$  на проміжку  $I$ , то кожен відрізок, кінцями якого є нулі нетривіального розв'язку рівняння (3.8), містить принаймні один нуль будь-якого розв'язку рівняння (3.12).

### Доведення

Знову скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо, що на відрізку між двома послідовними нулями  $t_1$  і  $t_2$

хоча б одного нетривіального розв'язку  $x(t)$  рівняння (3.8) немає жодного нуля деякого розв'язку  $y(t)$  рівняння (3.12). Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що  $x(t) > 0$  для всіх  $t \in (t_1, t_2)$  і  $y(t) > 0$  для всіх  $t \in [t_1, t_2]$ . З нетривіальності розв'язку  $x(t)$  випливає, що  $\dot{x}(t_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Тому  $\dot{x}(t_1) > 0$ , а  $\dot{x}(t_2) < 0$ .

Для подальшого нам буде потрібна одна важлива формула, яка пов'язує між собою функції  $x(t)$  і  $y(t)$ . Домножимо рівність  $\ddot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$  на  $y(t)$  і віднімемо від одержаного результату домножену на  $x(t)$  рівність  $\ddot{y}(t) + Q(t)y(t) = 0$ . Дістанемо

$$\ddot{x}(t)y(t) - \ddot{y}(t)x(t) = [Q(t) - q(t)]x(t)y(t) \quad \forall t \in I$$

або

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}(t)y(t) - \dot{y}(t)x(t)) = [Q(t) - q(t)]x(t)y(t) \quad \forall t \in I.$$

Зінтегруємо обидві частини цієї рівності в межах від  $t_1$  до  $t_2$ . Маємо

$$[\dot{x}(t)y(t) - \dot{y}(t)x(t)]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} [Q(t) - q(t)]x(t)y(t) dt.$$

Оскільки  $x(t_1) = x(t_2) = 0$ , то ця рівність набирає вигляду

$$\dot{x}(t_2)y(t_2) - \dot{x}(t_1)y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [Q(t) - q(t)]x(t)y(t) dt. \quad (3.13)$$

За умовою теореми  $Q(t) \geq q(t)$ , а тому права частина (3.13) невід'ємна; ліва ж частина строго від'ємна, оскільки  $y(t_i) > 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\dot{x}(t_1) > 0$ ,  $\dot{x}(t_2) < 0$ . Дійшли суперечності.

Доповнимо подані в доведенні теореми 3.3 міркування аналізом випадку, коли на проміжку  $[t_1, t_2]$  є хоча б одна точка, в якій виконується строга нерівність  $Q(t) > q(t)$ . Покажемо, що тоді  $y(t)$  має нуль на відкритому проміжку  $(t_1, t_2)$ . Справді, якщо, не обмежуючи загальності міркувань, припустити виконання нерівності  $y(t) > 0$  для всіх  $t \in (t_1, t_2)$ , то тоді  $y(t_1) \geq 0$ ,  $y(t_2) \geq 0$ , інтеграл у правій частині рівності (3.13) додатний, а ліва частина цієї рівності не перевищує 0. Це неможливо.

Отже, ми переконалися в правильності такого твердження.

### Теорема 3.4

Якщо на відрізку між двома послідовними нулями  $t_1, t_2$  розв'язку  $x(t)$  рівняння (3.8) виконуються нерівності  $Q(t) \geq q(t)$  і  $Q(t) > q(t)$  хоча б при одному  $t \in (t_1, t_2)$ , то будь-який розв'язок  $y(t)$  рівняння (3.12) перетворюється в нуль на відкритому проміжку  $(t_1, t_2)$ . Зокрема, якщо  $y(t_1) = 0$ , то розв'язок  $y(t)$  коливний на  $[t_1, t_2)$ .

#### ◆ Зауваження 3.1

За допомогою теореми порівняння можна легко довести теореми 3.1 та 3.2. А саме, для доведення теореми про неколивність достатньо зауважити, що рівняння  $\ddot{y} = 0$  з функцією  $Q(t) \equiv 0 \geq q(t)$  має розв'язок  $y(t) \equiv 1$ , який ніде не перетворюється в нуль. У випадку теореми Штурма потрібно покласти  $Q(t) \equiv q(t)$  і врахувати, що лінійно незалежні розв'язки рівняння (3.8) не мають спільних нулів.

Теорема порівняння дає змогу в деяких випадках установити оцінку відстані між послідовними нулями розв'язків рівняння (3.8).

### Теорема 3.5

Нехай у рівнянні (3.8) функція  $q(t)$  набуває лише додатних значень на деякому відрізку  $J \subseteq I$ . Покладемо

$$m := \min_{t \in J} q(t), \quad M := \max_{t \in J} q(t).$$

Якщо точки  $t_1, t_2 \in J$  є послідовними нулями нетривіального розв'язку рівняння (3.8), то відстань між ними задовольняє нерівність

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq |t_2 - t_1| \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

#### Доведення

Для того щоб переконатися в правильності твердження теореми, достатньо застосувати теорему порівняння до двох пар рівнянь:

$$1) \quad \ddot{x} + q(t)x = 0 \quad \text{і} \quad \ddot{y} + My = 0;$$

$$2) \quad \ddot{x} + mx = 0 \quad \text{і} \quad \ddot{y} + q(t)y = 0.$$

Розглянемо, наприклад, першу пару рівнянь. Нехай  $t_1$  і  $t_2$  — послідовні нулі нетривіального розв'язку  $x(t)$  рівняння (3.8) ( $t_1 < t_2$ ), а  $y(t)$  — такий розв'язок рівняння  $\ddot{y} + My = 0$ , що  $y(t_1) = x(t_1)$ ,  $\dot{x}(t_1) = \dot{y}(t_1)$ . Відстань між послідовними нулями функції  $y(t)$  становить  $\pi/\sqrt{M}$ . Якщо  $q(t) \equiv M$  на  $[t_1, t_2]$ , то  $x(t) \equiv y(t)$  на цьому відрізку, і тоді  $t_2 - t_1 = \pi/\sqrt{M}$ . У протилежному разі за теоремою 3.4 маємо  $t_2 - t_1 > \pi/\sqrt{M}$ .

Аналогічно аналіз другої пари рівнянь дає змогу встановити потрібну оцінку зверху для  $t_2 - t_1$ .

### □ Приклад 3.3

*Дослідимо відстань між двома послідовними нулями зведеного рівняння Бесселя (див. приклад 3.2)*

$$\ddot{x} + \left(1 - \frac{v^2 - 1/4}{t^2}\right)x = 0.$$

Порівнявши це рівняння з рівнянням  $\ddot{y} + y = 0$ , можна зробити висновок: відстань між двома послідовними нулями будь-якого розв'язку рівняння Бесселя більша від  $\pi$ , якщо  $v^2 > 1/4$ , і менша ніж  $\pi$ , якщо  $0 \leq v^2 < 1/4$ . При досить великих значеннях  $t$  функція  $1 - (v^2 - 1/4)/t^2$  як завжди мало відрізняється від 1, тому звідси випливає, що відстань між двома послідовними нулями будь-якого розв'язку рівняння Бесселя наближається до  $\pi$ , коли  $t \rightarrow \infty$ .

### □ Приклад 3.4

*Дослідимо поведінку нулів розв'язків рівняння  $\ddot{x} + tx = 0$ , коли  $t \rightarrow \infty$ .*

Зафіксуємо як завжди мале  $\epsilon > 0$ . Якщо  $t > \pi^2/\epsilon^2$ , то коефіцієнт біля  $x$  у даному рівнянні перевищує  $\pi^2/\epsilon^2$ . Порівнюючи вихідне рівняння з рівнянням  $\ddot{y} + \pi^2/\epsilon^2 y = 0$ , можна зробити висновок, що для  $t > \pi^2/\epsilon^2$  послідовні нулі розв'язків вихідного рівняння знаходяться на відстані меншій, ніж  $\epsilon$ . Отже, при  $t \rightarrow \infty$  відбувається необмежене зближення послідовних нулів розв'язків вихідного рівняння.



### 3.2.2. Існування безлічі нулів на півосі

Розглянемо рівняння Ейлера вигляду

$$\ddot{y} + \frac{1}{t} \dot{y} + \frac{\delta}{t^2} y = 0. \quad (3.14)$$

Уведенням нової незалежної змінної  $s = \ln t$  воно зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \delta y = 0. \quad (3.15)$$

Якщо  $\delta > 0$ , то кожен розв'язок рівняння (3.15) має безліч нулів на півосі  $(0, \infty)$ . Зрозуміло, що таку саму властивість має й кожен розв'язок рівняння (3.14).

Тепер лінійною заміною  $y = e^{\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t}} x = t^{-\frac{1}{2}} x$  анулюємо коефіцієнт біля похідної нової залежної змінної  $x$  (див. п. 3.1). Обчисливши для (3.14) інваріант

$$I(t) = \frac{\delta}{t^2} + \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{4t^2} = \frac{1+4\delta}{4t^2},$$

дістанемо рівняння

$$\ddot{x} + \frac{1+4\delta}{4t^2} x = 0,$$

кожен розв'язок якого має безліч нулів на півосі. Наслідком наведених міркувань і теореми порівняння є такий результат.

#### Теорема 3.6 (Кнезера)

Нехай існують такі числа  $T > 0$ ,  $\epsilon > 0$ , що

$$q(t) \in C((T, \infty) \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{і} \quad q(t) \geq \frac{1+\epsilon}{4t^2} \quad \forall t > T.$$

Тоді кожен розв'язок рівняння (3.8) має безліч нулів на півосі  $(T, \infty)$ .

Насправді німецьким математиком А. Кнезером у 1893 р. було доведено лещо загальнішу теорему, сформульовану нижче у вигляді задачі 4.

### ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Нехай  $m := \inf_{t \in I} q(t) > 0$ . Довести, що коли довжина відрізка  $J \subseteq I$  не менша, ніж  $2\pi/\sqrt{m}$ , то будь-який розв'язок рівняння (3.8) коливний на  $J$ .
- ② Оцінити відстань між послідовними нулями нетривіального розв'язку рівняння  $\ddot{x} + (2 + \cos t)x = 0$ .
- ③ Оцінити кількість нулів нетривіального розв'язку рівняння

$$t^2 \ddot{x} + \dot{x} + ((2\pi)^2 + t^{-2})x = 0$$

на інтервалі  $(e^2, e^6)$ .

- ④ Нехай  $q(t) \in C((0, \infty) \rightarrow \mathbb{R})$ . Довести, що коли

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^2 q(t) > 1/4,$$

то кожен розв'язок рівняння (3.8) має безліч нулів на  $(0, \infty)$ . Якщо ж

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^2 q(t) < 1/4,$$

то на півосі  $(0, \infty)$  множина нулів кожного розв'язку рівняння (3.8) обмежена.

## 3.3

### Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Розв'язки лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами далеко не завжди виражаються елементарними функціями, а інтегрування таких рівнянь рідко зводиться до квадратур.

Для зазначених рівнянь найпоширеніший метод відшукування розв'язків спирається на можливість зображення останніх у вигляді функціональних, зокрема степеневих, рядів.

### 3.3.1. Рівняння з аналітичними коефіцієнтами

Нагадаємо деякі поняття й факти, що стосуються степеневих рядів та їх сум (див., наприклад, [4]). Функція  $f(t)$ , визначена на проміжку  $I$ , називається *аналітичною в точці*  $t_0 \in I$ , якщо її можна розвинути в степеневий ряд, збіжний у деякому околі точки  $t_0$ . Кажуть, що функція  $f(t)$  аналітична на відкритому проміжку  $I$ , якщо вона аналітична в кожній точці цього проміжку. Зокрема, якщо ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k \quad (3.16)$$

має радіус збіжності  $R$ , то його сума  $f(t)$  є аналітичною функцією на проміжку  $(t_0 - R, t_0 + R)$ . При цьому  $f(t) \in C^{\infty}((-R, R) \mapsto \mathbb{R})$  і при кожному  $i = 1, 2, \dots$   $i$ -та похідна  $f^{(i)}(t)$  є сумою збіжного на  $(t_0 - R, t_0 + R)$  ряду

$$\begin{aligned} & \sum_{k=i}^{\infty} k(k-1)\dots(k-i+1)c_k (t-t_0)^{k-i} = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} (k+i)(k+i-1)\dots(k+1)c_{k+i} (t-t_0)^k. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Оскільки при кожному  $r \in (0, R)$  ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$  збігається, то існує таке число  $K > 0$ , що  $|c_k| r^k \leq K$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , тобто

$$|c_k| \leq K/r^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Нехай степеневі ряди

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (t - t_0)^i, \quad \sum_{i=0}^{\infty} b_i (t - t_0)^i$$

збігаються на спільному проміжку  $(t_0 - R, t_0 + R)$ . Тоді сумою й добутком цих рядів є відповідно степеневі ряди

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i)(t - t_0)^i, \tag{3.19}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) (t - t_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j \right) (t - t_0)^k,$$

які збігаються на тому самому проміжку  $(t_0 - R, t_0 + R)$ .

Нарешті, відзначимо, що сума збіжного на деякому проміжку степеневому ряду є тотожним нулем тоді й лише тоді, коли всі коефіцієнти цього ряду дорівнюють нулю.

Розглянемо тепер диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \tag{3.20}$$

в якому коефіцієнти  $p(t)$  і  $q(t)$  є аналітичними в околі деякої точки  $t_0$ . Покажемо, що тоді таку саму властивість мають і його розв'язки. Обґрунтовуючи цей факт, водночас укажемо ефективний алгоритм відшукання коефіцієнтів розвинень цих розв'язків у степеневі ряди. Не обмежуючи загальності міркувань, вважатимемо, що  $t_0 = 0$  (цього можна домогтися перетворенням  $t \mapsto t_0 + t$ ).

### Теорема 3.7.

Якщо розвинення коефіцієнтів рівняння (3.20) у степеневі ряди

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k t^k$$

збігаються на проміжку  $(-R, R)$ , то кожен розв'язок цього рівняння є сумою степеневому ряду

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \tag{3.21}$$

збіжного на тому самому проміжку  $(-R, R)$ .

### Доведення

Як зазначалося, доведення теореми носитиме конструктивний характер. Розв'язок рівняння шукатимемо у вигляді (3.21), вважа-

ючи  $c_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  невизначеними коефіцієнтами. Покажемо, що в умовах теореми ці коефіцієнти можна ефективно визначити й при цьому ряд (3.21) збігатиметься на проміжку  $(-R, R)$ .

Двічі почленно здиференціювавши ряд (3.21), з урахуванням (3.17) дістанемо

$$\dot{x}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}t^k,$$

$$\ddot{x}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}t^k,$$

а на підставі формули (3.18) матимемо

$$p(t)\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k (j+1)p_{k-j}c_{j+1} \right) t^k,$$

$$q(t)x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k q_{k-j}c_j \right) t^k.$$

Підставивши ці вирази в рівняння (3.20), дістанемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( (k+2)(k+1)c_{k+2} + \sum_{j=0}^k (j+1)p_{k-j}c_{j+1} + \sum_{j=0}^k q_{k-j}c_j \right) t^k = 0.$$

Прирівнявши коефіцієнти біля  $t^k$  у лівій частині до нуля, дістанемо нескінченну систему алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів  $c_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ :

$$2 \cdot 1 \cdot c_2 + p_0 c_1 + q_0 c_0 = 0,$$

$$3 \cdot 2 \cdot c_3 + 2 p_0 c_2 + (p_1 + q_0) c_1 + q_1 c_0 = 0,$$

$$\dots \dots \dots \quad (3.22)$$

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + \sum_{j=0}^k ((j+1)p_{k-j}c_{j+1} + q_{k-j}c_j) = 0.$$

Коефіцієнти  $c_0$  і  $c_1$  являють собою довільні сталі. З їх допомогою можна, наприклад, задовольнити початкові умови задачі Коші:  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ . Очевидно, що  $c_0 = x_0$ ,  $c_1 = \dot{x}_0$ . Після цього однозначно визначаємо решту коефіцієнтів: із першого рівняння знаходимо  $c_2$ , з другого —  $c_3$ , ...; якщо коефіцієнти  $c_0, c_1, \dots, c_{k+1}$  уже відомі, то з рівняння (3.22) знаходимо  $c_{k+2}$  і т. д.

Доведемо збіжність утвореного ряду (3.21) при  $|t| < R$ . Нехай  $r$  — довільне число з  $(0, R)$ . З урахуванням оцінки (3.18) існує число  $M > 0$  таке, що

$$|p_k| \leq \frac{M}{r^k}, \quad |q_k| \leq \frac{M}{r^{k-1}}$$

(вигляд другої оцінки зумовлений її зручністю для подальших міркувань). Тоді на підставі (3.22) маємо:

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1)|c_{k+2}| &\leq \sum_{j=0}^k ((j+1)|p_{k-j}||c_{j+1}| + |q_{k-j}||c_j|) \leq \\ &\leq |q_k||c_0| + \sum_{j=1}^k ((j)|p_{k+1-j}| + |q_{k-j}|)|c_j| + (k+1)|p_0||c_{k+1}| \leq \\ &\leq \frac{M|c_0|}{r^{k+1}} + \sum_{j=1}^k \frac{M(j+1)|c_j|}{r^{k+1-j}} + (k+2)M|c_{k+1}| \leq \\ &\leq M \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(j+1)|c_j|}{r^{k+1-j}}. \end{aligned}$$

Поклавши  $A_0 = |c_0|$ ,  $A_1 = |c_1|$ , задамо рекурентну послідовність чисел  $A_2, A_3, \dots$  формулами

$$(k+2)(k+1)A_{k+2} = M \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(j+1)A_j}{r^{k+1-j}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

За індукцією легко переконатися в тому, що  $|c_k| < A_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Очевидно, що

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1)A_{k+2} &= \frac{M}{r} \sum_{j=0}^k \frac{(j+1)A_j}{r^{k-j}} + M(k+2)A_{k+1} = \\ &= \left( \frac{(k+1)k}{r} + M(k+2) \right) A_{k+1}. \end{aligned}$$

а тому  $A_{k+1}/A_{k+2} \rightarrow r$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Це означає, що ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$  збігається при  $|t| < r$ . Отже, ряд (3.21) тим більше збігається при  $|t| < r$ . Оскільки число  $r$  може бути вибрано як завгодно близьким до  $R$ , то ряд (3.21) збігається при  $|t| < R$ .

### □ Приклад 3.5

*Розв'яжемо так зване рівняння Ерміта*

$$\ddot{x} - 2tx + 2mx = 0,$$

де  $m$  — додатний параметр. Особливу увагу буде приділено випадку, коли  $m \in \mathbb{N}$ .

Розв'язки шукаємо у вигляді ряду (3.21). Підставивши його у вихідне рівняння, маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}t^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2kc_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2mc_k t^k = 0.$$

Зібравши коефіцієнти біля однакових степенів  $t$ , дістаємо систему рівнянь для визначення  $c_k$ , з якої, своєю чергою, дістаємо такі рекурентні формули:

$$c_{k+2} = \frac{2(k-m)}{(k+1)(k+2)} c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Спочатку покладемо  $c_1 = 0$ . Тоді всі коефіцієнти з непарними номерами дорівнюватимуть нулю, а рекурентні формули для коефіцієнтів із парними номерами наберуть вигляду

$$c_2 = -\frac{2m}{1 \cdot 2} c_0, \quad c_4 = \frac{2(2-m)}{3 \cdot 4} c_2, \quad \dots, \quad c_{2n} = \frac{2(2n-2-m)}{(2n-1)2n} c_{2n-2}$$

або

$$\begin{aligned} c_{2n} &= -\frac{2^n m(2-m)\dots(2n-2-m)}{(2n)!} c_0 = \\ &= \frac{(-1)^n 2^n m(m-2)\dots(m-2(n-1))}{(2n)!} c_0. \end{aligned}$$

Таким чином, знаходимо один із розв'язків вихідного рівняння:

$$x_1(t) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n m(m-2)\dots(m-2(n-1))}{(2n)!} t^{2n}.$$

Цей розв'язок є парною функцією.

Зауважимо тепер, що коли  $m$  — парне число,  $m = 2p$ , то всі коефіцієнти виписаного ряду з номерами  $n > p$  перетворюються в нуль і розв'язок  $x_1(t)$  у цьому разі є поліномом

$$x_1(t) = c_0 \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n 2^{2n} p(p-1)\dots(p-(n-1))}{(2n)!} t^{2n}.$$

Виявляється, він лише сталим множником відрізняється від *полінома Ерміта*

$$\begin{aligned} H_m(t) &= (-1)^m e^{t^2} \frac{d^m e^{-t^2}}{dt^m} = \\ &= (2t)^m - \frac{m(m-1)}{1!} (2t)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2t)^{m-4} + \dots \end{aligned}$$

Останній член у цій формулі при  $m = 2p$  дорівнює  $(-1)^p \frac{(2p)!}{p!}$ , а тому, якщо у виразі для  $x_1(t)$  покласти  $c_0 = (-1)^p \frac{(2p)!}{p!}$ , то дістанемо розв'язок у вигляді полінома Ерміта  $x_1(t) = H_{2p}(t)$ .

Для того щоб знайти другий розв'язок рівняння Ерміта, лінійно незалежний з  $x_1(t)$ , у рекурентній системі для визначення  $c_k$  покладемо  $c_0 = 0$ . Тоді всі коефіцієнти з парними номерами дорівнюватимуть нулю, а для коефіцієнтів із непарними номерами матимемо формули

$$c_{2n+1} = \frac{2(2n-1-m)}{2n(2n+1)} c_{2n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Звідси

$$c_3 = \frac{2(1-m)}{2 \cdot 3} c_1, \quad c_5 = \frac{2^2(1-m)(3-m)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c_1, \dots,$$

$$c_{2n+1} = \frac{2^n(1-m)(3-m)\dots(2n-1-m)}{(2n+1)!} c_1 =$$

$$= \frac{(-1)^n 2^n (m-1)(m-3)\dots(m-(2n-1))}{(2n+1)!} c_1.$$



Таким чином, маємо ще один, непарний, розв'язок вихідного рівняння:

$$x_2(t) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1} (m-1)(m-3)\dots(m-(2n-3))}{(2n-1)!} t^{2n-1}.$$

Якщо  $m$  — непарне число,  $m = 2p - 1$ , тоді  $x_2(t)$  перетворюється на поліном

$$x_2(t) = c_1 \sum_{n=1}^p \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-2} (p-1)\dots(p-n+1)}{(2n-1)!} t^{2n-1}.$$

Поклавши тут  $c_1 = \frac{(-1)^{p-1} 2(2p-1)!}{(p-1)!}$ , дістанемо поліном Ерміта  $H_{2p-1}(t)$ .

Оскільки коефіцієнти рівняння — поліноми, то побудовані ряди збігаються для всіх  $t \in \mathbb{R}$ . Отже, загальний розв'язок рівняння Ерміта має вигляд

$$x = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n m(m-2)\dots(m-2(n-1))}{(2n)!} t^{2n} + \\ + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1} (m-1)(m-3)\dots(m-(2n-3))}{(2n-1)!} t^{2n-1}.$$

Рівняння Ерміта і його розв'язки мають застосування в квантовій механіці. Якщо в цьому рівнянні зробити лінійну заміну змінних (див. п. 3.1.3)

$$x = e^{-\frac{1}{2}t^2} \psi, \quad \psi = e^{t^2/2} \Psi,$$

то, обчисливши його інваріант  $I(t) = 2m + 1 - t^2$ , дістанемо рівняння Шрьодінгера для одновимірного гармонічного осцилятора

$$\frac{d^2 \Psi}{dt^2} + (E - t^2) \Psi = 0, \quad E = 2m + 1. \quad (3.23)$$

Таким чином, кожен розв'язок  $x_m(t)$  рівняння Ерміта породжує розв'язок вигляду  $\psi_m(t) = e^{-t^2/2} x_m(t)$  рівняння (3.23).

Для квантової механіки основний інтерес становлять розв'язки  $\psi_m(t)$ , для яких збігається інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt$ . Виявляється, такі розв'язки існують лише для цілих значень параметра  $m$  і ними

є функції  $e^{-t^2/2} H_m(t)$ . Із фізичного погляду цей факт означає, що в квантовій механіці енергетичний спектр гармонічного осцилятора складається з дискретного набору значень  $E = 2m + 1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

Неважко провести відповідні обґрунтування. Достатньо показати, що для нецілого  $m$  як парний, так і непарний розв'язки рівняння Ерміта при  $|t| \rightarrow \infty$  за модулем зростають швидше, ніж  $e^{t^2/2}$ . Зробимо це, наприклад, для парного розв'язку. Оскільки

$$\frac{c_{2(n+1)}}{c_{2n}} = \left(1 - \frac{m+1}{2n+1}\right) \frac{1}{n+1},$$

то знайдеться така стала  $K > 0$ , що для всіх досить великих  $n$  усі коефіцієнти  $c_{2n}$  мають однаковий знак і  $|c_{2n}| \geq K \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n!}$ . Порівнюючи ці коефіцієнти з коефіцієнтами розвинення

$$e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{t^{2n}}{n!},$$

доходимо потрібного висновку. Тепер зрозуміло, що будь-яка нетривіальна лінійна комбінація парного й непарного розв'язків за модулем зростає швидше, ніж  $e^{t^2/2}$  при прямуванні  $t$  до хоча б однієї нескінченно віддаленої точки  $t = +\infty$  або  $t = -\infty$ .

### 3.3.2. Рівняння з регулярними особливими точками

У різноманітних застосуваннях досить часто доводиться досліджувати лінійні рівняння вигляду (3.20), коефіцієнти яких мають розриви другого роду в деяких ізольованих точках. Такі точки називаються *особливими*. Наприклад, рівняння Бесселя та радіальне рівняння Шрьодінгера, про які йшлося на початку гл. 3, мають особливу точку  $r = 0$ . Ці та багато інших важливих ЛОР другого порядку належать до класу рівнянь, які можна звести до вигляду

$$\mathcal{L}x := t^2 \ddot{x} + tp(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \quad (3.24)$$

де  $p(t)$  та  $q(t)$  — аналітичні функції в точці  $t = 0$ , а отже, допускають розвинення в степеневі ряди

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k t^k, \quad (3.25)$$

збіжні в деякому околі  $|t| < R$ . У цьому випадку точка  $t = 0$  називається *регулярною особливою точкою*, або *особливою точкою першого роду*. Звичайно, аби точка  $t = 0$  справді була особливою, слід вимагати, щоб

$$|p_0| + |q_0| + |q_1| \neq 0.$$

У протилежному разі множник  $t^2$  у лівій частині рівняння (3.25) виноситься за дужки й особливість усувається. Якщо особливою точкою рівняння є  $t = t_*$ , то попередньо слід зробити заміну змінної  $t \mapsto t_* + t$ . Надалі припускати, що коефіцієнти рядів (3.25) — дійсні числа.

В околі особливої точки рівняння (3.25) може вже не мати розв'язку у вигляді степеневому ряду. Покажемо із цього погляду є рівняння Ейлера

$$\mathcal{L}_0 x := t^2 \ddot{x} + p_0 t \dot{x} + q_0 x = 0$$

(див. п. 2.2.4). У загальному випадку обидва корені  $\lambda_1, \lambda_2$  його характеристичного рівняння не є цілими невід'ємними числами, і тоді жоден із лінійно незалежних розв'язків  $t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}$  (або  $t^\lambda, t^\lambda \ln t$  у разі кратного кореня  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ) не є аналітичною функцією в точці  $t = 0$ . З огляду на цей приклад та з урахуванням того, що ліва частина рівняння є сумою

$$\mathcal{L}x = \mathcal{L}_0 x + \mathcal{L}_1 x, \quad \mathcal{L}_1 x := t \left( \sum_{k=1}^{\infty} p_k t^k \right) \dot{x} + \left( \sum_{k=1}^{\infty} q_k t^k \right) x, \quad (3.26)$$

природно шукати розв'язок рівняння з регулярною особливою точкою у вигляді так званого *узагальненого степеневому ряду*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\lambda}, \quad c_0 \neq 0, \quad (3.27)$$

де числа  $\lambda, c_0, c_1, c_2, \dots$  підлягають визначенню.

З міркувань, наведених нижче, впливатиме, що, як і можна було сподіватися, за число  $\lambda$  потрібно брати один із коренів рівняння

$$f_0(\lambda) := \lambda(\lambda - 1) + p_0 \lambda + q_0 = 0, \quad (3.28)$$

де  $f_0(\lambda)$  — характеристичний поліном оператора Ейлера  $\mathcal{L}_0$ . Це рівняння називають *визначальним*.

Нехай  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  — корені визначального рівняння. Якщо вони дійсні, то впорядкуємо їх так, щоб

$$\lambda_2 \leq \lambda_1.$$

### Теорема 3.8

Нехай у рівнянні (3.24) функції  $p(t)$  і  $q(t)$  допускають розв'язання в збіжні на проміжку  $(-R, R)$  степеневі ряди (3.25). Тоді це рівняння завжди має розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду (3.27), де  $\lambda = \lambda_1$ , причому ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| |t|^k$  збігається при  $|t| < R$ .

За додаткової умови, що  $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ , рівняння (3.24) має фундаментальну систему розв'язків у вигляді збіжних при  $|t| < R$  узагальнених степеневих рядів

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} t^{k+\lambda_1}, \quad x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} t^{k+\lambda_2}.$$

### Доведення

Коефіцієнти ряду (3.27) шукають стандартним способом. Цей ряд разом із його першою та другою похідними потрібно підставити в рівняння (3.24), де  $p(t)$  та  $q(t)$  мають вигляд (3.25). Перемноживши ряди  $tp(t)\dot{x}(t)$  і  $q(t)x(t)$ , слід у лівій частині одержаної рівності зібрати коефіцієнти біля однакових степенів  $t$  і прирівняти їх до нуля. В такий спосіб і дістанемо систему для визначення числа  $\lambda$  та коефіцієнтів  $c_k$ .

Якщо врахувати формулу (3.26), то зазначену систему можна одержати ще й таким чином. Насамперед зауважимо, що за визначальною властивістю оператора Ейлера

$$\mathcal{L}_0(t^\mu) = f_0(\mu)t^\mu.$$

Тому

$$\mathcal{L}_0 x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathcal{L}_0(t^{k+\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(k+\lambda) c_k t^{k+\lambda}.$$

Далі,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 x(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i t^i \sum_{j=0}^{\infty} (j+\lambda) c_j t^{j+\lambda} + \sum_{i=1}^{\infty} q_i t^i \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j+\lambda} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{\substack{i+j=k \\ i \geq 1, j \geq 0}} |p_i(j+\lambda) + q_i| c_j \right) t^{k-\lambda} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{k-1} |p_{k-j}(j+\lambda) + q_{k-j}| c_j \right) t^{k-\lambda}. \end{aligned}$$

Якщо покласти  $f_i(\lambda) = p_i \lambda + q_i$ , то дістанемо

$$\mathcal{L}x(t) \equiv f_0(\lambda) c_0 t^\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \left( f_0(k+\lambda) c_k + \sum_{j=0}^{k-1} f_{k-j}(j+\lambda) c_j \right) t^{k+\lambda} = 0.$$

Тепер шукана система набирає вигляду

$$f_0(\lambda) c_0 = 0, \quad (3.29)$$

$$f_0(k+\lambda) c_k + \sum_{j=0}^{k-1} f_{k-j}(j+\lambda) c_j = 0, \quad k=1, 2, \dots \quad (3.30)$$

Оскільки ми шукаємо розв'язок, для якого  $c_0 \neq 0$ , то з (3.29) видно, що за число  $\lambda$  потрібно взяти корінь визначального рівняння (3.28). Якщо покласти  $\lambda = \lambda_1$ , то серед чисел  $\lambda_1 + k$ ,  $k=1, 2, \dots$  коренів цього рівняння не буде. Отже, при кожному натуральному  $k$  матимемо  $f_0(\lambda_1 + k) \neq 0$ . Тоді, вважаючи  $c_0$  довільною сталою, із системи (3.30) дістаємо формули для визначення коефіцієнтів  $c_k$ :

$$c_k = -\frac{1}{f_0(\lambda_1 + k)} \sum_{j=0}^{k-1} f_{k-j}(j+\lambda_1) c_j, \quad k=1, 2, \dots$$

Вони мають рекурентний характер, оскільки при кожному  $k \in \mathbb{N}$  ліва частина залежить від  $c_j$ ,  $j=0, \dots, k-1$ . Таким чином, запропо-

нованим методом завжди можна побудувати хоча б один розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду.

Далі, якщо  $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ , то  $f_0(k + \lambda_2) \neq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тому, поклавши в (3.29), (3.30)  $\lambda = \lambda_2$ , аналогічно попередньому можна побудувати ще один розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду.

Доведемо тепер збіжність ряду (3.27), коефіцієнти якого обчислюються із системи (3.30), де число  $\lambda$  збігається з одним із коренів визначального рівняння. Для цього нам доведеться лише неістотно модифікувати міркування, подані в доведенні теореми 3.7.

Нехай  $r$  — довільне число з проміжку  $(0, R)$ . Тоді знайдеться таке  $M > 0$ , що  $|p_k| \leq M/r^k$ ,  $|q_k| \leq M/r^k$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$ . Оскільки  $|f_i(\lambda)| \leq M(|\lambda| + 1)/r^i$  при  $i = 1, 2, \dots$ , то з (3.30) випливає, що

$$|f_0(k + \lambda)| |c_k| \leq M \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j + |\lambda| + 1}{r^{k-j}} |c_j|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Покладемо  $A_0 = |c_0|$  і з урахуванням того, що за умовою теореми  $f_0(k + \lambda) \neq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , визначимо послідовність чисел  $A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  за рекурентними формулами

$$|f_0(k + \lambda)| A_k = M \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j + |\lambda| + 1}{r^{k-j}} A_j.$$

Легко переконатися в тому, що  $|c_k| \leq A_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Отже, тепер нам залишається тільки довести збіжність ряду  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$  при  $|t| < r$ . Для цього покажемо, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} (A_{k-1}/A_k) = r$ . Справді,

$$\begin{aligned} |f_0(k + \lambda)| A_k &= \frac{M}{r} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{j + |\lambda| + 1}{r^{k-1-j}} A_j + \frac{M(k + |\lambda|)}{r} A_{k-1} = \\ &= \frac{1}{r} (|f_0(k-1 + \lambda)| + M(k + |\lambda|)) A_{k-1}. \end{aligned}$$

Звідси, взявши до уваги, що  $f_0(k + \lambda) \sim k^2$  при  $k \rightarrow \infty$ , легко дістати потрібну властивість чисел  $A_k$ .

### ◆ Зауваження 3.2

Якщо для числа  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) функція  $t^{\lambda_j}$  не визначена при  $t < 0$ , то в сенсі дійсного аналізу відповідний узагальнений степеневий ряд являє собою

розв'язок рівняння (3.24) на проміжку  $(0, R)$ . Із погляду комплексного аналізу це зауваження зайве, оскільки (многозначні) функції  $\ln z^{\lambda} := e^{\lambda \ln z}$  визначені в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Розглянемо тепер випадок, коли різниця коренів визначального рівняння є цілим числом. Якщо це рівняння має кратний корінь, то очевидно, що всі розв'язки — узагальнені степеневі ряди — відрізняються один від одного лише сталим множником. Нехай  $\lambda_1 - \lambda_2 = n \in \mathbb{N}$ . Спробуємо побудувати розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду, який відповідає кореню  $\lambda_2$ . Система (3.30) при  $\lambda = \lambda_2$  дає змогу знайти коефіцієнти  $c_j = c_j^{(2)}$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , виразивши їх урешті-решт через довільну сталу  $c_0 = c_0^{(2)}$ . Однак на  $n$ -му кроці виникає проблема з визначенням коефіцієнта  $c_n$ , адже  $f_0(\lambda_2 + n) = f_0(\lambda_1) = 0$ . Для сумісності рівняння (3.30) при  $\lambda = \lambda_2$ ,  $k = n$  необхідно й достатньо, щоб

$$\sum_{j=0}^{n-1} f_{n-j}(\lambda_2) c_j^{(2)} = 0.$$

Якщо ця рівність правильна, то, вважаючи  $c_n = c_n^{(2)}$  ще однією довільною сталою, процес визначення коефіцієнтів  $c_k$  можна продовжити для  $k = n+1, n+2, \dots$  У протилежному разі фундаментальної системи розв'язків у вигляді пари узагальнених степеневих рядів не існує. За цих умов, знайшовши розв'язок  $x_1(t)$ , другий розв'язок, лінійно незалежний з  $x_1(t)$ , можна утворити, скориставшись формулою Абеля з п. 2.1.5.

Зауважимо, що зазначена формула стосується ЛОР другого порядку з коефіцієнтом 1 біля  $\ddot{x}$ . З урахуванням цього другий розв'язок рівняння (3.24) має вигляд

$$x_2(t) = x_1(t) \int e^{\int \frac{p(t)}{t} dt} \frac{dt}{x_1^2(t)} \quad (3.31)$$

(тут символ  $\int \cdot dt$  означає будь-яку первісну підінтегральної функції).

З'ясуємо будову функції  $x_2(t)$ . Умовимося надалі символами  $a_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) позначати аналітичні в точці  $t = 0$  функції, для яких  $a_j(0) = 0$ . Поклавши  $c_0 = 1$ , маємо

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= t^{\lambda_1} (1 + a_1(t)), \\
 \frac{1}{x_1^2(t)} &= \frac{1}{t^{2\lambda_1} (1 + a_2(t))} = \\
 &= t^{-2\lambda_1} (1 - a_2(t) + a_2^2(t) - a_2^3(t) + \dots) = t^{-2\lambda_1} (1 + a_3(t)); \\
 -\int \frac{p(t)}{t} dt &= -p_0 \ln t + a_4(t); \\
 e^{-\int \frac{p(t)}{t} dt} &= t^{-p_0} e^{a_4(t)} = t^{-p_0} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_4^i(t)}{i!} \right) = t^{-p_0} (1 + a_5(t)); \\
 \frac{e^{-\int \frac{p(t)}{t} dt}}{x_1^2(t)} &= t^{-p_0 - 2\lambda_1} (1 + a_6(t)).
 \end{aligned}$$

За теоремою Вієта  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - p_0$ , а тому  $p_0 + 2\lambda_1 = 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 1 + n$ .  
Отже,

$$\begin{aligned}
 t^{-p_0 - 2\lambda_1} (1 + a_6(t)) &= t^{-1-n} (1 + a_6(t)) = \\
 &= \left( \frac{1}{t^{1+n}} + \frac{\alpha_{-n}}{t^n} + \dots + \frac{\alpha_{-1}}{t} + \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots \right),
 \end{aligned}$$

де числа  $\alpha_j, j = -n, -n + 1, \dots$  визначаються коефіцієнтами розвинення функції  $a_6(t)$  в степеневий ряд, і

$$\int \frac{e^{-\int \frac{p(t)}{t} dt}}{x_1^2(t)} dt = -\frac{1}{nt^n} - \dots - \frac{\alpha_{-2}}{t} + \alpha_{-1} \ln t + \alpha_0 t + \dots$$

Нарешті, врахувавши, що  $t^{\lambda_1} = t^{\lambda_2} t^n$ , маємо

$$x_2(t) = \alpha_{-1} x_1(t) \ln t + t^{\lambda_2} (-1/n + \alpha_7(t)).$$



**Висновок:** якщо різниця коренів визначального рівняння є цілим числом і число  $\alpha_{-1} \neq 0$ , то рівняння (3.24) має розв'язок вигляду

$$x = \alpha_{-1} x_1(t) \ln t + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+\lambda_2}$$

У випадку кратного кореня визначального рівняння умова  $\alpha_{-1} \neq 0$  завжди справджується.

### □ Приклад 3.6

Розв'яжемо рівняння

$$2t^2 \ddot{x} + (3t - 2t^2) \dot{x} - (t+1)x = 0.$$

Точка  $t = 0$  є регулярною особливою точкою. Виділивши у правій частині рівняння оператор Ейлера, маємо

$$(2t^2 \ddot{x} + 3t \dot{x} - x) - 2t^2 \dot{x} - tx = 0.$$

Запишемо визначальне рівняння

$$2f_0(\lambda) = 2\lambda(\lambda-1) + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0.$$

Його корені  $\lambda_1 = 1/2$ ,  $\lambda_2 = -1$ .

Підставивши ряд  $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\lambda}$  у рівняння, дістанемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2f_0(\lambda+k)c_k - 2t^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)c_k t^{k-1+\lambda} - t \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\lambda} = 0$$

або

$$2f_0(\lambda)c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [2f_0(\lambda+k)c_k - (2k+2\lambda+1)c_{k-1}]t^k = 0. \quad (3.32)$$

Для відшукування коефіцієнтів розв'язку, що відповідає більшому кореню, покладемо в останній рівності  $\lambda_1 = 1/2$ . Прирівнявши коефіцієнти біля  $t^k$  у лівій частині до нуля, дістаємо рекурентну систему для визначення  $c_k$

□□□

$$k(2k+3)c_k = 2kc_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поклавши  $c_0 = 1$ , знаходимо

$$c_k = \frac{2^k}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2k+3)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отже,

$$x_1(t) = \sqrt{t} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2t)^k}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2k+3)} \right).$$

Далі, зауваживши, що  $\lambda_1 - \lambda_2 = 3/2 \notin \mathbb{Z}$ , знайдемо розв'язок вихідного рівняння, який відповідає кореню  $\lambda_2 = -1$ . Підставимо  $\lambda = -1$  у (3.32). Маємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів  $c_k$ :

$$k(2k-3)c_k = (2k-3)c_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поклавши  $c_0 = 1$ , дістанемо

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad c_3 = \frac{1}{3!}, \dots, \quad c_k = \frac{1}{k!}.$$

Отже,

$$x_2(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \frac{e^t}{t}.$$

Нарешті, запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$x = c_1 \sqrt{t} \left( 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2k+3)} \right) + c_2 \frac{e^t}{t},$$

де  $c_1, c_2$  — довільні сталі.

### 3.3.3. Рівняння Гаусса та Лежандра

Розв'язки окремих типів лінійних диференціальних рівнянь породжують так звані *спеціальні функції*. Останні природно доповнюють клас загальновідомих елементарних функцій, мають цілу низку чудових:

властивостей і широко застосовуються при розв'язуванні теоретичних та прикладних математичних задач.

Як ілюстрацію розглянемо *гіпергеометричне рівняння*, або *рівняння Гаусса*,

$$t(t-1)\ddot{x} + [-\gamma + (\alpha + \beta + 1)t]\dot{x} + \alpha\beta x = 0, \quad (3.33)$$

яке містить три параметри  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Точки  $t = 0$  і  $t = 1$  є особливими.

В околі першої з них, з урахуванням розвинення  $(1-t)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$  ( $|t| < 1$ ), рівняння (3.33) можна подати у вигляді

$$t^2\ddot{x} + t[\gamma - (\alpha + \beta + 1)t] \left( \sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) \dot{x} - \alpha\beta \left( \sum_{k=1}^{\infty} t^k \right) x = 0.$$

Як бачимо, в даному випадку  $\mathcal{L}_0 x = t^2\ddot{x} + \gamma\dot{x}$ . Отже, визначальне рівняння, що відповідає точці  $t = 0$ , має вигляд

$$\lambda(\lambda - 1) + \gamma\lambda = 0.$$

Його коренями є числа  $\lambda = 0$  і  $\lambda = 1 - \gamma$ . Якщо  $\gamma$  не є цілим недодатним числом, то можна знайти розв'язок, який відповідає кореню  $\lambda = 0$ , у вигляді степеневого ряду

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Підставивши цей вираз у рівняння (3.33), маємо

$$(t^2 - t) \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_k t^k + [-\gamma + (\alpha + \beta + 1)t] \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} t^k + \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = 0,$$

звідки дістаємо рекурентну систему для визначення коефіцієнтів:

$$k(k-1)c_k - (k+1)(\gamma+k)c_{k+1} + (\alpha + \beta + 1)kc_k + \alpha\beta c_k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{k+1} = \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)} c_k.$$

Поклавши  $c_0 = 1$ , послідовно знаходимо

$$c_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \quad c_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)},$$

$$c_3 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}, \dots$$

$$c_k = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)}, \dots$$

Отже, знайдено розв'язок рівняння Гаусса у вигляді степеневого ряду. Останній називають *гіпергеометричним рядом*. Застосувавши ознаку Д'Аламбера, легко переконатися, що цей ряд збігається при  $|t| < 1$  (такий висновок можна зробити й на підставі теореми 3.8). Суму гіпергеометричного ряду називають *гіпергеометричною функцією* й позначають через  $F(\alpha, \beta, \gamma, t)$ . Отже,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)} t^k.$$

Гіпергеометрична функція залежить від трьох параметрів  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$ . Надаючи цим параметрам певних значень, із неї можна дістати різні спеціальні функції, зокрема й деякі елементарні. Наприклад:

$$F(1, \beta, \beta, t) = \frac{1}{1-t}, \quad F(1, 1, 2, t) = -\frac{\ln(1-t)}{t},$$

$$F(\alpha, \beta, \alpha, t) = (1-t)^{-\beta}, \quad F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, t^2\right) = \frac{\arcsin t}{t}.$$

(Перша з виписаних функцій є сумою членів нескінченної геометричної прогресії. Цей факт пояснює походження терміна «гіпергеометричний ряд».)

Якщо  $\gamma$  не є цілим числом, то ще один розв'язок рівняння Гаусса лінійно незалежний з  $x_1(t) = F(\alpha, \beta, \gamma, t)$ , можна побудувати у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$x_2(t) = t^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Найшвидший спосіб відшукування такого розв'язку полягає в запровадженні нової шуканої функції  $y = y(t)$  за формулою  $x = t^{1-\gamma}y$ . Маємо

$$\dot{x} = t^{1-\gamma}\dot{y} + (1-\gamma)t^{-\gamma}y;$$

$$\ddot{x} = t^{1-\gamma}\ddot{y} + 2(1-\gamma)t^{-\gamma}\dot{y} - \gamma(1-\gamma)t^{-\gamma-1}y.$$

Підставимо вирази для  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  у рівняння Гаусса й результат скоротимо на  $t^{1-\gamma}$ :

$$t(t-1)\ddot{y} + \{-2-\gamma\} + [1 + (\alpha+1-\gamma) + (\beta+1-\gamma)]t\dot{y} + (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)y = 0.$$

Знову дістали гіпергеометричне рівняння, в якому тепер роль параметрів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  відіграють відповідно  $\alpha+1-\gamma$ ,  $\beta+1-\gamma$ ,  $2-\gamma$ . Таке рівняння має розв'язок

$$y(t) = F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, t).$$

Отже, розв'язок рівняння Гаусса, який відповідає кореню  $1-\gamma$ , виражається за допомогою гіпергеометричної функції

$$x_2(t) = t^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, t),$$

а загальний розв'язок зазначеного рівняння у випадку, коли  $\gamma \notin \mathbb{Z}$ , має вигляд

$$x = c_1F(\alpha, \beta, \gamma, t) + c_2t^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, t),$$

де  $c_1, c_2$  — довільні сталі.

Зазначимо, що коли область визначення функції  $t^{1-\gamma}$  (в сенсі дійсного аналізу) є піввісь  $(0, \infty)$ , виписана формула задає розв'язки лише на проміжку  $(0, 1)$ .

До окремого випадку гіпергеометричного рівняння зводиться так зване *рівняння Лежандра*

$$(1-t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + n(n+1)x = 0,$$

де  $n$  — натуральне число.

Серед розв'язків цього рівняння є поліноми

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n,$$

які називають *поліномами Лежандра*.

Пояснимо, які поліноми Лежандра можна дістати з гіпергеометричної функції за відповідних значень її параметрів.

Запровадимо в рівнянні Лежандра заміну змінної  $t = 1 - 2\tau$ . Тоді

$$\tau = \frac{1-t}{2}, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{4} \frac{d^2x}{d\tau^2}.$$

Підставляємо ці вирази в рівняння Лежандра:

$$\frac{1}{4} (1 - (1 - 2\tau)^2) \frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 - 2\tau) \frac{dx}{d\tau} + n(n+1)x = 0,$$

або

$$\tau(\tau - 1) \frac{d^2x}{d\tau^2} + (-1 + 2\tau) \frac{dx}{d\tau} - n(n+1)x = 0.$$

Дістали гіпергеометричне рівняння з параметрами  $\alpha = n + 1$ ,  $\beta = -n$ ,  $\gamma = 1$ . Одним із розв'язків цього рівняння є гіпергеометрична функція  $F(n + 1, -n, 1, \tau)$ ; тому одним із розв'язків рівняння Лежандра є функція

$$x_1(t) = F\left(n + 1, -n, 1, \frac{1-t}{2}\right).$$

Проте, якщо  $n$  — натуральне, то гіпергеометричний ряд із параметром  $\beta = -n$  обривається, перетворюючися на поліном степеня  $n$ . Можна довести, що останній збігається з  $P_n(t)$ . Таким чином,  $n$ -й поліном Лежандра — це окремий випадок гіпергеометричної функції при значеннях її параметрів  $\alpha = n + 1$ ,  $\beta = -n$ ,  $\gamma = 1$  і лінійно перетвореному аргументі  $t \mapsto \frac{1-t}{2}$ . Так, для  $n = 1, 2, 3, 4$  безпосередньо переконуємося, що

$$P_1(t) = F\left(2, -1, 1, \frac{1-t}{2}\right) = t,$$

$$P_2(t) = F\left(3, -2, 1, \frac{1-t}{2}\right) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$$

$$P_3(t) = F\left(4, -3, 1, \frac{1-t}{2}\right) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t),$$

$$P_4(t) = F\left(5, -4, 1, \frac{1-t}{2}\right) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3).$$

Поліноми Лежандра широко застосовуються при розв'язанні багатьох задач математичної фізики, мають низку цікавих властивостей. Зокрема, ці многочлени ортогональні на проміжку  $[-1, 1]$ , тобто

$$\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t) dt = 0, \text{ якщо } m \neq n.$$

#### ◆ Зауваження 3.3

У функціональному просторі  $C([-1, 1]) \mapsto \mathbb{R}$  роль скалярного добутку відіграє білінійна форма, котра будь-яким двом його елементам  $f(t)$  і  $g(t)$  ставить у відповідність число

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

### 3.3.4. Рівняння Бесселя

Зупинимось детальніше на рівнянні Бесселя

$$t^2 \ddot{x} + t \dot{x} + (t^2 - \nu^2)x = 0, \quad \nu \geq 0.$$

Для нього  $t = 0$  є регулярною особливою точкою. Оскільки дане рівняння не зміниться в разі заміни в ньому  $t$  на  $-t$ , то можна вважати, що незалежна змінна пробігає піввісь  $(0, \infty)$ .

Зауваживши, що  $\mathcal{L}_0 x = t^2 \ddot{x} + t \dot{x} - \nu^2 x$ , запишемо визначальне рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \nu^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \nu^2 = 0.$$

Якщо  $v \neq 0$ , то воно має два корені:  $\lambda_1 = v$ ,  $\lambda_2 = -v$ . Підставивши проект розв'язку

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\lambda}, \quad c_0 \neq 0$$

у рівняння Бесселя та скоротивши на  $t^\lambda$ , маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\lambda + k)^2 - v^2] c_k t^k + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} t^k = 0.$$

Щоб ця рівність виконувалася тотожно, коефіцієнти  $c_k$  мають задовольняти систему рівнянь

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - v^2)c_0 = 0, \quad [(\lambda + 1)^2 - v^2]c_1 = 0, \\ [(\lambda + k)^2 - v^2]c_k + c_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.34)$$

Знайдемо розв'язок, що відповідає кореню визначального рівняння  $\lambda = v$ . Підставивши в (3.34)  $\lambda = v$ , бачимо, що за  $c_0$  можна взяти будь-яке ненульове число,  $c_1 = 0$ , а для  $k = 2, 3, \dots$  маємо

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(2v + k)}.$$

Звідси  $c_{2k+1}$  для всіх  $k = 0, 1, 2, \dots$ , а

$$\begin{aligned} c_2 = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (v+1)}; \quad c_4 = \frac{c_0}{2^4 \cdot 2! \cdot (v+1)(v+2)}, \dots, \\ c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} k! (v+1)(v+2)\dots(v+k)}, \dots \end{aligned}$$

Отже, знайдено розв'язок

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} k! (v+1)(v+2)\dots(v+k)} t^{2k+v}. \quad (3.35)$$



Скориставшись ознакою Д'Аламбера, можна переконатися, що цей ряд рівномірно збігається на будь-якому скінченному проміжку півосі  $(0, \infty)$  (цей висновок впливає також із теореми 3.8).

За  $c_0$  зручно взяти число

$$c_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)},$$

де  $\Gamma(v)$  — гамма-функція:

$$\Gamma(v) := \int_0^{\infty} t^{v-1} e^{-t} dt, \quad v > 0.$$

Такий вибір пояснюється тим, що  $\Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$ , і тоді  $x_1(t)$  перетворюється на відому спеціальну функцію

$$J_\nu(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(v+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu},$$

яка називається *функцією Бесселя першого роду з індексом  $\nu$* .

Розглянемо тепер питання про існування розв'язку, який відповідає кореню  $\lambda = -\nu$ . Легко переконатися в тому, що коли  $\nu \in \mathbb{N}$ , то коефіцієнти цього розв'язку коректно визначаються формулами

$$c_1 = 0, \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} k! (-\nu+1)(-\nu+2)\dots(-\nu+k)}, \quad c_{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Добре відомо, що гамма-функцію можна до визначити для всіх від'ємних нецілих значень аргументу. Зафіксувавши  $c_0 = \frac{2^\nu}{\Gamma(-\nu+1)}$ , дістанемо другий розв'язок рівняння Бесселя у вигляді *функції Бесселя першого роду з від'ємним індексом*

$$J_{-\nu}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\nu}, \quad \nu \notin \mathbb{N}.$$

**Лінійна незалежність функцій  $J_\nu(t)$  і  $J_{-\nu}(t)$  ( $\nu \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$ ) очевидна:**

перша з них перетворюється в нуль при  $t = 0$ , а друга прямує до нескінченності, коли  $t \rightarrow \infty$  (рис. 3.1, 3.2). Таким чином, для додатних нецілих значень  $\nu$  загальний розв'язок рівняння Бесселя має вигляд

$$x = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_{-\nu}(t),$$

де  $c_1, c_2$  — довільні сталі.

Цікаво, що функції Бесселя з напівицілим індексом  $\nu \in \left\{ \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots \right\}$  виражаються через елементарні функції. Наприклад, поклавши в (3.35)

$$\nu = 1/2, \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(3/2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \text{дістанемо}$$

$$\begin{aligned} J_{1/2}(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k! \cdot 2^k (1/2 + 1)(1/2 + 2)\dots(1/2 + k)} t^{2k+1} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t. \end{aligned}$$

Аналогічно встановлюємо, що  $J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t$ .

Властивості функцій Бесселя детально досліджено й описано в довідниках та монографіях (див., наприклад, бібліографію в [28]).

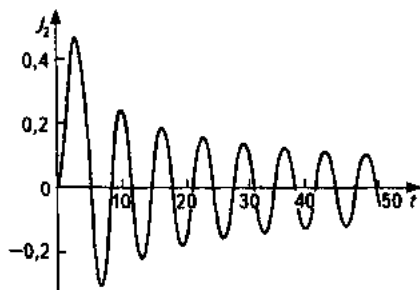


Рис. 3.1

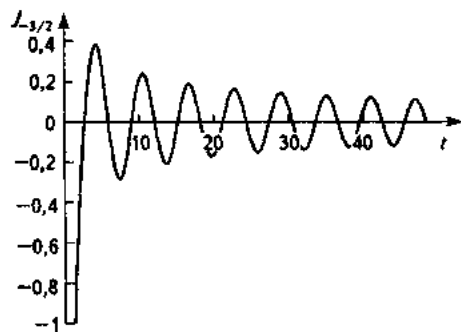


Рис. 3.2

Там можна знайти також формули для функції Бесселя другого роду  $Y_\nu(t)$ , яка теж є розв'язком рівняння Бесселя, до того ж лінійно незалежним з  $J_\nu(t)$ . Ми лише відзначимо, що при цілому  $\nu = n \geq 0$  різниця

$$Y_n(t) - \frac{2}{\pi} J_n(t) \ln \frac{t}{2} \text{ є узагальненим степеневим рядом вигляду } t^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{2k}.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння Бесселя при довільному  $\nu \geq 0$  можна подати у вигляді

$$x = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t).$$

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Знайти розв'язки рівнянь у вигляді степеневих рядів:  
 а)  $\ddot{x} - \alpha x = 0$ ; б)  $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$ ; в)  $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ .
- ② Визначити, скільки лінійно незалежних розв'язків у вигляді узагальненого степеневих рядів має кожне з рівнянь:  
 а)  $t^2 \ddot{x} + 5 \sin t \dot{x} + 4e^t x = 0$ ; в)  $t^2 \ddot{x} + \ln(1+t) \dot{x} - 3 \cos t x = 0$ ;  
 б)  $t^2 \ddot{x} + \sin t \dot{x} - 2e^t x = 0$ ; г)  $t^2 \ddot{x} + 3te^t \dot{x} + 3 \cos t x = 0$ .
- ③ Знайти ті розв'язки рівняння  $t^2 \ddot{x} - t^2 \dot{x} + (t-2)x = 0$ , які виражаються узагальненими степеневими рядами.
- ④ Переконайтеся, що поліном Лежандра  $P_n(t)$  є коефіцієнтом біля  $x^n$  у розвиненні виразу  $(1-2tx+x^2)^{-1/2}$  за степенями  $x$ . Довести, що

$$t\dot{P}_n(t) - \dot{P}_{n-1}(t) = nP_n(t).$$

- ⑤ Побудувати частинний розв'язок рівняння Лагерра

$$t\ddot{x} + (1-t)\dot{x} + \nu x = 0, \quad \nu \in \mathbb{R}$$

у вигляді степеневих рядів. Довести, що при  $\nu = n \in \mathbb{N}$  цей розв'язок є поліномом степеня  $n$ . З'ясувати, яку структуру має інший лінійно незалежний розв'язок.

- ⑥ Довести, що гіпергеометрична функція  $F(\alpha, \beta, \gamma, t)$  задовольняє рівності:
- а)  $2F(-n/2, -(n-1)/2, 1/2, t^2) = (1+t)^n + (1-t)^n$ ;  
 б)  $tF(-n, n+3/2, 3/2, t^2) = (-1)^n \frac{2^n n! P_{2n-1}(t)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$ .

⑦ Довести рівності:

$$\text{а) } J_v(t) = J_{v-1}(t) - \frac{v}{t} J_v(t); \quad \text{б) } J_v(t) = -J_{v-1}(t) + \frac{v}{t} J_v(t).$$

✓ *Вказівка.* Здиференціювати вираз  $J_v(t)/t^v$ .

### 3.4

## Крайові задачі

Найпоширенішою задачею в теорії звичайних диференціальних рівнянь є задача Коші. Додаткові умови цієї задачі за своєю суттю є *початковими*: в них фігурують значення невідомої функції та її похідних (якщо порядок рівняння перевищує одиницю) при фіксованому значенні незалежної змінної. Зрозуміло, що це не єдиний спосіб виділення того чи іншого частинного розв'язку з множини всіх функцій, які задовольняють диференціальне рівняння. Часто виникає потреба у відшуванні такого розв'язку, для якого виконувалися б так звані *крайові умови*: значення шуканої функції та її похідних мають задовольняти певні співвідношення в кількох фіксованих точках проміжку, який пробігає незалежна змінна.

Наприклад, задача про форму провислого каната із закріпленими кінцями (її буде розглянуто в п. 4.2.1) зводиться до відшукування такого розв'язку диференціального рівняння другого порядку, графік якого проходив би через дві наперед задані точки. Інший приклад: для того щоб знайти  $T$ -періодичний розв'язок лінійного  $T$ -періодичного рівняння  $\dot{x} = a(t)x + b(t)$  (див. п. 1.3.2), потрібно з усіх розв'язків вибрати той, який задовольняє умову  $x(0) = x(T)$ .

Задачу відшукування частинного розв'язку диференціального рівняння, який задовольняє задані крайові умови, називають *крайовою задачею*.

Досліджуватимемо крайову задачу, що формулюється так: знайти на проміжку  $[0, l]$  розв'язок рівняння

$$a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = F(t), \quad (3.36)$$

який на кінцях проміжку задовольняє умови

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = \gamma_1, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = \gamma_2, \quad (3.37)$$

де  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  — задані числа, причому  $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, i = 1, 2$ .

Якщо в (3.37)  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , то такі крайові умови називаються умовами першого роду; якщо  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , — умовами другого роду; якщо ж  $\alpha_i \beta_i \neq 0$  хоча б для одного  $i = 1, 2$ , — умовами третього роду.

У випадку, коли або  $F(t) \neq 0$  або  $|\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0$ , крайова задача називається неоднорідною, на відміну від однорідної крайової задачі, яка характеризується тим, що  $F(t) \equiv 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ .

Зрозуміло, що кожна однорідна крайова задача має своїм розв'язком функцію  $x \equiv 0$  — так званий *тривіальний розв'язок*. Може бути так, що інших розв'язків однорідна крайова задача не має. Ось приклад такої задачі:

$$\ddot{x} - x = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$x(0) = x(1) = 0.$$

Справді, розв'язками рівняння  $\ddot{x} - x = 0$  є двопараметрична сім'я функцій  $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ . Крайові умови задовольняє та з них, для якої  $c_1 + c_2 = 0$  і  $c_1 e + c_2 e^{-1} = 0$ , тобто тотожний нуль  $x \equiv 0$ .

Наступний приклад показує, що за певних умов однорідна крайова задача може мати безліч розв'язків. А саме, очевидно, що кожна функція з однопараметричної сім'ї  $x = c \sin t$  ( $c$  — будь-яке дійсне число) є розв'язком такої задачі:

$$\ddot{x} + x = 0, \quad 0 < t < \pi,$$

$$x(0) = x(\pi) = 0.$$

Зауважимо, що, не втративши загальності, можна обмежитися вивченням неоднорідних крайових задач з однорідними крайовими умовами, тобто умовами (3.37), де  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . Справді, у випадку неоднорідних крайових умов завжди можна знайти двічі неперервно диференційовну функцію  $\varphi(t)$ , яка їх задовольняє. Проте тоді відносно нової функції  $y(t)$ , введеної рівністю

$$x = \varphi(t) + y,$$

дістанемо крайову задачу з однорідними крайовими умовами й відповідним чином зміненою правою частиною. Наприклад, у випадку крайових умов першого роду  $x(0) = \gamma_1$ ,  $x(l) = \gamma_2$  можна покласти

$$\varphi(t) = \frac{\gamma_1}{l}(l-t) + \frac{\gamma_2}{l}t.$$

Надалі припускатимемо, що

$$a_i(t) \in C([0, l] \mapsto \mathbb{R}), \quad i = 0, 1, 2; \quad a_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, l].$$

Тоді, замінивши позначення п. 3.1.1 на традиційніші

$$q(t) \mapsto p(t), \quad r(t) \mapsto -q(t), \quad g(t) \mapsto f(t),$$

задачу (3.36), (3.37) можна подати в самоспряженому вигляді

$$\mathcal{L}x := \frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) - q(t)x = f(t), \quad t \in (0, l); \quad (3.38)$$

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = 0. \quad (3.39)$$

Записавши рівняння в самоспряженому вигляді, ми зможемо при нагоді скористатися важливою рівністю

$$\int_{t_1}^{t_2} [y(t)\mathcal{L}x(t) - x(t)\mathcal{L}y(t)] dt = [p(t)[y(t)\dot{x}(t) - x(t)\dot{y}(t)]]_{t=t_1}^{t=t_2},$$

яку називають *формулою Гріна*. Вона виконується для будь-яких точок  $t_1, t_2 \in [0, l]$  і для кожної пари функцій  $x(t), y(t) \in C^2([0, l] \mapsto \mathbb{R})$ . Справді,

$$y(t)\mathcal{L}x(t) - x(t)\mathcal{L}y(t) = y(t)\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}(t)) - x(t)\frac{d}{dt}(p(t)\dot{y}(t)),$$

або

$$y(t)\mathcal{L}x(t) - x(t)\mathcal{L}y(t) = \frac{d}{dt}(y(t)p(t)\dot{x}(t) - x(t)p(t)\dot{y}(t)).$$

Залишилося зінтегрувати цю рівність у межах від  $t_1$  до  $t_2$  і застосувати формулу Ньютона—Лейбніца до правої частини.

Формулу Гріна можна подати також у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} [y(t)\mathcal{L}x(t) - x(t)\mathcal{L}y(t)] dt = [p(t)W(y(t), x(t))]_{t=t_1}^{t=t_2},$$

де  $W(y(t), x(t))$  — вронскіан функцій  $y(t)$  та  $x(t)$ . Якщо останні задовольняють крайові умови (3.39), то, взявши до уваги припущення  $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad i = 1, 2$ , дістаємо

$$W(y(0), x(0)) = W(y(l), x(l)) = 0.$$

Тому на множині таких функцій оператор  $\mathcal{L}$  має *властивість симетричності*

$$\int_0^l [y(t)\mathcal{L}x(t) - x(t)\mathcal{L}y(t)] dt = 0. \quad (3.40)$$

### 3.4.1. Невироджений випадок. Функція Гріна

Розглянемо *невироджений випадок*, який характеризується тим, що однорідна крайова задача

$$\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) - q(t)x = 0, \quad t \in (0, l); \quad (3.41)$$

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = 0 \quad (3.42)$$

не має розв'язків, відмінних від тривіального.

Позначимо через  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  нетривіальні розв'язки ЛОР (3.41), які задовольняють відповідно першу й другу крайові умови (3.42). Кожен із цих розв'язків існує й визначений із точністю до сталого множника. Наприклад, за  $x_i(t)$  можна взяти розв'язок рівняння (3.41), який задовольняє початкові умови  $x_i((i-1)l) = -\beta_i$ ,  $\dot{x}_i((i-1)l) = \alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ .

#### Твердження 3.2

Однорідна крайова задача (3.41), (3.42) має нетривіальний розв'язок тоді й лише тоді, коли розв'язки  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  лінійно залежні.

#### Доведення

Нехай однорідна крайова задача має нетривіальний розв'язок  $\xi(t)$ . Оскільки як  $\xi(t)$ , так і  $x_1(t)$  задовольняють першу крайову умову (3.42), а  $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$ , то вронскіан цих розв'язків дорівнює нулю, а отже, вони лінійно залежні. Так само можна довести лінійну залежність розв'язків  $\xi(t)$  і  $x_2(t)$ . Звідси випливає, що  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  також лінійно залежні.

Навпаки, нехай зазначені розв'язки лінійно залежні. Тоді для деякої сталої  $k \neq 0$  маємо  $x_1(t) = kx_2(t)$ . Тепер зрозуміло, що, наприклад, функція  $\xi(t) := x_1(t)$  є розв'язком однорідної крайової задачі.

### Твердження 3.3

Якщо в невідродженому випадку існує розв'язок крайової задачі (3.38), (3.39), то він єдиний.

#### Доведення

Достатньо зауважити, що різниця двох нетотожних розв'язків неоднорідної крайової задачі є нетривіальним розв'язком відповідної однорідної крайової задачі.

Побудуємо спочатку розв'язок крайової задачі (3.38), (3.39) із використанням методу варіації довільних сталих. Для цього знайдемо однопараметричну сім'ю розв'язків, які задовольняють першу крайову умову, потім — однопараметричну сім'ю розв'язків, що задовольняють другу крайову умову, і, нарешті, виділимо спільний елемент цих двох множин розв'язків. Указаний спосіб не можна вважати найраціональнішим. Однак за його допомогою буде одержано важливу інформацію про структуру розв'язку невідродженої крайової задачі.

Як нам уже відомо, при застосуванні методу варіації довільних сталих виникають такі дві системи:

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t)x_1(t) + \dot{c}_2(t)x_2(t) = 0, \\ \dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{x}_2(t) = f(t)/p(t); \end{cases} \quad \begin{cases} x = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t), \\ \dot{x} = c_1(t)\dot{x}_1(t) + c_2(t)\dot{x}_2(t) \end{cases} \quad (3.43)$$

(тут ураховано, що коефіцієнтом біля  $\ddot{x}$  в операторі  $\mathcal{L} \in p(t)$ , а не 1). Розв'яжемо першу з них відносно  $\dot{c}_1(t)$ ,  $\dot{c}_2(t)$  за правилом Крамера. Маємо

$$\dot{c}_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t)/p(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}}{w(t)} = -\frac{x_2(t)f(t)}{w(t)p(t)} = -\frac{x_2(t)f(t)}{\omega},$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ \dot{x}_1(t) & f(t)/p(t) \end{vmatrix}}{w(t)} = \frac{x_1(t)f(t)}{w(t)p(t)} = \frac{x_1(t)f(t)}{\omega},$$



де  $w(t) := W(x_1(t), x_2(t))$  — вронскіан,  $\omega := w(0)p(0)$ , причому враховано, що наслідком формули Остроградського—Ліувілля є рівності

$$w(t) = w(0)e^{\int_0^t \frac{p'(s)}{p(s)} ds} = w(0)e^{\ln(p(0)/p(t))} = \frac{w(0)p(0)}{p(t)} = \frac{\omega}{p(t)}. \quad (3.44)$$

Маючи похідні функцій  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$ , виберемо їх первісні двома способами. А саме, поклавши

$$c_1(t) = c_1 - \int_0^t \frac{x_2(s)f(s)}{\omega} ds, \quad c_2(t) = \int_0^t \frac{x_1(s)f(s)}{\omega} ds,$$

де  $c_1$  — довільна стала, дістанемо сім'ю функцій

$$\hat{x}(t) := c_1 x_1(t) - x_1(t) \int_0^t \frac{x_2(s)f(s)}{\omega} ds + x_2(t) \int_0^t \frac{x_1(s)f(s)}{\omega} ds,$$

кожна з яких є розв'язком рівняння (3.38) і задовольняє першу крайову умову. Дійсно, достатньо зауважити, що з огляду на другу систему в (3.43)  $\hat{x}(0) = c_1 x_1(0)$ ,  $\hat{x}'(0) = c_1 \dot{x}_1(0)$ . Аналогічно можна дістати однопараметричну сім'ю функцій

$$\tilde{x}(t) := c_2 x_2(t) - x_1(t) \int_t^1 \frac{x_2(s)f(s)}{\omega} ds + x_2(t) \int_t^1 \frac{x_1(s)f(s)}{\omega} ds,$$

кожна з яких є розв'язком рівняння (3.38) і задовольняє другу крайову умову. Доберемо сталі  $c_1$ ,  $c_2$  так, щоб  $\hat{x}(t) \equiv \tilde{x}(t)$ , тобто

$$c_1 x_1(t) - c_2 x_2(t) \equiv x_1(t) \int_0^1 \frac{x_2(s)f(s)}{\omega} ds - x_2(t) \int_0^1 \frac{x_1(s)f(s)}{\omega} ds.$$

**Звідси**

$$c_1 = \int_0^1 \frac{x_2(s)f(s)}{\omega} ds, \quad c_2 = \int_0^1 \frac{x_1(s)f(s)}{\omega} ds.$$

Функція  $\hat{x}(t)$  при знайденому значенні  $c_1$  і є розв'язком крайової задачі (3.38), (3.39), який, таким чином, можна подати у вигляді

$$x(t) = \int_t^l \frac{x_1(t)x_2(s)}{\omega} f(s) ds + \int_0^t \frac{x_2(t)x_1(s)}{\omega} f(s) ds.$$

Нарешті, якщо ввести функцію

$$G(t, s) = \frac{1}{\omega} \begin{cases} x_1(t)x_2(s), & 0 \leq t \leq s \leq l, \\ x_2(t)x_1(s), & 0 \leq s \leq t \leq l, \end{cases} \quad (3.45)$$

то дістанемо

$$x(t) = \int_0^l G(t, s) f(s) ds. \quad (3.46)$$

Кажуть, що розв'язок, записаний у вигляді (3.46), є інтегральним перетворенням функції  $f(t)$ , причому ядро цього інтегрального перетворення становить функція  $G(t, s)$ . Остання має такі характеристичні властивості.

1. Функція  $G(t, s)$  неперервна в квадраті  $K := [0, l] \times [0, l]$ , має неперервні частинні похідні  $G'_t(t, s)$ ,  $G''_{tt}(t, s)$  у кожному з трикутників  $K_- = \{(t, s) \in K : t \geq s\}$ ,  $K_+ = \{(t, s) \in K : t \leq s\}$ .
2. Для кожного фіксованого  $s \in [0, l]$  функція  $x_s(t) := G(t, s)$  задовольняє лінійне однорідне рівняння (3.41) при всіх  $t \in [0, l]$ ,  $t \neq s$ , а також крайові умови (3.39).
3. На діагоналі  $t = s$  квадрата  $K$  похідна  $G'_t(t, s)$  має розрив першого роду зі стрибком  $1/p(s)$

$$G'_t(s+0, s) - G'_t(s-0, s) = 1/p(s).$$

Перші дві властивості безпосередньо випливають з явного вигляду функції  $G(t, s)$ . Якщо врахувати (3.44), то просто перевіряється й третя:

$$G'_t(s+0, s) - G'_t(s-0, s) = \frac{\dot{x}_2(s)x_1(s) - \dot{x}_1(s)x_2(s)}{\omega} = \frac{w(s)}{\omega} = \frac{1}{p(s)}.$$

Крім того, функція  $G(t, s)$  симетрична:

$$G(t, s) = G(s, t).$$

Забудемо на деякий час про формулу (3.45) і дамо таке означення.

### Означення 3.2

Функцію  $G(t, s)$ , яка має властивості 1—3, називають **функцією Гріна крайової задачі** (3.38), (3.39).

Дане означення вводить поняття функції Гріна аксіоматично, без відносно до її явного вигляду.

### Теорема 3.9

Нехай існує функція Гріна крайової задачі (3.38), (3.39). Тоді, хоч би якою була функція  $f(t) \in C([0, l] \rightarrow \mathbb{R})$ , ця задача має єдиний розв'язок і його можна подати у вигляді (3.46).

### Доведення

Доведемо, що функція  $x(t)$ , визначена формулою (3.46), дійсно є розв'язком крайової задачі (3.38), (3.39). На підставі властивостей 1—3 маємо:

$$x(t) = \int_0^t G(t, s) f(s) ds + \int_t^l G(t, s) f(s) ds;$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= G(t, t) f(t) + \int_0^t G_t'(t, s) f(s) ds - G(t, t) f(t) + \int_t^l G_t'(t, s) f(s) ds = \\ &= \int_0^t G_t'(t, s) f(s) ds + \int_t^l G_t'(t, s) f(s) ds; \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}(t)) = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t p(t) G_t'(t, s) f(s) ds + \int_t^l p(t) G_t'(t, s) f(s) ds \right] =$$

$$= p(t) G_t'(t+0, t) f(t) + \int_0^t \frac{d}{dt} (p(t) G_t'(t, s)) f(s) ds -$$

$$- p(t) G_t'(t-0, t) f(t) + \int_t^l \frac{d}{dt} (p(t) G_t'(t, s)) f(s) ds =$$

$$= f(t) + \int_0^t \frac{d}{dt} (p(t) G_t'(t, s)) f(s) ds + \int_t^l \frac{d}{dt} (p(t) G_t'(t, s)) f(s) ds;$$

$$\mathcal{L}x(t) = f(t) + \int_0^t (\mathcal{L}G(t, s)) f(s) ds + \int_t^l (\mathcal{L}G(t, s)) f(s) ds = f(t).$$

Доведемо тепер, що інших розв'язків крайова задача (3.38), (3.39) не має. Справді, якщо б це було не так, то відповідна однорідна крайова задача мала б нетривіальний розв'язок  $\xi(t)$ . Зафіксуємо довільне  $s \in (0, l)$  і застосуємо формулу Гріна до пари функцій  $x(t) := \xi(t)$  та  $y(t) := G(t, s)$  спочатку при  $t_1 = 0, t_2 = s - \epsilon$ , а потім при  $t_1 = s + \epsilon, t_2 = l$ , де  $\epsilon > 0$  — настільки мале, що  $s - \epsilon, s + \epsilon$  належать  $(0, l)$ . Урахувавши, що  $\mathcal{L}\xi(t) = 0, \mathcal{L}G(t, s) = 0, t \in (0, l) \setminus \{s\}$ , і перейшовши до границі при  $\epsilon \rightarrow 0$ , маємо

$$\left[ p(t)G(t, s)\dot{\xi}(t) - \xi(t)G'_t(t, s) \right]_{t=0}^{t=s-0} = 0,$$

$$\left[ p(t)G(t, s)\dot{\xi}(t) - \xi(t)G'_t(t, s) \right]_{t=s+0}^{t=l} = 0.$$

Додавши ці рівності та взявши до уваги, що  $G(s-0, s) = G(s+0, s) = G(s, s)$ , дістанемо

$$p(s)[G(s, s)\dot{\xi}(s) - \xi(s)G'_t(s-0, s)] - p(0)[G(0, s)\dot{\xi}(0) - \xi(0)G'_t(0, s)] + \\ + p(l)[G(l, s)\dot{\xi}(l) - \xi(l)G'_t(l, s)] - p(s)[G(s, s)\dot{\xi}(s) - \xi(s)G'_t(s+0, s)] = 0.$$

Легко зрозуміти, що оскільки  $\xi(t)$  та  $G(t, s)$  задовольняють крайові умови, то другий і третій доданки зникають, а тоді на підставі третьої властивості функції Гріна матимемо

$$p(s)\xi(s)[G'_t(s+0, s) - G'_t(s-0, s)] = 0 \Rightarrow \xi(s) = 0.$$

Таким чином,  $\xi(t) \equiv 0$  і одержана суперечність доводить єдиність розв'язку крайової задачі (3.38), (3.39).

Опишемо тепер алгоритм побудови функції Гріна в не виродженому випадку.

- Знаходимо розв'язки  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  таких двох задач Коші:

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = 0, \\ x(0) = -\beta_1, \quad \dot{x}(0) = \alpha_1; \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}x = 0, \\ x(l) = -\beta_2, \quad \dot{x}(l) = \alpha_2. \end{cases}$$

Ці розв'язки лінійно незалежні (твердження 3.2) і задовольняють відповідно першу й другу крайові умови (3.39).

- Функцію Гріна  $G(t, s)$  шукаємо у вигляді

$$G(t, s) = \begin{cases} c_1(s)x_1(t), & 0 \leq t \leq s \leq l, \\ c_2(s)x_2(t), & 0 \leq s \leq t \leq l. \end{cases}$$

Така функція автоматично задовольняє умову 2.

- Для того щоб забезпечити здійснення умов 1, 3, визначаємо функції  $c_1(s)$ ,  $c_2(s)$  із системи

$$\begin{cases} c_2x_2(s) = c_1x_1(s), \\ c_2\dot{x}_2(s) - c_1\dot{x}_1(s) = 1/p(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1x_1(s) - c_2x_2(s) = 0, \\ c_1\dot{x}_1(s) - c_2\dot{x}_2(s) = -1/p(s). \end{cases}$$

Тут перше рівняння потрібне для неперервності  $G(t, s)$  у  $K$ , а друге — забезпечує виконання умови 3. Взявши до уваги, що визначником цієї системи є функція —  $w(s)$ , а також те, що виконується рівність (3.44), маємо:

$$c_1(s) = \frac{x_2(s)}{p(s)w(s)} = \frac{x_2(s)}{\omega}, \quad c_2(s) = \frac{x_1(s)}{p(s)w(s)} = \frac{x_1(s)}{\omega}.$$

- Одержавши таким чином функцію Гріна вигляду (3.45), розв'язок крайової задачі записуємо у вигляді (3.46).

### □ Приклад 3.7

*Розв'яжемо крайову задачу*

$$\ddot{x} = f(t), \quad -1 < t < 1; \quad x(-1) = x(1) = 0.$$

Загальним розв'язком рівняння  $\ddot{x} = 0$  є  $x = c_1 + c_2t$ . Умову  $x(-1) = 0$  задовольняє, наприклад, розв'язок  $x_1(t) = 1 + t$ , а іншу крайову умову — розв'язок  $x_2(t) = 1 - t$ .

Функцію Гріна вихідної крайової задачі шукаємо у вигляді

$$G(t, s) = \begin{cases} c_1(s)(1+t), & -1 \leq t \leq s \leq 1, \\ c_2(s)(1-t), & -1 \leq s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

де  $c_1(s)$  і  $c_2(s)$  визначаються з умов

$$c_2(s)(1-s) = c_1(s)(1+s), \quad -c_2(s) - c_1(s) = 1.$$

Звідси

$$c_1(s) = \frac{s-1}{2}, \quad c_2(s) = -\frac{1+s}{2}.$$

Тому шукана функція Гріна має вигляд

$$G(t, s) = \frac{1}{2} \begin{cases} (s-1)(t+1), & -1 \leq t \leq s \leq 1, \\ (s+1)(t-1), & -1 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

З її допомогою записуємо розв'язок вихідної крайової задачі:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-1}^1 G(t, s) f(s) ds = \\ &= \frac{t-1}{2} \int_{-1}^t (s+1) f(s) ds + \frac{t+1}{2} \int_t^1 (s-1) f(s) ds. \end{aligned}$$

Насамкінець коротко зупинимося ще на одному підході до введення функції Гріна. Шукатимемо розв'язок крайової задачі (3.38), (3.39) у вигляді (3.46), де  $G(t, s)$  — поки що невідома функція. Подіємо на обидві частини рівності (3.46) оператором  $\mathcal{L}$  і формально внесемо  $\mathcal{L}$  під знак інтеграла. Тоді умова  $\mathcal{L}x = f(t)$  запишеться у вигляді

$$\int_0^1 \mathcal{L} G(t, s) f(s) ds = f(t).$$

Для її виконання достатньо, щоб функція  $G(t, s)$  була розв'язком рівняння

$$\mathcal{L}x = \delta(t-s), \quad (3.47)$$

де  $\delta(t)$  — функція Дірака («миттєвий імпульс нескінченної інтенсивності»; див. п. 2.4.2). З урахуванням цих міркувань функцію Гріна можна було б визначити як розв'язок рівняння (3.47), який задовольняє крайові умови (3.39). Строге обґрунтування такого підходу спирається на теорію узагальнених функцій.

### 3.4.2. Вироджений випадок. Узагальнена функція Гріна

Розглянемо випадок, коли однорідна крайова задача (3.41), (3.42) має хоча б один нетривіальний розв'язок. Позначимо його через  $\xi_1(t)$ . На підставі міркувань, які містяться в доведенні твердження 3.2, мож-

на зробити висновок, що множина всіх розв'язків указаної задачі — це сім'я функцій вигляду  $x = c \xi_1(t)$ , де  $c$  — довільна стала. Тому, не обмежуючи загальності викладу, вважатимемо, що  $\xi_1(t)$  вибрано так, щоб справджувалась умова нормування

$$\int_0^l \xi_1^2(t) dt = 1.$$

Необхідну умову існування розв'язку неоднорідної крайової задачі встановлює таке твердження.

### Твердження 3.4

Якщо задача (3.38), (3.39) має розв'язок  $x(t)$ , то функція  $f(t)$  ортогональна до нетривіального розв'язку  $\xi_1(t)$  відповідної однорідної крайової задачі (3.41), (3.42), тобто

$$\int_0^l \xi_1(t) f(t) dt = 0 \quad (3.48)$$

(див. зауваження 3.3)

### Доведення

Застосуємо формулу Гріна до пари функцій  $x(t)$  та  $\xi_1(t)$ . Оскільки вони задовольняють крайові умови, то згідно з (3.40)

$$\int_0^l [\xi_1(t) Lx(t) - x(t) L\xi_1(t)] dt = 0.$$

Урахувавши, що  $f(t) = Lx(t)$  і  $L\xi_1(t) = 0$ , дістанемо (3.48).

Зауважимо, що при довільному  $c \in \mathbb{R}$  функція  $x = x(t) + c \xi_1(t)$  теж є розв'язком задачі (3.38), (3.39). Аби уникнути такої неоднозначності, умови (3.39) слід доповнити ще однією. Найприроднішою додатковою умовою є вимога ортогональності

$$\int_0^l x(t) \xi_1(t) dt = 0. \quad (3.49)$$

### Твердження 3.5

Якщо задача (3.38), (3.39), (3.49) має розв'язок  $x(t)$ , то він єдиний.

### Доведення

Справді, різниця двох розв'язків задачі (3.38), (3.39), (3.49) є розв'язком вигляду  $c\xi_1(t)$  відповідної однорідної задачі. З умови (3.49) та нормованості функції  $\xi_1(t)$  одразу випливає, що

$$\int_0^l c\xi_1(t)\xi_1(t) dt = c = 0.$$

Розв'яжемо вироджену крайову задачу за допомогою методу варіації довільних сталих, вважаючи, що умова ортогональності (3.48) справджується. Виберемо лінійно незалежний з  $\xi_1(t)$  розв'язок  $\xi_2(t)$  однорідного рівняння (3.41) так, щоб виконувалася рівність

$$p(0)W(\xi_1(0), \xi_2(0)) = 1.$$

Цим ми дещо спростимо формули, які буде одержано нижче.

Шукаючи розв'язок рівняння (3.38) у вигляді

$$x(t) = c_1(t)\xi_1(t) + c_2(t)\xi_2(t), \quad (3.50)$$

як і в п. 3.4.1, дістаємо рівняння

$$\dot{c}_1(t) = -\xi_2(t)f(t), \quad \dot{c}_2(t) = \xi_1(t)f(t). \quad (3.51)$$

При цьому

$$\dot{x}(t) = c_1(t)\dot{\xi}_1(t) + c_2(t)\dot{\xi}_2(t).$$

Тому, аби розв'язок  $x(t)$  задовольняв крайову умову в точці  $t = 0$ , необхідно вимагати виконання рівності  $c_2(0) = 0$ . Звідси  $c_2(t) = \int_0^t \xi_1(s)f(s) ds$ ; і з урахуванням (3.48)  $c_2(l) = 0$ . Остання рівність забезпечить справдження крайової умови в правому кінці проміжку  $[0, l]$ .

Загальний розв'язок першого з рівнянь (3.51) візьмемо у вигляді  $c_1(t) = c_1 - \int_t^l \xi_2(s)f(s) ds$ , де  $c_1$  — довільна стала. Підставивши знайдені функції  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  в (3.50), дістанемо однопараметричну сім'ю функцій

$$x(t) = c_1\xi_1(t) + \xi_1(t)\int_t^l \xi_2(s)f(s) ds + \xi_2(t)\int_0^t \xi_1(s)f(s) ds, \quad (3.52)$$

кожна з яких є розв'язком крайової задачі (3.38), (3.39). Умову орто



ортogonalності (3.49) завжди можна задовольнити, відповідним чином вибравши довільну сталу  $c_1$ .

Підсумком наведених вище міркувань є така теорема.

### Теорема 3.10

Розв'язок крайової задачі (3.38), (3.39) існує тоді й лише тоді, коли функція  $f(t)$  ортогональна до кожного розв'язку відповідної однорідної крайової задачі.

#### □ Приклад 3.8

*Розв'яжемо крайову задачу*

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= \cos t, & 0 < t < \pi; \\ x(0) &= x(\pi) = 0. \end{aligned}$$

На початку п. 3.4 вже відзначалося, що відповідна однорідна задача має однопараметричну сім'ю розв'язків  $x = c \sin t$ , де  $c$  — довільна стала. Умова теореми 3.10 виконана:  $\int_0^\pi \cos t \sin t dt = 0$ . Методом невизначених коефіцієнтів неважко знайти частинний розв'язок диференціального рівняння задачі:  $x = \frac{t}{2} \sin t$ . Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x = c_1 \sin t + c_2 \cos t + \frac{t}{2} \sin t.$$

Для того щоб задовольнити крайові умови, достатньо покласти  $c_2 = 0$ . Сталу  $c_1$  виберемо так, щоб справджувалась умова ортогональності шуканого розв'язку й функції  $\sin t$ :

$$\int_0^\pi c_1 \sin^2 t dt + \int_0^\pi \frac{t}{2} \sin^2 t dt = 0.$$

Звідси  $c_1 = -\pi/4$ . Остаточно маємо

$$x = \left( \frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin t.$$

Тепер покажемо, що розв'язок (3.52) можна подати у вигляді інтегрального перетворення

$$x(t) = \int_0^t G(t, s) f(s) ds,$$

де функція  $G(t, s)$  задовольняє крайові умови й при кожному  $s \in [0, t]$  є ортогональною до  $\xi_1(t)$ .

Насамперед, запровадивши функцію

$$\Gamma(t, s) = \begin{cases} \xi_1(t)\xi_2(s), & 0 \leq t \leq s \leq l, \\ \xi_2(t)\xi_1(s), & 0 \leq s \leq t \leq l \end{cases}$$

за аналогією з (3.45), перепишемо (3.52) у вигляді

$$x(t) = c_1 \xi_1(t) + \int_0^t \Gamma(t, s) f(s) ds. \quad (3.53)$$

Оскільки

$$\Gamma(0, s) = \xi_1(0)\xi_2(s), \quad \Gamma'_t(0, s) = \dot{\xi}_1(0)\xi_2(s),$$

$$\Gamma(t, s) = \xi_2(t)\xi_1(s), \quad \Gamma'_t(t, s) = \dot{\xi}_2(t)\xi_1(s),$$

то  $\Gamma(t, s)$  задовольняє крайову умову лише в лівому кінці проміжку  $[0, l]$ , адже розв'язок  $\xi_2(t)$  не задовольняє жодної крайової умови (3.42). Отже, функцію  $\Gamma(t, s)$  доведеться відповідним чином виправити. Для цього звернемо увагу на такий факт: якщо у формулі (3.53) зробити заміну  $\Gamma(t, s) \mapsto \Gamma(t, s) - \eta(t)\xi_1(s) - \xi_1(t)\zeta(s) =: \tilde{\Gamma}(t, s)$ , де  $\eta(t), \zeta(s) \in C([0, l] \rightarrow \mathbb{R})$  — довільні функції, то вона й надалі визначатиме розв'язок рівняння (3.38); адже  $f(t)$  ортогональна до  $\xi_1(t)$ . Неважко зрозуміти, що перетворена функція  $\tilde{\Gamma}(t, s)$  задовольнятиме обидві крайові умови, якщо функцію  $\eta(t)$  вибрати так, щоб при деякому  $k \in \mathbb{R}$  виконувалися рівності

$$\eta(0) = k\xi_1(0), \quad \dot{\eta}(0) = k\dot{\xi}_1(0), \quad \eta(l) = \xi_2(l), \quad \dot{\eta}(l) = \dot{\xi}_2(l). \quad (3.54)$$

Найзручнішим є такий вибір:

$$\eta(t) := \int_0^t \Gamma(t, s) \xi_1(s) ds.$$

Легко перевірити, що ця функція не лише задовольняє умови (3.54), а й є розв'язком неоднорідного рівняння  $\mathcal{L}x = \xi_1(t)$ . При цьому, якщо додатково вимагати, аби розв'язок  $\xi_2(t)$  був ортогональним до  $\xi_1(t)$  на  $[0, l]$ , то  $k = 0$ .

Тепер залишилося покласти

$$G(t, s) = \Gamma(t, s) - \left[ \int_0^t \Gamma(t, s) \xi_1(s) ds \right] \xi_1(s) - \xi_1(t) \zeta(s)$$

і вибрати функцію  $\zeta(s)$  так, щоб  $G(t, s)$  була ортогональною до  $\xi_1(t)$ . Для цього домножимо праву частину останньої рівності на  $\xi_1(t)$ , одержаний добуток зінтегруємо за змінною  $t$  у межах від 0 до 1 і результат прирівняємо до нуля. З одержаного рівняння легко знайдемо

$$\zeta(s) = \int_0^1 \xi_1(t) \Gamma(t, s) dt - \left[ \int_0^1 \int_0^1 \Gamma(t, s) \xi_1(t) \xi_1(s) ds dt \right] \xi_1(s).$$

Остаточно маємо

$$\begin{aligned} G(t, s) = & \Gamma(t, s) - \left[ \int_0^1 \Gamma(t, s) \xi_1(s) ds \right] \xi_1(s) - \\ & - \xi_1(t) \int_0^1 \xi_1(t) \Gamma(t, s) dt + \\ & + \xi_1(t) \left[ \int_0^1 \int_0^1 \Gamma(t, s) \xi_1(t) \xi_1(s) ds dt \right] \xi_1(s). \end{aligned} \quad (3.55)$$

З урахуванням властивостей цієї функції дамо таке означення.

### ➤ Означення 3.3

Функцію  $G(t, s)$  називатимемо *узагальненою функцією Гріна крайової задачі (3.38), (3.39)*, якщо вона задовольняє такі умови:

- 1) функція  $G(t, s)$  неперервна в квадраті  $K := [0, 1] \times [0, 1]$ , має неперервні частинні похідні  $G'_t(t, s)$ ,  $G''_{tt}(t, s)$  у кожному з трикутників  $K_- = \{(t, s) \in K : t \geq s\}$ ,  $K_+ = \{(t, s) \in K : t \leq s\}$ ;
- 2) для кожного фіксованого  $s \in [0, 1]$  функція  $x_s(t) := G(t, s)$  задовольняє рівняння

$$\mathcal{L}x = -\xi_1(t) \xi_1(s)$$

при всіх  $t \in [0, 1]$ ,  $t \neq s$ , а також крайові умови (3.39).

- 3) на діагоналі  $t = s$  квадрата  $K$  похідна  $G'_t(t, s)$  має розрив першого роду зі стрибком  $1/p(s)$ :

$$G'_t(s+0, s) - G'_t(s-0, s) = 1/p(s).$$

- 4) для кожного фіксованого  $s \in [0, 1]$  функція  $G(t, s)$  ортогональна до функції  $\xi_1(t)$ :

$$\int_0^1 G(t, s) \xi_1(s) ds = 0.$$

Сформулюємо алгоритм відшукування узагальненої функції Гріна.

- Знаходимо таку фундаментальну систему  $\xi_1(t), \xi_2(t)$  ЛОР (3.41), щоб розв'язок  $\xi_1(t)$  задовольняв умови (3.42).
- Знаходимо будь-який розв'язок  $g(t, s)$  неоднорідного рівняння

$$\mathcal{L}x = -\xi_1(t)\xi_1(s).$$

- Узагальнену функцію Гріна шукаємо у вигляді

$$G(t, s) = g(t, s) + c_3(s)\xi_1(t) + c_4(s)\xi_2(t) + \begin{cases} c_1(s)\xi_1(t), & 0 \leq t \leq s \leq l, \\ c_2(s)\xi_2(t), & 0 \leq s \leq t \leq l. \end{cases}$$

Функції  $c_i(s)$ ,  $i = 1, 2$  вибираємо так, щоб останній доданок задовольняв пп. 1 та 3 означення узагальненої функції Гріна; функцію  $c_4(s)$  — так, щоб  $G(t, s)$  задовольняла крайові умови задачі; нарешті, вибором функції  $c_3(s)$  забезпечуємо виконання умови ортогональності 4.

Проаналізувавши вигляд правої частини формули (3.55), можна зробити висновок, що  $c_i(s)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  з потрібними властивостями існують.

### □ Приклад 3.9

Знайдемо функцію Гріна для крайової задачі з прикладу 3.8.

За функцію  $\xi_1(t)$  візьмемо  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t$  (коефіцієнт  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$  вибирається з умови ортогональності  $c^2 \int_0^\pi \sin^2 t dt = 1$ ). Розв'язком однорідного рівняння, який не задовольняє крайові умови, є, наприклад,  $\xi_1(t) = \cos t$ . Далі, рівняння

$$\ddot{x} + x = -\frac{2}{\pi} \sin t \sin s$$

має частинний розв'язок вигляду  $g(t, s) = \frac{t}{\pi} \cos t \sin s$ . Отже, узагальнену функцію Гріна шукаємо у вигляді

$$G(t, s) = -\frac{2}{\pi} \sin t \sin s + c_3(s) \sin t + c_4(s) \cos t + \begin{cases} c_1(s) \sin t, & 0 \leq t \leq s \leq l, \\ c_2(s) \cos t, & 0 \leq s \leq t \leq l \end{cases}$$

(коефіцієнт  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$  вбирають у себе функції  $c_1(s), c_3(s)$ ).

Оскільки в нашому випадку  $p(t) \equiv 1$ , то умови неперервності й стрибка похідної функції  $G(t, s)$  при  $t = s$  мають вигляд

$$c_1(s) \sin s = c_2(s) \cos s, \quad c_1(s) \cos s + c_2(s) \sin s = -1.$$

Звідси  $c_1(s) = -\cos s$ ,  $c_2(s) = -\sin s$ .

Наслідком крайової умови в точці  $t = 0$  є рівність  $c_4(s) = 0$ . Тоді в точці  $t = \pi$  маємо:  $G(\pi, s) = \sin s - \sin s = 0$ . Отже, функція

$$G(t, s) = \frac{t}{\pi} \cos t \sin s + c_3(s) \sin t + \begin{cases} -\cos s \sin t, & 0 \leq t \leq s \leq l, \\ -\sin s \cos t, & 0 \leq s \leq t \leq l \end{cases}$$

задовольняє пп. 1—3 означення узагальненої функції Гріна.

Нарешті, функцію  $c_3(s)$  визначимо з умови ортогональності

$\int_0^{\pi} G(t, s) \sin t \, dt = 0$ . Обчисливши відповідні інтеграли, знаходимо

$$c_3(s) = \frac{s \cos s}{\pi} - \frac{\sin s}{2\pi}.$$

Остаточно маємо

$$G(t, s) = \frac{t}{\pi} \cos t \sin s + \left( \frac{s \cos s}{\pi} - \frac{\sin s}{2\pi} \right) \sin t - \begin{cases} \cos s \sin t, & 0 \leq t \leq s \leq l, \\ \sin s \cos t, & 0 \leq s \leq t \leq l. \end{cases}$$

### 3.4.3. Крайова задача на власні значення

Для того щоб описати властивості лінійного оператора, який діє в скінченновимірному просторі, потрібно насамперед мати інформацію про його власні числа та власні вектори. Задача на власні значення природно виникає й при дослідженні лінійних диференціальних операторів.

Так, наприклад, у випадку рівняння Шредінгера для одновимірного гармонічного осцилятора

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + (E - t^2) \psi = 0$$

(див. п. 3.3.1) потрібно було визначити значення енергії  $E$ , при якому це рівняння має розв'язок  $\psi(t)$  із простору  $S$ , утвореного такими функціями  $\psi(t) \in C^2(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ , що  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt < \infty$ . Кожне число  $E$  з указаною властивістю природно інтерпретувати як власне значення диференціального оператора  $-d^2/dt^2 + t^2$ , який кожній функції  $\psi(t) \in S$  ставить у відповідність функцію  $-\ddot{\psi}(t) + t^2\psi(t)$ .

У даному пункті ми розглянемо *крайову задачу на власні значення* для лінійного диференціального оператора другого порядку. Вона полягає в тому, щоб знайти значення параметра  $\lambda$ , при яких існують нетривіальні розв'язки крайової задачі

$$\mathcal{L}x + \lambda p(t)x = 0, \quad t \in (0, l); \quad (3.56)$$

$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = 0. \quad (3.57)$$

Тут

$$\mathcal{L}x := \frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) - q(t)x,$$

$p(t) \in C^1([0, l] \mapsto \mathbb{R})$  та  $q(t) \in C([0, l] \mapsto \mathbb{R})$  — додатні функції;  $q(t) \in C([0, l] \mapsto \mathbb{R})$ ;  $\alpha_i, \beta_i$  — задані числа,  $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, i = 1, 2$ ;  $\lambda$  — так званий спектральний параметр.

Зауважимо, що задачу вигляду (3.56), (3.57) називають також *задачею Штурма—Ліувілля*. Кожне значення параметра  $\lambda$ , при якому вона має нетривіальний розв'язок, називається *власним значенням*, а сам нетривіальний розв'язок — *власною функцією*.

#### □ Приклад 3.10

Знайдемо власні значення й власні функції крайової задачі

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \lambda x, \quad t \in (0, l); \\ \dot{x}(0) = x(l) = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Спочатку покажемо, що недодатних власних значень дана задача не має. Якщо  $\lambda = 0$ , то загальний розв'язок рівняння (3.58) має вигляд  $x = c_1 + c_2 t$  і крайові умови задовольняє лише тривіальна функція  $x \equiv 0$ , тобто  $\lambda = 0$  не є власним значенням. Якщо  $\lambda < 0$ , то загальним розв'язком рівняння (3.58) є сім'я функцій  $x = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}$ . Крайові умови накладають такі обмеження на сталі  $c_1, c_2$  та параметр  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}c_1 - \sqrt{-\lambda}c_2 = 0, \\ e^{\sqrt{-\lambda}l}c_1 + e^{-\sqrt{-\lambda}l}c_2 = 0. \end{cases}$$

Оскільки при кожному  $\lambda < 0$  визначник матриці цієї системи не дорівнює нулю, то знову  $c_1 = c_2 = 0$ .

Розглянемо тепер випадок, коли  $\lambda > 0$ . Тут розв'язки рівняння (3.58) утворюють сім'ю функцій

$$x = c_1 \cos \sqrt{\lambda}t + c_2 \sin \sqrt{\lambda}t.$$

Підставивши цей вираз у крайові умови, маємо  $c_2 = 0$ ,  $c_1 \cos \sqrt{\lambda}l = 0$ . Тепер зрозуміло, що крайова задача має нетривіальні розв'язки лише для тих значень спектрального параметра, які задовольняють рівняння  $\cos \sqrt{\lambda}l = 0$ . Звідси й знаходимо всі власні числа

$$\lambda_k = \left(\frac{1}{2} + k\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

і відповідні власні функції

$$\varphi_k(t) = \cos \left[ \left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{\pi t}{l} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Власні функції задачі Штурма—Ліувілля мають багато цікавих і важливих властивостей, завдяки яким їх активно використовують, розв'язуючи крайові задачі як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь математичної фізики; вони дістають численні застосування при вивченні багатьох інших математичних проблем.

Не зупиняючися на детальних обґрунтуваннях, укажемо деякі властивості власних чисел і власних функцій задачі (3.56), (3.57).

1. Існує нескінченна послідовність  $\{\lambda_k\}_{k=1, 2, \dots}$  власних чисел і послідовність відповідних їм власних функцій  $\{\varphi_k(t)\}_{k=1, 2, \dots}$  задачі (3.56), (3.57).
2. Власні значення крайової задачі (3.56), (3.57) прості в тому розумінні, що кожному власному значенню відповідає з точністю до сталого множника лише одна власна функція.

Дійсно, якщо для деякого  $\lambda$  два розв'язки рівняння (3.56) задовольняють першу крайову умову (3.57), то їх вронскіан дорівнює нулю при  $t = 0$ . Тому такі розв'язки лінійно залежні.

Зауважимо, що за крайових умов іншого типу, ніж (3.57), власні значення можуть бути непростими. Прикладом такої ситуації є періодична крайова задача

$$\ddot{x} + \lambda x = 0; \quad x(0) = x(2\pi), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi).$$

Кожному власному значенню  $\lambda_k := k^2$  цієї задачі відповідає пара лінійно незалежних власних функцій  $\sin kt, \cos kt$ .

3. Якщо  $q(t) \geq 0$  для всіх  $t \in [0, l]$  і  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  (крайові умови першого роду), то всі власні значення крайової задачі (3.56), (3.57) додатні.

У правильності цього твердження легко переконатись, якщо покласти в рівнянні (3.56)  $\lambda = \lambda_k, x = \varphi_k(t)$ , одержану тотожність домножити на  $\varphi_k(t)$  і результат зінтегрувати в межах від 0 до  $l$ . Тоді

$$\int_0^l \frac{d}{dt} (p(t) \dot{\varphi}_k(t)) \varphi_k(t) dt - \int_0^l q(t) \varphi_k^2(t) dt + \lambda_k \int_0^l \rho(t) \varphi_k^2(t) dt = 0.$$

Перетворивши перший доданок за формулою інтегрування частинами та врахувавши, що  $\varphi_k(0) = \varphi_k(l) = 0$ , дістанемо

$$\lambda_k \int_0^l \rho(t) \varphi_k^2(t) dt = \int_0^l \rho(t) (\dot{\varphi}_k(t))^2 dt + \int_0^l q(t) \varphi_k^2(t) dt > 0 \Rightarrow \lambda_k > 0,$$

що й потрібно було довести.

Назвемо скалярним добутком із вагою  $\rho(t)$  функцій  $x(t), y(t) \in C([0, l] \rightarrow \mathbb{R})$  число

$$\langle x(t), y(t) \rangle := \int_0^l \rho(t) x(t) y(t) dt.$$

Число  $\|x(t)\| := \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle}$  природно тоді називати нормою функцій  $x(t)$ . Функції  $x(t), y(t) \in C([0, l] \rightarrow \mathbb{R})$  називаються ортогональними з вагою  $\rho(t)$ , якщо  $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$ .

4. Власні функції  $\varphi_m(t), \varphi_n(t)$  крайової задачі (3.56), (3.57), які відповідають різним власним значенням  $\lambda_m, \lambda_n$ , попарно ортогональні з вагою  $\rho(t)$ , тобто



$$\langle \varphi_m(t), \varphi_n(t) \rangle = 0.$$

Цей факт легко вивести з формули Гріна. Справді, поклавши у формулі (3.40)  $x(t) = \varphi_m(t)$ ,  $y(t) = \varphi_n(t)$  і взявши до уваги рівності  $\mathcal{L}\varphi_k(t) = -\lambda_k \varphi_k(t)$ ,  $k = m, n$ , дістанемо

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^l \rho(t) \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = 0.$$

Тепер властивість ортогональності стає наслідком припущення  $\lambda_m \neq \lambda_n$ .

Добре відомо, що набір власних векторів оператора  $A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  (або  $A: \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ ), який має  $n$  різних власних чисел, утворює базис простору  $\mathbb{R}^n$  (відповідно  $\mathbb{C}^n$ ). У зв'язку з цим природно поставити питання про можливість зображення функцій, визначених на  $[0, l]$ , у вигляді нескінченних лінійних комбінацій власних функцій задачі Штурма—Ліувілля. Відповідь на це питання дає теорема, встановлена у 1896 р. В. А. Стекловим.

### Теорема 3.11 (Стеклова)

Якщо функція  $f(t)$  двічі неперервно диференційовна на  $[0, l]$  і задовольняє крайові умови вигляду (3.57), то її можна розвинути в абсолютно й рівномірно збіжний на  $[0, l]$  ряд за власними функціями  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$  задачі (3.56), (3.57):

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(t). \quad (3.59)$$

Завдяки властивості ортогональності системи функцій  $\{\varphi_k(t)\}_{k=1, 2, \dots}$  з'являється можливість ефективно визначати коефіцієнти  $f_k$  у розв'язанні (3.59). А саме, якщо обидві частини рівності (3.59) домножити на  $\rho(t)\varphi_k(t)$  і потім інтегрувати в межах від 0 до  $l$ , то внаслідок властивості 4 дістанемо

$$\langle f(t), \varphi_k(t) \rangle = f_k \|\varphi_k(t)\|^2,$$

звідки

$$f_k = \frac{\langle f(t), \varphi_k(t) \rangle}{\|\varphi_k(t)\|^2}.$$

Зауважимо, що оскільки кожна власна функція визначена з точністю до сталого ненульового множника, то після заміни

$$\varphi_k(t) \mapsto \hat{\varphi}_k(t) := \varphi_k(t) / \|\varphi_k(t)\|$$

дістанемо систему власних функцій  $\{\hat{\varphi}_k(t)\}_{k=1, 2, \dots}$ , кожна з яких має одиничну норму. Така ортогональна система функцій називається *ортонормованою*.

Насамкінець відзначимо, що задачу Штурма—Ліувілья можна звести до так званого інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, теорію якого розроблено з вичерпною повнотою. А саме, можна довести, що хоча б одне  $\mu \in \mathbb{R}$  не є власним значенням. Нехай таким числом буде  $\mu = 0$  (інакше доведеться зробити заміну  $\lambda \rightarrow \mu + \lambda$  і замість  $q(t)$  розглядати функцію  $q(t) - \mu\rho(t)$ ), і нехай  $G(t, s)$  — функція Гріна задачі (3.38), (3.39). Якщо  $\lambda_0$  — власне число, а  $\varphi_0(t)$  — відповідна власна функція задачі (3.56), (3.57), то функція  $x = \varphi_0(t)$  задовольняє (3.38), (3.39) при  $f(t) = -\lambda_0\rho(t)\varphi_0(t)$ . Але тоді

$$\varphi_0(t) = -\lambda_0 \int_0^t G(t, s)\rho(s)\varphi_0(s) ds,$$

тобто пара  $(\lambda_0, \varphi_0(t))$  задовольняє інтегральне рівняння з параметром

$$x(t) = -\lambda \int_0^t G(t, s)\rho(s)x(s) ds.$$

Останнє належить до класу рівнянь Фредгольма другого роду із симетричним ядром. Неважко показати, що й навпаки, пара  $(\lambda, x(t))$ , яка задовольняє це рівняння, складається з власного значення й власної функції задачі (3.38), (3.39).

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Знайти розв'язки, що задовольняють крайові умови:
  - а)  $\ddot{x} + x = 1$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(\pi/2) = 1$ ;
  - б)  $t^2\ddot{x} - 2tx' + 2x = 0$ ,  $x(t) = o(t)$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $x(1) = 2$ .
- ② Побудувати функції Гріна й записати розв'язки крайових задач:
  - а)  $\ddot{x} + x = f(t)$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{x}(\pi) = 0$ ;

б)  $t\ddot{x} - \dot{x} = f(t)$ ,  $\dot{x}(1) = 0$ ,  $x(2) = 0$ ;

в)  $t\ddot{x} + \dot{x} = 2t$ ,  $x(1) = \dot{x}(1)$ ,  $\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} |x(t)| < \infty$ ;

г)  $\ddot{x} - x = \sin t$ ,  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < \infty$ .

3. Знайти власні значення й власні функції крайових задач:

а)  $\ddot{x} = \lambda x$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}(l) = 0$ ;

б)  $\ddot{x} = \lambda x$ ,  $x(0) = \dot{x}(l) = 0$ ;

в)  $t^2\ddot{x} + x/4 = \lambda x$ ,  $x(1) = x(e) = 0$ .

# ІНТЕГРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ

## 4.1

### Базові поняття й основні об'єкти розгляду

#### 4.1.1. Системи диференціальних рівнянь довільного порядку

Нехай у деякій області  $G \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{m-1}$  задано вектор-функцію  $\mathcal{F}(t, x, p_1, \dots, p_m)$  зі значеннями в просторі  $\mathbb{R}^n$ . Тут  $t$  — скалярний, а  $x, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$  — векторні аргументи:  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $p_j = (p_{1j}, \dots, p_{nj})$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Припустимо, що ця функція нетривіально залежить від  $p_m$ , і пов'яжемо з нею систему  $N$  диференціальних рівнянь  $m$ -го порядку відносно  $n$  шуканих функцій

$$\mathcal{F}\left(t, x, \dot{x}, \dots, \overset{(m)}{x}\right) = 0. \quad (4.1)$$

Нагадаємо, що тут  $\overset{(k)}{x} := \frac{d^k x}{dt^k} := \left( \frac{d^k x_1}{dt^k}, \dots, \frac{d^k x_n}{dt^k} \right)$ .

Усюди далі ми матимемо справу лише з випадком, коли  $n = N$ . Тоді число  $n$  називається *вимірністю* системи. Систему (4.1) можна інтерпретувати також як векторне диференціальне рівняння  $m$ -го порядку.

⇒ **Означення 4.1**

Вектор-функцію  $x(\cdot) : I \mapsto \mathbb{R}^n$ , де  $I$  — інтервал (відрізок), називають розв'язком системи (4.1), якщо ця функція має на  $I$  всі похідні до  $m$ -го порядку включно й задовольняє такі умови:

$$\begin{aligned} & \left( t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(m)}(t) \right) \in G \quad \forall t \in I; \\ & F \left( t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(m)}(t) \right) = 0 \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

У різноманітних застосуваннях найчастіше виникають системи диференціальних рівнянь вигляду

$$x^{(m)} = F \left( t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)} \right), \quad (4.2)$$

де  $F : D \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_m$ .

Питання про можливість зображення системи (4.1) у вигляді (4.2) (принаймні локально) стандартним способом вирішується за допомогою загальної теореми про неявну функцію (див. дод. 2).

Тепер ми зосередимо нашу увагу на таких двох випадках: 1) вимірність дорівнює 1, порядок дорівнює  $n$ ; 2) вимірність дорівнює  $n$ , порядок дорівнює 1.

У першому випадку маємо скалярне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку

$$x^{(n)} = F \left( t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)} \right), \quad (4.3)$$

а в другому — нормальну систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (4.4)$$

про яку вже йшлося у вступі. Там же було сформульовано задачу Коші для системи (4.4). Нагадаємо постановку цієї задачі.

Для заданої точки (початкових даних)  $(t_0, x_0) \in D$  потрібно знайти розв'язок  $x(t)$ , який був би визначений принаймні в деякому околі точки  $t_0$  і задовольняв початкову умову  $x(t_0) = x_0$ .

Цілком аналогічно лінійному випадкові (див. п. 2.1.3) рівнянню (4.3) можна поставити у відповідність еквівалентну нормальну систему. Для цього слід увести фазовий вектор  $((n-1)$ -ше продовження змінної  $x$ )

$$x := (x_1, \dots, x_n) := p^{n-1}x := \left( x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)} \right).$$

Тоді  $\dot{x} = \left( \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)} \right)$ . Зазначена система, еквівалентна рівнянню (4.3), має вигляд

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = F(t, x_1, \dots, x_n).$$

У даному випадку

$$f(t, x) := (x_2, x_3, \dots, x_n, F(t, x_1, \dots, x_n)).$$

*Постановка задачі Коші для рівняння (4.3) формулюється так: для початкових даних  $(t_0, x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^{n-1}) \in D$  знайти розв'язок  $x(t)$  рівняння (4.3), який був би визначений принаймні в деякому околі точки  $t_0$  і задовольняв початкові умови*

$$x(t_0) = x_0^0, \dot{x}(t_0) = x_0^1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}.$$

Ясно, що саме в такій постановці задача Коші для рівняння (4.3) узгоджується із задачею Коші для еквівалентної їй системи, якщо для останньої за початкові дані взяти  $(t_0, x_0) = (t_0, x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$ .

Увівши  $m$ -вимірний вектор  $(m-1)$ -ше продовження векторної змінної  $x$

$$y := (y_1, \dots, y_m) := p^{m-1}x = \left( x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)} \right),$$

де  $y \in \mathbb{R}^m$ , дістаємо нормальну систему, еквівалентну системі (4.2):

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \dots, \dot{y}_{m-1} = y_m, \dot{y}_m = F(t, y_1, \dots, y_m).$$

Задача Коші для системи (4.2) полягає в тому, щоб для заданих початкових даних  $(t_0, x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^{m-1}) \in D$  знайти визначений принаймні в деякому околі точки  $t_0$  розв'язок  $x(t)$ , який задовольняє початкові умови  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = x_0^1, \dots, x^{(m-1)}(t_0) = x_0^{m-1}$ .

Із наведених вище пояснень випливає, що основним об'єктом при вивченні таких теоретичних задач, як існування та єдиність розв'язку задачі Коші, слід вважати нормальні системи диференціальних рівнянь.

#### 4.1.2. Нормальна система як геометричний об'єкт

Із системою диференціальних рівнянь (4.4), заданою в області  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , можна природно пов'язати поле напрямів. Для цього потрібно кожній точці  $(t_0, x_0) \in D$  поставити у відповідність пряму

$$L(t_0, x_0) : x = f(t_0, x_0)(t - t_0) + x_0.$$

Нехай  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ . Геометричним еквівалентом розв'язку системи (4.4) є крива, яка лежить в області  $D$  і в кожній своїй точці дотикається відповідної прямої поля напрямів. Така крива називається *інтегральною кривою* системи (4.4). Як і у випадку скалярного рівняння, можна показати, що інтегральними кривими системи (4.4) є графіки її розв'язків, і лише вони.

З геометричного погляду задача Коші полягає у відшуканні такої інтегральної кривої системи (4.4), яка проходила б через наперед задану точку  $(t_0, x_0)$ .

#### 4.1.3. Автономні системи та системи в симетричній формі

**Нормальна система вигляду**

$$\dot{x} = f(x), \tag{4.5}$$

де  $f(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ , а  $D$  — область у  $\mathbb{R}^n$ , називається *n-вимірною автономною системою*. Такі системи дуже часто правлять за математичні моделі процесів, які є предметом розгляду широкого кола наук. Надалі припускатимемо, що  $f \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ .

Як і в двовимірному випадку (див. п. 1.8), будемо з автономною системою пов'язувати *векторне поле* (поле миттєвих швидкостей), ставлячи у відповідність кожній точці  $x \in D$  прикладений до неї вектор  $f(x)$ .

Якщо  $x(t)$ ,  $t \in I$  — розв'язок системи (4.5), то, як ми знаємо, криву, задану в  $\mathbb{R}^n$  рівнянням  $x = x(t)$ ,  $t \in I$ , називають *фазовою кривою* цієї системи.

Розглянемо випадок, коли

$$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in D. \quad (4.6)$$

Тоді векторне поле  $f$  у кожній точці  $x_0 \in D$  визначає пряму  $L(x_0)$ , яка проходить через  $x_0$  паралельно вектору  $f(x_0)$ . Цю пряму можна задати системою рівнянь

$$\frac{x_1 - x_{01}}{f_1(x_0)} = \dots = \frac{x_n - x_{0n}}{f_n(x_0)},$$

де  $x_i, f_i(x), x_{0i}$  —  $i$ -ті компоненти векторів  $x, f(x)$  та  $x_0$  відповідно. Таким чином, векторне поле  $f$  за умови (4.6) породжує в  $D$  поле напрямів  $L$ . З останнім природно пов'язати систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x)}, \quad (4.7)$$

яка називається *системою в симетричній формі*. Інтегральною кривою системи (4.7) є крива, яка в кожній своїй точці дотикається напрямку, визначеного в цій точці полем  $L$ . Зрозуміло, що задана в параметричному вигляді крива

$$x = \xi(\tau), \quad \tau \in J, \quad (4.8)$$

де  $\xi'(\tau) \neq 0$ ,  $\tau \in J$ , є інтегральною тоді й лише тоді, коли при кожному  $\tau \in J$  дотичний вектор  $\xi'(\tau)$  є колінеарним вектору  $f(\xi(\tau))$ , тобто виконується тотожність

$$\xi'(\tau) = \lambda(\tau)f(\xi(\tau))$$

з деякою функцією  $\lambda: J \rightarrow \mathbb{R}$ . Домноживши скалярно обидві частини цієї рівності на вектор  $f(\xi(\tau))$ , можна знайти  $\lambda(\tau)$  у вигляді



$$\lambda(\tau) = \frac{\langle \xi'(\tau), f(\xi(\tau)) \rangle}{\|f(\xi(\tau))\|^2}. \quad (4.9)$$

Як бачимо, ця функція неперервна й не перетворюється в нуль на інтервалі  $J$ .

Із наведених вище міркувань випливає, що фазова крива системи (4.5) є інтегральною кривою системи (4.7).

Навпаки, маючи інтегральну криву (4.8) системи (4.7), неважко в явному вигляді знайти відповідний розв'язок системи (4.5). Достатньо цю криву відповідним чином перепараметризувати. А саме, шукатимемо таку залежність  $\tau = \tau(t)$ ,  $t \in I$ , щоб функція  $x(t) := \xi(\tau(t))$  була розв'язком системи (4.5). Еквівалентну умову можна подати у вигляді рівності

$$\dot{x}(t) \equiv \xi'(\tau(t))\dot{\tau}(t) = f(\xi(\tau(t))) \text{ або } \lambda(\tau(t))\dot{\tau}(t) = 1 \quad \forall t \in I.$$

Звідси випливає, що за  $\tau(t)$  слід взяти довільний розв'язок скалярного автономного рівняння

$$\dot{\tau} = \frac{1}{\lambda(\tau)}.$$

Оскільки  $\lambda(\tau) \neq 0$  для всіх  $t \in I$ , то з урахуванням теореми існування для скалярного автономного рівняння (див. п. 1.2) цей розв'язок існує на деякому інтервалі  $I$  і є монотонною функцією, яка взаємно однозначно відображає  $I$  на  $J$ .

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Записати нормальну систему, еквівалентну системі диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + z - \dot{z}^2, \\ \ddot{z} = y - \ddot{z} + z^3. \end{cases}$$

Поставити для цих двох систем узгоджені задачі Коші.

- ② Точка масою  $m = 1$  рухається по площині  $xOy$  під дією сили  $F(x, y) = (-\omega^2 x, -y)$ . У початковий момент  $t = 0$  точка мала координати  $(1, 0)$  і вектор швидкості  $(0, 1)$ . Побудувати траєкторію руху для випадків  $\omega = 1, 2, 3$ .

- ③ Нехай  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  і  $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$  — така функція, що  $\varphi(e^{At}x_0) = t$  для деякого  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Знайти розв'язок задачі Коші  $\dot{x} = \varphi(x)Ax$ ,  $x(0) = x_0$ .
- ④ Знайти розв'язок задачі Коші

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n x_j^2 - \left( \prod_{j=1}^n x_j \right)^{1/n}, \quad x_i(0) = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

## 4.2

## Інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків

Аналіз конкретного диференціального рівняння (векторного чи скалярного) зазвичай розпочинають зі спроби відшукування його розв'язків у явному вигляді. Систематичну теорію інтегровності диференціальних рівнянь було розроблено в другій половині XIX ст. норвезьким математиком С. Лі. В її основі лежить поняття симетрії диференціального рівняння (з ним ми вже зустрічалися, коли вивчали квазіоднорідне рівняння першого порядку). Цим терміном позначають перетворення, яке кожен розв'язок диференціального рівняння переводить у його ж розв'язок. Програма даного курсу не передбачає виклад основ теорії С. Лі. Однак ми завжди матимемо на увазі фундаментальний принцип цієї теорії: властивість інтегровності диференціального рівняння безпосередньо пов'язана з наявністю в нього достатньо широкої множини симетрій.

У даному пункті розглядатимемо диференціальне рівняння  $n$ -го порядку

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (4.10)$$

в якому  $x$  — незалежна змінна, а  $y = y(x)$  — шукана функція. Зради простоти вважатимемо, що функція  $F(x, y, p_1, \dots, p_n)$  визначена в усьому просторі  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Загальним розв'язком рівняння (4.10) називатимемо  $n$ -параметричну сім'ю функцій

$$y = \varphi(x; c_1, \dots, c_n) \quad (4.11)$$

(параметри  $c_1, \dots, c_n$  цієї сім'ї називатимемо *довільними сталими*), якщо кожна функція з цієї сім'ї є розв'язком рівняння (4.10), і навпаки, кожен розв'язок рівняння можна задати формулою (4.11), зафіксувавши відповідним чином значення довільних сталих. Якщо співвідношення  $\Phi(x, y; c_1, \dots, c_n) = 0$  визначає загальний розв'язок рівняння (4.10) у неявному вигляді, то воно називається *загальним інтегралом* рівняння (4.10). Один з основних підходів до відшукування загального розв'язку полягає в послідовному зниженні порядку рівняння (4.10). Еталоном із цього погляду може слугувати рівняння, яке ми розглянемо в наступному підпункті.

#### 4.2.1. Рівняння, що не містить в явному вигляді шуканої функції

Розглянемо рівняння вигляду

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (4.12)$$

Якщо покласти  $z = y'$ , то дістанемо рівняння  $(n - 1)$ -го порядку

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Нехай нам удалося знайти його загальний розв'язок  $z = \varphi_1(x; c_1, \dots, c_{n-1})$ . Тоді

$$y' = \varphi_1(x; c_1, \dots, c_{n-1}),$$

і після інтегрування дістанемо загальний розв'язок вихідного рівняння (4.12):

$$y = \int \varphi_1(x; c_1, \dots, c_{n-1}) dx + c_n.$$

Зауважимо, що тут символ невизначеного інтеграла вживається для позначення *деякої* (а не всіх) первісної підінтегральної функції.

#### □ Приклад 4.1

Знайдемо форму, якої набуває під дією власної ваги довгий канат, закріплений своїми кінцями в заданих точках  $A$  та  $B$ .

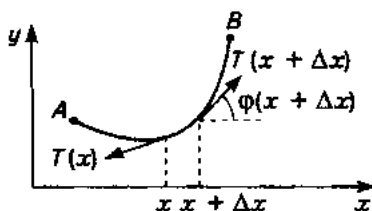


Рис. 4.1

Припустимо, що канат не знає розтягу. Зрозуміло, що, перебуваючи в стані рівноваги, канат лежатиме у вертикальній площині, яка проходить через точки  $A$  та  $B$ . Запровадимо в цій площині стандартним способом декартову систему координат  $xOy$ . Шукана форма каната є графіком функції  $y = y(x)$ .

Розглянемо малу ділянку каната, кінці якої мають абсциси  $x$  та  $x + \Delta x$  (рис. 4.1). У стані рівноваги рівнодійна всіх сил, прикладених до цієї ділянки, дорівнює нулю. Нехай  $T(x)$  — значення сили натягу каната в точці з абсцисою  $x$ , а  $\varphi(x)$  — кут між дотичною до графіка функції  $y(x)$  у точці  $(x, y(x))$  та віссю абсцис. Оскільки сила натягу  $T(x)$  спрямована вздовж зазначеної дотичної, то значення її вертикальної складової становить

$$T_v(x) = T(x) \sin \varphi(x) = \frac{T(x) \operatorname{tg} \varphi(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi(x)}} = \frac{T(x)y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}},$$

а горизонтальної —

$$T_h(x) = T(x) \cos \varphi(x) = \frac{T(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}.$$

Вага ділянки каната пропорційна її довжині й обчислюється за формулою  $\rho \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt$ , де  $\rho$  — вага одиниці довжини каната. Тепер для вертикальної і горизонтальної складових рівнодійної сил, прикладених до малої ділянки каната, маємо умови

$$\begin{aligned} \frac{T(x + \Delta x)y'(x + \Delta x)}{\sqrt{1 + (y'(x + \Delta x))^2}} - \frac{T(x)y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} - \rho \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt &= 0; \\ \frac{T(x + \Delta x)}{\sqrt{1 + (y'(x + \Delta x))^2}} - \frac{T(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} &= 0. \end{aligned}$$

Поділивши кожен з цих рівностей на  $\Delta x$  та перейшовши до границі при  $\Delta \rightarrow 0$ , дістанемо

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{T(x)y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} \right) - \rho \sqrt{1 + (y'(x))^2} = 0;$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{T(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} \right) = 0.$$

Із другої рівності випливає, що горизонтальна складова сили натягу — стала величина:  $\frac{T(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} =: H \equiv \text{const}$ . Відтак перша рівність набуває вигляду диференціального рівняння

$$Hy' - \rho\sqrt{1+(y'(x))^2} = 0.$$

Знизимо його порядок підстановкою  $y' = z$ . Після відокремлення змінних та інтегрування дістанемо

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\rho}{H}x + c_1,$$

звідки

$$z = \text{sh} \left( \frac{\rho}{H}x + c_1 \right) \Rightarrow y = \frac{H}{\rho} \text{ch} \left( \frac{\rho}{H}x + c_1 \right) + c_2.$$

Якщо  $(x_1, y_1)$  та  $(x_2, y_2)$  — координати точок  $A$  та  $B$  відповідно,  $l$  — довжина каната, то сталі  $c_1, c_2, H$  слід визначити із системи рівнянь

$$\frac{H}{\rho} \text{ch} \left( \frac{\rho}{H}x_i + c_1 \right) + c_2 = y_i, \quad i = 1, 2;$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y'(x))^2} dx \equiv \frac{H}{\rho} \text{sh} \left( \frac{\rho}{H}x + c_1 \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = l.$$

4.4

#### ◆ Зауваження 4.1

При зниженні порядку рівняння (4.12) залежно від ситуації буває зручно користуватися підстановкою вигляду  $z = f(y')$ , де  $f(p)$  — відповідним чином дібрана функція.

□ **Приклад 4.2**

*Розв'язати рівняння  $y'' + xy' + (xy')^2 = 0$ .*

Дане рівняння має очевидну сім'ю розв'язків  $y = c$ . Для відшукування інших розв'язків поділимо обидві його частини на  $y'^2$  і покладемо  $z = -1/y'$ . Приходимо до лінійного неоднорідного рівняння  $z' - xz + x = 0$ , яке легко інтегрується:  $z = c_1 e^{x^2/2} + 1$ . Тоді

$$y = -\int \frac{dx}{c_1 e^{x^2/2} + 1} + c_2.$$

Зрозуміло, що рівняння вигляду

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

допускає зниження порядку відразу на  $k$  одиниць. Здійснивши підстановку  $y^{(k)} = z$ , дістаємо рівняння

$$F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0. \tag{4.13}$$

Якщо вдалося відшукати його загальний розв'язок  $z = \varphi_k(x; c_1, \dots, c_{n-k})$ , то загальний розв'язок рівняння (4.12) знаходимо послідовним інтегруванням:

$$y^{(k-1)} = \int \varphi_k(x; c_1, \dots, c_{n-k}) dx + c_{n-k+1} =: \varphi_{k-1}(x; c_1, \dots, c_{n-k-1});$$

.....

$$y = \int \varphi_1(x; c_1, \dots, c_{n-1}) dx + c_n =: \varphi(x; c_1, \dots, c_n).$$

Зауважимо, що на практиці може виникнути ситуація, коли замість загального розв'язку рівняння (4.13) вдається знайти його загальний інтеграл

$$\Phi(x, z; c_1, \dots, c_{n-k}) = 0,$$

причому виразити із цього співвідношення в явному аналітичному вигляді  $z$  як функцію змінних  $x, c_1, \dots, c_{n-k}$  неможливо. В такому разі виникає задача відшукування розв'язків *неявного* рівняння вигляду

$$\Phi(x, y^{(k)}) = 0, \quad (4.14)$$

де заради скорочення позначень ми не вказуємо залежність функції  $\Phi$  від довільних сталих. Припустимо, що нам удалося параметризувати множину, задану на площині  $xOz$  умовою

$$\Phi(x, z) = 0.$$

Інакше кажучи, вважатимемо, що цю множину вдалося описати рівняннями

$$x = X(t), \quad z = Y_k(t), \quad t \in I,$$

де

$$X(t), Y_k(t) \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}); \quad \Phi(X(t), Y_k(t)) \equiv 0.$$

Виявляється, що тоді загальний розв'язок рівняння (4.14) можна знайти квадратурами в параметричному вигляді. Справді, запишемо параметричне зображення цього рівняння

$$x = X(t), \quad y^{(k)} = Y_k(t).$$

Використаємо співвідношення  $dy^{(k-1)} = y^{(k)} dx$ . Тоді  $dy^{(k-1)} = Y_k(t) dX(t)$ , звідки

$$y^{(k-1)} = Y_{k-1}(t; C_1) := \int Y_k(t) \dot{X}(t) dt + C_1.$$

Таким чином, дістаємо параметричне зображення диференціального рівняння  $(k-1)$ -го порядку

$$x = X(t), \quad y^{(k-1)} = Y_{k-1}(t; C_1).$$

Продовжуючи процес зниження порядку, в решті-решт дістанемо співвідношення

$$x = X(t), \quad y = Y(t; C_1, \dots, C_k).$$

Воно визначає в параметричному вигляді загальний розв'язок рівняння (4.14).

## 4.2.2. Автономні рівняння

Розглянемо рівняння вигляду

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (4.15)$$

Воно називається *автономним*, оскільки його права частина не містить в явному вигляді незалежної змінної. Незавжди зрозуміти, що коли для розв'язку  $y = y(x)$  рівняння (4.15) існує обернена функція  $x = x(y)$ , то остання має задовольняти диференціальне рівняння, в якому роль незалежної змінної відіграє  $y$  і яке не містить явно  $x$ . Ясно, що таке рівняння допускає зниження порядку. Саме на цьому спостереженні й базується ідея зниження порядку вихідного автономного рівняння.

Перш ніж переходити до її реалізації, потрібно знайти сталі розв'язки рівняння (4.15). Очевидно, що всі вони визначаються коренями рівняння

$$F(y, 0, \dots, 0) = 0.$$

Далі, якщо розв'язок  $y(x)$  нетривіально залежить від  $x$ , так що  $y'(x) \neq 0$ , то для нього існує обернена функція  $x = x(y)$ . В цьому випадку похідна  $y'(x)$  теж допускає зображення у вигляді деякої функції змінної  $y$ :  $y'(x)|_{x=x(y)} = z(y)$ . За допомогою рівняння (4.15) можна тепер дістати диференціальне рівняння для  $z(y)$ . Для цього потрібно:

- поклавши

$$\boxed{y' = z}$$

та вважаючи  $z$  складною функцією  $z = z(y(x))$ , перерахувати похідні  $y'', y''', \dots, y^{(n)}$ :

$$y'' = \frac{d}{dx} z = \frac{dz}{dy} y' = \frac{dz}{dy} z;$$

$$y''' = \frac{d}{dx} \left( \frac{dz}{dy} z \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{dz}{dy} z \right) y' = \frac{d^2 z}{dy^2} z^2 + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 z;$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = Y_n \left( z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} \right);$$

- одержані вирази підставити в диференціальне рівняння (4.15).



Як результат дістаємо диференціальне рівняння  $(n - 1)$ -го порядку, в якому незалежною змінною є  $y$ , а залежною —  $z$ . Якщо для цього рівняння вдасться знайти загальний розв'язок

$$z = \varphi(y; c_1, \dots, c_{n-1}),$$

то, розв'язавши рівняння з відокремленими змінними

$$y' = \varphi(y; c_1, \dots, c_{n-1}),$$

дістанемо  $n$ -параметричну сім'ю розв'язків рівняння (4.15).

### □ Приклад 4.3

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{y''}{1+(y')^2} + \frac{1}{2y} = 0. \quad (4.16)$$

Воно виникає під час розв'язування задачі про брахістохрону (рис. 4.2, а) — криву найшвидшого спуску. Цю задачу в 1696 р. поставив Й. Бернуллі. Вона полягає в тому, щоб серед плоских кривих, які лежать у вертикальній площині й сполучають точки  $A$  та  $B$  ( $B$  розташована нижче від  $A$ ), знайти ту, рухаючися вздовж якої під дією лише сили ваги, матеріальна частинка досягне точки  $B$  за найменший час.

Рівняння (4.16) автономне. Сталих розв'язків воно не має. Отже, поклавши  $y' = z$ ,  $y'' = z \frac{dz}{dy}$ , дістаємо

$$\frac{2z}{1+z^2} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{d \ln(1+z^2)}{dz} = -\frac{d \ln y}{dy},$$

звідки  $z^2 = c_1/y - 1$ . Тепер потрібно знайти розв'язки неявного рів-

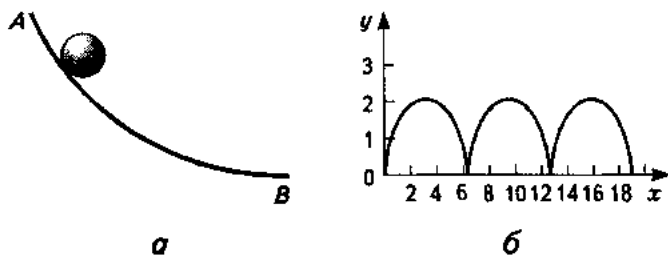


Рис. 4.2

няння  $(y')^2 = c_1/y - 1$ . Відповідна поверхня  $S = \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^3 : p^2 + 1 - c_1/y = 0\}$  допускає параметризацію вигляду

$$x = x, \quad y = c_1 \sin^2 u, \quad p = \operatorname{ctg} u, \quad u \in (0, \pi/2).$$

З урахуванням основного диференціального співвідношення  $dy = p dx$ , маємо

$$2c_1 \sin u \cos u dx = \operatorname{ctg} u dx \Rightarrow dx = c_1 \sin^2 u du,$$

звідки

$$x = c_1 \left( u - \frac{1}{2} \sin 2u \right) + c_2, \quad y = c_1 \sin^2 u.$$

Якщо ввести новий параметр  $u = t/2$ , то дістаємо двопараметричну сім'ю циклоїд (рис. 4.2, б)

$$x = \frac{c_1}{2} (t - \sin t) + c_2, \quad y = \frac{c_1}{2} (1 - \cos t).$$

Пояснимо детальніше, яким чином рівняння (4.16) з'являється в задачі про брахістохрону. Введемо декартову прямокутну систему координат із початком у точці  $A$ . Вісь ординат спрямуємо вертикально вниз. Вважаємо, що початкові значення кінетичної й потенціальної енергій частинки дорівнюють нулю. Криву найшвидшого спуску шукаємо у вигляді графіка функцій  $y = y(x)$ ,  $y(0) = 0$ . Оскільки згідно із законом збереження повної енергії швидкість  $v$  та ордината частинки пов'язані рівністю  $v^2/2 - gy = 0$ , то  $v = \sqrt{2gy}$ , а тоді час, потрібний для подолання елемента дуги  $ds = \sqrt{1 + (y')^2}$ , становить

$$\frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}.$$

Отже, час, який витрачає частинка, спускаючися вздовж графіка функції  $y = y(x)$  із точки  $A$  в точку  $B$ , обчислюється за формулою

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}} dx,$$

де  $b$  — абсциса точки  $B$ .

Тепер задачу про брахістохрону можна сформулювати так: серед усіх неперервно диференційованих функцій, графіки яких

проходять через точки  $A$  та  $B$ , знайти ту, для якої інтеграл

$$I[y] = \int_0^b F(y(x), y'(x)) dx, \text{ де } F(y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}, \text{ набуває най-}$$

меншого значення. Проблеми такого типу вивчає математична теорія, яку називають *варіаційним численням*.

Якщо функція  $y(x)$  мінімізує інтеграл  $I[y]$ , то для кожної функції  $\eta(x) \in C^1([0, b] \rightarrow \mathbb{R})$  такої, що  $\eta(0) = \eta(b) = 0$ , функція  $\Phi(t) := I[y + t\eta]$  досягає мінімуму в точці  $t = 0$ . Але тоді

$$\Phi'(0) = \int_0^b [F'_y(y, y')\eta + F'_{y'}(y, y')\eta'] dx = 0.$$

Інтегрування частинами дає

$$\int_0^b F'_{y'}(y, y')\eta' dx = - \int_0^b \eta \frac{d}{dx} F'_y(y, y') dx.$$

Отже,

$$\int_0^b [F'_y(y, y') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(y, y')]\eta dx = 0.$$

Для виконання цієї рівності достатньо, щоб

$$F'_y(y, y') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(y, y') = 0,$$

тобто

$$-\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{2y^{3/2}} - \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{y^{1/2}\sqrt{1+(y')^2}} \right) = 0.$$

Звідси після деяких спрощень і дістаємо рівняння (4.16).

### 4.2.3. Рівняння, однорідне щодо шуканої функції та її похідних

Розглянемо рівняння (4.10), в якому функція  $F(x, y, p_1, \dots, p_n)$  є однорідною з деяким степенем  $\nu$  за змінними  $y, p_1, \dots, p_n$ , тобто

$$F(x, \lambda y, \lambda p_1, \dots, \lambda p_n) \equiv \lambda^\nu F(x, y, p_1, \dots, p_n) \quad \forall \lambda > 0. \quad (4.17)$$

Таке рівняння є інваріантним відносно розтягів  $y \mapsto \lambda y$ . Зрозуміло, що за цих перетворень вираз  $y'/y$  залишається незмінним. Цей інваріант ми й вважатимемо новою шуканою функцією. Отже, для зниження порядку рівняння, ліва частина якого має властивість (4.17), потрібно:

- увівши нову залежну змінну  $z$  за формулою

$$y' = yz,$$

перерахувати похідні:

$$\begin{aligned} y'' &= y'z + yz' = y(z^2 + z'); \\ y''' &= y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^2 + 3zz' + z''); \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= yP_n(z, z', \dots, z^{(n-1)}) \end{aligned}$$

(тут  $P_n$  — деякий поліном своїх змінних);

- одержані вирази підставити у вихідне рівняння й, використавши властивість (4.17), при  $y \neq 0$  дістати співвідношення

$$F(x, 1, \text{sign } y \cdot z, \dots, \text{sign } y \cdot P_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0. \quad (4.18)$$

Як бачимо, (4.18) — це рівняння  $(n - 1)$ -го порядку. Якщо  $z = \psi(x; c_1, \dots, c_{n-1})$  — його загальний розв'язок, то з урахуванням вигляду зробленої підстановки  $n$ -параметричну сім'ю розв'язків вихідного рівняння знаходимо так:

$$y' = \psi(x; c_1, \dots, c_{n-1})y \Rightarrow y = c_n e^{\int \psi(x; c_1, \dots, c_{n-1}) dx}.$$

До цього результату ми прийшли за умови, що  $y \neq 0$ . Тому окремо слід перевірити, чи має рівняння (4.17) тривіальний розв'язок  $y \equiv 0$ , який відповідає значенню  $c_n = 0$ . Позитивна відповідь буде в тому випадку, коли  $F(x, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0$ .

#### □ Приклад 4.4

*Зінтегруємо рівняння*

$$yy'' - y'^2 + f(x)yy' + g(x)y^2 = 0,$$

де  $f(x), g(x) \in C(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$  — довільні неперервні функції.

Очевидно, що рівняння має тривіальний розв'язок  $y = 0$ . Для відшукування інших розв'язків зробимо підстановку  $y' = yz$ ,  $y'' = y(z^2 + z')$ . Дістанемо лінійне неоднорідне рівняння

$$z' + f(x)z + g(x) = 0,$$

для якого методом варіації довільних сталих знаходимо загальний розв'язок

$$z = e^{-\int f(x) dx} \left( c_1 - \int e^{\int f(x) dx} g(x) dx \right) =: \psi(x; c_1).$$

Тепер уже легко знайти розв'язки вихідного рівняння:

$$y' = \psi(x; c_1)y \Rightarrow y = c_2 e^{\int \psi(x; c_1) dx}.$$

Як бачимо, серед функцій цієї сім'ї міститься й розв'язок  $y = 0$ .

#### 4.2.4. Квазіоднорідне рівняння

Розглянемо клас рівнянь вигляду (4.10), які залишаються інваріантними при розтягах

$$x \mapsto \lambda x, \quad y \mapsto \lambda^\sigma y \quad \forall \lambda > 0, \quad (4.19)$$

де  $\sigma$  — деяке дійсне число. Такі рівняння називаються *квазіоднорідними*. При розтягах вигляду (4.19) похідні функції  $y(x)$  перетворюються за правилом  $y^{(k)} \rightarrow \lambda^{\sigma \cdot k} y^{(k)}$ . Отже, до класу квазіоднорідних належать рівняння вигляду (4.10), в яких функція  $F(x, y, p_1, \dots, p_n)$  має властивість

$$F(\lambda x, \lambda^\sigma y, \lambda^{\sigma-1} p_1, \dots, \lambda^{\sigma-n} p_n) = \lambda^\gamma F(x, y, p_1, \dots, p_n) \quad \forall \lambda > 0, \quad (4.20)$$

де  $\gamma$  — деяке дійсне число. Для зниження порядку квазіоднорідного рівняння при  $x > 0$  потрібно:

- вважаючи  $v$  новою шуканою функцією нової незалежної змінної  $u$  здійснити підстановки

$$\boxed{x = e^v, \quad y = ue^{\sigma v}, \quad w = \frac{dv}{du}}; \quad (4.21)$$

- перерахувати операцію диференціювання

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{e^v dv} = \frac{1}{e^v w} \frac{d}{du} = e^{-v} w^{-1} \frac{d}{du}$$

і похідні:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{-v} w^{-1} \frac{d}{du} (ue^{\sigma v}) = e^{-v} w^{-1} \left( e^{\sigma v} + \sigma u e^{\sigma v} \frac{dv}{du} \right) = \\ &= e^{(\sigma-1)v} (w^{-1} + \sigma u); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= e^{-v} w^{-1} \frac{d}{du} [e^{(\sigma-1)v} (w^{-1} + \sigma u)] = \\ &= e^{(\sigma-2)v} \left[ (2\sigma-1)w^{-1} - w^{-1} \frac{dw}{du} + \sigma(\sigma-1)u \right]; \end{aligned}$$

.....

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{(\sigma-n)v} P_n \left( u, w^{-1}, \frac{dw}{du}, \dots, \frac{d^{n-1} w}{du^{n-1}} \right)$$

(тут  $P_n$  — деякий поліном своїх змінних);

- одержані вирази підставити у вихідне рівняння й, використавши властивість (4.20), дістати диференціальне рівняння  $(n-1)$ -го порядку

$$F \left( 1, u, w^{-1} + \sigma u, \dots, P_n \left( u, w^{-1}, \frac{dw}{du}, \dots, \frac{d^{n-1} w}{du^{n-1}} \right) \right) = 0. \quad (4.22)$$

#### □ Приклад 4.5

*Розглянемо рівняння*

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y^a = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Це рівняння було одержано Р. Емденом у 1907 р. при вивченні умов рівноваги політропної газової кулі (зірки). Покажемо, що воно квазіод-

норідне. Зробимо розтяг вигляду (4.19) із поки що невідомою вагою  $\sigma$ . Дістанемо

$$\lambda^{\sigma-2} y'' + \lambda^{\sigma-2} \frac{2}{x} y' + \lambda^{\sigma} y^{\sigma} = 0.$$

Для інваріантності рівняння Емдена відносно перетворення (4.19) необхідно й достатньо, щоб  $\sigma - 2 = a\sigma$ . Отже, при  $a \neq 1$  це рівняння квазі-однорідне, причому  $\sigma = 2/(1 - a)$ . Підстановкою (4.21) рівняння Емдена зводиться до рівняння першого порядку

$$w^{-3} \frac{dw}{du} - (1 + 2\sigma)w^{-1} - (\sigma + \sigma^2)u - u^a = 0, \quad \sigma = 2/(1 - a).$$

При  $a = 5$  маємо  $\sigma = -1/2$  і рівняння з відокремленими змінними

$$w^{-3} \frac{dw}{du} = u^5 - \frac{u}{4}$$

із загальним інтегралом  $w^{-2} = \frac{u^2}{4} - \frac{u^6}{3} + c_1$ . Отже, в цьому випадку рівняння Емдена інтегровне в квадратурах. Поклавши  $W_{\pm}(u; c_1) := \pm \left( \frac{u^2}{4} - \frac{u^6}{3} + c_1 \right)^{-1/2}$ , маємо:

$$\frac{dv}{du} = W_{\pm}(u; c_1) \Rightarrow v = \int W_{\pm}(u; c_1) du + c_2 =: V_{\pm}(u; c_1, c_2).$$

Отже, при  $x > 0$  знайдено загальний розв'язок рівняння Емдена в параметричній формі

$$\{y \equiv 0\} \cup \left\{ x = e^{V_{\pm}(u; c_1, c_2)}, y = ue^{-V_{\pm}(u; c_1, c_2)/2} \right\}.$$

Зазначимо, що перші два зі співвідношень (4.21) дають змогу виключити параметр  $u: u = y/\sqrt{|x|}$ . Нарешті, зауваживши, що рівняння Емдена інваріантне відносно відображення  $x \mapsto -x$ , ми охопимо й випадок, коли  $x < 0$ , якщо при виключенні параметра  $u$  покладемо  $u = y/\sqrt{|x|}$ .

### 4.2.5. Рівняння у формі повної похідної

Диференціальне рівняння (4.10), в якому

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \tilde{F}'_x(x, y, \dots, y^{(n-1)}) + \tilde{F}'_y(x, y, \dots, y^{(n-1)})y' + \\ + \tilde{F}'_{p_1}(x, y, \dots, y^{(n-1)})y'' + \dots + \tilde{F}'_{p_{n-1}}(x, y, \dots, y^{(n-1)})y^{(n)}, \quad (4.23)$$

де  $\tilde{F}(x, y, p_1, \dots, p_{n-1})$  — неперервно диференційовна функція, можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dx} \tilde{F}(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = 0.$$

Це й є рівняння у формі повної похідної. Воно очевидним чином допускає зниження порядку:

$$\tilde{F}(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = c_1.$$

Дане співвідношення називається *першим проміжним інтегралом* вихідного диференціального рівняння. Зрозуміло, що лінійність функції  $F(x, y, p_1, \dots, p_n)$  щодо  $p_n$  є необхідною ознакою рівняння у формі повної похідної.

Якщо вихідне рівняння (4.10) не задовольняє умову (4.23), то можна спробувати знайти таку функцію  $\mu(x, y, \dots, y^{(n)})$  (інтегрувальний множник), що  $\mu F$  уже має потрібні властивості.

#### □ Приклад 4.6

Знайдемо розв'язок початкової задачі

$$yy'' - y'y'' - y^3 y' = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1/2, \quad y''(0) = 1/2.$$

Поділимо обидві частини рівняння на  $y^2$ . Дістанемо

$$\frac{yy'' - y'y''}{y^2} - yy' = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{y''}{y} - \frac{y^2}{2} \right) = 0.$$

Звідси  $\frac{y''}{y} - \frac{y^2}{2} = c_1$ . Дане рівняння домножимо на  $yy'$ , попередньо визначивши з початкових умов значення  $c_1 = 0$ . Матимемо



$$y'y'' - \frac{y^3 y'}{2} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{y'^2}{2} - \frac{y^4}{8} \right) = 0.$$

Звідси  $y'^2 - y^4/4 = c_2$  і початкові умови дають змогу знайти  $c_2 = 0$ . Після цього приходимо до рівняння  $y' = -y^2/2$  (вибір знака «-» пояснюється початковими умовами), інтегрування якого не викликає жодних труднощів. Остаточна відповідь:  $y = 2/(x + 2)$ .

#### □ Приклад 4.7

У теорії хвильових процесів виникає рівняння з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Воно називається *рівнянням Кортевега—де Фріза* (КдФ). Значний інтерес становлять розв'язки цього рівняння типу «біжуча хвиля», які мають вигляд  $u = u(x - at)$ . Аби така функція задовольняла рівняння КдФ, необхідно й достатньо, щоб функція однієї змінної  $u(x)$  була розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$y'' + (y - a)y' = 0. \quad (4.24)$$

Останнє має форму повної похідної й допускає зниження порядку:

$$y' + y^2/2 - ay = c_1.$$

Порядок цього рівняння, своєю чергою, можна знизити, домноживши його на інтегральний множник  $\mu = y'$ . Після очевидних операцій дістаємо рівняння

$$y'^2/2 = ay^2/2 - y^3/6 + c_1 y + c_2,$$

яке можна зінтегрувати, розв'язавши відносно похідної.

Значний інтерес для теорії хвиль становлять обмежені розв'язки цього рівняння. При  $c_1 = c_2 = 0$  їх можна виразити через елементарні функції. Справді, в цьому випадку маємо

$$y' = \pm \sqrt{y^2(a - y/3)}. \quad (4.25)$$

Вважаємо, що  $a > 0$ . З урахуванням того, що  $y = 0$  та  $y = 3a$  — положення рівноваги рівняння (4.25), шукатимемо розв'язок, графік якого лежить

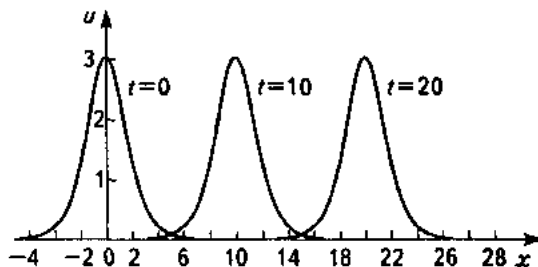


Рис. 4.3

у смугі  $0 < y < 3a$ . Відокремивши в (4.25) змінні та зінтегрувавши одержане рівняння, дістанемо

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{a-y/3}} = \pm x + c.$$

Оскільки рівняння (4.25) автономне, то довільну сталу  $c$  можна покласти рівною нулю, адже, якщо  $y(x)$  — його розв'язок, то  $y(x+c)$  — теж розв'язок. Інтеграл у лівій частині обчислюється підставленням  $z = \sqrt{a-y/3}$ . Маємо

$$\ln \frac{\sqrt{a+z}}{\sqrt{a-z}} = \pm \sqrt{ax} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{a}(e^{\pm\sqrt{ax}} - 1)}{e^{\pm\sqrt{ax}}},$$

звідки знаходимо частинний розв'язок вигляду

$$y = 3a \operatorname{ch}^{-2} \left[ \frac{\sqrt{ax}}{2} \right].$$

Отже, рівняння КдФ має розв'язок типу «біжуча хвиля»

$$u = 3a \operatorname{ch}^{-2} \left[ \frac{\sqrt{a}(x-at)}{2} \right].$$

Цей розв'язок, урахувавши специфічну форму його графіка, називають *усобленою хвилею* (solitary wave), або *солітоном* (рис. 4.3).

#### 4.2.6. Загальний підхід до зниження порядку\*

У пп. 4.2.1—4.2.4 було розглянуто чотири типи диференціальних рівнянь, які допускають зниження порядку. Для кожного з цих типів зниження порядку досягалось завдяки вдалому вибору відповідної заміни змінних. Для того щоб зрозуміти, на підставі якого загального принципу відбувався цей вибір, звернемо увагу на такий факт. Рівняння кожного зі згаданих чотирьох типів об'єднує одна спільна риса — інваріантність відносно певної однопараметричної сім'ї перетворень. А саме, рівняння  $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  не змінюється внаслідок трансляції вигляду  $x \mapsto x, y \mapsto y + s$ , де  $s$  — довільне дійсне число; автономне рівняння  $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  — внаслідок трансляції вигляду  $x \mapsto x + s, y \mapsto y$ ; рівняння, однорідне щодо  $y$ , — при розтягах  $x \mapsto x, y \mapsto \lambda y$ , де  $\lambda$  — довільне додатне число; квазіоднорідне рівняння — при розтягах  $x \mapsto \lambda x, y \mapsto \lambda^{\alpha} y$ . Незавжди помітити, що в кожному з цих випадків відповідна сім'я перетворень інваріантності утворює групу відносно операції суперпозиції (перевірте!). Виявляється, ця обставина не є випадковою: якщо відома однопараметрична група перетворень інваріантності диференціального рівняння, то можна вказати заміну змінних, яка дає змогу знизити його порядок.

Перш ніж обґрунтувати це твердження, розглянемо, як перетворюється рівняння (4.10) унаслідок заміни змінних загального вигляду й на цій основі введемо поняття симетрії диференціального рівняння.

Нехай заміна змінних має вигляд

$$\tilde{x} = X(x, y), \quad \tilde{y} = Y(x, y), \quad (4.26)$$

де  $X: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  та  $Y: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  —  $n$  разів неперервно диференційовні функції. Будемо вимагати, щоб частинні похідні  $X'_x(x, y)$  та  $Y'_y(x, y)$  одночасно не перетворювалися в нуль. Виразимо похідні  $\frac{d^k \tilde{y}}{d\tilde{x}^k}$  через  $x, y, y', \dots, y^{(k)}, k = 1, \dots, n$ . Маємо:

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{dY/dx}{dX/dx} = \frac{Y'_x + Y'_y y'}{X'_x + X'_y y'} =: P_1(x, y, y'),$$

(4.27)

$$\frac{d^k \tilde{y}}{d\tilde{x}^k} = \frac{dP_{k-1}/dx}{dX/dx} =: P_k(x, y, y', \dots, y^{(k)}), \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Підставивши нові змінні  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  та похідні  $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}$ , ...,  $\frac{d^n \tilde{y}}{d\tilde{x}^n}$  у ліву частину рівняння (4.10), дістанемо:

$$F\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}, \dots, \frac{d^n \tilde{y}}{d\tilde{x}^n}\right) = \tilde{F}(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, y, p_1, \dots, p_n) &:= \\ &:= F(X(x, y), Y(x, y), P_1(x, y, p_1), \dots, P_n(x, y, p_1, \dots, p_n)). \end{aligned}$$

Позначимо через  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$  область визначення функції  $\tilde{F}(x, y, p_1, \dots, p_n)$ , тобто

$$\mathcal{D} = \{(x, y, p_1) \in \mathbb{R}^3 : X'_x + X'_y p_1 \neq 0\} \times \{(p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{(n-1)}\}.$$

#### Означення 4.2

*Перетворення (4.26) називають симетрією рівняння, якщо*

$$\begin{aligned} \{(x, y, p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{D} : F(x, y, p_1, \dots, p_n) = 0\} &\subseteq \\ \subseteq \{(x, y, p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{D} : \tilde{F}(x, y, p_1, \dots, p_n) = 0\}. \end{aligned}$$

Найважливіша властивість симетрії полягає в тому, що вона кожен розв'язок  $y(x)$ ,  $x \in I$  рівняння (4.10) за умови, що  $|X'_x + Y'_y y'|_{y=y(x)} \neq 0$ ,  $x \in I$ , відображає в розв'язок. Справді, для такого розв'язку співвідношення

$$\tilde{x} = X(x, y(x)), \quad \tilde{y} = Y(x, y(x)), \quad x \in I$$

визначають функцію  $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$  на деякому інтервалі  $J$ , адже  $\frac{dX(x, y(x))}{dx} \neq 0$ , і, отже, перше з цих співвідношень однозначно розв'язується відносно  $x$ . При параметричному диференціюванні згідно з формулами (4.27) маємо

$$\frac{d^k \tilde{y}}{d\tilde{x}^k} = P_k(x, y(x), \dots, y^{(k)}(x)), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Оскільки  $F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ ,  $x \in I$ , то за означенням симетрії

$$\tilde{F}(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) =$$

$$= F(X(x, y(x)), Y(x, y(x)), \dots, P_n(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x))) = 0, \quad x \in I,$$

звідки  $F\left(\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x}), \dots, \frac{d^n \tilde{y}(\tilde{x})}{d\tilde{x}^n}\right) = 0$ ,  $\tilde{x} \in J$ . Отже,  $\tilde{y}(\tilde{x})$  — розв'язок рівняння (4.10).

Процес обчислення функцій  $P_k$ , які фігурують у формулах (4.27), можна алгоритмізувати в такий спосіб. Визначимо операцію  $D$ , яка неперервно диференційовній функції  $k+2$  змінних  $(x, y, p_1, \dots, p_k)$  ставить у відповідність функцію  $k+3$  змінних  $(x, y, p_1, \dots, p_{k+1})$  за правилом

$$Df(x, y, p_1, \dots, p_k) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p_1 + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial p_i} p_{i+1}.$$

Неважко помітити, що дія операції  $D$  на функцію  $f(x, y, p_1, \dots, p_k)$  формалізує повне диференціювання за змінною  $x$  функції  $f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x))$ . Тепер функції  $P_k$  можна обчислювати за рекурентними формулами

$$P_1 = \frac{DY}{DX}, \quad P_{k-1} = \frac{DP_k}{DX}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (4.28)$$

### Означення 4.3

Покладемо  $Z(x, y) := (X(x, y), Y(x, y))$ . Відображення  $P^n Z: \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^{n+2}$ , яке діє за правилом

$$(x, y, p_1, \dots, p_n) \mapsto (X, Y, P_1, \dots, P_n),$$

називають  $n$ -м продовженням відображення  $Z$ .

Таким чином, функція  $\tilde{F}$  у правій частині рівняння, одержаного з (4.10) у результаті заміни змінних (4.26), має вигляд

$$\tilde{F} = F \circ P^n Z,$$

а той факт, що відображення  $Z$  є симетрією рівняння (4.10), виражається умовою

$$\forall (x, y, p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{D}: F(x, y, p_1, \dots, p_n) = 0 \Rightarrow F \circ P^n Z = 0.$$

Зробимо тепер таке припущення **S**: рівняння (4.10) має сім'ю симетрій

$$Z_s : (x, y) \mapsto (X_s(x, y), Y_s(x, y)),$$

залежну від параметра  $s \in \mathbb{R}$ , і, крім того, існує таке взаємно однозначне перетворення

$$W : x = U(u, v), \quad y = V(u, v) \quad (4.29)$$

з функціями  $U(u, v)$ ,  $V(u, v)$  класу  $C^n(\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R})$ , що

$$W \circ T_s = Z_s \circ W, \quad (4.30)$$

де

$$T_s : (u, v) \mapsto (u, v + s)$$

— сім'я трансляцій.

Інакше кажучи, маємо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_s} & \mathbb{R}^2 \\ W \downarrow & & \downarrow W \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{Z_s} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Сенс цієї вимоги полягає в тому, що внаслідок переходу від змінних  $(x, y)$  до нових змінних  $(u, v)$  за формулами (4.29) симетрія  $Z_s$  набуває вигляду трансляції  $T_s$ .

Виявляється, якщо в рівнянні (4.10) зробити заміну змінних (4.29), вважаючи  $v$  новою невідомою функцією нової незалежної змінної  $u$ , то дістанемо рівняння, симетріями якого є трансляції  $T_s$ . Таке рівняння допускає, принаймні локально, зниження порядку підставленням

$\frac{dv}{du} = z$ . (Застереження стосовно локальності пояснюється тим, що після заміни змінних (4.29) функція в правій частині перетвореного рівняння може вже не бути визначеною в усьому просторі  $\mathbb{R}^{n+2}$ .) Формально обґрунтування цього інтуїтивно зрозумілого висновку міститься в твердженнях 4.1, 4.2. Перш ніж їх наводити, проаналізуємо з погляду викладеного загального підходу рівняння, які ми розглянули в пп. 4.2.2—4.2.4.

Сім'я симетрій автономного рівняння має вигляд

$$Z_s: x \mapsto x + s, y \mapsto y.$$

Для того щоб виконувалась умова (4.30),  $W$  слід визначити так:

$$W: x = v, y = u.$$

Проте це означає, що  $u$  потрібно вважати незалежною змінною, а  $x$  — функцією від  $u$ . Зниження порядку досягається підставленням  $\frac{dv}{du} = z$ , або у вихідних змінних  $1/y' = z$ . Однак зручнішою є підстановка  $y' = z$  (див. зауваження 4.1).

Сім'я симетрій рівняння, однорідного щодо  $u$ , має вигляд

$$Z_s: x \mapsto x, y \mapsto e^s y.$$

Для того щоб виконувалась умова (4.30),  $W$  слід визначити так:

$$W: x = u, y = e^v.$$

Справді,  $W \circ T_s = (u, e^{v+s}) = (u, e^s e^v) = Z_s \circ W$ . Зниження порядку досягається підставленням  $\frac{dv}{du} = w$ , або у вихідних змінних  $y' = e^v z = yz$ .

Сім'я симетрій квазіоднорідного рівняння має вигляд

$$Z_s: x \mapsto e^s x, y \mapsto e^{\sigma s} y.$$

Для того щоб виконувалась умова (4.30),  $W$  можна визначити так:

$$W: x = e^v, y = e^{\sigma v} u.$$

Справді,  $W \circ T_s = (e^{v+s}, e^{\sigma(v+s)} u) = (e^s e^v, e^{\sigma s} e^{\sigma v} u) = Z_s \circ W$ . Зниження порядку досягається переходом до нових змінних  $u, v$  та підставленням  $\frac{dv}{du} = w$ .

Нарешті, відзначимо, що зниження порядку лінійного однорідного рівняння

$$\mathcal{L}y := y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

у випадку, коли відомий його нетривіальний розв'язок  $y_1(x)$  (див. п. 2.1.5), теж укладається в схему загального методу. Припущення  $S$  для такого рівняння буде виконуватись, якщо покласти

$$Z_s : (x, y) \mapsto (x, y + sy_1(x)); T_s : x = u, y = y_1(x)v$$

(перевірте!)

Тепер перейдемо до формального обґрунтування описаного методу зниження порядку диференціального рівняння, для якого справджується припущення S. Спочатку знайдемо  $n$ -не продовження суперпозиції відображень.

#### Твердження 4.1

Нехай  $Z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  та  $\tilde{Z} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  —  $n$  разів неперервно диференційовні відображення і  $\hat{Z} = \tilde{Z} \circ Z$ . Тоді в області визначення продовженого відображення  $P^n \hat{Z}$  виконується рівність

$$P^n \hat{Z} = P^n \tilde{Z} \circ P^n Z.$$

#### Доведення

Сенс цього твердження простий: якщо ми маємо перетворення

$$Z : \hat{x} = X(x, y), \hat{y} = Y(x, y);$$

$$\tilde{Z} : \hat{x} = \tilde{X}(\tilde{x}, \tilde{y}), \hat{y} = \tilde{Y}(\tilde{x}, \tilde{y});$$

$$\hat{Z} : \hat{x} = \hat{X}(x, y), \hat{y} = \hat{Y}(x, y),$$

де  $\hat{X} = \tilde{X}(X, Y)$ ,  $\hat{Y} = \tilde{Y}(X, Y)$ , то для того щоб виразити кожную похідну  $\frac{d^k \hat{y}}{d\hat{x}^k}$  через  $x, y, y', \dots, y^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , можна спочатку виразити її через  $\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}, \dots, \frac{d^k \tilde{y}}{d\tilde{x}^k}$ , а потім скористатися формулами (4.26), (4.27). Доведемо цей факт.

Аналогічно (4.28) визначимо послідовності функцій:

$$\tilde{P}_1 = \frac{D\tilde{Y}}{D\tilde{X}}, \tilde{P}_{k+1} = \frac{D\tilde{P}_k}{D\tilde{X}}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\hat{P}_1 = \frac{D\hat{Y}}{D\hat{X}}, \hat{P}_{k-1} = \frac{D\hat{P}_k}{D\hat{X}}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Змінні, від яких залежать функції  $\hat{P}_k$ , позначатимемо через  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k$ . Потрібно довести, що

$$\hat{P}_k = \tilde{P}_k(X, Y, P_1, \dots, P_k) \quad (4.31)$$



для  $k = 1, \dots, n$ . Відповідні міркування проведемо індукцією по  $k$ . Насамперед зауважимо, що

$$D\hat{X} = \frac{\partial \hat{X} \circ Z}{\partial \hat{x}} DX + \frac{\partial \hat{X} \circ Z}{\partial \hat{y}} DY = D\hat{X} \Big|_{\hat{x}=X, \hat{y}=Y, \hat{p}_i=P_i} DX = D\hat{X} \circ P^1 Z \cdot DX.$$

При  $k = 1$  маємо

$$\hat{P}_1 = \frac{D\hat{Y}}{D\hat{X}} = \frac{D\check{Y} \circ P^1 Z \cdot DX}{D\hat{X} \circ P^1 Z \cdot DX} = \check{P}_1 \circ P^1 Z = \check{P}_1(X, Y, P_1).$$

Припустивши тепер, що виконується (4.31), дістанемо

$$\begin{aligned} D\hat{P}_k &= \left( \frac{\partial \check{P}_k \circ P^k Z}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \check{P}_k \circ P^k Z}{\partial \hat{y}} DY + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \check{P}_k \circ P^k Z}{\partial \check{p}_i} DP_i \right) DX = \\ &= D\hat{P}_k \circ P^{k+1} Z \cdot DX, \end{aligned}$$

звідки

$$\hat{P}_{k-1} = \frac{D\hat{P}_k}{D\hat{X}} = \frac{D\check{P}_k \circ P^{k+1} Z \cdot DX}{D\hat{X} \circ P^1 Z \cdot DX} = \check{P}_{k-1} \circ P^{k+1} Z = \check{P}_{k-1}(X, Y, P_1, \dots, P_{k+1}).$$

Зробимо в рівнянні (4.10) заміну змінних (4.29). Поклавши  $\Psi = F \circ P^n W$ , дістанемо рівняння

$$\Psi(u, v, v', \dots, v^{(n)}) = 0, \quad v^{(k)} := \frac{d^k v}{dt^k}. \quad (4.32)$$

#### Твердження 4.2

Нехай виконується припущення S і  $(u_0, v_0, w_{01}, \dots, w_{0n})$  — довільна точка області визначення функції  $\Psi$ . Тоді в досить малому околі цієї точки рівняння (4.32) еквівалентне рівнянню

$$\check{\Psi}(u, v', \dots, v^{(n)}) := \Psi(u, v_0, v', \dots, v^{(n)}) = 0.$$

#### Доведення

Оскільки відображення  $W$  взаємно однозначне, то з рівності  $Z_0 \circ W = W$ , яка є наслідком (4.30) при  $s = 0$ , випливає, що  $Z_0$  — тотожне відображення. Тоді з урахуванням припущення S у досить малому околі точки  $(u_0, v_0, w_{01}, \dots, w_{0n})$  при всіх досить малих за модулем  $s$  маємо

$$\check{F} \circ P^n W = 0 \Rightarrow F \circ P^n Z_s \circ P^n W = 0.$$

Але згідно з твердженням 4.1

$$F \circ P^n Z_s \circ P^n W = F \circ P^n (Z_s \circ W) = F \circ P^n (W \circ T_s) = F \circ P^n W \circ P^n T_s,$$

тобто

$$F \circ P^n W = 0 \Rightarrow F \circ P^n W \circ P^n T_s = 0.$$

Це означає, що принаймні в досить малому околі точки  $(u_0, v_0, w_{01}, \dots, w_{0n})$  при всіх досить малих за модулем  $s$  маємо

$$\Psi(u, v, w_1, \dots, w_n) = 0 \Rightarrow \Psi(u, v + s, w_1, \dots, w_n) = 0,$$

а отже, локально рівняння  $\Psi(u, v, w_1, \dots, w_n) = 0$  та  $\Psi(u, v_0, w_1, \dots, w_n) = 0$  еквівалентні.

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Показати, що розв'язок  $y(x)$  задачі Коші

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x), \quad y(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

де  $f(x) \in C(I \mapsto \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in I$ , має вигляд  $y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi$ .

Довести це твердження за допомогою формули (2.67').

- ② Зінтегрувати рівняння  $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ , якщо відома його параметризація  $y^{(n-1)} = Y_{n-1}(t)$ ,  $y^{(n)} = Y_n(t)$ ,  $t \in I$ .
- ③ Зінтегрувати рівняння  $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ , якщо відома його параметризація  $y^{(n-2)} = Y_{n-2}(t)$ ,  $y^{(n)} = Y_n(t)$ ,  $t \in I$ .
- ④ Розв'язати рівняння:
- а)  $x^2 y'' = (y')^2$ ;                      г)  $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$ ;  
 б)  $(y')^2 + 2yy'' = 0$ ;                      д)  $y'y'' + 3y'y''' = 0$ ;  
 в)  $x^2 yy'' + (y')^2 = 0$ ;                      е)  $y'y'' = 2(y'')^2$ .
- ⑤ Знайти розв'язки задач Коші:
- а)  $4y^* \sqrt{y} = 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ ;      б)  $y^3 y'' + 1 = 0$ ,  $y(0) = 1/2$ ,  $y'(0) = 2$ .
- ⑥ Знизити порядок квазіоднорідного рівняння на півосі  $x < 0$ .

⑦ Знизити порядок у рівнянні, інваріантному відносно перетворень повороту

$$Z_s: (x, y) \mapsto (x \cos s - y \sin s, x \sin s + y \cos s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

*Вказівка.* У даному випадку  $W(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$ .

### 4.3

## Розв'язання систем диференціальних рівнянь. Теорія перших інтегралів

Тут ми розглянемо найпростіші методи інтегрування нормальних систем диференціальних рівнянь та систем у симетричній формі. Буде викладено також теорію перших інтегралів нормальних систем і систем у симетричній формі.

### 4.3.1. Метод виключення

Розглянемо  $n$ -вимірну нормальну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (4.33)$$

Нехай компоненти  $f_i(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  вектор-функції  $f(t, x)$   $n$  разів неперервно диференційовні в деякій області  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Виділимо у векторі  $x = (x_1, \dots, x_n)$  якусь компоненту, наприклад  $x_1$ . Ідея методу виключення полягає в тому, щоб повторним диференціюванням першого рівняння системи дістати систему співвідношень, з яких можна було б виключити змінні  $x_2, \dots, x_n$  і таким чином одержати диференціальне рівняння  $n$ -го порядку відносно змінної  $x_1$ . Опишемо відповідні дії детальніше.

Здиференціюємо обидві частини першого рівняння  $\dot{x}_1 = f_1(t, x)$  за змінною  $t$ :

$$\ddot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \dot{x}_i.$$

Кожну похідну  $\dot{x}_i$  замінимо відповідною компонентою  $f_i(t, x)$  правої частини системи. Тоді матимемо

$$\ddot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} f_i =: F_2(t, x).$$

Аналогічно дістаємо

$$x_1^{(k)} = \frac{\partial F_{k-1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_i} f_i =: F_k(t, x), \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Покладемо для однотипності позначень  $F_1(t, x) := f_1(t, x)$  і припустимо, що систему

$$x_i^{(i)} = F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n-1$$

можна розв'язати відносно  $x_2, \dots, x_n$ :

$$x_i = \Phi_i \left( t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)} \right), \quad i = 2, \dots, n. \quad (4.34)$$

Підставивши ці вирази у співвідношення  $x_1^{(n)} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , дістанемо диференціальне рівняння  $n$ -го порядку відносно змінної  $x_1$  вигляду

$$x_1^{(n)} = \Phi \left( t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)} \right). \quad (4.35)$$

До нього можна застосувати вже відомі нам методи інтегрування диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку.

Нехай  $x_1(t)$ ,  $t \in I$  — розв'язок рівняння (4.35) такий, що точка  $(t, x_1, \dot{x}_1(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t))$  належить області визначення функції  $\Phi$  при  $t \in I$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Тоді, визначивши за допомогою співвідношень (4.34) функції  $x_i(t)$ ,  $i = 2, \dots, n$ , дістанемо розв'язок  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  системи (4.33).

#### □ Приклад 4.8

*Розв'яжемо систему*

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x-t}.$$

Очевидно, що ця система не має розв'язків, які задовольняли б рівність  $\frac{dx}{dt} - 1 = 0$ . Тому, розв'язавши перше рівняння відносно  $u$  та підставивши одержаний результат у друге, матимемо

$$\left(\frac{dx}{dt} - 1\right)^{-2} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{x-t}.$$

Це рівняння можна зобразити у вигляді

$$\left(\frac{dx}{dt} - 1\right)^{-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - 1\right) = (x-t)^{-1} \left(\frac{dx}{dt} - 1\right)$$

або

$$\frac{d}{dt} \ln \left| \frac{dx}{dt} - 1 \right| = \frac{d}{dt} \ln |x-t|.$$

Звідси

$$\frac{dx}{dt} - 1 = c_1(x-t), \quad c_1 \neq 0$$

або

$$\frac{d(x-t)}{dt} = c_1(x-t).$$

Зінтегрувавши останнє рівняння, дістанемо  $x = t + c_2 e^{c_1 t}$ . Використавши перше рівняння системи для відшукування  $y$ , маємо

$$y = \left(1 - \frac{dx}{dt}\right)^{-1} = -(c_1(x-t))^{-1} = -\frac{1}{c_1 c_2 e^{c_1 t}}.$$

Остаточна відповідь:

$$x = t + c_2 e^{c_1 t}, \quad y = -\frac{1}{c_1 c_2 e^{c_1 t}}.$$

### 4.3.2. Означення, геометрична інтерпретація та аналітичний критерій першого інтеграла

Важливу роль при вивченні нормальної системи диференціальних рівнянь (4.33) відіграють функції, які набувають сталих значень уздовж її розв'язків. У теорії диференціальних рівнянь такі функції називають *першими інтегралами*. У випадку, коли система диференціальних рівнянь описує той чи інший механічний або фізичний процес, її перші інтеграли часто можна інтерпретувати як певні закони збереження (енергії, імпульсу, кінетичного моменту тощо).

Переходячи до точних формулювань, припустимо, що в системі (4.33)  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$  і кожен її розв'язок має властивість єдиності.

#### ⇒ Означення 4.4

Функцію  $U(t, x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  називають *першим інтегралом системи (4.33)*, якщо для будь-якого розв'язку  $x(t)$ ,  $t \in I$  цієї системи виконується рівність  $\frac{d}{dt}U(t, x(t)) = 0$  для всіх  $t \in I$ . Перший інтеграл  $U(t, x)$  називають *невиродженим в області  $D$* , якщо

$$\text{grad } U(t, x) := \left( \frac{\partial U(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial U(t, x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U(t, x)}{\partial x_n} \right) \neq 0 \quad \forall (t, x) \in D.$$

Умова невиродженості виключає з розгляду тривіальні перші інтеграли, якими є тотожно сталі функції.

Перший інтеграл допускає прозоре геометричне тлумачення.

#### ⇒ Означення 4.5

Множину  $M \in D$  називають *інтегральною множиною системи (4.33)*, якщо вона має таку властивість: для будь-якої точки  $x \in M$  графік розв'язку, що проходить через цю точку, цілком належить  $M$ .

Найпростішою інтегральною множиною є графік розв'язку — *інтегральна крива*.

Із самого означення першого інтеграла негайно випливає таке твердження.

**Твердження 4.3**

Функція  $U(t, \mathbf{x}) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  є першим інтегралом системи (4.33) тоді й лише тоді, коли множина рівня  $M_c = \{(t, \mathbf{x}) \in D : U(t, \mathbf{x}) = c\}$  для кожного числа  $c$  з області значень  $U(D)$  функції  $U(t, \mathbf{x})$  є інтегральною множиною цієї системи.

Вкажемо простий спосіб, який дає змогу перевірити, чи є задана функція першим інтегралом без використання явного вигляду розв'язків.

**⇒ Означення 4.6**

*Похідною функції  $U(t, \mathbf{x}) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  у силу системи (4.33) називають функцію*

$$\dot{U}_f(t, \mathbf{x}) := \frac{\partial U(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}),$$

де  $f_1(t, \mathbf{x}), \dots, f_n(t, \mathbf{x})$  — компоненти вектор-функції  $f(t, \mathbf{x})$ .

Якщо ввести позначення

$$\text{grad}_{\mathbf{x}} U = \left( \frac{\partial U(t, \mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U(t, \mathbf{x})}{\partial x_n} \right),$$

то похідна в силу системи набирає вигляду

$$\dot{U}_f(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial U(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \langle \text{grad}_{\mathbf{x}} U(t, \mathbf{x}), f(t, \mathbf{x}) \rangle.$$

**Твердження 4.4**

Якщо  $U(t, \mathbf{x}) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$ , то для будь-якого розв'язку  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \in I$  системи (4.33) виконується рівність

$$\frac{d}{dt} U(t, \mathbf{x}(t)) = \dot{U}_f(t, \mathbf{x}(t)) \quad \forall t \in I.$$

**Доведення**

Скориставшись правилом диференціювання складної функції, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U(t, x(t)) &= \left. \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right|_{x=x(t)} + \langle \text{grad}_x U(t, x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \\ &= \left. \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right|_{x=x(t)} + \langle \text{grad}_x U(t, x(t)), f(t, x(t)) \rangle = \dot{U}_f(t, x(t)) \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

**Теорема 4.1****(аналітичний критерій першого інтеграла)**Нехай  $U(t, x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  і виконується рівність

$$\dot{U}_f(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in D. \quad (4.36)$$

Тоді функція  $U(t, x)$  є першим інтегралом системи (4.33).Навпаки, якщо через кожен точку області  $D$  проходить графік хоча б одного розв'язку системи (4.33), а функція  $U(t, x)$  є її першим інтегралом, то така функція задовольняє умову (4.36).**Доведення**Нехай  $U(t, x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  — функція, для якої виконується рівність (4.36). Тоді з огляду на твердження 4.4 для довільного розв'язку  $x(t)$  маємо

$$\frac{d}{dt} U(t, x(t)) = \dot{U}_f(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Отже,  $U(t, x)$  — перший інтеграл.Навпаки, нехай  $U(t, x)$  — перший інтеграл,  $(t_0, x_0)$  — довільна точка з  $D$ , а  $x(t)$ ,  $t \in I$  — розв'язок, для якого  $x(t_0) = x_0$ . Тоді

$$0 = \frac{d}{dt} U(t, x(t)) = \dot{U}_f(t, x(t)) \quad \forall t \in I.$$

Поклавши тут  $t = t_0$ , дістанемо  $\dot{U}_f(t_0, x_0) = 0$ . Оскільки точка  $(t_0, x_0) \in D$  — довільна, то звідси випливає (4.36).**◆ Зауваження 4.2**З теореми Пеано, яку буде доведено в п. 5.1.1, випливає, що у випадку неперервної вектор-функції  $f: D \mapsto \mathbb{R}^n$  через кожен точку області  $D$  дійсно проходить графік хоча б одного розв'язку системи (4.33). Тому в цьому разі еквівалентне означення першого інтеграла формулюється



так: функція  $U(t, x) \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$  називається першим інтегралом системи (4.33), якщо для неї виконується рівність (4.36).

#### □ Приклад 4.9

Нехай матриця лінійної системи  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in I$  косиметрична:  $A^T(t) = -A(t)$ ,  $t \in I$ . Покажемо, що така система має перший інтеграл  $U(x) := \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ , а отже, її фундаментальна матриця ортогональна.

Скористаємося аналітичним критерієм першого інтеграла. В нашому випадку  $f(t, x) = A(t)x$  і

$$\dot{U}_f = \langle f, x \rangle + \langle x, f \rangle = \langle A(t)x, x \rangle + \langle A^T(t)x, x \rangle = 0,$$

що й треба було довести.

#### □ Приклад 4.10

Розглянемо рух матеріальної точки масою  $m$  у тривимірному просторі  $\mathbb{R}^3$  за умови, що на неї діє лише потенціальне силове поле.

Нехай потенціальна енергія точки є деякою функцією  $\Pi(x) \in C^2(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R})$ . За означенням потенціального силового поля сила, що діє на точку, коли та перебуває в положенні  $x$ , дорівнює  $-\text{grad } \Pi(x)$ . Згідно з другим законом Ньютона рівняння руху мають вигляд

$$m\ddot{x} = -\text{grad } \Pi(x).$$

Цій тривимірній системі диференціальних рівнянь другого порядку відповідає еквівалентна шестивимірна система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1}{m} \text{grad } \Pi(x). \quad (4.37)$$

Покажемо, що функція

$$E(x, y) := \frac{m}{2} \|y\|^2 + \Pi(x)$$

є першим інтегралом системи (4.37). Для цього скористаємось аналітичним критерієм інтеграла. В нашому випадку

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left( y_1, y_2, y_3, -\frac{1}{m} \frac{\partial \Pi(x)}{\partial x_1}, -\frac{1}{m} \frac{\partial \Pi(x)}{\partial x_2}, -\frac{1}{m} \frac{\partial \Pi(x)}{\partial x_3} \right) = \\ &= \left( y, -\frac{1}{m} \text{grad } \Pi(x) \right). \end{aligned}$$

а тому

$$\begin{aligned}\dot{E}_f(x, y) &= \left\langle \frac{\partial E(x, y)}{\partial x}, y \right\rangle + \left\langle \frac{\partial E(x, y)}{\partial y}, -\frac{1}{m} \operatorname{grad} \Pi(x) \right\rangle = \\ &= \langle \operatorname{grad} \Pi(x), y \rangle + \left\langle my, -\frac{1}{m} \operatorname{grad} \Pi(x) \right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Отже,  $E(x, y)$  — перший інтеграл системи (4.37).

Якщо закон руху матеріальної точки описується рівнянням  $\dot{x} = x(t)$ , де  $x(t) \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^3)$ , то  $m \|\dot{x}(t)\|^2/2$  — це її кінетична енергія, а  $\Pi(x(t))$  — потенціальна. Оскільки  $E(x, y)$  — перший інтеграл системи (4.37), то в процесі руху точки її повна енергія не змінюється.

### 4.3.3. Повний набір перших інтегралів

Поняття першого інтеграла дає змогу з нових позицій підійти до проблеми інтегрування системи (4.33). Розглянемо для більшої наочності випадок  $n = 2$ . Нехай нам відомий не вироджений перший інтеграл  $U_1(t, x_1, x_2)$  системи. Множина рівня  $M_{c_1}^1 = \{(t, x_1, x_2) : U_1(t, x_1, x_2) = c_1\}$  цієї функції є поверхнею, яка складається з інтегральних кривих. Для того щоб виокремити одну з них, тобто виділити частинний розв'язок системи, достатньо знати ще один перший інтеграл  $U_2(t, x_1, x_2)$ , який мав би таку властивість: кожна поверхня рівня  $M_{c_2}^2 = \{(t, x_1, x_2) : U_2(t, x_1, x_2) = c_2\}$  перетинається з  $M_{c_1}^1$  по кривій. Зрозуміло, що інтегральна крива  $\gamma$ , яка містить спільну точку обох поверхонь рівня  $M_{c_1}^1, M_{c_2}^2$ , має належати кожній із цих поверхонь. А це означає, що

лінія перетину  $M_{c_1}^1$  з  $M_{c_2}^2$  є інтегральною кривою (рис. 4.4). Отже, пара «істотно різних» перших інтегралів двовимірної системи дає змогу знаходити її інтегральні криві. Звичайно, наведені вище міркування потребують додаткового аналітичного обґрунтування. Однак уже зараз можна висловити сподівання, що й у загальному випадку за наявності в системі (4.33)  $n$  перших інтегралів  $U_1, \dots, U_n$  її інтегральні

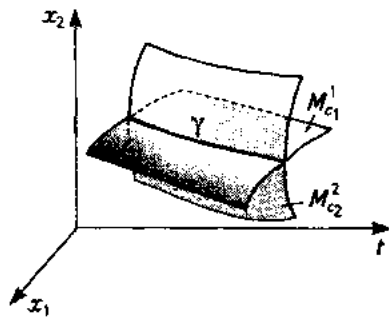


Рис. 4.4

криві можна будувати як лінії, по яких перетинаються поверхні рівнів функцій  $U_1, \dots, U_n$ .

Після цих попередніх зауважень перейдемо до викладу строгих результатів.

### ⇒ Означення 4.7

Функції  $U_i \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, k$  називатимемо (функціонально) незалежними в області  $D$ , якщо в кожній її точці вектори  $\text{grad } U_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  лінійно незалежні.

Підставою для цього означення є такий факт: жодна з функцій  $U_j$  не може бути подана у вигляді неперервно диференційовної функції від функцій  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $i \neq j$ . Зрозуміло, що достатньо перекоонатися в правильності цього твердження у випадку  $j = k$ . Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, навпаки, що на деякій відкритій множині  $G \subset \mathbb{R}^{k-1}$ , що містить область значень відображення  $(U_1, \dots, U_{k-1}) : D \mapsto \mathbb{R}^{k-1}$ , існує функція  $F(u_1, \dots, u_{k-1}) \in C^1(G \mapsto \mathbb{R})$  така, що  $U_k = F(U_1, \dots, U_{k-1})$  у кожній точці  $D$ . Звідси випливає рівність

$$\text{grad } U_k = \frac{\partial F(U_1, \dots, U_{k-1})}{\partial u_1} \text{grad } U_1 + \dots + \frac{\partial F(U_1, \dots, U_{k-1})}{\partial u_{k-1}} \text{grad } U_{k-1},$$

яка суперечить незалежності функцій  $U_1, \dots, U_k$ .

### Твердження 4.5

Незалежність перших інтегралів  $U_1(t, x), \dots, U_k(t, x)$  системи (4.33) еквівалентна лінійній незалежності векторів  $\text{grad}_x U_1(t, x), \dots, \text{grad}_x U_k(t, x)$  у кожній точці  $(t, x) \in D$ .

### Доведення

Нехай  $A(t, x)$  — матриця, рядками якої є  $\text{grad } U_i(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , а  $B(t, x)$  — матриця, рядками якої є  $\text{grad}_x U_i(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Потрібно довести, що ці матриці мають однакові ранги.

З аналітичного критерію першого інтеграла випливає система рівностей

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U_1(t, x)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial U_k(t, x)}{\partial t} \end{pmatrix} + f_1(t, x) \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1(t, x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U_k(t, x)}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \dots + f_n(t, x) \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1(t, x)}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial U_k(t, x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вона означає, що перший стовпець матриці  $A(t, x)$  є лінійною комбінацією інших  $n$  її стовпців, які водночас є стовпцями матриці  $B(t, x)$ . Отже, ці дві матриці мають однакові ранги.

### ⇒ Означення 4.8

*Набір із  $n$  функціонально незалежних перших інтегралів системи (4.33) називають повним набором перших інтегралів цієї системи.*

Покажемо, що у випадку, коли повний набір перших інтегралів системи (4.33) відомий, відшукування розв'язку задачі Коші зводиться до визначення неявної функції.

### Теорема 4.2

Нехай  $U_1(t, x), \dots, U_n(t, x)$  — повний набір перших інтегралів системи (4.33) і  $(t_0, x_0)$  — довільна точка області  $D$ . Тоді система рівнянь

$$U_i(t, x) = c_i^0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.38)$$

де  $c_i^0 = U_i(t_0, x_0)$ , в неявному вигляді однозначно задає розв'язок системи (4.33), графік якого проходить через точку  $(t_0, x_0)$ .

### Доведення

Уведемо до розгляду вектор-функцію

$$F(t, x) := (U_1(t, x) - c_1^0, \dots, U_n(t, x) - c_n^0).$$

Система (4.38) перепишеться у вигляді  $F(t, x) = 0$ . Це рівняння визначає на деякому інтервалі  $I \ni t_0$  у неявному вигляді єдину функцію  $x(t) \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ , яка має такі властивості: 1)  $x(t_0) = x_0$ ; 2)  $F(t, x(t)) = 0$  для всіх  $t \in I$ . Дійсно, оскільки  $F(t_0, x_0) = 0$ ,  $F(t, x) \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^n)$  і матриця  $\frac{\partial F(t, x)}{\partial x}$ , рядками якої є  $\text{grad}_x U_i(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  не вироджена, то існування  $x(t)$  випливає з теореми про неявну функцію (див. дод. 2).

Покажемо тепер, що  $x(t)$ ,  $t \in I$  — розв'язок системи (4.33). Справді, з одного боку, оскільки  $U_i(t, x(t)) = c_i^0$ ,  $t \in I$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то, здиференціювавши ці рівності, дістанемо

$$\left. \frac{\partial U_i(t, x)}{\partial t} \right|_{x=x(t)} + \langle \text{grad}_x U_i(t, x(t)), \dot{x}(t) \rangle = 0 \quad (4.39)$$

$$\forall t \in I, \quad i = 1, \dots, n.$$

З іншого боку, згідно з аналітичним критерієм інтеграла маємо

$$\left. \frac{\partial U_i(t, x)}{\partial t} \right|_{x=x(t)} + \langle \text{grad}_x U_i(t, x(t)), f(t, x(t)) \rangle = 0 \quad (4.40)$$

$$\forall t \in I, i = 1, \dots, n.$$

Віднявши від  $i$ -ї рівності (4.39)  $i$ -ту рівність (4.40), дістанемо

$$\langle \text{grad}_x U_i(t, x(t)), \dot{x}(t) - f(t, x(t)) \rangle = 0 \quad \forall t \in I, i = 1, \dots, n$$

або, що одне й те саме,

$$\frac{\partial F(t, x(t))}{\partial x} [\dot{x}(t) - f(t, x(t))] = 0 \quad \forall t \in I.$$

З невинудженості матриці  $\frac{\partial F(t, x)}{\partial x}$  випливає, що

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I.$$

Отже,  $x(t)$  — розв'язок системи (4.33) на інтервалі  $I$ .

На підставі доведеної теореми можна зробити висновок, що співвідношення

$$U_i(t, x) = c_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

де  $c_1, \dots, c_n$  — довільні сталі, визначають у неявному вигляді загальний розв'язок системи (4.33). Тому цілком природно назвати ці співвідношення *загальним інтегралом* системи. Якщо з нього вдасться виразити  $x$  у вигляді  $x = \varphi(t; c_1, \dots, c_n)$ , то в такий спосіб буде знайдено загальний розв'язок системи (4.33) і, отже, її буде повністю зінтегровано.

Локальна теорема існування повного набору перших інтегралів доводитиметься пізніше.

#### 4.3.4. Випрямлення інтегральних кривих нормальної системи\*

Покажемо, що за допомогою повного набору перших інтегралів нормальної системи можна звести до максимально простого вигляду.

### Теорема 4.3 (про випрямлення)

Нехай  $U_1(t, \mathbf{x}), \dots, U_n(t, \mathbf{x})$  — повний набір перших інтегралів системи (4.33). Тоді заміна залежних змінних

$$u_1 = U_1(t, \mathbf{x}), \dots, u_n = U_n(t, \mathbf{x}) \quad (4.41)$$

зводить систему (4.33) до тривіального вигляду

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (4.42)$$

де  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ .

#### Доведення

Щоб утворити систему диференціальних рівнянь для нових залежних змінних  $u_1, \dots, u_n$ , пов'язаних зі старими співвідношеннями (4.41), виконуємо такі дії:

1) кожен рівність (4.41) диференціюємо за незалежною змінною, вважаючи  $\mathbf{x}$  вектор-функцією, яка задовольняє систему (4.33):

$$\dot{u}_i = \frac{\partial U_i(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial U_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_k} \dot{x}_k = \dot{U}_{i,f}(t, \mathbf{x}); \quad (4.43)$$

2) з рівностей (4.41) виражаємо змінні  $\mathbf{x}$  через змінні  $(t, \mathbf{u})$ :  $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \mathbf{u})$ ; результат підставляємо в (4.43) і дістаємо шукану систему

$$\dot{u}_i = \dot{U}_{i,f}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{u})), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.44)$$

Друга із зазначених дій є коректною, принаймні локальною, якщо система векторів

$$\{\text{grad}_{\mathbf{x}} U_i(t, \mathbf{x})\}_{i=1}^n \quad (4.45)$$

лінійно незалежна в кожній точці області  $D$ . Справді, в цьому випадку ранг матриці Якобі

$$\frac{\partial U(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial U_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial U_n(t, \mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial U_n(t, \mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

де  $U(t, x) := (U_1(t, x), \dots, U_n(t, x))$ , дорівнює  $n$  усюди в  $D$ . Тому, хоч би якою була точка  $(t_0, x_0) \in D$ , знайдеться окіл  $B(t_0, u_0) \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$  точки  $(t_0, u_0) := (t_0, U(t_0, x_0))$ , в якому систему  $U(t, x) = u$  [векторна форма системи (4.41)] можна розв'язати відносно  $x$ . Точніше, існує таке відображення  $X(t, u) \in C^1(B(t_0, u_0) \mapsto \mathbb{R}^n)$ , що  $X(t_0, u_0) = x_0$  і  $U(t, X(t, u)) \equiv u$ . У правильності цього висновку легко переконатись, якщо до відображення  $F(t, x, u) := U(t, x) - u \in C^1(D \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n)$  застосувати теорему про неявну функцію.

Досі в наших міркуваннях використовувався лише факт лінійної незалежності системи векторів (4.45); в усьому іншому функції  $U_1, \dots, U_n$  були довільними. Нехай тепер ці функції утворюють повний набір перших інтегралів системи (4.33). Тоді з урахуванням аналітичного критерію першого інтеграла система (4.44) набирає вигляду (4.42), який не залежить від локально визначеного відображення  $X(t, u)$ .

#### У Наслідок 4.1

Будь-який перший інтеграл  $U(t, x)$  системи (4.33) в досить малому околі довільної точки  $(t_0, x_0) \in D$  можна подати у вигляді

$$U(t, x) = \Phi(U_1(t, x), \dots, U_n(t, x)), \quad (4.46)$$

де  $\Phi(u)$  — неперервно диференційовна функція в деякому околі точки  $u_0 = U(t_0, x_0)$ .

Справді, поблизу точки  $(t_0, x_0)$  заміна змінних (4.41) перетворює перший інтеграл  $U(t, x)$  системи (4.33) на перший інтеграл  $U(t, X(t, u))$  системи (4.42). З аналітичного критерію інтеграла випливає, що  $\frac{\partial}{\partial t} U(t, X(t, u)) = 0$ , тобто функція  $\Phi(u) := U(t, X(t, u))$  не залежить від  $t$ .

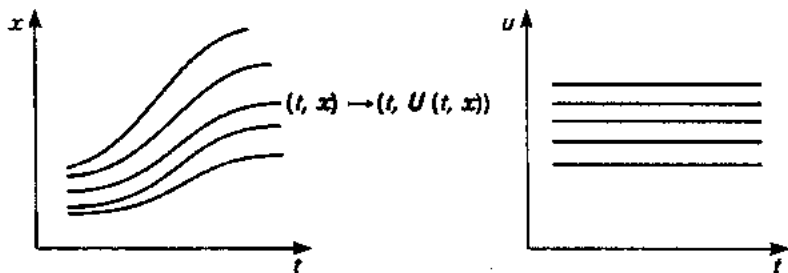


Рис. 4.5

Якщо тепер повернутися до старих змінних за формулами (4.41), то дістанемо зображення (4.46).

Насамкінець дамо геометричне тлумачення теореми 4.3. Графіками розв'язків системи (4.42) є прямі, паралельні осі  $Ot$ . Із доведеної теореми випливає, що відображення  $(t, x) \mapsto (t, U(t, x))$  інтегральні криві системи (4.33) перетворює на паралельні прямі (рис. 4.5).

### 4.3.5. Перші інтеграли автономної системи та системи в симетричній формі

Розглянемо автономну систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.47)$$

де  $f(x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ ,  $D$  — область у  $\mathbb{R}^n$ . Її автономним першим інтегралом називається такий перший інтеграл, який не залежить явно від  $t$ . Аналітичний критерій автономного першого інтеграла має вигляд

$$\dot{U}_f(x) := \langle \text{grad } U(x), f(x) \rangle = 0. \quad (4.48)$$

Виявляється, інтегрування системи (4.47) можна здійснити за допомогою функціонально незалежних автономних інтегралів  $U_1(x), \dots, U_{n-1}(x)$ . Покажемо це.

Утворимо відповідну систему в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x)}. \quad (4.49)$$

Ураховуючи зв'язок між фазовими кривими системи (4.47) та інтегральними кривими системи (4.49) (див. п. 4.1.3), можна стверджувати, що функція  $U(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  є автономним першим інтегралом системи (4.47) тоді й лише тоді, коли вона є першим інтегралом системи в симетричній формі (4.49). Зауважимо тепер, що остання, принаймні локально, є еквівалентною  $(n-1)$ -вимірній нормальній системі. Справді, ми припустили, що векторне поле  $f$  не має особливих точок. Тому, якщо зафіксувати якусь точку  $x_0 \in D$ , то в деякому її околі хоча одна компонента векторного поля  $f$  не перетворюється в нуль. Для визначення



ності припустимо, що таку властивість має перша компонента. Тоді в зазначеному околі точки  $x_0$  систему в симетричній формі можна переписати в еквівалентному вигляді:

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{f_i(x)}{f_1(x)}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Повний набір інтегралів цієї системи складається з  $n - 1$  функції.

Остаточно доходимо до такого висновку: для того щоб зінтегрувати автономну систему, достатньо знайти повний набір перших інтегралів відповідної системи в симетричній формі (набір цих інтегралів складатиметься з  $n - 1$  функції); будь-яку інтегральну криву останньої можна тоді знайти, користуючися теоремою 4.2; множина всіх цих інтегральних кривих утворює  $(n - 1)$ -параметричну сім'ю, залежну від довільних сталих  $c_1, \dots, c_{n-1}$ ; задавши її у вигляді  $x = \xi(\tau; c_1, \dots, c_{n-1})$  (теоретично це завжди можна зробити, принаймні локально), потрібно знайти загальний розв'язок  $\tau = \tau(t + c_n; c_1, \dots, c_{n-1})$  автономного рівняння

$$\dot{\tau} = \frac{\|f(\xi(\tau; c_1, \dots, c_{n-1}))\|^2}{\langle \xi'(\tau; c_1, \dots, c_{n-1}), f(\xi(\tau; c_1, \dots, c_{n-1})) \rangle};$$

після цього загальний розв'язок автономної системи можна подати у вигляді

$$x = \xi(\tau(t + c_n; c_1, \dots, c_{n-1}); c_1, \dots, c_{n-1}).$$

### 4.3.6. Інтегровні комбінації

У деяких випадках перші інтеграли систем (4.47), (4.49) можна знайти, утворюючи так звані *інтегровні комбінації*. При цьому використовують такий факт: якщо  $k_1(x), \dots, k_n(x)$  — довільні неперервні в  $D$  функції, то наслідком системи (4.47) є рівняння

$$\sum_{i=1}^n k_i(x) \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n k_i(x) f_i(x). \quad (4.50)$$

Його дістають, скалярно домноживши обидві частини системи (4.47) на вектор  $k(x) = (k_1(x), \dots, k_n(x))$ . Зрозуміло, що тоді й систему (4.49)

можна продовжити ще однією рівністю, яка є наслідком попередніх:

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x)} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i(x) dx_i}{\sum_{i=1}^n k_i(x) f_i(x)}$$

Функції  $k_i(x)$  намагаються дібрати так, щоб у всіх точках області  $D$  виконувалися рівності

$$k_i(x) = \mu(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n \Leftrightarrow k(x) = \mu(x) \text{grad } U(x);$$

$$\sum_{i=1}^n k_i(x) f_i(x) = 0 \Leftrightarrow \langle k(x), f(x) \rangle = 0$$

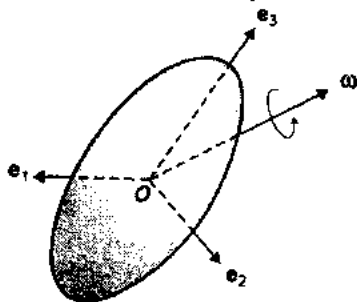
з деякими функціями  $\mu(x) \in C(D \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ,  $U(x) \in C(D \mapsto \mathbb{R})$ . Якщо такий вибір можливий, то функція  $U(x)$  буде першим інтегралом систем (4.47) та (4.49). Справді, оскільки

$$\langle k(x), f(x) \rangle = \mu(x) \langle \text{grad } U(x), f(x) \rangle = 0 \quad \forall x \in D,$$

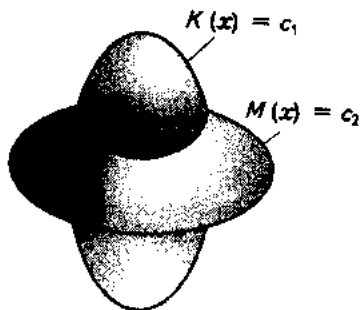
то  $U(x)$  задовольняє умову (4.48)

□ **Приклад 4.11**

До класичних задач механіки належить задача про обертання твердого тіла навколо свого центра інерції  $O$ . Важливою характеристикою руху такого типу є вектор миттєвої кутової швидкості. Відомо, що існують



а



б

Рис. 4.6

жорстко пов'язані з тілом орти  $e_1, e_2, e_3$  (рис. 4.6, а) такі, що його кінетична енергія має вигляд

$$K = \frac{I_1 \dot{x}_1^2 + I_2 \dot{x}_2^2 + I_3 \dot{x}_3^2}{2},$$

де  $I_i$  — момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через  $O$  паралельно  $e_i$ ;  $x_i$  — проекція вектора кутової швидкості  $\omega$  на орт  $e_i$ ,  $i = 1, 3$ . Л. Ейлером було показано, що за умови відсутності зовнішніх сил еволюція в часі вектора  $x = (x_1, x_2, x_3)$  описується системою диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = I^{-1} [Ix, x]. \quad (4.51)$$

Тут  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ ,  $[\cdot, \cdot]$  — символ векторного добутку в  $\mathbb{R}^3$ . Систему Ейлера покоординатно можна записати так:

$$I_1 \dot{x}_1 = (I_2 - I_3)x_2x_3, \quad I_2 \dot{x}_2 = (I_3 - I_1)x_3x_1, \quad I_3 \dot{x}_3 = (I_1 - I_2)x_1x_2.$$

Відповідна система в симетричній формі має вигляд

$$\frac{I_1 dx_1}{(I_2 - I_3)x_2x_3} = \frac{I_2 dx_2}{(I_3 - I_1)x_3x_1} = \frac{I_3 dx_3}{(I_1 - I_2)x_1x_2}. \quad (4.52)$$

Для відшукування інтегровних комбінацій у нетривіальному випадку, коли не справджується умова  $I_1 = I_2 = I_3$ , зауважимо, що вектор  $[Ix, x]$  ортогональний як до вектора  $x$ , так і до вектора  $Ix$ . А тоді

$$\langle I^{-1}[Ix, x], Ix \rangle = \langle [Ix, x], x \rangle = 0 \quad \text{і} \quad \langle I^{-1}[Ix, x], I^2x \rangle = \langle [Ix, x], Ix \rangle = 0.$$

Це означає, що за  $k(x)$  можна взяти як  $Ix = \frac{1}{2} \text{grad} \langle Ix, x \rangle$ , так і  $I^2x = \frac{1}{2} \text{grad} \langle Ix, Ix \rangle$ . В обох випадках  $\mu(x) = 1$ . Таким чином, система Ейлера має два перших інтеграли

$$U_1(x) = K(x) := \frac{1}{2} \langle Ix, x \rangle, \quad U_2(x) = M(x) := \langle Ix, Ix \rangle.$$

Перший із них пов'язаний із законом збереження кінетичної енергії твердого тіла, а другий — зі збереженням кінетичного моменту. Тепер можна зробити висновок, що кожна інтегральна крива системи (4.52) є лінією перетину двох еліпсоїдів

$$K(x) = c_1, \quad M(x) = c_2 \quad (4.53)$$

за відповідного вибору сталих  $c_1, c_2$ . Ця лінія є замкнутою кривою (рис. 4.6, б).

Існує її параметризація  $x = \xi(t)$ , де вектор-функція  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  періодична з періодом  $T$ . Функція  $\lambda(t)$ , визначена згідно з формулою (4.9), теж буде  $T$ -періодичною (звичайно, ця функція залежить також і від  $c_1, c_2$ ).

Тепер розв'яжемо рівняння  $\dot{t} = 1/\lambda(t)$ . Після відокремлення змінних та інтегрування дістаємо співвідношення  $\int_0^t \lambda(s) ds = t + c$ , яке визначає в неявному вигляді функцію  $t = t(t + c)$ . Покладемо  $T = \int_0^1 \lambda(s) ds$  і покажемо, що функцію  $t(t)$  можна подати у вигляді

$$t(t) = \frac{t}{T} + g(t),$$

де  $g(t)$  —  $T$ -періодична функція. Дійсно, покладемо  $g(t) := t(t) - t/T$  і зауважимо, що

$$\begin{aligned} \int_0^{t+1} \lambda(s) ds &= \int_0^1 \lambda(s) ds + \int_1^{t+1} \lambda(s) ds = \\ &= \int_0^1 \lambda(s) ds + \int_0^t \lambda(s+1) ds = T + \int_0^t \lambda(s) ds. \end{aligned}$$

Тому

$$t + T = \int_0^{t+T} \lambda(s) ds = \int_0^{t(t) + g(t+T) - g(t)} \lambda(s) ds + T,$$

звідки

$$\int_0^{t(t) + g(t+T) - g(t)} \lambda(s) ds = t = \int_0^{t(t)} \lambda(s) ds.$$

Оскільки  $\lambda(t)$  не перетворюється в нуль на  $\mathbb{R}$ , то  $g(t+T) = g(t)$ .

Таким чином, розв'язок системи Ейлера, який задовольняє при фіксованих  $c_1, c_2$  рівності (4.53), є  $T$ -періодичною вектор-функцією вигляду  $x = \xi(t + c/T + g(t + c))$ .

Іноді за допомогою інтегрованих комбінацій як наслідок вихідної системи можна дістати систему меншої вимірності, зокрема одне рівняння відносно пари функцій векторної змінної  $x$ . Нехай, наприклад, удалося знайти такі функції  $k_i(x), l_i(x), i = 1, \dots, n$ , що

$$\sum_{i=1}^n k_i(x) dx_i = \mu_1(x) F_1(y_1(x), y_2(x)) dy_1(x),$$

$$\sum_{i=1}^n l_i(x) dx_i = \mu_1(x) F_2(y_1(x), y_2(x)) dy_2(x),$$

$$\sum_{i=1}^n k_i(x) f_i(x) = \mu_2(x) F_3(y_1(x), y_2(x)),$$

$$\sum_{i=1}^n l_i(x) f_i(x) = \mu_2(x) F_4(y_1(x), y_2(x)),$$

де  $\mu_j : D \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $y_i : D \mapsto \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $F_j : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $j = \overline{1, 4}$  — деякі функції. Тоді наслідком системи (4.49) є рівняння

$$\frac{F_1(y_1, y_2)}{F_3(y_1, y_2)} dy_1 = \frac{F_2(y_1, y_2)}{F_4(y_1, y_2)} dy_2.$$

Якщо вдасться знайти його перший інтеграл  $U(y_1, y_2)$ , то функція  $U(x) = U(y_1(x), y_2(x))$  буде першим інтегралом системи (4.49).

#### □ Приклад 4.12

*Зінтегруємо систему*

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$$

Область її визначення — простір  $\mathbb{R}^3$  без прямої  $x = y = z$ . Покладемо  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $k_3 = 0$ ,  $l_1 = l_2 = 0$ ,  $l_3 = 1$ . Дістанемо інтегровну комбінацію

$$\frac{d(x+y)}{z(y-x)} = \frac{dz}{z(x-y)} \Rightarrow d(x+y) = -dz, \quad z \neq 0, \quad x \neq y.$$

Звідси знаходимо перший інтеграл  $U_1 = x + y + z$ .

Покладемо тепер  $k_1 = y$ ,  $k_2 = x$ ,  $k_3 = 0$ ,  $l_1 = l_2 = 0$ ,  $l_3 = 1$ . Матимемо

$$\frac{y dx + x dy}{xy(y-z) + xy(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)} \Rightarrow \frac{dxy}{xy} = -\frac{dz}{z}, \quad xy \neq 0, \quad x \neq y, \quad z \neq 0.$$

Звідси знаходимо ще один перший інтеграл  $U_2 = xyz$ . Оскільки

$$\text{grad } U_1 = (1, 1, 1), \quad \text{grad } U_2 = (yz, xz, xy),$$

то знайдені перші інтеграли функціонально незалежні в області визначення системи. Двопараметрична сім'я інтегральних кривих визначається системою

$$x + y + z = c_1, \quad xyz = c_2.$$

#### □ Приклад 4.13

Знайдемо розв'язок задачі Коші з початковими умовами  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $z(0) = 2$  для системи

$$\dot{x} = x(y - z), \quad \dot{y} = y(z - x), \quad \dot{z} = z(x - y).$$

Цій системі відповідає система в симетричній формі з попереднього прикладу, перші інтеграли якої вже відомі. Враховуючи початкові дані, знаходимо значення довільних сталих  $c_1 = U_1(0, 1, 2) = 3$ ,  $c_2 = U_2(0, 1, 2) = 0$ . Таким чином, інтегральна крива, яка проходить через початкову точку  $(0, 1, 2)$ , лежить на перетині поверхонь

$$x + y + z = 3, \quad xyz = 0.$$

Звідси  $x \equiv 0$ ,  $z = 3 - y$ . Залишилося визначити залежність  $y$  від  $t$ . Уздовж знайденої інтегральної кривої друге рівняння вихідної системи набирає вигляду  $\dot{y} = y(3 - y)$ . Початкову умову  $y(0) = 1$  задовольняє розв'язок  $y = 3e^{3t}/(2 + e^{3t})$ . Остаточна відповідь:

$$x = 0, \quad y = 3e^{3t}/(2 + e^{3t}), \quad z = 6/(2 + e^{3t}).$$

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- Довести, що будь-яка компонента розв'язку лінійної однорідної системи  $\dot{x} = Ax$  зі сталими коефіцієнтами задовольняє лінійне однорідне диференціальне рівняння  $P\left(\frac{d}{dt}\right)x = 0$ , де  $P(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$  — характеристичний поліном матриці  $A$ .
- ✓ *Вказівка.* Використати рівність  $(A - \lambda E_n) \cdot (A - \lambda E_n) = P(\lambda) E_n$ , де  $(A - \lambda E_n)$  — матриця, приєднана до  $(A - \lambda E_n)$ . Переконалися, що в цій рівності параметр  $\lambda$  можна замінити операцією диференціювання  $d/dt$ .
- Використавши формулу Якобі, довести, що функція  $t^i(t, X) = e^{\int_0^t \text{tr} A(s) ds} \det X$  є першим інтегралом лінійної матричної системи  $\dot{X} = A(t)X$ , де  $A(t)$  — матриця розміром  $n \times n$  із неперервними на дійсній прямій елементами.
- Довести, що функції  $f(x)$ ,  $g(x) \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$  із лінійно незалежними в кожній

точці області  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  градієнтами утворюють повний набір автономних інтегралів системи

$$\dot{x} = [\text{grad } f(x), \text{grad } g(x)].$$

- ④ Записати інтеграл повної енергії в задачі 1 тіл (див. приклад В.6).
- ⑤ Нехай  $H(x) \in C^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$  і  $J$  — косиметрична  $(n \times n)$ -вимірна матриця. Система вигляду  $\dot{x} = J \text{grad } H(x)$  називається *гамільтоновою*, якщо  $J$  невідроджена, і *пуассоновою* у випадку виродженості  $J$ ; при цьому функція  $H(x)$  називається *гамільтоніаном*. Довести, що гамільтоніан є першим інтегралом гамільтонової (пуассонової) системи. Довести, що першим інтегралом пуассонової системи є функція  $\langle h, x \rangle$ , де  $h$  — власний вектор матриці  $J$ , який відповідає її нульовому власному числу.
- ⑥ Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y - z), & x(0) = 0, \\ \dot{y} = y(z - x), & y(0) = 0, \\ \dot{z} = z(x - y), & z(0) = 1. \end{cases}$$

- ⑦ Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = -e^{x^2 - y^2} y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = e^{x^2 - y^2} x, & y(0) = 1, \\ \dot{z} = (x^2 + y^2)z, & z(0) = 2. \end{cases}$$

- ⑧ Розглянути модель поширення епідемії захворювання, яке характеризується коротким інкубаційним періодом, у деякій замкненій популяції. В кожен момент часу  $t$  ця популяція розбивається на три групи: ( $S$ ), ( $I$ ) та ( $R$ ). До першої належать особини, сприйнятливі до зазначеного захворювання, але здорові. Кількість особин цієї групи на момент  $t$  позначимо через  $S(t)$ . Групу ( $I$ ) чисельністю  $I(t)$  утворюють хворі особини, які є джерелом поширення інфекції. Особини групи ( $R$ ) чисельністю  $R(t)$  здорові й мають імунітет до даного захворювання. Приймаються такі гіпотези: 1) на контрольному проміжку часу величина всієї популяції не змінюється:  $S(t) + I(t) + R(t) = N = \text{const}$ ; 2) швидкість захворювання особин групи ( $S$ ) [а отже, швидкість поповнення групи ( $I$ )] в момент  $t$  пропорційна з коефіцієнтом пропорційності  $a > 0$  як  $S(t)$ , так і  $I(t)$ ; швидкість одужання особин групи ( $I$ ) [а отже, швидкість переходу їх до групи ( $R$ )] у момент  $t$  пропорційна  $I(t)$  із коефіцієнтом пропорційності  $b > 0$ . Показати, що такій моделі відповідає система

$$\dot{S} = -aSI, \quad \dot{I} = aSI - bI, \quad \dot{R} = bI. \quad (4.54)$$

Зінтегрувати відповідну систему в симетричній формі й описати поведінку фазових кривих системи (4.54).

## ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

### 5.1

#### Існування розв'язку задачі Коші

##### 5.1.1. Теорема Пеано

Існування хоча б одного розв'язку задачі Коші для нормальної системи з неперервною правою частиною гарантує така теорема.

##### Теорема 5.1 (Пеано)

Нехай  $f \in C(\Pi \mapsto \mathbb{R}^n)$ , де

$$\Pi = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Тоді розв'язок задачі Коші

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x|_{t=t_0} = x_0 \quad (5.1)$$

існує принаймні на відрізку  $I_h := [t_0 - h, t_0 + h]$ , де  $h = \min(a, b/M)$ ,  $M = \max_{(t, x) \in \Pi} \|f(t, x)\|$ .

У доведенні цієї теореми істотно використовуються два допоміжних результати.

##### Лема 5.1

Нехай  $D$  — область у  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $(t_0, x_0)$  — фіксована точка з  $D$ ,  $I$  — інтервал (відрізок), який містить точку  $t_0$ . Припустимо, що  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ .



Функція  $x(t) \in C(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ , графік якої належить  $D$ , тоді й лише тоді є розв'язком задачі Коші (5.1), коли вона задовольняє інтегральне рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (5.2)$$

### Доведення

Нехай  $x(t)$  — розв'язок задачі (5.1), визначений на  $I$ . Тоді  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ ,  $t \in I$ . Зінтегрувавши обидві частини цієї рівності в межах від  $t_0$  до  $t$  і врахувавши початкову умову задачі Коші, бачимо, що  $x(t)$  задовольняє на  $I$  рівняння (5.2).

Навпаки, нехай  $x(t)$  — неперервний на  $I$  розв'язок рівняння (5.2), тобто вектор-функція, для якої (5.2) перетворюється і тотожність на  $I$ . Права частина цієї тотожності з огляду на неперервність підінтегральної вектор-функції є вектор-функцією неперервно диференційовною, яка до того ж перетворюється в  $x_0$  при  $t = t_0$ . Здиференціювавши обидві частини (5.2), дістанемо  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ ,  $t \in I$ . Отже, вектор-функція  $x(t)$ ,  $t \in I$  задовольняє рівняння (5.1).

### Лема 5.2

#### (про існування збіжної підпослідовності)

Нехай  $\{x_k(t)\}_{k=1, 2, \dots}$  — послідовність визначених на відрізку  $[\alpha, \beta]$  вектор-функцій, які набувають значень у  $\mathbb{R}^n$ . Припустимо, що існує така стала  $M > 0$ , що для довільної пари точок  $t', t'' \in [\alpha, \beta]$  і для кожного  $k = 1, 2, \dots$  виконується нерівність

$$\|x_k(t') - x_k(t'')\| \leq M |t' - t''|. \quad (5.3)$$

Якщо знайдеться точка  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ , для якої числова послідовність  $\{\|x_k(t_0)\|\}$  обмежена, то з послідовності  $\{x_k(t)\}$  можна вибрати рівномірно збіжну на  $[\alpha, \beta]$  підпослідовність.

### Доведення

За умовою існують числа  $t_0 \in [\alpha, \beta]$  та  $r > 0$  такі, що  $\|x_k(t_0)\| \leq r$  для всіх  $k = 1, 2, \dots$ . Тоді для кожного  $t \in [\alpha, \beta]$  виконується нерівність

$$\begin{aligned} \|x_k(t)\| &\leq \|x_k(t) - x_k(t_0)\| + \|x_k(t_0)\| \leq \\ &\leq M|t - t_0| + r \leq M(\beta - \alpha) + r =: R. \end{aligned}$$

У цьому разі кажуть, що послідовність  $\{x_k(t)\}$  рівномірно обмежена.

Послідовність  $\{x_k(t)\}$  має також і властивість одностайної неперервності. Це означає, що для довільного  $\epsilon > 0$  знайдеться таке  $\delta > 0$ , що нерівність

$$\|x_k(t') - x_k(t'')\| < \epsilon$$

виконуватиметься відразу для всіх точок  $t', t'' \in [\alpha, \beta]$ , відстань між якими менша ніж  $\delta$ , і для всіх  $k = 1, 2, \dots$ . Очевидно, в нашому випадку з огляду на виконання умови (5.3) можна покласти  $\delta = \epsilon/M$ .

Тепер твердження леми стає наслідком відомої теореми Асколі—Арцела (див., наприклад, [5]).

Зради повноти викладу опишемо побудову шуканої під-послідовності. Насамперед зауважимо, що кожную послідовність натуральних чисел  $\{k_j\}_{j=1,2,\dots}$  можна розглядати як функцію  $k(\cdot) : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ , визначену рівністю  $k(j) = k_j$ . При цьому, якщо  $\{k_j\}_{j=1,2,\dots}$  строго монотонно зростає, то  $k(j) \geq j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Надалі ми будемо оперувати лише такими послідовностями натуральних чисел.

Нехай  $\{q_1, q_2, \dots\}$  — раціональні точки відрізка  $[\alpha, \beta]$ , занумеровані в певному порядку. Оскільки всі елементи послідовності  $\{x_k(q_i)\}$  лежать у кулі радіусом  $R$ , то існує строго монотонна функція  $k_1(j)$  така, що послідовність  $\{x_{k_1(j)}(q_1)\}$  збіжна. З тієї самої причини строго монотонну функцію  $k_2(j)$  можна вибрати так, щоб збігалася послідовність  $\{x_{k_1, k_2(j)}(q_2)\}$ , де, нагадаємо,  $k_1 \circ k_2(j) := k_1(k_2(j))$ . Зрозуміло, що послідовність  $\{x_{k_1, k_2(j)}(q_1)\}$  теж збігатиметься. Продовжуючи цю конструкцію, побудуємо послідовність строго монотонних функцій  $k_i(\cdot) : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  так, щоб для кожного натурального  $i$  існувала границя

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_1, \dots, k_i(j)}(q_i) =: \xi_i.$$

Покладемо тепер  $k(j) := k_1 \circ \dots \circ k_j(j)$  і покажемо, що підпослідовність  $\{x_{k(j)}(t)\}$  є шуканою. Спочатку доведемо, що вона збігається на множині  $\{q_1, q_2, \dots\}$ . Для цього достатньо зауважити, що для кожного  $i \in \mathbb{N}$  і  $j > i$  маємо рівність

$$x_{k(j)}(q_i) = x_{k_1, \dots, k_i, k_{i+1}, \dots, k_j(j)}(q_i),$$

а оскільки  $k_{i+1} \circ \dots \circ k_j(j) \geq j$ , то  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k(j)}(q_i) = \xi_i$ .

Нарешті, доведемо, що послідовність  $\{x_{k(i,j)}(t)\}$  рівномірно збігається на  $[\alpha, \beta]$ . Розіб'ємо відрізок  $[\alpha, \beta]$  на  $N$  рівних частин і в кожній із них виберемо по раціональній точці. Позначимо ці точки  $t_1, \dots, t_N$ . Тоді для всіх  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $l = 1, \dots, N$ ,  $i \in \mathbb{N}$  та  $j \in \mathbb{N}$  матимемо

$$\begin{aligned} \|x_{k(i)}(t) - x_{k(j)}(t)\| &\leq \|x_{k(i)}(t) - x_{k(i)}(t_l)\| + \|x_{k(i)}(t_l) - x_{k(j)}(t_l)\| + \\ &+ \|x_{k(j)}(t_l) - x_{k(j)}(t)\| \leq 2M|t - t_l| + \|x_{k(i)}(t_l) - x_{k(j)}(t_l)\|. \end{aligned}$$

Нехай  $\epsilon > 0$  — задане число. Спочатку виберемо  $N = N(\epsilon)$  так, щоб  $2M|\alpha - \beta|/N < \epsilon/2$ . Потім знайдемо таке  $J = J(\epsilon)$ , щоб

$$\max_{l=1, \dots, N} \|x_{k(i)}(t_l) - x_{k(j)}(t_l)\| < \epsilon/2 \quad \forall i, j > J.$$

Це можна зробити з огляду на фундаментальність кожної послідовності  $\{x_{k(i)}(t_l)\}$ ,  $l = 1, \dots, N$ . Нарешті, зауважимо, що для кожного  $t \in [\alpha, \beta]$  серед чисел  $t_1, \dots, t_N$  знайдеться таке  $t_l$ , для якого  $|t - t_l| \leq |\alpha - \beta|/N$ . Тоді

$$\max_{t \in [\alpha, \beta]} \|x_{k(i)}(t) - x_{k(j)}(t)\| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \forall i, j > J.$$

Отже, справджуються умови критерію Коші рівномірної збіжності послідовності вектор-функцій  $\{x_{k(i)}(t)\}$ .

### Доведення теореми Пеано

Покладемо

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Покажемо, що існує вектор-функція  $x(t) \in C(I_h \mapsto B)$ , яка перетворює інтегральне рівняння (5.2) на тотожність. Із леми 5.1 випливатиме тоді, що така вектор-функція буде шуканим розв'язком задачі Коші (5.1).

Спочатку доведемо існування розв'язку рівняння (5.2) на відрізьку  $[t_0, t_0 + h]$ . План доведення буде такий:

1) будуємо послідовність вектор-функцій  $\{x_k(t)\}$  за правилом

$$\begin{cases} x_k(t) = x_0, & \text{якщо } t \in [t_0 - h, t_0] \\ x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s - h/k)) ds, & \text{якщо } t \in [t_0, t_0 + h]; \end{cases}$$

- 2) перевіряємо, що вона задовольняє умови леми 5.2;
- 3) виділяємо з неї рівномірно збіжну на  $[t_0, t_0 + h]$  підпоследовність;
- 4) показуємо, що гранична вектор-функція є розв'язком рівняння (5.2).

Переходимо до реалізації наміченого плану. Переконаємося, що кожна вектор-функція  $x_k(t)$  коректно визначена й неперервна на  $I_h$ . Використаємо метод кроків: будемо послідовно поширювати область визначення  $x_k(t)$  на відрізки  $[t_0 - h, t_0 + jh/k]$ ,  $j = 1, \dots, k$ , стежачи за тим, щоб значення цієї вектор-функції залишалися в кулі  $B$ .

Отже, нехай  $x_k(t) = x_0$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0]$ . Рівність

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s - h/k)) ds \quad (5.4)$$

визначає тоді  $x_k(t)$  на відрізку  $[t_0, t_0 + h/k]$ . При цьому  $x_k(t_0 - 0) = x_k(t_0 + 0) = x_0$ , враховуючи означення  $h$ ,

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x_k(s - h/k)) ds \right\| \leq \\ &\leq M |t - t_0| \leq Mh/k \leq b/k \leq b \end{aligned} \quad (5.5)$$

для всіх  $t \in [t_0, t_0 + h/k]$ . Таким чином,  $x_k(t) \in C([t_0 - h, t_0 + h/k]) \mapsto B$ .

Процес послідовного довизначення вектор-функції  $x_k(t)$  можна тепер продовжити. Міркуючи за індукцією, припустимо, що на  $j$ -му кроці ( $1 \leq j < k$ ) побудовано вектор-функцію  $x_k(t) \in C([t_0 - h, t_0 + jh/k]) \mapsto B$ . Тоді за допомогою рівності (5.4) можемо визначити  $x_k(t)$  як неперервну вектор-функцію на відрізок  $[t_0 - h, t_0 + (j + 1)h/k]$ . Додатково, аналогічно (5.5), показуємо, що на цьому відрізку виконується нерівність

$$\|x_k(t) - x_0\| \leq M |t - t_0| \leq M(j + 1)h/k \leq b(j + 1)/k \leq b.$$

Отже,  $x_k(t) \in C([t_0 - h, t_0 + h]) \mapsto B$ . Крім того,

$$\dot{x}_k(t) = f(t, x_k(t - h/k)), \quad t \in [t_0, t_0 + h] \Rightarrow \|\dot{x}_k(t)\| \leq M$$

для всіх  $t \in [t_0, t_0 + h]$ .

Тепер покажемо, що кожна вектор-функція  $x_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  задовольняє умову Лівшица з константою Лівшица  $M$ . Розглянемо три можливих випадки розташування точок  $t'$ ,  $t''$  відрізка  $I_h$ . Випадок, коли вони належать відрізку  $[t_0 - h, t_0]$ , очевидний: на ньому вектор-функція  $x_k(t)$  стала. Якщо  $t'' \in [t_0 - h, t_0]$ , а  $t' \in [t_0, t_0 + h]$ , то  $x_k(t'') = x_0 = x_k(t_0)$ , і тому

$$\|x_k(t') - x_k(t'')\| = \left\| \int_{t_0}^{t'} \dot{x}_k(s) ds \right\| \leq M |t' - t_0| \leq M |t' - t''|.$$

Нарешті, якщо обидві точки належать  $[t_0, t_0 + h]$ , то

$$\|x_k(t') - x_k(t'')\| = \left\| \int_{t''}^{t'} \dot{x}_k(s) ds \right\| \leq M |t' - t''|.$$

Тепер можна стверджувати, що послідовність вектор-функцій  $\{x_k(t)\}_{k=1, 2, \dots}$  задовольняє умови леми 5.2, а отже, існує підпослідовність  $\{x_{k_j}(t)\}_{j=1, 2, \dots}$ , яка при  $j \rightarrow \infty$  рівномірно на відрізку  $I_h$  збігається до деякої вектор-функції  $x_*(t) \in C(I_h \mapsto B)$ . Аби показати, що остання задовольняє інтегральне рівняння (5.2) при  $t \in [t_0, t_0 + h]$ , залишилося тільки обґрунтувати граничний перехід під знаком інтеграла в рівності (5.4) при  $k = k_j$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

Насамперед зауважимо, що послідовність  $\{x_{k_j}(t - h/k_j)\}_{j=1, 2, \dots}$  також рівномірно збігається на  $[t_0, t_0 + h]$  до вектор-функції  $x_*(t)$ . Справді,

$$\begin{aligned} & \|x_{k_j}(t - h/k_j) - x_*(t)\| \leq \|x_{k_j}(t - h/k_j) - x_{k_j}(t)\| + \\ & + \|x_{k_j}(t) - x_*(t)\| \leq Mh/k_j + \|x_{k_j}(t) - x_*(t)\| \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

і ця границя є рівномірною щодо  $t \in [t_0, t_0 + h]$ . Але тоді, враховуючи рівномірну неперервність вектор-функції  $f(t, x)$  на компакт  $\Pi$ , можна стверджувати, що послідовність  $f(t, x_{k_j}(t - h/k_j))$  при  $j \rightarrow \infty$  рівномірно збігається на  $[t_0, t_0 + h]$  до  $f(t, x_*(t))$ . Остаточоно маємо бажану рівність

$$x_*(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x_{k_j}(s - h/k_j)) ds = \int_{t_0}^t f(s, x_*(s)) ds,$$

коли  $t \in [t_0, t_0 + h]$ .

Так само встановлюємо існування розв'язку  $x_-(t_0) \in C([t_0 - h, t_0] \mapsto B)$  рівняння (5.2), для якого  $x_-(t_0) = x_+(t_0) = x_0$ . А тоді вектор-функція

$$x(t) = \begin{cases} x_+(t), & \text{якщо } t \in [t_0 - h, t_0), \\ x_-(t), & \text{якщо } t \in [t_0, t_0 + h] \end{cases}$$

є неперервним розв'язком рівняння (5.2) на всьому відрізку  $I_h$  (перевірте!).

Аналогом теореми Пеано для скалярного рівняння  $n$ -го порядку є такий результат.

### Теорема 5.2

Нехай  $F(t, x) \in C(\Pi \mapsto \mathbb{R})$ , де множину  $\Pi$  визначено в теоремі Пеано, причому  $x_0 = (x_0, x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$ . Тоді задача Коші

$$x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_0^1, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$$

має розв'язок, визначений принаймні на відрізку  $[t_0 - h, t_0 + h]$ , де

$$h = \min(a, b/M), \quad M := \max_{(t, x) \in \Pi} \sqrt{\sum_{j=2}^n x_j^2 + F^2(t, x)}.$$

Для доведення достатньо застосувати теорему Пеано до системи

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = F(t, x_1, \dots, x_n),$$

еквівалентної рівнянню  $n$ -го порядку.

#### 5.1.2. Існування непродовжаного розв'язку

Теорема Пеано — це локальна теорема існування розв'язку нормальної системи. З її допомогою можна довести існування непродовжаного (глобального) розв'язку задачі (5.1) у випадку, коли вектор-

функція  $f(t, x)$  визначена й неперервна в довільній області  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , а  $(t_0, x_0)$  — будь-яка точка цієї області. Відповідні означення, побудови й обґрунтування, викладені в гл. 1, легко перенести зі скалярного випадку на векторний.

### Теорема 5.3

Нехай  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ . Для довільної точки  $(t_0, x_0) \in D$  і довільного компакту  $K \subset D$  існують числа  $t_- < t_0$ ,  $t_+ > t_0$  і розв'язок  $x(t)$  задачі (5.1), визначений на  $[t_-, t_+]$ , такі, що  $(t_-, x(t_-)) \in K$ .

### Означення 5.1

Розв'язок задачі (5.1), визначений на інтервалі  $I$ , називають **непродовжуваним**, якщо не існує такого розв'язку  $\tilde{x}(t)$ ,  $t \in \tilde{I}$  цієї задачі, що  $I \subset \tilde{I}$ ,  $\tilde{I} \setminus I \neq \emptyset$ , і  $x(t) = \tilde{x}(t)$  для всіх  $t \in I$ .

### Теорема 5.4

Якщо  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ , то для довільної точки  $(t_0, x_0) \in D$  існує непродовжуваний розв'язок задачі (5.1).

Зауважимо, що для довільного непродовжуваного розв'язку  $x(t)$ ,  $t \in I := (T_-, T_+)$  не існує компактної підмножини області  $D$ , яка цілком містила б у собі його графік. Справді, припустимо, що, навпаки, знайдеться компакт  $K \subset D$  такий, що  $(t, x(t)) \in K$  для всіх  $t \in I$ . Тоді  $T_\pm$  скінченні. Оскільки  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  і існує  $\max_{(t, x) \in K} \|f(t, x)\| =: M$ , то  $\| \dot{x}(t) \| \leq M$ , звідки

$$\|x(t') - x(t'')\| = \left\| \int_{t''}^{t'} \dot{x}(t) dt \right\| \leq M |t' - t''| \quad \forall t', t'' \in I.$$

Тому існують границі  $\lim_{t \rightarrow T_-} x(t) =: x(T_-)$ ,  $\lim_{t \rightarrow T_+} \dot{x}(t) = f(T_+, x(T_+))$

(обґрунтуйте!). Отже, розв'язок  $x(t)$  можна продовжити на відрізок  $[T_-, T_+]$ . Застосувавши теорему 5.3 для  $(t_0, x_0) = (T_+, x(T_+))$  та  $(t_0, x_0) = (T_-, x(T_-))$ , ми зможемо продовжити розв'язок  $x(t)$  на відрізок  $[t_-, t_+]$ , де  $t_- < T_-$ ,  $t_+ > T_+$ . Це суперечить означенню непродовжуваного розв'язку.

### 5.1.3. Існування єдиного розв'язку

#### ⇒ Означення 5.2

Кажуть, що  $(t_0, x_0) \in D$  є точкою єдиності розв'язку задачі Коші (5.1), якщо для будь-яких двох розв'язків  $x_j(t)$ ,  $t \in I_j$ ,  $j = 1, 2$  цієї задачі існує такий інтервал  $I \subset I_1 \cap I_2$ , що  $t_0 \in I$  і  $x_1(t) = x_2(t)$  при всіх  $t \in I$ . В протилежному разі кажуть, що в точці  $(t_0, x_0)$  порушується єдиність розв'язку задачі Коші ( $(t_0, x_0)$  — точка неєдиності розв'язку задачі Коші).

#### ⇒ Означення 5.3

Кажуть, що розв'язок задачі Коші єдиний (має властивість єдиності), якщо кожна точка його графіка є точкою єдиності розв'язку задачі Коші.

#### Теорема 5.5 (Пікара)

Нехай вектор-функція  $f(t, x) \in C(\Pi \mapsto \mathbb{R}^n)$  (множину  $\Pi$  визначено в теоремі Пеано) задовольняє умову Ліпшица щодо змінної  $x$ , тобто існує додатне число  $L$  (стала Ліпшица) таке, що для довільної пари точок  $(t, x')$ ,  $(t, x'')$  із множини  $\Pi$  виконується нерівність

$$\|f(t, x') - f(t, x'')\| \leq L \|x' - x''\|.$$

Тоді на відрізку  $I_h = [t_0 - h, t_0 + h]$ , де

$$h := \min(a, b/M), \quad M := \max_{(t, x) \in \Pi} \|f(t, x)\|,$$

існує єдиний розв'язок  $x(t)$  задачі (5.1). Цей розв'язок є границею рівномірно збіжної послідовності вектор-функцій  $\{x_k(t)\}_{k=1, 2, \dots}$  визначеної рекурентними формулами методу послідовних наближень

$$x_0(t) = x_0, \quad t \in I_h,$$

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{k-1}(s)) ds, \quad t \in I_h, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пропонуємо самостійно довести цю теорему за такою самою схемою, що й у скалярному випадку.



Тонкіші умови єдиності розв'язку нормальної системи, заданої в довільній області  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , можна дістати, ввівши таке поняття.

#### Означення 5.4

Функцію  $f: D \mapsto \mathbb{R}^n$  називають *локально ліпшицевою щодо  $x$* , якщо для кожної точки  $(t_0, x_0) \in D$  знайдуться числа  $r = r(t_0, x_0) > 0$  і  $L = L(t_0, x_0) > 0$  такі, що

$$\|f(t, x') - f(t, x'')\| \leq L \|x' - x''\| \quad \forall (t, x'), (t, x'') \in B_r(t_0, x_0) \subset D,$$

де  $B_r(t_0, x_0)$  —  $(n+1)$ -вимірний куля радіусом  $r$ , центр якої знаходиться в точці  $(t_0, x_0)$ .

Виявляється, аби вектор-функція  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$  була локально ліпшицевою щодо  $x$ , достатньо, щоб вона мала неперервні частинні похідні відносно  $x_1, \dots, x_n$ :  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x_i} \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ . Цей факт впливає на таке твердження.

#### Лема 5.3 (Адамара)

Нехай  $f(t, x) \in C(B \mapsto \mathbb{R}^n)$  і  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x_i} \in C(B \mapsto \mathbb{R}^n)$ , де  $B$  — куля в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Уведемо множину

$$\mathcal{B} := \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{2n+1} : (t, x) \in B, (t, y) \in B\}.$$

Тоді існує  $(n \times n)$ -вимірний матриця  $G(t, x, y)$  з неперервними на множині  $\mathcal{B}$  елементами така, що

$$f(t, x) - f(t, y) = G(t, x, y)(x - y) \quad \forall (t, x, y) \in \mathcal{B}$$

і

$$G(t, x, y) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} := \left\{ \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_j} \right\}_{i, j=1}^n.$$

#### Доведення

Оскільки куля  $B$  — множина опукла, то разом із точками  $(t, x)$  та  $(t, y)$  вона містить і відрізок  $\{(t, sx + (1-s)y)\}_{s \in [0, 1]}$ . А тоді можна записати

$$f(t, x) - f(t, y) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(t, sx + (1-s)y) ds = \\ = \int_0^1 \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} \Big|_{z=sx+(1-s)y} \frac{d(sx+(1-s)y)}{ds} ds = G(t, x, y)(x-y),$$

де

$$G(t, x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} \Big|_{z=sx+(1-s)y} ds.$$

Таким чином, елемент  $g_{ij}(t, x, y)$  матриці  $G(t, x, y)$  має вигляд

$$g_{ij}(t, x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f_i(t, z)}{\partial z_j} \Big|_{z=sx+(1-s)y} ds$$

і, зрозуміло, є неперервною функцією в області  $B$ .

Якщо тепер вектор-функція  $f(t, x)$  має неперервні частинні похідні  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  в області  $D$ , то для будь-якої точки  $(t_0, x_0) \in D$  існує число  $r = r(t_0, x_0)$  таке, що замкнена куля  $\overline{B_r(t_0, x_0)}$  належить  $D$ . У такому разі елементи матриці  $G(t, x, y)$  з леми Адамара будуть неперервними, а отже, обмеженими функціями на множині

$$\overline{B(t_0, x_0)} := \\ := \left\{ (t, x, y) \in \mathbb{R}^{2n+1} : (t, x) \in \overline{B_r(t_0, x_0)}, (t, y) \in \overline{B_r(t_0, x_0)} \right\}.$$

Враховуючи їх явний вигляд, можна покласти

$$L(t_0, x_0) := \max_{(t, x) \in \overline{B_r(t_0, x_0)}} \left\| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right\|.$$

### Теорема 5.6

Якщо  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^{n+1})$  є локально ліпшицевою щодо  $x$  вектор-функцією, то розв'язок задачі Коші (5.1) має властивість єдиності для кожної точки  $(t_0, x_0) \in D$ .

### Доведення

Припустимо, що точка  $(t_0, x_0)$  є точкою неєдиності розв'язку задачі Коші. Тоді знайдуться розв'язки  $x_1(t)$ ,  $t \in I_1$  та  $x_2(t)$ ,  $t \in I_2$  задачі Коші (5.1), для яких  $t_0 \in I_1 \cap I_2$ , а також послідовність точок  $\{t_k\}_{k=1, 2, \dots} \subset I_1 \cap I_2$ , для якої  $\delta_k := |t_k - t_0| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  і  $x_1(t_k) \neq x_2(t_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тоді, з урахуванням леми 5.1, для всіх  $t \in I_{\delta_k} := [t_0 - \delta_k, t_0 + \delta_k]$  матимемо

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))] ds \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|x_1(s) - x_2(s)\| ds \right| \leq L |t_k - t_0| \max_{t \in I_{\delta_k}} \|x_1(t) - x_2(t)\| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \max_{t \in I_{\delta_k}} \|x_1(t) - x_2(t)\| \leq L \delta_k \max_{t \in I_{\delta_k}} \|x_1(t) - x_2(t)\| \Rightarrow 1 \leq L \delta_k. \end{aligned}$$

Спрямувавши  $k$  до нескінченності, дійдемо суперечності:  $1 \leq 0$ .

Очевидно, що твердження теореми Пікара є наслідком теорем 5.1 та 5.6.

### ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

① Нехай

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, x \in \mathbb{R}; \\ 2t & \text{при } t \in (0, 1], x \in (-\infty, 0); \\ 2t - 4x/t & \text{при } t \in (0, 1], x \in [0, t^2]; \\ -2t & \text{при } t \in (0, 1], x \in (t^2, \infty). \end{cases}$$

Довести, що послідовні наближення до розв'язку задачі Коші  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(0) = 0$  не збігаються на жодному проміжку  $[0, \epsilon]$ ,  $\epsilon \in (0, 1]$ .

② Нехай  $\Pi = [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$  і функція  $f(t, x)$ , задовольняє в  $\Pi$  умову Ліпшица щодо  $x$  із деякою сталою  $L > 0$ . Довести збіжність послідовних наближень до розв'язку задачі Коші (5.1) на всьому відрізьку  $[a, b]$ .

③ Нехай  $f(t, x) \in C(\mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n)$  і  $\|\partial f(t, x)/\partial x\| \leq L(t)$ , де  $L(t) \in C(\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty))$ . Довести, що будь-який розв'язок системи  $\dot{x} = f(t, x)$  можна продовжити на всю дійсну вісь.

- ④ Нехай  $\Pi := [t_0, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$  і функція  $f(t, x) \in C(\Pi \mapsto \mathbb{R})$  не зростає щодо  $x$  при кожному фіксованому  $t$ . Довести, що задача Коші  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  на будь-якому відрізку  $[t_0, t_0 + \epsilon]$ ,  $\epsilon \in (0, a]$  має не більше ніж один розв'язок.
- ✓ *Вказівка.* Міркуючи від супротивного, дослідити знак похідної функції  $(x_1(t) - x_2(t))^2$ , де  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  — різні розв'язки досліджуваної задачі Коші.

## 5.2

## Коректність задачі Коші

Реальні процеси й явища досить часто вивчаються засобами математичного моделювання за такою схемою. Після постановки задачі на першому етапі виділяють основні, визначальні характеристики досліджуваного об'єкта та найсуттєвіші фактори впливу на нього, а другорядними чинниками нехтують. Відтак предметом подальшої уваги стає деякий ідеалізований об'єкт, який саме завдяки своїй відносній простоті може бути адекватно описаний за допомогою певної математичної моделі (наприклад, деякого диференціального рівняння).

На другій стадії ця модель піддається детальному аналізу математичними методами для виявлення притаманних їй властивостей та закономірностей.

Нарешті, настає стадія інтерпретації одержаних результатів, їх «переклад» із мови математичних понять і термінів мовою цієї дисципліни, для якої становить інтерес досліджуваний об'єкт. Для того щоб висновки, зроблені на основі такої інтерпретації, відповідали дійсності, математична модель має бути *коректною*.

Не вдаючися до точного визначення цього поняття в загальній ситуації, пояснимо, який у нього вкладається зміст у тому випадку, коли математичною моделлю деякого процесу виступає нормальна система диференціальних рівнянь із правою частиною  $f: \mathbb{R}^{n+1} \supseteq D \mapsto \mathbb{R}^n$ . Цю систему називатимемо *ідеальною*, або *незбуреною*. Вона має задовольнити такі дві основні вимоги.

По-перше, для будь-якої точки  $(t_0, x_0) \in D$  незбурена задача Коші

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x|_{t=t_0} = x_0 \quad (5.6)$$

повинна мати неперодовжуваний розв'язок  $x(t)$ ,  $t \in I$  з властивістю єди-

ності. Нам уже відомо, що для виконання цієї вимоги, яка є математичним еквівалентом детермінованості в часі модельованого процесу, достатньо, щоб вектор-функція  $f(t, x)$  в області свого визначення була неперервною й локально ліпшіцевою щодо  $x$ .

По-друге, при створенні ідеалізованої математичної моделі не бралися до уваги деякі другорядні фактори (збурення), які, проте, в реальній ситуації все ж впливають на перебіг досліджуваного процесу. Крім того, в реальній ситуації початкові дані процесу неможливо визначити абсолютно точно. Отже, ми маємо бути впевнені в тому, що в разі заміни задачі Коші (5.6) будь-якою збуреною щодо неї задачею

$$\tilde{x} = \tilde{f}(t, \tilde{x}), \quad \tilde{x}(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0 \quad (5.7)$$

можна буде, принаймні на скінченному проміжку  $J \subset I$ , забезпечити наперед задану мализну відхилення збуреного розв'язку  $\tilde{x}(t)$  від незбуреного  $x(t)$  за рахунок достатньої близькості початкових даних  $(t_0, x_0)$  і  $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0)$  та правих частин  $f$  і  $\tilde{f}$ . Таку властивість еталонної системи називають *стійкістю щодо збурень початкових даних та правої частини на скінченному проміжку часу*.

Після цих вступних зауважень переходимо до викладу точних результатів.

### 5.2.1. Обґрунтування коректності задачі Коші для нормальної системи\*

Нехай  $J$  — довільний відрізок з області визначення розв'язку  $x(t)$  задачі (5.6). Назвемо  $\epsilon$ -трубкою цього розв'язку на відрізку  $J$  множину

$$T_\epsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in J, \|x - x(t)\| \leq \epsilon\}. \quad (5.8)$$

Множину тих точок  $(t, x) \in T_\epsilon$ , для яких  $\|x - x(t)\| = \epsilon$ , назвемо *бічною поверхнею  $\epsilon$ -трубки* (див. рис. 5.1).

#### ➤ Означення 5.5

*Кажуть, що на відрізку  $J \subset I$  розв'язок  $x(t)$ ,  $t \in J$  задачі Коші (5.6) є стійким щодо збурень початкових даних  $(t_0, x_0)$  та правої частини*

$f(t, x)$ , якщо для кожного  $\epsilon > 0$  існує таке  $\delta > 0$ , що для будь-якої точки  $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in D$  і довільної функції  $\tilde{f}(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ , які задовольняють умови

$$|t_0 - \tilde{t}_0| < \delta, \quad \|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta,$$

$$\|f(t, x) - \tilde{f}(t, x)\| < \delta \quad \forall (t, x) \in T_\epsilon \cap D,$$

розв'язок  $\tilde{x}(t)$  збуреної задачі Коші (5.7) існує на відрізку  $J$  і задовольняє нерівність

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \in J.$$

Сформулюємо й доведемо основний результат даного пункту.

### Теорема 5.7

Нехай  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ . Припустимо, що розв'язок  $x(t)$ ,  $t \in I$  задачі Коші (5.6) має властивість єдиності. Тоді на будь-якому відрізку  $J \subset I$  цей розв'язок є стійким щодо збурення початкових даних  $(t_0, x_0)$  та правої частини  $f(t, x)$ .

### Доведення

Припустимо, навпаки, що твердження теореми хибне. Тоді існують відрізок  $J \in I$  і число  $\epsilon > 0$  такі, що для кожного натурального  $k$  можна вказати точку  $(t_{0k}, x_{0k}) \in D$  і вектор-функцію  $f_k(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$  із такими властивостями:

1) виконуються нерівності  $|t_0 - t_{0k}| < 1/k$ ,  $\|x_0 - x_{0k}\| < 1/k$ ,

$$\|f(t, x) - f_k(t, x)\| < 1/k \quad \forall (t, x) \in T_\epsilon \cap D;$$

2) для неперодовжаного розв'язку  $x_k(t)$ ,  $t \in I_k$  задачі Коші

$$\dot{x} = f_k(t, x), \quad x|_{t=t_{0k}} = x_{0k}$$

існує момент  $t_k \in J \cap I_k$  такий, що  $\|x(t_k) - x_k(t_k)\| \geq \epsilon$ .

Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що  $T_\epsilon \in D$ , а  $(t_{0k}, x_{0k}) \in$  внутрішньою точкою трубки  $T_\epsilon$ . Тоді за  $t_k$  можна взяти найближчий до  $t_{0k}$  момент перетину графіком розв'язку  $x_k(t)$  бічної поверхні трубки  $T_\epsilon$  (рис. 5.1). Це означає, що

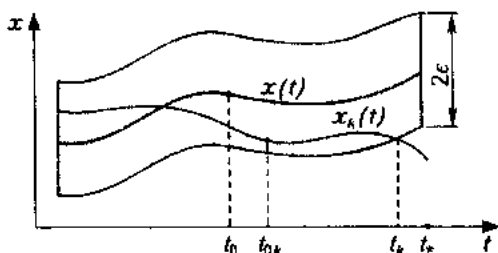


Рис. 5.1

$$\|x(t_k) - x_k(t_k)\| = \epsilon, \text{ але } \|x(t) - x_k(t)\| < \epsilon, \quad (5.9)$$

якщо  $|t - t_{0k}| < |t_k - t_{0k}|$ .

Покажемо, що за цих умов із послідовності  $\{x_k(t)\}$  можна виділити підпослідовність, яка збігається до розв'язку задачі Коші (5.6), відмінного від  $x(t)$ .

Для того щоб мати справу з послідовністю вектор-функцій, визначених на спільному відрізку, введемо для заданого номера  $k$  нову незалежну змінну  $\tau$  за формулою

$$t = \theta_k(\tau) := t_{0k} + (t_k - t_{0k})\tau.$$

Функція  $\theta_k(\tau)$  взаємно однозначно відображає відрізок  $[0, 1]$  на відрізок, кінцями якого є точки  $t_{0k}$  та  $t_k$ . Тепер покладемо

$$y_k(\tau) := x_k(\theta_k(\tau)), \quad \tau \in [0, 1].$$

Із (5.9) випливає, що коли змінна  $\tau$  пробігає відрізок  $[0, 1]$ , точка  $(\theta_k(\tau), y_k(\tau))$  залишається в трубці  $T_\epsilon$ . До того ж  $y_k(0) = x_{0k}$  і

$$y'_k(\tau) = (t_k - t_{0k})\dot{x}_k(\theta_k(\tau)) = (t_k - t_{0k})f_k(\theta_k(\tau), y_k(\tau)).$$

Отже, вектор-функція  $y_k(\tau)$  є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dy}{d\tau} = g_k(\tau, y), \quad y|_{\tau=0} = x_{0k}, \quad (5.10)$$

де  $g_k(\tau, y) := (t_k - t_{0k})f_k(\theta_k(\tau), y)$ .

Покажемо, що послідовність  $\{y_k(\tau)\}$  містить рівномірно збіжну підпослідовність. Для застосування леми 5.2 оцінимо похідну кожної вектор-функції  $y_k(\tau)$ . Нехай

$$M_\epsilon := \max_{(t, x) \in T_\epsilon} \|f(t, x)\|.$$

Тоді при кожному  $k \in \mathbb{N}$  на множині  $T_\epsilon$  виконується нерівність  $\|f_k(t, x)\| \leq M_\epsilon + 1$ , а отже,

$$\|y'_k(\tau)\| = \|g_k(\tau, y_k(\tau))\| \leq |t_k - t_{0k}| \|f_k(t_k(\tau), y_k(\tau))\| \leq |J|(M_\epsilon + 1)$$

для всіх  $\tau \in [0, 1]$ , де  $|J|$  — довжина відрізка  $J$ . Тому

$$\|y_k(\tau') - y_k(\tau'')\| = \left\| \int_{\tau''}^{\tau'} y'_k(s) ds \right\| \leq |J|(M_\epsilon + 1) |\tau' - \tau''|$$

$$\forall \tau', \tau'' \in [0, 1],$$

і лема 5.2 дає змогу зробити висновок, що послідовність  $\{y_k(\tau)\}$  дійсно містить у собі рівномірну збіжну на  $[0, 1]$  підпослідовність  $\{y_{k_j}(\tau)\}$ . Зрозуміло, що останню можна вибрати так, щоб одночасно й числова послідовність  $\{t_{k_j}\}$  збігалася до деякого  $t_* \in J$ . Покладемо

$$y_*(\tau) := \lim_{j \rightarrow \infty} y_{k_j}(\tau).$$

Природно припустити, що вектор-функція  $y_*(\tau)$  є розв'язком граничної щодо послідовності (5.10) задачі Коші

$$\frac{dy}{d\tau} = g_*(\tau, y), \quad y|_{\tau=0} = x_0, \quad (5.11)$$

де

$$g_*(\tau, y_*(\tau)) := (t_* - t_0) f(t_*(\tau), y_*(\tau)) \quad \text{і} \quad t_*(\tau) := t_0 + (t_* - t_0)\tau.$$

Для того щоб строго довести це припущення, потрібно, взявши до уваги лему 5.1, обґрунтувати граничний перехід під знаком інтеграла в послідовності рівностей

$$y_{k_j}(\tau) = x_{0k_j} + \int_0^\tau g_{k_j}(s, y_{k_j}(s)) ds, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Запишемо нерівність



$$\begin{aligned} & \|f_k(\theta_k(\tau), y_k(\tau)) - f(\theta_*(\tau), y_*(\tau))\| \leq \\ & \leq \|f_k(\theta_k(\tau), y_k(\tau)) - f(\theta_k(\tau), y_k(\tau))\| + \\ & + \|f(\theta_k(\tau), y_k(\tau)) - f(\theta_*(\tau), y_*(\tau))\| \end{aligned}$$

і покладемо тут  $k = k_j$ . Тоді перший доданок у правій частині одержаної нерівності буде меншим, ніж  $1/k_j$ . Розглянемо другий доданок. Оскільки  $f(t, x)$  рівномірно неперервна в  $T_\epsilon$ , а послідовність  $\{(\theta_{k_j}(\tau), y_{k_j}(\tau))\}$  рівномірно щодо  $\tau \in [0, 1]$  збігається до  $(\theta_*(\tau), y_*(\tau))$ , то послідовність  $\{\|f(\theta_{k_j}(\tau), y_{k_j}(\tau)) - f(\theta_*(\tau), y_*(\tau))\|\}$  так само рівномірно збігається до нуля. Тепер уже очевидно, що рівномірною на відрізку  $[0, 1]$  границею послідовності  $\{g_{k_j}(\tau, y_{k_j}(\tau))\}$  є вектор-функція  $g_*(\tau, y_*(\tau))$ . Таким чином, перейшовши в (5.12) до границі при  $j \rightarrow \infty$ , дістанемо

$$y_*(\tau) = x_0 + \int_0^\tau g_*(s, y_*(s)) ds, \quad \tau \in [0, 1].$$

Із цієї рівності й леми 5.1 випливає, що вектор-функція  $y_*(\tau)$  — розв'язок задачі Коші (5.11). Але таку саму властивість має й вектор-функція  $y(\tau) := x(\theta_*(\tau))$ . Справді,  $y(0) = x(t_0) = x_0$  і

$$y'(\tau) = (t_* - t_0)\dot{x}(\theta_*(\tau)) = (t_* - t_0)f(\theta_*(\tau), x(\theta_*(\tau))) = g_*(\tau, y(\tau)).$$

Покажемо, що  $y_*(\tau)$  не збігається з  $y(\tau)$ . Дійсно, з урахуванням (5.9) маємо

$$\|y_{k_j}(1) - x(\theta_{k_j}(1))\| = \epsilon.$$

Перейшовши в цій рівності до границі при  $j \rightarrow \infty$ , дістанемо

$$\|y_*(1) - y(1)\| = \epsilon.$$

Зауважимо, що звідси, зокрема, випливає нерівність  $t_* \neq t_0$ . Дійсно, в противному разі  $g_*(\tau, y) \equiv 0$ , і задача Коші (5.11) мала б єдиний розв'язок  $y \equiv x_0$ .

Нам залишилося показати, як за допомогою вектор-функції  $y_*(\tau)$  можна утворити розв'язок  $x_*(t)$  задачі Коші (5.6), відмінний від  $x(t)$ . Для цього зауважимо, що

$$y'_*(\tau) = (t_* - t_0)f(\theta_*(\tau), y(\tau)).$$

Тому, якщо з рівності  $\theta_*(\tau) = t$  виразити  $\tau = \frac{t-t_0}{t_*-t_0}$  і покласти

$$x_*(t) = y_* \left( \frac{t-t_0}{t_*-t_0} \right),$$

то дістанемо

$$\dot{x}_*(t) = \frac{1}{t_*-t_0} y_*' \left( \frac{t-t_0}{t_*-t_0} \right) = f(t, x_*(t)) \quad \forall t: |t-t_0| \leq |t_*-t_0|.$$

Крім того,  $x_*(t_0) = y_*(0) = x_0$ . Отже,  $x_*(t)$  задовольняє (5.6). Водночас

$$\|x_*(t_*) - x(t_*)\| = \|y_*(1) - y(1)\| = \epsilon.$$

Ця рівність неможлива, оскільки суперечить припущенню про єдиність розв'язку задачі Коші (5.6).

### 5.2.2. Оцінка відхилення збуреного розв'язку

Не применшуючи важливості теореми 5.7, відзначимо, однак, що спосіб, в який її було доведено, не дає змоги зробити жодних висновків про характер залежності числа  $\delta$  від  $\epsilon$ . Отже, важливе з практичного погляду питання про те, яка саме мализна збурень початкових даних і правої частини ідеальної системи забезпечує задану мализну відхилення розв'язку  $\hat{x}(t)$  від розв'язку  $x(t)$ , залишається відкритим. Для з'ясування цього питання нам знадобиться такий результат.

#### Лема 5.4 (про інтегральну нерівність)

Нехай неперервні невід'ємні в відрізку  $[t_0, T]$  функції  $a(t)$  і  $u(t)$  при деякому  $c > 0$  задовольняють нерівність

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t a(s)u(s) ds \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (5.13)$$

Тоді

$$u(t) \leq ce^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (5.14)$$

### Доведення

Покладемо  $v(t) := c + \int_{t_0}^t a(s)u(s) ds$ . Тоді нерівність (5.13) набуває вигляду  $u(t) \leq v(t)$ . Оскільки  $\dot{v}(t) = a(t)u(t)$ , то  $\dot{v}(t) \leq a(t)v(t)$ , а отже,

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} \leq a(t) \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Зінтегрувавши обидві частини цієї нерівності в межах від  $t_0$  до  $t > t_0$ , дістанемо

$$\ln \frac{v(t)}{v(t_0)} \leq \int_{t_0}^t a(s) ds \Rightarrow \frac{v(t)}{v(t_0)} \leq e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Взявши до уваги, що  $v(t_0) = c$  і  $u(t) \leq v(t)$ , переконуємося в правильності нерівності (5.14).

Нехай  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ ,  $\tilde{f}(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$  і, крім того, перша з цих двох вектор-функцій є локально ліпшіцевою в  $D$  щодо  $x$ . Зафіксуємо відрізок  $J \ni t_0$  з області визначення розв'язку  $x(t)$  задачі (5.6). Нехай число  $\epsilon > 0$  настільки мале, що  $\epsilon$ -трубка  $T_\epsilon$  (5.8) цілком міститься в  $D$ . Існує стала  $L_\epsilon > 0$  така, що

$$\|f(t, x') - f(t, x'')\| \leq L_\epsilon \|x' - x''\| \quad \forall (t, x'), (t, x'') \in T_\epsilon.$$

Покладемо  $M_\epsilon = \max_{(t, x) \in T_\epsilon} \|f(t, x)\|$  і припустимо, що

$$\delta := \max \left\{ \max_{(t, x) \in T_\epsilon} \|f(t, x) - \tilde{f}(t, x)\|, |t_0 - \tilde{t}_0|, \|x_0 - \tilde{x}_0\| \right\} < \epsilon.$$

Нехай  $[\tilde{t}_0, T] \subset J$  — інтервал часу, протягом якого для неперодовжаного розв'язку  $\tilde{x}(t)$  задачі (5.7) виконується нерівність

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \epsilon.$$

Скориставшись лемою 5.1, матимемо

$$\begin{aligned} x(t) - \tilde{x}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - \tilde{x}_0 - \int_{\tilde{t}_0}^t \tilde{f}(s, \tilde{x}(s)) ds = \\ &= x_0 - \tilde{x}_0 + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} f(s, x(s)) ds + \int_{\tilde{t}_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))] ds + \\ &\quad + \int_{\tilde{t}_0}^t [f(s, \tilde{x}(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{x}(s))] ds. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| &\leq \|x_0 - \tilde{x}_0\| + M_\epsilon |t_0 - \tilde{t}_0| + \int_{t_0}^t L_\epsilon \|x(s) - \tilde{x}(s)\| ds + \\ &+ |t_0 - t| \max_{(t, x) \in T_\epsilon} \|f(t, x) - \tilde{f}(t, x)\| \end{aligned}$$

і

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq (1 + M_\epsilon + (T - t_0) + \delta)\delta + \int_{t_0}^t L_\epsilon \|x(s) - \tilde{x}(s)\| ds.$$

Тепер можна застосувати лему про інтегральну нерівність при

$$u(t) = \|x(t) - \tilde{x}(t)\|, \quad a(t) = L_\epsilon, \quad c = (1 + M_\epsilon + (T - t_0) + \delta)\delta$$

і дістати

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq (1 + M_\epsilon + (T - t_0) + \delta)\delta e^{L_\epsilon(t - t_0)}.$$

**Висновок.** Аби на відрізку  $[\tilde{t}_0, T] \subseteq J$  забезпечити виконання умови  $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \epsilon$ , достатньо, щоб число  $\delta > 0$  задовольняло нерівність

$$(1 + M_\epsilon + (T - t_0) + \delta)\delta e^{L_\epsilon(T - t_0 - \delta)} < \epsilon.$$

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ , де  $x_n(t)$  — розв'язок задачі Коші:
  - а)  $\dot{x} + \cos t + \sin(t + x/n) = 0$ ,  $x|_{t=0} = 0$ ;
  - б)  $\dot{x} + x + \frac{\sin x}{n} + 1 = 0$ ,  $x|_{t=0} = 1$ ;
  - в)  $\dot{x} = (x - t)\sin(t + x) = 0$ ,  $x|_{t=0} = \frac{n}{n+1}$ ;
  - г)  $\dot{x} + \alpha + \sin(\alpha x) = 0$ ,  $x|_{t=0} = e^n$ .
- ② Дослідити систему диференціальних рівнянь задачі  $\Pi$  тіл (див. приклад В.6) на предмет коректності.
- ③ Нехай вектор-функція  $f(t, x) \in C(\mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}^n)$  при кожному  $t \in \mathbb{R}$  задовольняє умову Ліпшица щодо  $x$  зі «сталюю» Ліпшица  $L = l$ , а норма вектор-

функції  $g(t, x) \in C(\mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n)$  при всіх  $(t, x) \in \mathbb{R}^n$  не перевищує 1. Визначити, для яких значень параметра  $\mu$  норма різниці розв'язків задач Коші

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x|_{t_0} = x_0, \quad \dot{x} = f(t, x) + \mu g(t, x), \quad x|_{t_0} = x_0$$

на відрізку  $[t_0, t_0 + 1]$  гарантовано не перевищуватиме 0,1.

### 5.3

## Властивості розв'язку нормальної системи як функції початкових даних і параметрів

Нормальні системи, які виступають у ролі математичних моделей реальних процесів, як правило, містять деякі параметри. Дослідження розв'язків таких систем як функцій не лише часу  $t$ , а й початкових даних і параметрів є однією з важливих задач загальної теорії диференціальних рівнянь.

Отже, розглядатимемо нормальну систему вигляду

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad (5.15)$$

де  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Тут  $G$  — область у  $\mathbb{R}^{1+n+m}$ , а  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  — вектор параметрів. Для кожної точки

$$\xi := (t_0, x_0, \lambda) \in G$$

позначимо через  $x(t, \xi)$  розв'язок системи (5.15), який при  $t = t_0$  набуває значення  $x_0$ . Відтак вивчатимемо властивості вектор-функції  $x(t, \xi)$ , залежної від  $2 + n + m$  аргументів  $t, t_0, x_0, \lambda$ .

### 5.3.1. Локальні теореми про неперервність функції $x(t, \xi)$ \_\_\_\_\_

Теореми про неперервність функції  $x(t, \xi)$  в околі заданої точки  $(t, \xi_0)$  можна легко дістати, скориставшись технікою доведення теореми Пікара, тобто за допомогою методу послідовних наближень.

Спочатку ми вважатимемо початкові дані фіксованими, розглядаючи розв'язок системи (5.15) як функцію лише змінних  $t, \lambda$ .

### Теорема 5.8

Нехай  $a, b, c$  — додатні числа й

$$\Pi = \{(t, x, \lambda) \in \mathbb{R}^{1+n+m} : |t - t_*| \leq a, \|x - x_*\| \leq b, \|\lambda - \lambda_*\| \leq c\}.$$

Припустимо, що  $f(t, x, \lambda) \in C(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$  і існує стала  $L > 0$  така, що

$$\|f(t, x', \lambda) - f(t, x'', \lambda)\| \leq L \|x' - x''\|.$$

Тоді розв'язок  $x(t, \lambda)$  системи (5.15), який задовольняє початкову умову  $x(t_*, \lambda) = x_*$ , є неперервною вектор-функцією на множині

$$\{(t, \lambda) \in \mathbb{R}^{1+m} : |t - t_*| \leq h, \|\lambda - \lambda_*\| \leq c\}, \quad (5.16)$$

де  $h := \min(a, b/M)$ ,  $M := \max_{(t, x, \lambda) \in \Pi} \|f(t, x, \lambda)\|$ .

### Доведення

Утворимо послідовність вектор-функцій

$$x_0(t, \lambda) = x_0, \quad x_k(t, \lambda) = x_* + \int_{t_*}^t f(s, x_{k-1}(s, \lambda), \lambda) ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

Повторивши міркування, викладені в доведенні теореми Пікара, неважко переконатися в тому, що  $x_k(t, \lambda)$  при кожному  $k = 1, 2, \dots$  є неперервною вектор-функцією на множині (5.16), послідовність  $\{x_k(t, \lambda)\}$  на цій множині рівномірно збігається, а гранична вектор-функція  $x(t, \lambda)$  є розв'язком системи (5.15), який при  $t = t_*$  набуває значення  $x_*$ . Зрозуміло, що  $x(t, \lambda)$  як границя рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій сама є неперервною функцією на множині (5.16).

Дослідимо тепер  $x(t, \xi)$  як функцію і початкових даних, і параметрів, припустивши, що  $f(t, x, \lambda)$  задовольняє умови теореми 5.8. Перейдемо до нових змінних  $s \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  за формулами

$$t = s + t_0, \quad x = y + x_0.$$

Сенс цього кроку полягає в тому, щоб початкові дані  $(t_0, x_0)$  поряд із  $\lambda$  можна було розглядати як додаткові параметри, область зміни котрих визначається умовами  $|t_0 - t_*| \leq a/2$ ,  $\|x_0 - x_*\| \leq b/2$ .

Розглянемо перетворену систему

$$\frac{dy}{ds} = g(s, y, \xi), \quad (5.17)$$

де

$$g(s, y, \xi) := f(s + t_0, y + x_0, \lambda).$$

Позначимо через  $y(s, \xi)$  розв'язок цієї системи, який задовольняє початкову умову  $y(0, \xi) = 0$ . Легко бачити, що тоді

$$x(t, \xi) = y(t - t_0, \xi) + x_0. \quad (5.18)$$

Таким чином, нам тепер достатньо дослідити властивості функції  $y(s, \xi)$ . Покажемо, як це можна зробити за допомогою теореми 5.8.

Область визначення функції  $g(s, y, \xi)$  містить множину в  $\mathbb{R}^{2+2n+m}$ , що виділяється нерівностями

$$|s| \leq a/2, \quad \|y\| \leq b/2, \quad |t_0 - t_*| \leq a/2, \quad \|x_0 - x_*\| \leq b/2, \quad \|\lambda - \lambda_*\| \leq c.$$

Дійсно, якщо точка  $(s, y, \xi)$  належить цій множині, то

$$|s + t_0 - t_*| \leq |s| + |t_0 - t_*| \leq a,$$

$$\|y + x_0 - x_*\| \leq \|y\| + \|x_0 - x_*\| \leq b,$$

тобто точка  $(s + t_0, y + x_0, \lambda)$  належить області визначення функції  $f(t, x, \lambda)$ . Застосувавши міркування з доведення теореми 5.8 до системи (5.17), можна зробити висновок, що функція  $y(t, \xi)$  неперервна на множині

$$|s| \leq h/2, \quad |t_0 - t_*| \leq a/2, \quad \|x_0 - x_*\| \leq b/2, \quad \|\lambda - \lambda_*\| \leq c.$$

З урахуванням формули (5.18) функція  $x(t, \xi)$  буде тоді неперервною на множині тих  $t, t_0, x_0, \lambda$ , які задовольняють умови

$$|t - t_0| \leq h/2, \quad |t_0 - t_*| \leq a/2, \quad \|x_0 - x_*\| \leq b/2, \quad \|\lambda - \lambda_*\| \leq c.$$

Дана множина, зокрема, містить усі точки  $(t, t_0, x_0, \lambda)$ , які задовольняють нерівності

$$|t - t_*| \leq \eta, |t_0 - t_*| \leq h/2 - \eta, \|x_0 - x_*\| \leq b/2, \|\lambda - \lambda_*\| \leq c. \quad (5.19)$$

де  $\eta$  — довільне число з інтервалу  $(0, h/2)$ . Отже, доведено таку теорему.

### Теорема 5.9

Нехай вектор-функція  $f(t, x, \lambda)$  задовольняє умови теореми 5.8. Тоді при кожному  $\eta \in (0, h/2)$ , де число  $h$  визначене в теоремі 5.8, розв'язок  $x(t, \xi)$  системи (5.15), який при  $t = t_0$  набуває значення  $x_0$ , є неперервною функцією на множині, що виділяється в  $\mathbb{R}^{2+n+m}$  нерівностями (5.19).

### 5.3.2. Неперервність функції $x(t, \xi)$ у природній області визначення\*

Для кожної точки  $\xi = (t_0, x_0, \lambda) \in G$  позначимо через  $I(\xi)$  інтервал існування неперервного розв'язку  $x(t, \xi)$  системи (5.15), який задовольняє початкову умову  $x|_{t=t_0} = x_0$ .

#### Означення 5.6

*Природною областю визначення вектор-функції  $x(t, \xi)$  називають множину*

$$\mathcal{E} = \{(t, \xi) \in \mathbb{R}^{2+n+m} : \xi \in G, t \in I(\xi)\}.$$

### Теорема 5.10

Нехай  $f(t, x, \lambda) \in C(G \mapsto \mathbb{R}^n)$  і для кожного  $\xi \in G$  розв'язок  $x(t, \xi)$  має властивість єдиності. Тоді множина  $\mathcal{E}$  відкрита й  $x(t, \xi) \in C(\mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}^n)$ .

#### Доведення

Спочатку обґрунтуємо простіший варіант теореми, припустивши, що права частина системи (5.15) не містить параметрів  $\lambda$  ( $m = 0$ ) і, отже,  $\xi = (t_0, x_0)$ . Зафіксуємо точку  $(t_*, \xi_*) = (t_*, t_{0*}, x_{0*}) \in \mathcal{E}$  і доведемо, що деякий її окіл теж належить множині  $\mathcal{E}$ . Для цього потрібно показати, що для деякого  $\sigma > 0$  і для всіх  $\xi$ , досить близьких до  $\xi_*$ , інтервал  $(t_* - \sigma, t_* + \sigma)$  належить  $I(\xi)$ .



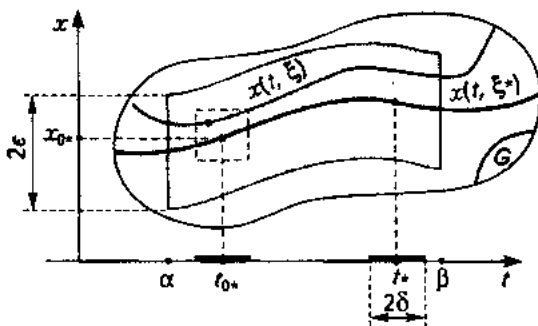


Рис. 5.2

Точки  $t_0$  і  $t$  належать інтервалу  $I(\xi_0)$ , на якому існує розв'язок  $x(t, \xi_0)$ . Тому відрізок  $J = [\alpha, \beta] \subset I(\xi_0)$  і число  $\sigma > 0$  завжди можна вибрати так, щоб точки  $t_0$  та  $t$  належали  $J$  разом зі своїми  $\sigma$ -околами (рис. 5.2). За теоремою 5.7 для довільного  $\epsilon > 0$  існує таке  $\delta \in (0, \sigma)$ , що при всіх  $\xi \in G$ , які задовольняють умови  $|t_0 - t_0^*| < \delta$ ,  $\|x_0 - x_0^*\| < \delta$ , розв'язок  $x(t, \xi)$  існує на відрізку  $J$  і задовольняє нерівність

$$\|x(t, \xi) - x(t, \xi_0)\| \leq \epsilon/2 \quad \forall t \in J$$

[у нашому випадку  $\tilde{f} = f$  роль незбурених початкових даних відведено точці  $\xi_0 = (t_0, x_0)$ , а збурених — точці  $\xi = (t_0, x_0)$ ]. Таким чином, доведено, що  $J \subset I(\xi)$ , а разом із тим і  $(t_0 - \sigma, t_0 + \sigma) \subset I(\xi)$ . Отже, множина  $\xi$  відкрита.

Для доведення неперервності  $x(t, \xi)$  у точці  $(t, \xi_0)$  зменшимо додатково число  $\delta$  настільки, щоб

$$\|x(t, \xi_0) - x(t_0, \xi_0)\| \leq \epsilon/2 \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Тоді

$$\|x(t, \xi) - x(t_0, \xi_0)\| < \|x(t, \xi) - x(t, \xi_0)\| + \|x(t, \xi_0) - x(t_0, \xi_0)\| < \epsilon,$$

як тільки  $\max\{|t - t_0|, |t_0 - t_0^*|, \|x_0 - x_0^*\|\} < \delta$ .

Тепер розглянемо загальний випадок, коли  $m \geq 1$ . Для того щоб звести його до вже дослідженого, штучно збільшимо вимірність системи, віднісши параметри  $\lambda$  до «залежних» змінних. Конкретніше, розглянемо  $(n + m)$ -вимірну систему вигляду

$$\dot{x} = f(t, x, z), \quad \dot{z} = 0,$$

де  $z \in \mathbb{R}^m$ , і поставимо для неї задачу Коші  $x|_{t=t_0} = x_0$ ,  $z|_{t=t_0} = \lambda$ . Розв'язок цієї задачі має вигляд  $x = x(t, \xi)$ ,  $z = \lambda$ . Як функція часу й початкових даних  $\xi$  він є неперервною функцією в природній області визначення  $\xi$ .

### 5.3.3. Диференційовність розв'язку задачі Коші за початковими значеннями в природній області визначення

Переходимо до вивчення диференціальних властивостей розв'язку задачі Коші як функції часу, початкових даних і параметрів. Спочатку встановимо умови існування частинних похідних цієї функції за змінними  $x_{0i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — компонентами вектора початкових значень  $x_0$ . На цьому етапі припустимо, що права частина системи (5.15) не містить параметрів  $\lambda$  ( $m = 0$ ) і, таким чином,  $\xi = (t_0, x_0)$ ,  $I(\xi) = I(t_0, x_0)$ .

#### Теорема 5.11

Нехай  $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$  і  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x_i} \in C(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тоді у своїй природній області визначення вектор-функція  $x(t, t_0, x_0)$  має неперервні частинні похідні  $\dot{x}(t, t_0, x_0) := \frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial t}$  та  $\frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0i}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

#### Доведення

З неперервності частинних похідних функції  $f(t, x)$  за всіма змінними  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  випливає, що вона є локально ліпшицевою щодо  $x$  (див. п. 5.1.3). Унаслідок цього розв'язок  $x(t, t_0, x_0)$  має властивість єдиності на інтервалі  $I(t_0, x_0)$  при всіх  $(t_0, x_0) \in D$ . А тоді  $x(t, t_0, x_0) \in C(\xi \mapsto \mathbb{R}^n)$  за теоремою про неперервність розв'язку як функції початкових даних.

Твердження теореми стосовно похідної  $\frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial t}$  негайно випливає з рівності

$$\dot{x}(t, t_0, x_0) = f(t, x(t, t_0, x_0)) \quad \forall t \in I(t_0, x_0).$$

Доведемо існування частинних похідних функції  $x(t, t_0, x_0)$  за змінними  $x_{0j}$ . Зафіксуємо точку  $(t_0, x_0) \in D$ , довільний відрізок  $[\alpha, \beta] \subset I(t_0, x_0)$  і розглянемо залежну від параметра  $s$  функцію

$$y_s(t) := y_s(t, t_0, x_0) := \frac{x(t, t_0, x_0 + s e_i) - x(t, t_0, x_0)}{s},$$

де  $e_i$  —  $i$ -й орт простору  $\mathbb{R}^n$ , тобто вектор, в якого  $i$ -та компонента — одиниця, а решта — нулі. Зрозуміло, що

$$\lim_{s \rightarrow 0} y_s(t) = \frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0i}}, \quad (5.20)$$

якщо ця границя існує. Відразу зауважимо, що оскільки множина  $E$  відкрита, то функція  $y_s(t)$  коректно визначена при всіх  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $0 < |s| < \sigma$ , якщо  $\sigma > 0$  вибрати досить малим.

Далі міркуватимемо за такою схемою. Спочатку покажемо, що функція  $y_s(t)$  є розв'язком задачі Коші

$$\dot{y} = A_s(t)y, \quad y(t_0) = e_i, \quad (5.21)$$

в якій  $(n \times n)$ -вимірна матриця-функція  $A_s(t)$  неперервна щодо змінних  $(t, s) \in [\alpha, \beta] \times (-\sigma, \sigma)$ . Після цього скористаємося теоремою про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від параметрів і встановимо існування границі (5.20).

Переходимо до побудови матриці  $A_s(t)$ . Запишемо рівності

$$\dot{x}(t, t_0, x_0 + s e_i) = f(t, x(t, t_0, x_0 + s e_i)),$$

$$\dot{x}(t, t_0, x_0) = f(t, x(t, t_0, x_0)).$$

Віднявши від першої рівності другу й поділивши результат на  $s$ , дістанемо

$$\dot{y}_s(t) = \frac{1}{s} [f(t, x(t, t_0, x_0 + s e_i)) - f(t, x(t, t_0, x_0))].$$

Унаслідок неперервності  $x(t, t_0, x_0 + s e_i)$  як функції змінної  $s$  усі точки  $(t, x(t, t_0, x_0 + s e_i))$  при досить малому  $\sigma > 0$  і  $|s| < \sigma$

належать деякій кулі  $B \subset D$ . Тому за лемою Адамара (див. п. 5.1.3) маємо

$$\begin{aligned} f(t, x(t, t_0, x_0 + se_i)) - f(t, x(t, t_0, x_0)) &= \\ &= A_s(t)(x(t, t_0, x_0 + se_i) - x(t, t_0, x_0)), \end{aligned}$$

де

$$A_s(t) := A(t, s, t_0, x_0) := G(t, x(t, t_0, x_0 + se_i), x(t, t_0, x_0)).$$

Отже,  $y_s(t)$  задовольняє першу з рівностей (5.21). За означенням  $x(t_0, t_0, x_0 + se_i) = x_0 + se_i$ . Тепер зрозуміло, що  $y(t_0) = e_i$ .

Із неперервності частинних похідних функції  $f(t, x)$  за всіма змінними  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  випливає неперервність  $A_s(t)$  щодо змінних  $(t, s) \in [\alpha, \beta] \times (-\sigma, \sigma)$ . Таку саму властивість матиме й  $y_s(t)$ . (Цей факт випливає з теореми 5.10, якщо взяти до уваги, що кожен розв'язок лінійної однорідної системи з неперервною матрицею має властивість єдиності.) Тому границя  $y_0(t) = \lim_{s \rightarrow 0} y_s(t)$  існує.

Таким чином, доведено, що функція  $x(t, t_0, x_0)$  має частинну похідну  $\frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0i}}$ , причому остання як функція змінної  $t$  є розв'язком задачі Коші

$$\dot{y} = A_0(t)y, \quad y(t_0) = e_i \quad (5.22)$$

на будь-якому відрізку  $[\alpha, \beta] \subset I(t_0, x_0)$ , а тоді й на всьому інтервалі  $I(t_0, x_0)$ .

Досі в наших міркуваннях точка  $(t_0, x_0)$  була фіксованою. Примусимо тепер її пробігати область  $D$ . Оскільки  $G(t, x, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ , то

$$A_0(t) = A(t, 0, t_0, x_0) = \frac{\partial f(t, x(t, t_0, x_0))}{\partial x}.$$

Тепер бачимо, що матриця  $A(t, 0, t_0, x_0)$  неперервна за всіма змінними  $(t, t_0, x_0)$  в області  $E$ . Тоді функція  $\frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0i}}$  як розв'язок задачі (5.22) теж буде неперервною в цій області.

### О Наслідок 5.1

Частинна похідна  $\frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0i}}$  як функція змінної  $t$  є розв'язком системи

$$\dot{y} = \frac{\partial f(t, x(t, t_0, x_0))}{\partial x} y, \quad (5.23)$$

який задовольняє початкову умову  $y(t_0) = e_i$ . Матриця  $Y(t) =$

$$= \frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_0}, \text{ стовпцями якої є частинні похідні функції } x(t, t_0, x_0)$$

за змінними  $x_{01}, \dots, x_{0n}$ , являє собою фундаментальну матрицю цієї системи, нормовану умовою  $Y(t_0) = E_n$ , де  $E_n$  —  $n$ -вимірна одинична матриця.

В області  $E$  для кожного  $i = 1, \dots, n$  виконуються рівності

$$\frac{\partial}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial t} = \frac{\partial f(t, x(t, t_0, x_0))}{\partial x} \frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0i}} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0i}}.$$

Справді, розв'язок  $x(t, t_0, x_0)$  задовольняє рівність

$$\frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial t} = f(t, x(t, t_0, x_0)).$$

Згідно з доведеною теоремою праву, а отже, й ліву частину цієї рівності можна диференціювати за змінною  $x_{0i}$ . Тому

$$\frac{\partial}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial t} = \frac{\partial f(t, x(t, t_0, x_0))}{\partial x} \frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0i}},$$

і залишилися зауважити, що тут права частина дорівнює  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0i}}$ , оскільки  $\frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0i}}$  — розв'язок системи (5.23).

### О означення 5.7

Лінійну однорідну систему (5.23) називають системою у варіаціях відносно початкових значень.

Із наведених міркувань випливає просте правило утворення системи у варіаціях та визначення початкового значення, яке задовольняє

частинна похідна розв'язку  $x(t, t_0, x_0)$  за будь-якою змінною  $x_{0i}$ : потрібно обидві частини рівностей  $\partial x/\partial t = f(t, x)$ ,  $x|_{t=t_0} = x_0$  здиференціювати за змінною  $x_{0i}$  і в лівій частині першої з одержаних рівностей переставити місцями похідні  $\partial/\partial x_{0i}$  та  $\partial/\partial t$ .

### 5.3.4. Диференційовність розв'язку задачі Коші за початковими даними й параметрами в природній області визначення

#### Теорема 5.12

Нехай  $f(t, x, \lambda) \in C^1(G \mapsto \mathbb{R}^n)$ . Тоді функція  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$  неперервно диференційовна у своїй природній області визначення.

#### Доведення

Покажемо, що цю теорему можна легко дістати з попередньої. Для цього введемо нову незалежну змінну  $s = t - \tau$ , де  $\tau$  — параметр, і розширимо вимірність системи, вважаючи параметри  $\lambda$ ,  $\tau$  додатковими змінними. Точніше, розглянемо задачу Коші

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= f(s + \tau, y, z), \quad \frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{d\tau}{ds} = 0; \\ y|_{s=0} &= x_0, \quad z|_{s=0} = \lambda, \quad \tau|_{s=0} = t_0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

в якій  $t_0, x_0, \lambda$  виступають уже в ролі початкових значень. Легко бачити, що її розв'язок має вигляд

$$y(s, t_0, x_0, \lambda) = x(s + t_0, t_0, x_0, \lambda), \quad z \equiv \lambda, \quad \tau \equiv t_0.$$

Функція  $y(s, t_0, x_0, \lambda)$  має неперервні частинні похідні за всіма змінними: за змінною  $s$  — як розв'язок системи (5.24), а за рештою змінних — згідно з теоремою 5.11. Тому функція  $x(t, t_0, x_0, \lambda) = y(t - t_0, t_0, x_0, \lambda)$  неперервно диференційовна у своїй природній області визначення.

Користуючися правилом, сформульованим наприкінці п. 5.3.3, випишемо задачі Коші, яким задовольняють частинні похідні функції  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$  за змінними  $\lambda_j$  та  $t_0$ . Зауважимо, що згідно з наслідком із

теорема 5.11 усі частинні похідні першого порядку функції  $y(s, t_0, x_0, \lambda)$  можна диференціювати за змінною  $s$  [існування  $y^2 \partial/\partial s^2$  легко випливає з першої з рівностей (5.24)]. При цьому одержані мішані частинні похідні допускають зміну порядку диференціювання. Зрозуміло, що таку саму властивість має й функція  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ , для якої роль змінної  $s$  відіграє  $t$ . Після диференціювання рівностей  $\dot{x}(t, t_0, x_0, \lambda) = f(t, x(t, t_0, x_0, \lambda))$ ,  $x(t_0, t_0, x_0, \lambda) = x_0$  за змінною  $\lambda_j$  доходимо такого висновку.

### Твердження 5.1

Частинна похідна  $\frac{\partial x(t, t_0, x_0, \lambda)}{\partial \lambda_j}$  є розв'язком задачі Коші

$$\dot{y} = \frac{\partial f(t, x(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)}{\partial x} y + \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial \lambda_j} \Bigg|_{x = x(t, t_0, x_0, \lambda)},$$

$$y|_{t=t_0} = 0. \quad (5.25)$$

### Означення 5.8

Систему (5.25) називають системою у варіаціях щодо параметра  $\lambda_j$ .

Аналогічно, з урахуванням рівностей

$$0 = \frac{\partial}{\partial t_0} x(t_0, t_0, x_0, \lambda) = \left( \frac{\partial x(t, t_0, x_0, \lambda)}{\partial t} + \frac{\partial x(t, t_0, x_0, \lambda)}{\partial t_0} \right) \Bigg|_{t=t_0},$$

$$\frac{\partial x(t, t_0, x_0, \lambda)}{\partial t} \Bigg|_{t=t_0} = f(t_0, x_0, \lambda),$$

дістаємо такий результат.

### Твердження 5.2

Частинна похідна  $\frac{\partial x(t, t_0, x_0, \lambda)}{\partial t_0}$  є розв'язком задачі Коші, яка складається із системи (5.23) і початкової умови  $y|_{t=t_0} = -f(t_0, x_0, \lambda)$ .

Частинна похідна  $\frac{\partial x(t, t_0, x_0, \lambda)}{\partial t}$  є розв'язком задачі Коші, яка складається із системи (5.23) і початкової умови  $y|_{t=t_0} = f(t_0, x_0, \lambda)$ .

Наведені твердження та наслідок 5.1 дають змогу досить про довести таку підсумкову теорему.

### Теорема 5.13

Якщо  $f(t, x, \lambda) \in C^r(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $r \geq 1$ , то функція  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$  —  $r$  разів неперервно диференційовна у своїй природній області визначення.

### Доведення

Розглянемо випадок  $r = 2$ . Для доведення існування частини похідних другого порядку функції  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$  потрібно зауважити, що будь-яка її перша частинна похідна є розв'язком задачі Коші відповідної лінійної системи у варіаціях. Права частина останньої неперервно диференційовна функція змінних  $t, t_0, x_0, \lambda$  у природній області визначення функції  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ . Початкові дані відповідної задачі Коші не залежать від цих змінних. За теоремою 5.12 ця частинна похідна функції  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$  неперервно диференційовна. Більше того, вона є розв'язком задачі Коші деякої лінійної системи, утвореної згідно з правилом п. 5.3.3.

Зрозуміло, що індукцією за порядком похідних можна довести потрібне твердження й для будь-якого  $r > 2$ .

### 5.3.5. Теорема існування повного набору перших інтегралів

Доведені теореми про диференціальні властивості розв'язку задачі Коші як функції початкових даних і параметрів мають низку важливих застосувань. Як приклад такого застосування наведемо теорему про локальне існування повного набору перших інтегралів нормальної системи. Як і раніше, через  $B_\rho(t, x)$  позначатимемо  $(n + 1)$ -вимірну кулю радіусом  $\rho$  із центром у точці  $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ .



### Теорема 5.14

Нехай  $f(t, x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ . Для довільної точки  $(t_*, x_*) \in D$  знайдеться таке  $\rho > 0$ , що в кулі  $B_\rho(t_*, x_*)$  система

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (5.26)$$

має повний набір перших інтегралів.

### Доведення

Покажемо, що число  $\rho > 0$  можна вибрати так, щоб у кулі  $B_\rho(t_*, x_*) \in D$  виконувалась умова: для довільної точки  $(t, x) \in B_\rho(t_*, x_*)$  існує єдина точка  $(t, u) \in D$ ,  $u = (u_1, \dots, u_p)$ , яку можна сполучити з  $(t, x)$  інтегральною кривою системи (5.26).

Нехай  $\chi(t, u)$  — розв'язок цієї системи, який задовольняє початкову умову  $\chi(t_*, u) = u$ , тобто  $\chi(t, u) := x(t, t_*, u)$ . З теореми 5.11 випливає, що  $\chi(t, u) \in C^1(B_r(t_*, x_*) \mapsto \mathbb{R}^n)$  при деякому  $r > 0$ . Розглянемо відображення

$$F(t, u, x) := \chi(t, u) - x \in C^1(B_r(t_*, x_*) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n).$$

Оскільки  $F(t_*, x_*, x_*) = 0$  і

$$\frac{\partial F(t_*, u, x)}{\partial u} = \frac{\partial \chi(t_*, u)}{\partial u} = E_n$$

( $E_n$  —  $(n \times n)$ -вимірна одинична матриця), то за теоремою про неявну функцію при деякому досить малому  $\rho > 0$  рівняння  $F(t, u, x) = 0$  визначає єдину функцію  $u = U(t, x) \in C^1(B_\rho(t_*, x_*) \mapsto \mathbb{R}^n)$ , яка має такі властивості:  $U(t_*, x_*) = x_*$ ,  $F(t, U(t, x), x) \equiv 0$ . Остання тожність означає, що

$$\chi(t, U(t, x)) = x \quad \forall (t, x) \in B_\rho(t_*, x_*). \quad (5.27)$$

Цю рівність можна інтерпретувати таким чином: якщо з точки  $(t_*, U(t_*, x_*))$  випустити інтегральну криву системи (5.26), то за час  $t$  вона досягне точки  $(t, x)$  (рис. 5.3).

Розглянемо тепер довільну точку  $(t_0, x_0) \in B_\rho(t_*, x_*)$  та розв'язок  $x(t)$ ,  $t \in I \ni t_0$ , який за-



Рис. 5.3

довольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$  і графік якого міститься в  $B_\rho(t_*, x_*)$ . З урахуванням (5.27) маємо рівності  $\chi(t_0, U(t_0, x_0)) = x_0 = x(t_0)$ . З єдиності розв'язку задачі Коші випливає тоді, що, з одного боку,  $x(t) = \chi(t, U(t_0, x_0))$ ,  $t \in I$ . З іншого — якщо замість  $(t_0, x_0)$  взяти точку  $(s, x(s))$ ,  $s \in I$ , то на підставі аналогічних міркувань дістанемо рівність  $x(t) = \chi(t, U(s, x(s)))$ ,  $t \in I$ . Таким чином функції  $\chi(t, U(t_0, x_0))$  та  $\chi(t, U(s, x(s)))$  визначають один і той самий розв'язок системи (5.26), причому цей розв'язок, за означенням  $\chi(t, u)$ , продовжується й у точку  $t$ . Отже, нами встановлено рівність

$$\chi(t_*, U(t_0, x_0)) = \chi(t_*, U(s, x(s))) \quad \forall s \in I,$$

яка збігається з рівністю

$$U(s, x(s)) = U(t_0, x_0) \quad \forall s \in I.$$

Оскільки  $(t_0, x_0)$  — довільна точка кулі  $B_\rho(t_*, x_*)$ , то звідси випливає, що кожна компонента  $U_i(t, x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) вектор-функції  $U(t, x)$  є першим інтегралом системи (5.26).

Для доведення незалежності знайденого набору перших інтегралів здиференціюємо обидві частини (5.27) за  $x$ . Матимемо

$$\frac{\partial \chi(t, U(t, x))}{\partial u} \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} = E_n.$$

Оскільки визначник добутку квадратних матриць дорівнює добуткові визначників,  $\det E_n = 1$ , то матриця  $\frac{\partial U(t, x)}{\partial x}$  невиврождена.

Звідси випливає лінійна незалежність векторів  $\text{grad}_x U_i(t, x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) у кожній точці  $(t, x) \in D$ , а разом із тим і повнота знайденої системи перших інтегралів.

#### ◆ Зауваження 5.1

Якщо у формулі (5.27) покласти  $t = t_*$ , то дістанемо  $U(t_*, x) = x$ . Таким чином, теорема 5.14 установлює існування перших інтегралів  $U_i(t, x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) системи (5.26), які задовольняють умови

$$U_i(t_*, x) = x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Знайти природну область визначення розв'язків задач Коші як функцій часу, початкових даних  $(t_0, x_0)$  і параметра  $\lambda$ :

а)  $\dot{x} = x^2 + \lambda$ ,  $x|_{t=t_0} = x_0$ ; б)  $\dot{x} + \lambda x = x^2 e^t$ ,  $x|_{t=t_0} = x_0$ .

- ② Визначити, яку систему й які початкові умови при  $t = 0$  задовольняє вектор-функція

$$(x'_{x_0}(t, x_0, y_0), y'_{x_0}(t, x_0, y_0))|_{x_0 = y_0 = 0},$$

де  $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$  — розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y^2 - 2t^2 + 2t, & x|_{t=0} = x_0, \\ \dot{y} = xy - t^3 + 1, & y|_{t=0} = y_0. \end{cases}$$

- ✓ *Вказівка.* Зауважити, що  $x = t^2$ ,  $y = t$  — розв'язок останньої системи при  $x_0 = y_0 = 0$ .

- ③ Знайти  $\left. \frac{\partial x}{\partial y_0} \right|_{x_0=3, y_0=2}$  для розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2, & x|_{t=1} = x_0, \\ \dot{y} = -y^2/2, & y|_{t=1} = y_0. \end{cases}$$

- ④ Знайти  $\left. \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$  для розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = 4ty^2, & x|_{t=0} = 0, \\ \dot{y} = 1 + 5\lambda x, & y|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

- ⑤ Вилисати задачу Коші, розв'язком якої є вектор-функція  $\frac{\partial^2 x(t, t_0, x_0, \lambda)}{\partial x_0 \partial \lambda_j}$  із теореми 5.13.

- ⑥ У системі диференціальних рівнянь задачі  $n$  тіл (див. приклад В. 6) набір мас  $(m_1, \dots, m_n)$  будемо розглядати як векторний параметр  $\lambda$ . Позначимо через

$$p(t, \lambda) = (r_1(t, \lambda), \dots, r_n(t, \lambda))$$

розв'язок задачі Коші з певними незалежними від  $\lambda$  початковими умовами. Показати, що для деякого відрізка  $J$  існує рівномірна границя

$$p(t, \lambda) \underset{J}{\rightrightarrows} p_0(t) \text{ при } m_1 \rightarrow 1, m_1 \rightarrow 0, \dots, m_n \rightarrow 0.$$

Записати систему, розв'язком якої є функція  $p_0(t)$ .

## 5.4

### Асимптотичні розвинення розв'язків диференціальних рівнянь

Диференційовність розв'язку задачі Коші нормальної системи як функції незалежної змінної, початкових даних і параметрів лежить в основі різноманітних асимптотичних методів наближеного розв'язання диференціальних рівнянь. Найпростіші варіанти цих методів розглянемо на прикладі скалярного диференціального рівняння першого порядку.

#### 5.4.1. Степеневі розвинення за незалежною змінною

Розглянемо рівняння

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (5.28)$$

в якому для простоти функцію  $f(t, x)$  вважатимемо визначеною й нескінченно диференційовною на всій площині:  $f(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R})$ . Для фіксованої точки  $(t_0, x_0)$  розв'язок задачі Коші, який задовольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$ , є нескінченно диференційовною функцією на інтервалі  $I(t_0, x_0)$ . Тому згідно з формулою Тейлора для кожного натурального  $N$  при  $t \rightarrow t_0$  справджується розвинення

$$x(t) = x_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots + a_N(t - t_0)^N + o((t - t_0)^N), \quad (5.29)$$

де  $a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k x(t_0)}{dt^k}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Покажемо, як можна визначити коефіцієнти  $a_k$ , не знаючи явного вигляду самого розв'язку.

Оскільки

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (5.30)$$

то  $a_1 = \dot{x}(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0, x_0)$ . Здиференціювавши тотожність (5.30) один раз, дістанемо

$$x''(t) = f'_t(t, x)|_{x=x(t)} + f'_x(t, x)|_{x=x(t)}\dot{x}(t).$$

Звідси  $a_2 = x''(t_0)/2 = f'_t(t_0, x_0) + f'_x(t_0, x_0)f(t_0, x_0)$ . Тепер зрозуміло, що послідовним диференціюванням тотожності (5.30) можна знайти всі коефіцієнти  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . А саме,

$$a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{dt^k} f(t, x(t)) \right|_{t=t_0}, \quad k = 2, 3, \dots, N.$$

Права частина цієї формули виражається через похідні функції  $x(t)$  у точці  $t_0$  до порядку  $k - 1$  включно, тобто через коефіцієнти  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, k - 1$ . Таким чином, дана формула має рекурентний характер.

Іноді для відшукування коефіцієнтів  $a_k$  зручно користуватися методом невизначених коефіцієнтів. Для цього підставимо розв'язок рівняння (5.28), який допускає розвинення (5.29), у (5.28) і одержану тотожність подамо у вигляді

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2(t-t_0) + 3a_3(t-t_0)^2 + \dots + Na_N(t-t_0)^{N-1} + o((t-t_0)^N) \equiv \\ & \equiv f(t, x_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \dots + a_{N-1}(t-t_0)^{N-1}) + o((t-t_0)^N). \end{aligned}$$

Тепер потрібно записати розвинення правої частини цієї формули за степенями  $(t-t_0)^k$  до порядку  $N - 1$  включно, після чого прирівняти коефіцієнти в обох частинах біля  $(t-t_0)^k$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ . Дістанемо рекурентні співвідношення для визначення  $a_1, a_2, \dots, a_N$ .

Природно поставити запитання: оскільки  $N$  у формулі (5.29) довільне, то чи не можна, спрямувавши  $N$  до нескінченності, дістати розв'язок рівняння (5.28) у вигляді збіжного в деякому околі точки  $t_0$  степеневому ряду? Відповідь на це запитання дав О. Коші. Сформулюємо відповідний результат.

### Теорема 5.15 (Коші)

Нехай ряд Тейлора функції  $f(t, x)$  збігається в деякому околі точки  $(t_0, x_0)$ . Тоді існує таке число  $\rho = \rho(t_0, x_0) > 0$ , що розв'язок рівняння (5.28), який задовольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$ , є сумою збіжного на інтервалі  $(t_0 - \rho, t_0 + \rho)$  степеневого ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^k.$$

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, у [10].

Важливо наголосити, що розв'язок диференціального рівняння,

який є сумою степеневого ряду на інтервалі  $(t_0 - \rho, t_0 + \rho)$ , допускає продовження в комплексний окіл точки  $t_0$ . Завдяки цьому відкривається можливість вивчення диференціальних рівнянь із «комплексним часом». Відзначимо також, що сформульована теорема Коші допускає узагальнення на випадок нормальної системи диференціальних рівнянь

### □ Приклад 5.1

Знайдемо з точністю до  $o(t^3)$  розв'язок задачі Коші  $\dot{x} = t^2 + x^2$ ,  $x(0) = 1$ .

Підставивши в диференціальне рівняння проект розв'язку

$$x(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + o(t^3), \quad t \rightarrow 0,$$

де  $a_1, a_2, a_3$  — невідомі коефіцієнти, дістанемо

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + o(t^2) &= t^2 + (1 + a_1 t + a_2 t^2)^2 + o(t^2) \equiv \\ &\equiv 1 + 2a_1 t + (1 + 2a_2 + a_1^2)t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

Звідси, прирівнявши коефіцієнти в обох частинах біля однакових степенів  $t$ , матимемо  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = a_1 = 1$ ,  $a_3 = \frac{1}{3}(1 + 2a_2 + a_1^2) = \frac{4}{3}$ . Отже,

$$x(t) = 1 + t + t^2 + \frac{4}{3}t^3 + o(t^3).$$

### 5.4.2. Степеневі розвинення за параметром

Розглянемо диференціальне рівняння з параметром:

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda). \quad (5.31)$$

Нехай  $f(t, x, \lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R})$ , і припустимо, що для рівняння (5.31) при  $\lambda = 0$  відомий розв'язок  $x = x_0(t)$ ,  $t \in I$ , який задовольняє початкову умову  $x_0(t_0) = \xi_0$ . Цей розв'язок називатимемо *незбуреним*. По ставимо задачу наближеного відшукування *збуреного розв'язку*  $x = x(t, \lambda)$  рівняння (5.31) при  $|\lambda| \ll 1$ , який би задовольняв збурену початкову умову

$$x|_{t=t_0} = \xi(\lambda), \quad (5.32)$$

де  $\xi(\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$  — задана функція така, що  $\xi(0) = \xi_0$ . За формулою Тейлора маємо

$$\xi(\lambda) = \xi_0 + \xi_1 \lambda + \xi_2 \lambda^2 + \dots + \xi_N \lambda^N + o(\lambda^N), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (5.33)$$

$$\text{де } \xi_k = \left. \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=0} \xi(\lambda), \quad k = 1, \dots, N.$$

Для довільного відрізка  $J \subset I$  і досить малого  $\sigma > 0$  функція  $x(t, \lambda)$  належить класу  $C^\infty(J \times (-\sigma, \sigma) \mapsto \mathbb{R})$ . Тому вона допускає асимптотичне розвинення

$$x(t, \lambda) = x_0(t) + x_1(t)\lambda + x_2(t)\lambda^2 + \dots + x_N(t)\lambda^N + o(\lambda^N), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (5.34)$$

$$\text{де } x_k(t) = \left. \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0} x(t, \lambda), \quad k = 1, \dots, N.$$

Для відшукування коефіцієнтів  $x_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  підставимо (5.34) у (5.31):

$$\begin{aligned} & \dot{x}_0(t) + \dot{x}_1(t)\lambda + \dot{x}_2(t)\lambda^2 + \dots + \dot{x}_N(t)\lambda^N + o(\lambda^N) = \\ & = f(t, x_0(t) + x_1(t)\lambda + x_2(t)\lambda^2 + \dots + x_N(t)\lambda^N + o(\lambda^N), \lambda). \end{aligned}$$

Тепер праву частину цієї рівності розвинемо за степенями  $\lambda$  до порядку  $N$  включно і після цього прирівняємо коефіцієнти в обох частинах біля однакових степенів  $\lambda$ . Дістанемо

$$\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), 0),$$

$$\dot{x}_k(t) = \left. \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0} f(t, x_0(t) + x_1(t)\lambda + \dots + x_N(t)\lambda^N + o(\lambda^N), \lambda),$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

Перша рівність справджується тотожно для  $t \in I$ . При  $k = 1$  маємо

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial x} x_1(t) + \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial \lambda}.$$

З (5.32), (5.33) випливає, що  $x_1(t_0) = \xi_1$ . Отже,  $x_1(t)$  можна знайти як розв'язок такої задачі Коші:

$$\dot{x} = \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial \lambda}, \quad x|_{t=t_0} = \xi_1.$$

Диференціальне рівняння цієї задачі є лінійним неоднорідним і, як наслідок, інтегровним у квадратурах. Воно збігається з рівнянням у варіаціях відносно параметра  $\lambda$ .

Покажемо, що за таким самим принципом можна знайти й інші коефіцієнти  $x_k(t)$ . Справді, оскільки

$$\begin{aligned} f(t, x_0(t) + x_1(t)\lambda + \dots + x_N(t)\lambda^N + o(\lambda^N), \lambda) &= \\ &= f(t, x_0(t) + x_1(t)\lambda + \dots + x_k(t)\lambda^k, \lambda) + o(\lambda^k) = \\ &= f(t, x_0(t) + x_1(t)\lambda + \dots + x_{k-1}(t)\lambda^{k-1}, \lambda) + \\ &+ \frac{\partial f(t, x_0(t) + x_1(t)\lambda + \dots + x_{k-1}(t)\lambda^{k-1}, \lambda)}{\partial x} x_k(t)\lambda^k + o(\lambda^k) = \\ &= f(t, x_0(t) + x_1(t)\lambda + \dots + x_{k-1}(t)\lambda^{k-1}, \lambda) + \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial x} x_k(t)\lambda^k + o(\lambda^k), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0} f(t, x_0(t) + x_1(t)\lambda + \dots + x_N(t)\lambda^N, \lambda) &= \\ &= \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial x} x_k(t) + f_k(t), \end{aligned}$$

де

$$f_k(t) = \left. \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0} f(t, x_0(t) + x_1(t)\lambda + \dots + x_{k-1}(t)\lambda^{k-1}, \lambda).$$

Таким чином, функція  $x_k(t)$  є розв'язком задачі Коші



$$\dot{x} = \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial x} x + f_k(t), \quad x|_{t=t_0} = \xi_k.$$

Важливо наголосити, що у формуванні функції  $f_k(t)$  беруть участь лише ті коефіцієнти  $x_j(t)$ , в яких  $j < k$ .

Описана методика легко переноситься на випадок систем диференціальних рівнянь та рівняння довільного порядку.

### □ Приклад 5.2

Одним із найпростіших модельних рівнянь теорії нелінійних коливань є так зване рівняння Дуффінга

$$\ddot{x} + \omega^2 x + x^3 = \mu \cos t, \quad \omega > 0$$

[порівняти з рівнянням (2.95)].

При  $\mu = 0$  воно має тривіальний розв'язок  $x = 0$ . При  $0 \neq |\mu| \ll 1$  шукатимемо  $2\pi$ -періодичний розв'язок цього рівняння вигляду

$$x(t, \mu) = x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + x_3(t)\mu^3 + o(\mu^3).$$

Підставивши це розвинення в рівняння Дуффінга, дістанемо

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t)\mu + \ddot{x}_2(t)\mu^2 + \ddot{x}_3(t)\mu^3 + \omega^2(x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + x_3(t)\mu^3) + \\ + x_1^3(t)\mu^3 + o(\mu^3) = \mu \cos \omega t. \end{aligned}$$

Звідси маємо систему для визначення функцій  $x_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ :

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \cos t,$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 = -x_1^3(t).$$

Скориставшись методом невизначених коефіцієнтів, неважко перекопатися в тому, що перше з вписаних рівнянь має  $2\pi$ -періодичний розв'язок лише у випадку, коли  $\omega \neq 1$ . Цей розв'язок виглядає так:

$$x_1(t) = \frac{\cos t}{\omega^2 - 1}.$$

З аналогічних міркувань  $x_2(t) \equiv 0$ . Підставивши  $x_1(t)$  у третє рівняння, після елементарних перетворень дістаємо

$$\ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 = \frac{3 \cos t + \cos 3t}{4(1 - \omega^2)^3}.$$

Звідси

$$x_3(t) = -\frac{3 \cos t}{4(\omega^2 - 1)^4} + \frac{\cos 3t}{4(1 - \omega^2)^3(\omega^2 - 9)},$$

якщо  $\omega \neq 1, 3$ .

Зауважимо, що далеко не завжди асимптотичні наближення до розв'язку правильно відображають його властивості. Як приклад розглянемо рівняння Дуффінга при  $\mu = 0$ ,  $\omega = 1$ :

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0. \quad (5.35)$$

Після зниження порядку на одиницю дістанемо неявне автономне рівняння

$$\dot{x}^2 + x^2 + \frac{x^4}{4} = c, \quad (5.36)$$

залежне від довільної сталої  $c$ . Його загальний розв'язок не виражається через елементарні функції. Неважко, однак, помітити, що оскільки кожен частинний розв'язок рівняння (5.35) задовольняє рівність (5.36), то він є обмеженою функцією.

Спробуємо тепер побудувати асимптотичні наближення розв'язків рівняння (5.35), ввівши попередньо в нього параметр  $\lambda$ . Для цього здійснимо масштабне перетворення  $x \mapsto \lambda^{1/2}x$ . Тоді дістанемо

$$\ddot{x} + x + \lambda x^3 = 0. \quad (5.37)$$

При  $\lambda = 0$  маємо лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, загальний розв'язок якого можна подати у вигляді  $x = a \cos(t + \varphi)$ , де  $a$  та  $\varphi$  — довільні сталі.

Знайдемо в першому наближенні асимптотичне розв'язання за параметром  $\lambda$  розв'язку задачі Коші, який задовольняє початкові умови

$$x|_{t=0} = 1, \quad \dot{x}|_{t=0} = 0.$$

Легко бачити, що незбурений розв'язок має вигляд  $x_0(t) = \cos t$ . Збурений розв'язок шукаємо тоді у вигляді

$$x = \cos t + x_1(t)\lambda + o(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Підставивши його в рівняння (5.37) і прирівнявши коефіцієнти при  $\lambda$  в обох частинах одержаної рівності, бачимо, що функцію  $x_1(t)$  слід шукати як розв'язок задачі Коші

$$\ddot{x} + x = -\cos^3 t \equiv -\frac{\cos 3t + 3 \cos t}{4},$$

$$x|_{t=0} = \dot{x}|_{t=0} = 0.$$

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів, знаходимо

$$x_1(t) = -\frac{3t \sin t}{8} + \frac{\cos 3t - \cos t}{32}.$$

Як бачимо,  $x_1(t)$  — функція необмежена. Таким чином, знайдене асимптотичне розвинення стає малопритатним при великих значеннях  $t$ .

Трудність, пов'язана з появою в асимптотичних розвиненнях необмежених коефіцієнтів типу  $t \sin t$  — так званих вікових членів (цей термін виник у небесній механіці), спонукала математиків до розробки інших методів, позбавлених зазначеної вади. Такими, зокрема, є асимптотичні методи Крилова—Боголюбова—Митропольського, створені фундаторами всесвітньо відомої київської школи нелінійної механіки. Цікаво відзначити, що один із способів уникнення вікових членів при побудові розв'язків рівняння (5.37) ще в 1835 р. запропонував М. В. Остроградський.

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Знайти перші чотири члени розвинень розв'язків задач Коші в степеневі ряди за змінною  $t$ :
- а)  $\dot{x} = x^3 + t^2$ ,  $x(1) = 1$ ;                      в)  $\ddot{x} = \dot{x} - x^3$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ;
- б)  $\dot{x} = x + te^x$ ,  $x(0) = 0$ ;                      г)  $\ddot{x} + \dot{x} + \sin x = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ .
- ② Знайти перші три члени розвинень розв'язків задачі Коші в степеневі ряди за параметром  $\lambda$ :
- а)  $\dot{x} = 4\lambda t - x^2$ ,  $x(1) = 1$ ;                      в)  $\ddot{x} = \dot{x} - \lambda x^3$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ;
- б)  $\dot{x} = x + \lambda te^x$ ,  $x(0) = 0$ ;                      г)  $\ddot{x} + \dot{x} + \lambda \sin x = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ .

- ③ Знайти перші три члени розвинення за степенями параметра  $\lambda$   $2\pi$ -періодичного розв'язку рівняння

$$\ddot{x} + \dot{x} + \lambda x^3 = \cos t,$$

який при  $\lambda = 0$  описує усталений режим коливань.

## 5.5

### Стійкість за Ляпуновим

Викладена в пп. 5.2—5.3 теорія виявляється мало пристосованою для дослідження процесів, які можуть тривати практично нескінченно довго. В цьому можна легко переконатися на прикладі таких двох скалярних рівнянь:

$$1) \dot{x} = -x; \quad 2) \dot{x} = x.$$

Розв'язки задачі Коші з початковою умовою  $x(0) = x_0$  мають вигляд  $x = x_0 e^{-t}$  та  $x = x_0 e^t$  відповідно. Хоч обидва вони неперервно залежать від  $x_0$ , однак при  $t \in [0, \infty)$  наслідки збурення початкового значення  $x_0 \mapsto \tilde{x}_0 = x_0 + \delta$  ( $\delta \ll 1$ ) виявляються абсолютно різними. Так, для першого рівняння неточність у виборі початкового значення з часом швидко нівелюється. Дійсно,  $|x_0 e^{-t} - (x_0 + \delta)e^{-t}| = |\delta| e^{-t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . Що ж стосується другого рівняння, то, наприклад, неточність у виборі початкового значення порядку 1 % виливається у 20%-ну похибку при обчисленні значення розв'язку в момент часу  $t = 3$ .

Для дослідження характеру залежності розв'язків систем диференціальних рівнянь від початкових даних на великих інтервалах часу наприкінці XIX ст. О. М. Ляпуновим було створено строгу теорію стійкості руху.

#### 5.5.1. Основні поняття теорії стійкості за Ляпуновим

Розглянемо систему

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{5.38}$$

визначену в області  $\Omega = [a, \infty) \times D$ , де  $D$  — область у  $\mathbb{R}^n$ . Припускати-

memo, що розв'язок задачі Коші з довільними початковими даними  $x_0$  існує й має властивість єдиності.

### Означення 5.9

Розв'язок  $x_*(t)$  системи (5.38) називають *стійким за Ляпуновим* (при  $t \rightarrow \infty$ ), якщо:

- цей розв'язок існує на півосі  $[a, \infty)$ ;
- для довільного  $\epsilon > 0$  і довільного  $t_0 \geq a$  можна вказати таке  $\delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0$ , що для кожного  $x_0$  такого, що  $\|x_0 - x_*(t_0)\| < \delta$ , розв'язок  $x(t)$  системи (5.38), який задовольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$ , існує на півосі  $[t_0, \infty)$  і справджує нерівність

$$\|x(t) - x_*(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

Друга вимога цього означення має таку геометричну інтерпретацію: графік кожного розв'язку, який у момент  $t = t_0$  виходить із  $\delta$ -околу точки  $x_*(t_0)$ , повинен належати  $\epsilon$ -трубці графіка розв'язку  $x_*(t)$  на півосі  $[t_0, \infty)$  (рис. 5.4).

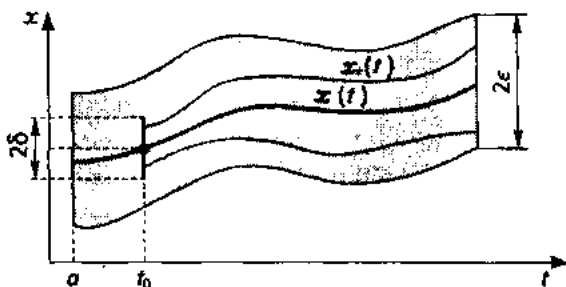


Рис. 5.4

*Нестійким* (при  $t \rightarrow \infty$ ) називається розв'язок, для якого порушується хоча б одна з вимог, що фігурують в означенні (5.9). Для нестійкого розв'язку  $x_*(t)$  можна вказати такі  $\epsilon > 0$  і  $t_0 > 0$ , що для кожного  $\delta > 0$  знайдеться розв'язок  $x(t)$  такий, що хоча  $\|x_*(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ , однак при певному  $T = T(\delta, \epsilon, t_0) > t_0$  виконується нерівність  $\|x_*(T) - x(T)\| \geq \epsilon$ .

### Означення 5.10

Розв'язок  $x_*(t)$  системи (5.38) називають *асимптотично стійким за Ляпуновим* (при  $t \rightarrow \infty$ ), якщо:

- цей розв'язок стійкий за Ляпуновим;
- для довільного  $t_0 \geq a$  можна вказати таке  $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ , що для кожного  $x_0$  такого, що  $\|x_0 - x_*(t_0)\| < \Delta$ , розв'язок  $x(t)$  системи (5.38), який задовольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$ , існує на півосі  $[t_0, \infty)$  і має властивість

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_*(t)\| = 0.$$

Нехай відомо, що розв'язок  $x_*(t)$  системи (5.38) існує на півосі  $[a, \infty)$ . Покажемо, що задачу про його стійкість можна звести до визначення характеру стійкості тривіального розв'язку деякої допоміжної системи.

Для цього запровадимо нову змінну

$$y = x - x_*(t). \quad (5.39)$$

Дістанемо систему  $\dot{y} = f(t, x_*(t) + y) - \dot{x}_*(t)$ , яку з урахуванням тотожності  $\dot{x}_*(t) = f(t, x_*(t))$  можна подати у вигляді

$$\dot{y} = f(t, x_*(t) + y) - f(t, x_*(t)). \quad (5.40)$$

Очевидно, що остання має тривіальний розв'язок  $y \equiv 0$ .

### Твердження 5.3

Розв'язок  $x_*(t)$  системи (5.38) стійкий (асимптотично стійкий) тоді й лише тоді, коли стійким (асимптотично стійким) буде тривіальний розв'язок допоміжної системи (5.40).

### Доведення

Вектор-функція  $x(t)$  тоді й лише тоді буде розв'язком системи (5.38), коли вектор-функція  $y(t) = x(t) - x_*(t)$  задовольнятиме систему (5.40). Тепер залишилося тільки порівняти означення стійкості (асимптотичної стійкості) розв'язків  $x_*(t)$  та  $y \equiv 0$  відповідних систем.

Припустимо, що  $f(t, x) \in C^1(\Omega \mapsto \mathbb{R}^n)$ . У цьому випадку за формулою Тейлора праву частину в (5.40) можна подати у вигляді

$$f(t, x_*(t) + y) - f(t, x_*(t)) = A(t)y + g(t, y),$$

де

$$A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n := \left\{ \frac{\partial f_i(t, x_*(t))}{\partial x_j} \right\}_{i,j=1}^n \equiv \frac{\partial f(t, x_*(t))}{\partial x},$$

• вектор-функція  $g(t, y) := f(t, x_*(t) + y) - f(t, x_*(t)) - A(t)y$  має властивість

$$\forall t \in [a, \infty) \quad \lim_{\|y\| \rightarrow 0} \|y\|^{-1} g(t, y) = 0$$

(границя, можливо, не є рівномірною щодо  $t$ ).

Аналіз стійкості тривіального розв'язку системи (5.40) природно розпочати з вивчення лінеаризованої системи  $\dot{y} = A(t)y$ , тобто системи у варіаціях для розв'язку  $x_*(t)$  (системи першого наближення). Припустимо, що питання стійкості тривіального розв'язку такої системи вдалося розв'язати. Тоді на наступному кроці виникає проблема відповідності між стійкістю тривіального розв'язку лінеаризованої системи та стійкістю такого самого розв'язку системи (5.40) (проблема коректності визначення стійкості за першим наближенням).

Перш ніж аналізувати цю проблему, зупинимося на основних положеннях теорії стійкості розв'язків лінійних однорідних систем.

### 5.5.2. Стійкість лінійних систем

Розглянемо лінійну однорідну систему

$$\dot{x} = A(t)x \tag{5.41}$$

з неперервними на півосі  $[a, \infty)$  коефіцієнтами. Нехай  $x_*(t)$  — її довільний розв'язок. За теоремою існування розв'язку задачі Коші для ЛОС область існування  $x_*(t)$  — уся піввісь  $[a, \infty)$ . Легко бачити, що щезли зміни (5.39) відносно  $y$  знову дістаємо ЛОС із матрицею  $A(t)$ . Отже, характер стійкості розв'язку  $x_*(t)$  цілком визначається характером стійкості тривіального розв'язку системи (5.41). Тому розв'язки системи (5.41) одночасно або стійкі (асимптотично стійкі), або нестійкі. Таким чином, коректними є поняття стійкості, асимптотичної стійкості, нестійкості лінійної системи.

Покажемо, що стійкість системи (5.41) повністю визначається властивостями її довільної фундаментальної матриці  $X(t)$ . Нагадаємо, що загальний розв'язок системи (5.41) можна подати у вигляді  $x = X(t)c$ , де  $c \in \mathbb{R}^n$  — вектор довільних сталих. Для виділення з цієї формули розв'язку  $x(t)$ , який задовольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$ , потрібно розв'язати лінійну систему відносно  $c$  вигляду  $X(t_0)c = x_0$ . Звідси  $c = X^{-1}(t_0)x_0$ , таким чином,

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0. \quad (5.42)$$

### Теорема 5.16

Для стійкості ЛОС (5.41) необхідно й достатньо, щоб її фундаментальна матриця  $X(t)$  була обмеженою на  $[a, \infty)$ , тобто

$$\exists K > 0 : \|X(t)\| \leq K \quad \forall t \geq a.$$

### Доведення

**Достатність.** Припустимо, що умова обмеженості матриці  $X(t)$  справджується. Доведемо, що тривіальний розв'язок системи (5.41) стійкий. Нехай  $\epsilon > 0$ ,  $t_0 \geq a$  довільні. Вкажемо  $\delta > 0$ , яке фігурує в означенні стійкості, якщо в ньому покласти  $x_*(t) \equiv 0$ . З урахуванням формули (5.42) дістаємо оцінку

$$\|x(t) - 0\| \leq \|X(t)\| \|X^{-1}(t_0)\| \|x_0\| \leq K \|X^{-1}(t_0)\| \|x_0\|. \quad (5.43)$$

Очевидно, для того щоб задовольнити умову  $\|x(t)\| < \epsilon$  при всіх  $t \geq t_0$  і всіх тих  $x_0$ , для яких  $\|x_0\| < \delta$ , достатньо покласти

$$\delta = \delta(t_0, \epsilon) := \frac{\epsilon}{K \|X^{-1}(t_0)\|}.$$

**Необхідність.** Припустимо, що умова обмеженості фундаментальної матриці не справджується. Візьмемо довільні  $\epsilon > 0$ ,  $t_0 \geq a$  і  $\delta > 0$  і вкажемо розв'язок  $x(t)$  такий, що хоча  $\|x(t_0)\| \leq \delta$ , однак при певному  $T > t_0$  виконується нерівність  $\|x(T)\| \geq \epsilon$ .

Якщо  $\|X(t)\|$  необмежена, то обов'язково знайдеться стовпець  $x_i(t)$  матриці  $X(t)$ , для якого існує послідовність моментів  $\{t_k\}_{k=1,2,\dots}$  така, що  $t_k \rightarrow \infty$  і  $\|x_i(t_k)\| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тепер, урахувавши, що кожен стовпець фундаментальної матриці  $X(t)$  є роз-



в'язком системи (5.41) і добуток розв'язку ЛОС на число знову є її розв'язком, достатньо покласти  $x(t) := \frac{\delta x_i(t)}{2 \|x_i(t_0)\|}$  (зауважимо, що  $x_i(t)$  як нетривіальний розв'язок ЛОС не перетворюється в 0 у жодній точці півосі  $[a, \infty)$ ). Дійсно, хоча  $\|x(t_0)\| = \delta/2 < \delta$ , однак  $\|x(t_k)\| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

### Теорема 5.17

Для асимптотичної стійкості ЛОС необхідно й достатньо, щоб норма її фундаментальної матриці прямувала до нуля при  $t \rightarrow \infty$ .

#### Доведення

**Достатність.** Нехай  $\|X(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Зрозуміло, що тоді  $\|X(t)\|$  обмежена на  $[a, \infty)$ . Тому система (5.41) стійка. На основі оцінки (5.43) легко зробити висновок, що для довільного  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  норма розв'язку (5.42) прямує до нуля, коли  $t \rightarrow \infty$ . Отже, всі вимоги з означення асимптотичної стійкості виконуються.

**Необхідність.** Якщо  $\|X(t)\|$  не прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , то знайдеться стовпець  $x_i(t)$  фундаментальної матриці  $X(t)$ , норма якого не прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Тоді для довільних  $\Delta > 0$ ,  $t_0 \geq a$  розв'язок  $x(t) := \frac{\Delta x_i(t)}{2 \|x_i(t_0)\|}$  системи (5.41) задовольняє нерівність  $\|x(t_0)\| < \Delta$  і водночас його норма не прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ .

### 5.5.3. Стійкість лінійної системи зі сталою матрицею

#### Проблему стійкості системи

$$\dot{x} = Ax, \quad (5.44)$$

1  $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $a_{ij} = \text{const}$  повністю розв'язує така теорема.

#### Теорема 5.18

Для того щоб система (5.44) була стійкою, необхідно й достатньо, щоб дійсні частини всіх власних чисел матриці  $A$  були недодатними, причому кожному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідало стільки лінійно незалежних власних векторів, якою є кратність цього числа як

кореня характеристичного полінома  $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$  (тобто кожному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідали лише одновимірні клітини Жордана в нормальній формі матриці  $A$ ).

Для асимптотичної стійкості системи (5.44) необхідно й достатньо, щоб дійсні частини всіх власних чисел матриці  $A$  були від'ємними.

### Доведення

Нехай  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — корені характеристичного полінома матриці  $A$ , виписані з урахуванням їх кратностей. Узагальнений метод Ейлера дає змогу знайти  $n$  лінійно незалежних розв'язків системи (5.44), які мають такий вигляд:

$$x_j(t) = e^{\alpha_j t} (P_{k_j}^{(1)}(t) \cos \beta_j t + P_{k_j}^{(2)}(t) \sin \beta_j t), \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.45)$$

Тут  $\alpha_j$  та  $\beta_j$  — відповідно дійсна та уявна частини власного числа  $\lambda_j$  матриці  $A$ ;  $P_{k_j}^{(1)}(t)$  та  $P_{k_j}^{(2)}(t)$  — поліноми степеня, не вищого ніж  $k_j \geq 0$ , коефіцієнтами яких є  $n$ -вимірні вектори. Хоча б один із цих поліномів має степінь  $k_j$ . Зокрема, якщо  $\beta_j = 0$ , то такий степінь має  $P_{k_j}^{(1)}(t)$ . У подальших міркуваннях фігуруватиме фундаментальна матриця  $X(t)$ , стовпцями якої є вектор-функції  $x_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Проаналізуємо три можливих випадки:

- 1)  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ ;
- 2)  $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ ;  $\exists j : \operatorname{Re} \lambda_j = 0$ .
- 3)  $\exists j : \operatorname{Re} \lambda_j > 0$ .

**Випадок 1.** Оскільки  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} t^k = 0$  при всіх  $\alpha > 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_j(t)\| = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Таким чином, у випадку 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0,$$

і за теоремою 5.17 система (5.44) буде асимптотично стійкою.

**Випадок 2.** Нехай корінь  $\lambda_j$ , в якого  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ , має кратність  $r_j$ . Тоді можна вважати, що

$$\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+r_j-1}$$

і, як наслідок,  $\alpha_l = 0$  при  $l = j, j+1, \dots, j+r_j-1$ .

Якщо кореню  $\lambda_j$  відповідає  $r_j$  лінійно незалежних власних векторів, то  $k_l = 0$  при  $l = j, j+1, \dots, j+r_j-1$ . Тому всі  $r_j$  лінійно незалежних розв'язків  $x_l(t)$ ,  $l = j, j+1, \dots, j+r_j-1$ , які відповідають кореню  $\lambda_j$ , будуть обмеженими, однак їх норми не прямуватимуть до нуля при  $t \rightarrow \infty$ .

Якщо кореню  $\lambda_j$  відповідає менше ніж  $r_j$  лінійно незалежних власних векторів, то серед чисел  $k_l$ ,  $l = j, j+1, \dots, j+r_j-1$  є хоча б одне додатне. Без обмеження загальності міркувань вважаємо, що саме  $k_j \geq 1$ . Тоді функція  $\|x_j(t)\|$  буде необмеженою на півосі  $[a, \infty)$ , де  $a \in \mathbb{R}$  довільне.

Таким чином, у випадку 2 функція  $\|X(t)\|$  буде обмеженою на півосі  $[a, \infty)$  і система (5.44) буде стійкою (неасимптотично) тоді й лише тоді, коли кожному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідає стільки лінійно незалежних власних векторів, якою є кратність цього числа як кореня характеристичного полінома  $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ .

**Випадок 3.** Очевидно, що норма функції вигляду (5.45) при  $\alpha_j > 0$  не є обмеженою на півосі  $[a, \infty)$ . Тому система (5.44) нестійка.

## Наслідок 5.2

Якщо дійсні частини власних чисел матриці  $A$  менші за число  $-\gamma$ , де  $\gamma > 0$ , то існує така стала  $K(\gamma) > 0$ , що

$$\|e^{At}\| \leq K(\gamma)e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq 0.$$

Дійсно, якщо  $\alpha_j < -\gamma$ , то функція вигляду  $e^{(\alpha_j + \gamma)t} t^k$ , де  $k \geq 0$ , обмежена при  $t \geq 0$ , а тоді знайдеться стала  $K_j(\gamma) > 0$  така, що

$$\|x_j(t)\| \leq e^{-\gamma t} e^{(\alpha_j + \gamma)t} \left( \|P_{k_j}^{(1)}(t)\| + \|P_{k_j}^{(2)}(t)\| \right) \leq K_j(\gamma) e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq 0.$$

Залишилося зауважити, що  $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$  (див. п. 2.3.4).

Перевірку умов теореми 5.18 у тій її частині, яка стосується асимптотичної стійкості, можна здійснити, не знаходячи самих власних чисел матриці  $A$ . Для цього достатньо до полінома

$$\det(\lambda E - A) = (-1)^n \det(A - \lambda E),$$

корені якого є власними числами матриці  $A$ , застосувати критерій Рауса—Гурвіца (див., наприклад, [2]). Наведемо цей результат без доведення.

**Критерій Рауса—Гурвіца.** Розглянемо поліном

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n, \text{ де } a_0 > 0, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.$$

Утворимо матрицю Гурвіца  $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , поклавши

$$h_{ij} = \begin{cases} a_{2i-j}, & \text{якщо } 0 \leq 2i-j \leq n, \\ 0 & \text{у решті випадків.} \end{cases}$$

Для того щоб дійсні частини всіх коренів полінома  $P(\lambda)$  були від'ємними, необхідно й достатньо, щоб усі головні діагональні мінори матриці  $H$  були додатними:

$$\Delta_k := \det H_k > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n,$$

де  $H_k := \{h_{ij}\}_{i,j=1}^k$ .

Визначники  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$  мають вигляд

$$a_1, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

(тут  $a_k := 0$  при  $k > n$ ).

**□ Приклад 5.3**

*Дослідимо на стійкість лінійну однорідну двовимірну систему зі сталими коефіцієнтами*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = \gamma x + \delta y. \end{cases} \quad (5.46)$$

Характеристичний поліном матриці  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  цієї системи має вигляд

$$\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + \alpha\delta - \gamma\beta = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A.$$

Знайдемо власні числа

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A}}{2}$$

Згідно з критерієм Рауса—Гурвіца система (5.46) буде асимптотично стійкою тоді й лише тоді, коли

$$\operatorname{tr} A < 0, \quad \begin{vmatrix} -\operatorname{tr} A & 1 \\ 0 & \det A \end{vmatrix} > 0,$$

тобто при

$$\operatorname{tr} A < 0, \quad \det A > 0. \quad (5.47)$$

При цьому у випадку, коли

$$\operatorname{tr}^2 A > 4 \det A,$$

маємо пару дійсних від'ємних власних чисел. Фазовий портрет системи є *стійким вузлом* (див. п. 1.9).

Якщо виконуються нерівності (5.47) і

$$\operatorname{tr}^2 A < 4 \det A,$$

то маємо пару комплексно-спряжених власних чисел із від'ємними дійсними частинами. Фазовий портрет системи є *стійким фокусом*.

*Стійкий вироджений вузол* з'являється, коли (5.47) виконується разом з умовами

$$\operatorname{tr}^2 A = 4 \det A \quad (\text{кратний корінь}),$$

$$|\beta| + |\gamma| \neq 0 \quad (\text{матриця } A \text{ недиагональна}).$$

Нарешті, *стійкому дикритичному вузлу* відповідає випадок, коли

$$\alpha = \delta < 0, \quad \gamma = \beta = 0.$$

Випишемо тепер умови, за яких система (5.46) стійка, але неасимптотично. Тут можливі таких три випадки:

1) матриця  $A$  має пару суто уявних власних чисел — випадок центра:

$$\operatorname{tr} A = 0, \quad \det A > 0;$$

2) одне власне число дорівнює нулю, а інше — від'ємне:

$$\operatorname{tr} A < 0, \quad \det A = 0.$$

3) тривіальний випадок, коли  $A$  — нульова матриця.

### 5.5.4. Теорема про стійкість за першим наближенням

Розглянемо  $n$ -вимірну автономну систему

$$\dot{x} = f(x). \quad (5.48)$$

Нехай точка  $x_*$  — її положення рівноваги:  $f(x_*) = 0$ . Будемо досліджувати його стійкість. Припустимо, що в деякій кулі  $B_r(x_*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_*\| < r\}$  вектор-функція  $f(x)$  неперервно диференційовна. Згідно з підходом, описаним у п. 5.5.1, зробимо заміну змінних  $x = x_* + y$  і одержану систему подамо у вигляді

$$\dot{y} = f(x_* + y) = Ay + o(\|y\|), \quad A := \frac{\partial f(x_*)}{\partial x}. \quad (5.49)$$

Як бачимо, лінеаризована система  $\dot{y} = Ay$  (система першого наближення) має сталі коефіцієнти, а отже, задачу про її стійкість повністю розв'язує теорема 5.18. Постає природне запитання: в яких випадках можна обмежитись аналізом лише першого наближення? О. М. Ляпунов показав, що асимптотична стійкість лінеаризованої системи гарантує стійкість такого самого типу для положення рівноваги системи (5.48). Навпаки, якщо нестійкість лінеаризованої системи пов'язана з наявністю в матриці  $A$  хоча б одного власного числа з додатною дійсною частиною, то й положення рівноваги  $x_*$  системи (5.48) нестійке. В цьому пункті буде доведено лише результат, який стосується асимптотичної стійкості. Обґрунтування твердження про нестійкість відкладемо до п. 5.6.2.

При дослідженні стійкості автономних систем ми неодноразово використовуваємо таке твердження про продовжуваність розв'язків на нескінченний інтервал.

#### Твердження 5.4

Нехай  $f(x) \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^n)$  і  $x(t)$ ,  $t \in I := (T_-, T_+)$  — непродовжуваний розв'язок системи (5.48), для якого існує такий компакт  $\mathcal{K} \in D$  і таке  $t_0 \in I$ , що

$$x(t) \in \mathcal{K} \quad \forall t \in [t_0; T_+).$$

Тоді  $T_+ = \infty$ .

### Доведення

Насамперед зауважимо, що областю визначення системи (5.48) є множина  $\Omega := \mathbb{R} \times D$ . Припустимо, навпаки, що  $T_+ < \infty$ . Тоді, з одного боку,

$$(t, x(t)) \in K := [t_0, T_+] \times \mathcal{X} \quad \forall t \in [t_0, T_+),$$

тобто на проміжку  $[t_0, T_+)$  графік розв'язку  $x(t)$  належить компакт-у  $K \subset \Omega$ . З іншого боку, оскільки вектор-функція  $f(x)$  неперервно диференційовна, то розв'язок  $x(t)$  має властивість єдиності, а тоді за теоремою 5.3 існує таке  $t_+ \in [t_0, T_+)$ , що  $(t_+, x(t_+)) \notin K$ . Дійшли суперечності.

### Теорема 5.19

**(про стійкість за першим наближенням)**

Нехай  $f(x) \in C^1(B_r(x_*)) \mapsto \mathbb{R}^n$  і  $f(x_*) = 0$ . Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці  $A := \frac{\partial f(x_*)}{\partial x}$  від'ємні, то  $x_*$  — асимптотично стійке положення рівноваги системи (5.48).

### Доведення

Доведемо, що тривіальний розв'язок системи (5.49) асимптотично стійкий. Насамперед зведемо праву частину цієї системи до вигляду, зручного для дослідження. Маємо

$$\begin{aligned} f(x_* + y) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x_* + sy) ds = \left[ \int_0^1 \frac{\partial f(x_* + sy)}{\partial x} ds \right] y = \\ &= \frac{\partial f(x_*)}{\partial x} y + \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial f(x_* + sy)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_*)}{\partial x} \right) ds \right] y. \end{aligned}$$

Поклавши

$$G(y) = \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial f(x_* + sy)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_*)}{\partial x} \right) ds \right] y,$$

систему (5.49) запишемо у вигляді

$$\dot{y} = Ay + G(y)y. \tag{5.50}$$

Нехай  $\delta$  і  $\rho$  — поки що довільні числа, пов'язані між собою лише нерівностями  $0 < \delta < \rho < r$ . Візьмемо довільну точку  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times B_\delta(0)$  і розглянемо непродовжуваний розв'язок  $y(t)$ ,  $t \in (T_-, T_+)$  системи (5.50), який задовольняє початкову умову  $y(t_0) = y_0$ . Проаналізуємо два можливих варіанти поведінки розв'язку  $y(t)$  на проміжку  $[t_0, T_+)$ :

- 1) нерівність  $\|y(t)\| < \rho$  виконується для всіх  $t \in [t_0, T_+)$ ;
- 2) існує  $t_* \in (t_0, T_+)$  таке, що  $\|y(t)\| < \rho$  для всіх  $t \in [t_0, t_*)$ , але  $\|y(t_*)\| = \rho$  [тобто на інтервалі  $(t_0, T_+)$  існує момент  $t = t_*$ , коли точка  $y(t)$  уперше досягає межі кулі  $B_\rho(0)$ ].

У першому випадку згідно з твердженням 5.4 маємо рівність  $T_+ = \infty$ . Тому в цій ситуації покладемо  $t_* = \infty$ . Неважко зрозуміти, що рівність

$$t_* = \sup\{\tau \in [t_0, T_+) : \|y(t)\| < \rho \quad \forall t \in [t_0, \tau]\}$$

визначає  $t_*$  для обох можливих варіантів.

Покажемо, що для довільного  $\epsilon \in (0, r)$  вибором чисел  $\rho \in (0, \epsilon)$  і  $\delta \in (0, \rho)$  можна розпорядитися таким чином, щоб для всіх  $y_0 \in B_\delta(0)$  реалізувався лише перший випадок, тобто  $t_* = \infty$ , і при цьому  $\|y(t)\| \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Звідси й випливатиме асимптотична стійкість тривіального розв'язку системи (5.50).

Покладемо

$$I := \begin{cases} [t_0, \infty), & \text{якщо } t_* = \infty, \\ [t_0, t_*], & \text{якщо } t_* < \infty. \end{cases}$$

Функція  $y(t)$ ,  $t \in I$  перетворює систему (5.50) на тотожність. Тому цю функцію можна інтерпретувати як розв'язок задачі Коші для лінійної неоднорідної системи

$$\dot{y} = Ay + g(t), \quad y|_{t=t_0} = y_0,$$

де  $g(t) = G(y(t))y(t)$ . Матрицант відповідної однорідної системи має вигляд  $\Omega_s^t = e^{A(t-s)}$ . Тому, скориставшись формулою (2.67'), можемо записати

$$y(t) = e^{A(t-t_0)} y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} g(s) ds \quad \forall t \in I.$$



Оцінимо  $\|y(t)\|$ . Оскільки існують такі додатні сталі  $K, \gamma$ , що  $\|e^{At}\| \leq Ke^{-\gamma t}$ ,  $t \geq 0$  (наслідок 5.2), то

$$\|y(t)\| \leq Ke^{-\gamma(t-t_0)} \|y_0\| + \int_{t_0}^t Ke^{-\gamma(t-s)} \|g(s)\| ds \quad \forall t \in I$$

або, що одне й те саме,

$$e^{\gamma(t-t_0)} \|y(t)\| \leq K \|y_0\| + \int_{t_0}^t Ke^{\gamma(s-t_0)} \|g(s)\| ds \quad \forall t \in I.$$

Далі, оскільки  $f(x) \in C^1(B_r(x_*)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то з явного вигляду неперервної у  $B_r(0)$  матричнозначної функції  $G(y)$  випливає така її властивість:

$$\mu(\rho) := \max_{y \in \overline{B_\rho(0)}} \|G(y)\| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (5.51)$$

де  $\overline{B_\rho(0)}$  — замкнена куля радіусом  $\rho$ . Оскільки для всіх  $t \in I$  виконується нерівність  $\|y(t)\| < \rho$ , то водночас  $\|g(t)\| \leq \mu(\rho) \|y(t)\|$ . Отже,

$$e^{\gamma(t-t_0)} \|y(t)\| \leq K \|y_0\| + \int_{t_0}^t K\mu(\rho) e^{\gamma(s-t_0)} \|y(s)\| ds \quad \forall t \in I.$$

За лемою 5.4 про інтегральну нерівність (див. п. 5.2.2) при  $u(t) = e^{\gamma(t-t_0)} \|y(t)\|$ ,  $a(t) = K\mu(\rho)$ ,  $c = K \|y_0\|$  маємо:

$$e^{\gamma(t-t_0)} \|y(t)\| \leq K \|y_0\| e^{K\mu(\rho)(t-t_0)} \quad \forall t \in I$$

і, нарешті,

$$\|y(t)\| \leq K \|y_0\| e^{(K\mu(\rho) - \gamma)(t-t_0)} \quad \forall t \in I.$$

Тепер для заданого  $\epsilon \in (0, r)$ , скориставшись властивістю (5.51) функції  $\mu(\rho)$ , виберемо  $\rho \in (0, \epsilon)$  настільки малим, щоб  $\alpha := \gamma - K\mu(\rho) > 0$ . Тоді нерівність

$$\|y(t)\| \leq \rho e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \in I \quad (5.52)$$

виконуватиметься для всіх  $y_0 \in B_\delta(0)$ , якщо  $\delta \in (0, \min(\rho, \rho/K))$ .

Звідси відразу випливає, що  $t_* = \infty$ . Справді, якби  $t_* < \infty$ , то наслідком (5.52) була б нерівність  $\|y(t_*)\| \leq \rho e^{-\alpha(t_* - t_0)} < \rho$ , яка суперечить означенню  $t_*$ .

Таким чином, для довільних  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in B_\delta(0)$  розв'язок  $y(t)$  системи (5.50) такий, що  $y(t_0) = y_0$ , існує на півосі  $[t_0, \infty)$  і для нього виконується оцінка

$$\|y(t)\| \leq K \|y_0\| e^{-\alpha(t - t_0)} < \epsilon \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

#### □ Приклад 5.4

Розглянемо модель типу «хижак—жертва», в якій враховується внутрішньовидова конкуренція. Відповідну систему диференціальних рівнянь було введено у вступі [система (B.4)].

Неважно переконатися в тому, що масштабними перетвореннями вигляду  $x \mapsto \alpha x$ ,  $y \mapsto \beta y$ ,  $t \mapsto \gamma t$  після відповідного вибору додатних чисел  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  коефіцієнти  $l$ ,  $p$ ,  $q$  можна зробити такими, що дорівнюють 1. Відтак будемо досліджувати систему вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = x(k - x - my) =: P(x, y), \\ \dot{y} = y(-1 - y + rx) =: Q(x, y). \end{cases} \quad (5.53)$$

Знайдемо умови на параметри  $k$ ,  $m$ ,  $r$ , при виконанні яких дана система має асимптотично стійке положення рівноваги, яке знаходиться всередині першого квадранта площини  $xOy$ .

Координати такого положення рівноваги мають задовольняти систему

$$\begin{cases} k - x - my = 0, \\ -1 - y + rx = 0. \end{cases}$$

Звідси  $x = x_* := \frac{k+m}{1+mr}$ ,  $y = y_* := \frac{kr-1}{1+mr}$ . Таким чином, система (5.53) має положення рівноваги з додатними координатами тоді й лише тоді, коли

$$kr - 1 > 0. \quad (5.54)$$

Для того щоб з'ясувати характер стійкості знайденого положення рівноваги, випишемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} P'_x(x_*, y_*) & P'_y(x_*, y_*) \\ Q'_x(x_*, y_*) & Q'_y(x_*, y_*) \end{pmatrix}.$$

Для спрощення обчислень зауважимо, що в нашому випадку  $P(x, y) = x\tilde{P}(x, y)$ ,  $Q(x, y) = y\tilde{Q}(x, y)$ , де  $\tilde{P}(x_*, y_*) = 0$  і  $\tilde{Q}(x_*, y_*) = 0$ . Тому

$$A = \begin{pmatrix} x_* \tilde{P}'_x(x_*, y_*) & x_* \tilde{P}'_y(x_*, y_*) \\ y_* \tilde{Q}'_x(x_*, y_*) & y_* \tilde{Q}'_y(x_*, y_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_* & -my_* \\ rx_* & -y_* \end{pmatrix}$$

Як було показано в п. 5.5.3, аби власні числа матриці  $A$  мали від'ємні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб

$$\text{tr } A = -x_* - y_* < 0,$$

$$\det A = x_* y_* (1 + rm) > 0.$$

Як бачимо, ці нерівності є наслідком умови (5.54). Таким чином, якщо ця умова справджується, то система (5.53) має асимптотично стійке положення рівноваги з додатними координатами.

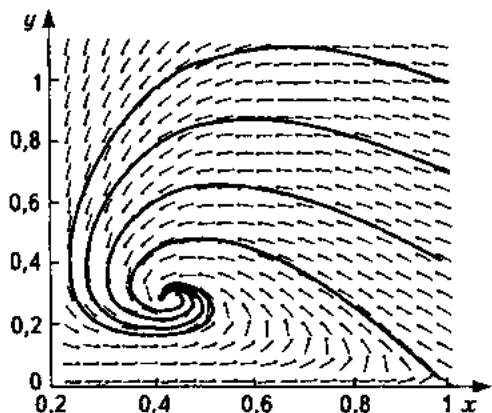
Щоб дістати детальнішу інформацію про характер поведінки фазових кривих досліджуваної системи в околі положення рівноваги  $(x_*, y_*)$ , потрібно взяти до уваги теорему Гробмана—Хартмана (див. п. 1.9.4). З урахуванням викладеного в п. 5.5.3 особлива точка  $(x_*, y_*)$  буде стійким фокусом, якщо

$$\begin{aligned} \text{tr}^2 A < 4 \det A &\Leftrightarrow (x_* + y_*)^2 < \\ &< 4x_* y_* (1 + rm). \end{aligned}$$

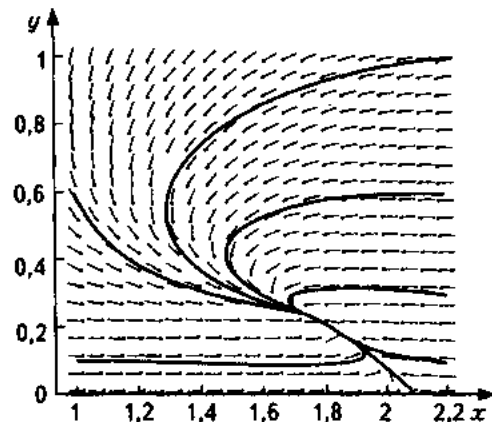
Якщо ж

$$(x_* + y_*)^2 > 4x_* y_* (1 + rm),$$

то особлива точка  $(x_*, y_*)$  буде стійким вузлом.



а



б

Рис. 5.5

Результати числових розрахунків, подані на рис. 5.5 ( $a - k = 1$ ,  $m = 2$ ,  $r = 3$ ;  $b - k = 2,1$ ,  $m = 1,5$ ,  $r = 0,7$ ), дають підстави вважати, що кожен розв'язок системи (5.53), початкове значення якого має додатні координати, прямує до положення рівноваги  $(x, y)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

### ◆ Зауваження 5.2

Випадок, коли серед власних чисел матриці  $A$  є хоча б одне з нульових дійсною частиною, називається *критичним*. У цьому разі лише за лінеаризованою системою  $\dot{y} = Ay$  визначити характер стійкості положення рівноваги  $x$  неможливо.

На підтвердження цього зауваження наведемо такий приклад.

### □ Приклад 5.5

Розглянемо систему

$$\dot{x} = y^2 + z^2, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -y.$$

Єдиним її положенням рівноваги є початок координат. Матрицю лінеаризованої системи

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

має власні числа  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = i$ ,  $\lambda_3 = -i$ . Отже, лінеаризована система стійка (неасимптотично). Маємо критичний випадок. Покажемо, що положення рівноваги вихідної системи нестійке. Справді, нехай  $(x(t), y(t), z(t))$  — її розв'язок, який у момент часу  $t = 0$  стартує з точки  $(x_0, y_0, z_0)$ . Оскільки

$$\frac{d}{dt}[y^2(t) + z^2(t)] = 2y(t)\dot{y}(t) + 2z(t)\dot{z}(t) = 2(y(t)z(t) - z(t)y(t)) = 0,$$

то  $y^2(t) + z^2(t) \equiv y_0^2 + z_0^2$ . З урахуванням цієї тотожності з першого рівняння системи знаходимо явний вигляд  $x$ -компоненти розв'язку:

$$x(t) = x_0 + t(y_0^2 + z_0^2).$$

Очевидно, що хоч би в якому малому околі початку координат знаходилася початкова точка  $(x_0, y_0, z_0)$ , знайдеться момент часу  $T > 0$  такий, що  $x^2(T) + y^2(T) + z^2(T) = 1$ . Це означає, що початок координат — нестійке положення рівноваги.

Уважний аналіз теореми 5.19 показує, що в її доведенні істотно використовуються лише три такі властивості системи (5.50): оцінка матрицанту лінеаризованої системи  $\|e^{A(t-s)}\| \leq Ke^{-\gamma(t-s)}$ ,  $t \geq s$ , оцінка нелінійності  $\|G(y)y\| \leq \mu(\rho)\|y\|$ ,  $\|y\| \leq \rho$  та можливість задовольнити нерівність  $\gamma - K\mu(\rho) > 0$  при досить малому  $\rho > 0$ . З урахуванням цього неважко узагальнити теорему 5.19.

### Теорема 5.20

Нехай система

$$\dot{y} = A(t)y + F(t, y) \quad (5.55)$$

задовольняє такі умови:

1) для матрицанту  $\Omega_t^t$  лінійної системи  $\dot{y} = A(t)y$  виконується оцінка

$$\|\Omega_t^t\| \leq Ke^{-\gamma(t-s)} \quad \forall t \geq s$$

з деякими додатними сталими  $K, \gamma$ ;

2)  $F(t, y) \in C^1([a, \infty) \times B_\rho(0) \mapsto \mathbb{R}^n)$ ;

3) існують такі додатні числа  $\rho$  і  $\mu$ , що  $\gamma - K\mu > 0$  і

$$\|F(t, y)\| \leq \mu\|y\| \quad \forall (t, y) \in [a, \infty) \times B_\rho(0).$$

Тоді тривіальний розв'язок системи (5.55) асимптотично стійкий.

Пропонуємо довести цю теорему самостійно.

### ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Дати означення стійкості за Ляпуновим розв'язку диференціального рівняння  $n$ -го порядку.
- ② Довести, що характер стійкості будь-якого розв'язку лінійної неоднорідної системи з неперервними на півосі  $[a, \infty)$  коефіцієнтами повністю визначається характером стійкості відповідної ЛОС.
- ③ Знайти положення рівноваги, дослідити на стійкість, зобразити портрети лінеаризованих систем:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x} = e^{y-x^3+y^3} - 1, \\ \dot{y} = -2x - 2y; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \dot{x} = \frac{y(1+x^2y^2)^2}{1+x^4y^2}, \\ \dot{y} = -4x - 4y; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dot{x} = \frac{y(1+x^4y^2)}{(1+x^2y^3)^2}, \\ \dot{y} = -x - 2y; \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} \dot{x} = (2x-y)(x-2), \\ \dot{y} = xy - 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x} = e^y - 1, \\ \dot{y} = -\frac{(5x+2y)(1+x^2y^2)}{(1+x^2y^4)^2}; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1, \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$$

- ④ Нехай система  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  стійка, а  $(n \times n)$ -матриця  $B(t)$  з неперервними на  $[0, \infty)$  елементами задовольняє умову  $\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$ . Довести, що тоді стійкою буде й система  $\dot{x} = (A + B(t))x$ .

✓ *Вказівка.* Для оцінки фундаментальної матриці  $X(t)$  останньої системи скористатися рівністю  $X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} B(s) X(s) ds$  та лемою про інтегральну нерівність.

- ⑤ Нехай система  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  стійка. Довести стійкість тривіального розв'язку системи  $\dot{x} = Ax + f(t, x)$  у випадку, коли

$$f(t, x) \in C([0, \infty) \times B_r^*(0)) \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \|f(t, x)\| \leq g(t) \|x\|, \quad \int_0^{\infty} g(t) dt < \infty.$$

- ⑥ Показати, що відповідним вибором значень параметрів  $k, m, r$  положення рівноваги системи (5.53), яке знаходиться всередині першого квадранта площини  $xOy$ , можна зробити як вузлом, так і фокусом.
- ⑦ Показати, що система (5.53) має нетривіальне положення рівноваги на осі абсцис і з'ясувати тип фазового портрета відповідної лінеаризованої системи.
- ⑧ Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи, залежної від параметра  $\lambda$ , при  $\lambda \leq 0$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z + \lambda \sin x, \\ \dot{y} = z - x + \lambda \left( \sqrt{1+3y} - \cos z \right), \\ \dot{z} = y - z + \ln(1 + \lambda z). \end{cases}$$

- ⑨ Довести, що початок координат — стійке положення рівноваги системи

$$\dot{x} = -x(y^2 + z^2), \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -y.$$

## 5.6

## Функції Ляпунова

Для дослідження стійкості розв'язків систем у випадках, коли можуть порушуватись умови теорем 5.19, 5.20, О. М. Ляпунов запропонував метод, що використовує певні допоміжні знаковизначені функції (точні означення наводяться нижче).

Ідею цього методу, який у сучасній математичній літературі називають *другим*, або *прямим, методом Ляпунова*, пояснимо на такому простому прикладі. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (5.56)$$

Лінеаризована в положенні рівноваги  $(x_*, y_*) = (0, 0)$  система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

стійка, але неасимптотично. Отже, маємо критичний випадок.

Уведемо допоміжну функцію

$$V(x, y) = x^2 + y^2.$$

Її лініями рівня є концентричні кола. Більшому значенню функції  $V(x, y)$  відповідає коло більшого радіуса. Покажемо, що вздовж розв'язків системи (5.56) ця функція монотонно спадає.

Дійсно, нехай  $(x(t), y(t))$  — розв'язок, який у момент  $t = t_0$  стартує з точки  $(x_0, y_0)$ . Обчислимо похідну функції  $v(t) := V(x(t), y(t))$ . Маємо

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) = \\ &= 2x(t)[y(t) - x(t)(x^2(t) + y^2(t))] + 2y(t)[-x(t) - y(t)(x^2(t) + y^2(t))] = \\ &= -2v^2(t) < 0. \end{aligned}$$

**Важливо наголосити, що висновок про монотонне спадання функції**

$v(t)$  удалося зробити, не знаходячи в явному вигляді розв'язків системи (5.56).

Таким чином, при зростанні  $t$  точка  $(x(t), y(t))$  не виходить із кола радіусом  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  із центром у початку координат. Звідси можна зробити висновок про продовжуваність розв'язків системи (5.56) піввісь  $[t_0, \infty)$  і про стійкість положення рівноваги  $(0, 0)$ .

Далі, монотонно спадна, обмежена знизу нулем функція  $v(t)$  має границю  $v_* := \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \geq 0$ . Нерівність  $v_* > 0$  виключена, оскільки в разі її виконання ми мали б  $\dot{v}(t) \leq -v_*^2$ , звідки

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{v}(s) ds \leq -v_*^2(t - t_0) \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow \infty,$$

а це неможливо. Отже,  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ . Звідси випливає асимптотична стійкість положення рівноваги  $(0, 0)$ .

Після цих вступних зауважень перейдемо до викладу основ другого методу Ляпунова.

### 5.6.1. Теорема про стійкість

Нехай  $D$  — область у  $\mathbb{R}^n$ , яка містить початок координат.

#### Означення 5.11

Функцію  $V(x) \in C(D \rightarrow \mathbb{R})$  називають *додатно визначеною*, якщо

$$V(0) = 0 \quad \text{і} \quad V(x) > 0 \quad \forall x \in D \setminus \{0\}.$$

Якщо *додатно визначеною* в  $D$  є функція  $-V(x)$ , то  $V(x)$  називають *від'ємно визначеною*. *Додатно і від'ємно визначені* в  $D$  функції утворюють клас *знаковизначених* у  $D$  функцій.

#### Приклад 5.6

Нехай  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярний добуток у  $\mathbb{R}^n$ . Розглянемо квадратичну форму  $\langle Ax, x \rangle$  із симетричною матрицею  $A$ .

Якщо найменше власне число цієї матриці додатне, то фу



$\langle Ax, x \rangle$  є додатно визначеною в усьому просторі  $\mathbb{R}^n$ . Дійсно, існує таке ортогональне перетворення  $x = Oy$ , що

$$\langle Ax, x \rangle = \langle AOy, Oy \rangle = \langle O^T AOy, y \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2,$$

де  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — власні числа матриці  $A$ . Оскільки  $\|Oy\| = \|x\|$ , то

$$\min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \|x\|^2 = \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \|y\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \|y\|^2 = \max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \|x\|^2,$$

звідки й випливає потрібний нам висновок.

Графік додатно визначеної функції  $\langle Ax, x \rangle$  при  $n = 2$  зображено на рис. 5.6.

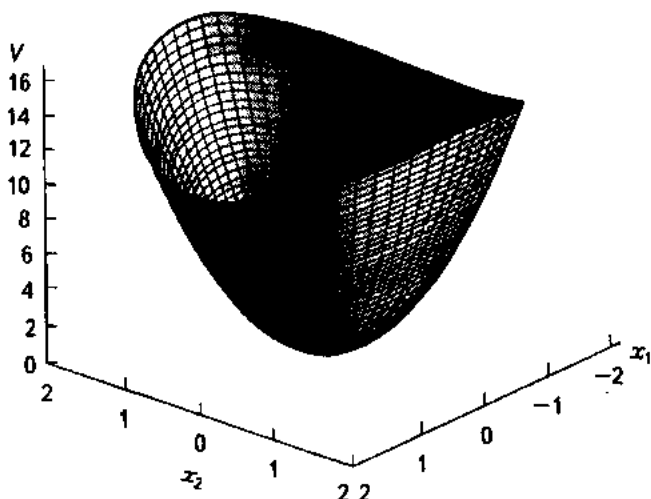


Рис. 5.6

Розглянемо в області  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  автономну систему

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R}^n). \quad (5.57)$$

У подальших міркуваннях важливу роль відіграватиме поняття похідної заданої функції в силу нормальної системи диференціальних рівнянь, яке вже було запроваджено в п. 4.3.2. Ще раз наведемо відповідне означення для автономного випадку.

⇒ **Означення 5.12**

Похідною функції  $V(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  у силу системи (5.57) називають функцію

$$\dot{V}_f(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x) \equiv \langle \text{grad } V(x), f(x) \rangle.$$

**Твердження 5.5**

Для будь-якого розв'язку  $x(t)$ ,  $t \in I$  системи (5.57) виконується рівність

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{V}_f(x(t)) \quad \forall t \in I,$$

**Доведення**

Скориставшись правилом диференціювання складної функції, маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \langle \text{grad } V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle \text{grad } V(x(t)), f(x(t)) \rangle = \\ &= \dot{V}_f(x(t)) \quad \forall t \in I, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Припустимо, що  $x = 0$  — положення рівноваги системи (5.57).

⇒ **Означення 5.13**

Додатно визначену й неперервно диференційовну в деякій кулі

$$B_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$$

функцію  $V(x)$  називають **функцією Ляпунова системи (5.57)**, якщо  $\dot{V}_f(x) \leq 0$  при всіх  $x \in B_r(0)$ .

**Теорема 5.21**

**(теорема Ляпунова про стійкість)**

Якщо в деякій кулі  $B_r(0) \subseteq D$  система (5.57) має функцію Ляпунова  $V(x)$ , то  $x = 0$  — стійке положення рівноваги цієї системи.

### Доведення

Нехай  $\epsilon$  — довільне число з інтервалу  $(0, r)$ . Дуже важливим для подальших міркувань є таке спостереження: оскільки функція  $V(x)$  додатно визначена в  $B_r(\mathbf{0})$ , то її найменше значення на сфері  $S_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \epsilon\}$  є додатним числом:

$$c(\epsilon) := \min_{x \in S_\epsilon} V(x) > 0.$$

Зрозуміло, що

$$V(x) \geq c(\epsilon) \quad \forall x \in S_\epsilon.$$

Скориставшись неперервністю  $V(x)$  і рівністю  $V(\mathbf{0}) = 0$ , можна вказати настільки мале число  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , щоб виконувалася нерівність

$$V(x) < c(\epsilon) \quad \forall x \in B_\delta(\mathbf{0}).$$

Зрозуміло, що  $\delta \leq \epsilon$ .

Візьмемо тепер довільні  $t_0 \in \mathbb{R}$  та  $x_0 \in B_\delta(\mathbf{0})$  і розглянемо неперодовжуваний розв'язок  $x(t)$ ,  $t \in (T_-, T_+)$ , який задовольняє початкову умову  $x(t_0) = x_0$ . Для доведення стійкості положення рівноваги  $x = \mathbf{0}$  достатньо показати, що  $T_+ = \infty$  і  $\|x(t)\| < \epsilon$  для всіх  $t \geq t_0$ .

Проаналізуємо два можливих випадки:

- 1) нерівність  $\|x(t)\| < \epsilon$  виконується для всіх  $t \in [t_0, T_+)$ ;
- 2) існує  $t_\epsilon \in (t_0, T_+)$  таке, що  $\|x(t)\| < \epsilon$  для всіх  $t \in [t_0, t_\epsilon)$  і  $\|x(t_\epsilon)\| = \epsilon$  (тобто на інтервалі  $(t_0, T_+)$  є момент  $t = t_\epsilon$ , коли точка  $x(t)$  уперше досягає сфери  $S_\epsilon$ ).

Якщо справджується випадок 1, то з твердження 5.4 випливає рівність  $T_+ = \infty$ . А тоді розв'язок  $x(t)$  має потрібну нам властивість.

Залишається показати, що випадок 2 неможливий. Настав час скористатися припущенням про те, що  $V(x)$  — функція Ляпунова, а отже, виконується нерівність  $\dot{V}_f(x) \leq 0$  при всіх  $x \in B_r(\mathbf{0})$ . З огляду на цей факт функція  $V(x(t))$  не зростає на відрізку  $[t_0, t_\epsilon]$ . Справді, згідно з твердженням 5.5

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{V}_f(x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_\epsilon].$$

Тоді, з одного боку,

$$V(x(t)) \leq V(x_0) < c(\epsilon) \quad \forall t \in [t_0, t_c]. \quad (5.58)$$

З іншого боку, оскільки точка  $x(t_c)$  належить  $S_\epsilon$ , то має виконуватися нерівність  $V(x(t_c)) \geq c(\epsilon)$ . Вона, однак, суперечить (5.58). Отже, випадок 2 неможливий.

У доведенні теореми 5.21 істотно використовується така геометрична властивість додатно визначеної функції. Нехай  $x_0$  — довільна точка множини

$$U_{c(\epsilon)} := \{x \in B_\epsilon(0) : V(x) < c(\epsilon)\},$$

а  $x_\epsilon$  — довільна точка на сфері  $S_\epsilon$ . Тоді кожна крива, яка лежить у  $B_\epsilon(0)$  і сполучає  $x_0$  з  $x_\epsilon$ , обов'язково перетинає множину рівня

$$M_{c(\epsilon)} := \{x \in B_\epsilon(0) : V(x) = c(\epsilon)\}.$$

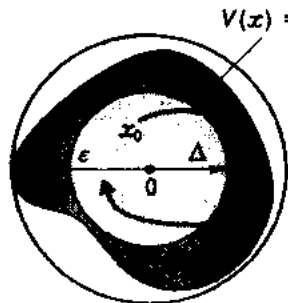


Рис. 5.7

Справді, зазначену криву можна задати рівнянням  $x = \xi(s)$ , де  $\xi(s) \in C([0, 1] \rightarrow B_\epsilon(0))$ ,  $\xi(0) = 0$  і  $\xi(1) = x_\epsilon$ . Оскільки  $V(\xi(0)) < c(\epsilon)$  і з самого означення  $c(\epsilon)$  випливає нерівність  $V(\xi(1)) = V(x_\epsilon) \geq c(\epsilon)$ , то неперервна функція  $V(\xi(s))$  при деякому  $s = s_*$  набуває проміжного значення  $V(\xi(s_*)) = c(\epsilon)$  (теорема Коші). Це означає, що  $\xi(s_*) \in M_{c(\epsilon)}$ .

Тепер зрозуміло, чому фазова крива, яка стартує з області  $U_{c(\epsilon)}$ , не може вийти з кулі  $B_\epsilon(0)$ : адже, перш ніж потрапити на сферу  $S_\epsilon$ , вона мала б перетнути множину  $M_{c(\epsilon)}$ . Однак зробити цього вона не зможе, оскільки вздовж розв'язків системи (5.57) функція Ляпунова не зростає (рис. 5.7).

Із теореми 5.2 негайно випливає такий наслідок.

### О Наслідок 5.3

*Якщо система (5.57) має додатно визначений в околі положення рівноваги автономний перший інтеграл, то це положення рівноваги стійке.*

Дійсно, в даному випадку саме перший інтеграл можна взяти за функцію Ляпунова, оскільки його похідна в силу системи дорівнює нулю (аналітичний критерій першого інтеграла).

## □ Приклад 5.7

Знову розглянемо математичну модель руху матеріальної точки масою  $m$  у тривимірному просторі  $\mathbb{R}^3$  за умови, що на неї діє потенціальне силоне поле (див. приклад 4.10). Як і раніше, вважаємо, що потенціальна енергія точки є деякою функцією  $\Pi(x) \in C^2(\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R})$ . Рівняння руху можна подати у вигляді шестивимірної системи

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1}{m} \text{grad } \Pi(x). \quad (5.59)$$

Припустимо, що ця система має положення рівноваги  $(x_*, y_*)$ . Очевидно, що  $\text{grad } \Pi(x_*) = 0, y_* = 0$ . Отже,  $x_*$  — стаціонарна точка потенціальної енергії. Без обмеження загальності можна вважати, що  $x_* = 0$  і  $\Pi(x_*) = 0$  [у противному разі слід запровадити нові позначення  $x - x_* \mapsto x$  і  $\Pi(x) - \Pi(0) \mapsto \Pi(x)$ ].

Покажемо, що у випадку, коли  $x = 0$  — ізольована точка локального мінімуму потенціальної енергії, положення рівноваги  $(0, 0)$  стійке. Для цього скористаємося вже встановленим фактом: функція

$$E(x, y) := \frac{m}{2} \|y\|^2 + \Pi(x)$$

є першим інтегралом системи (5.59). Тепер, аби застосувати наслідок 5.3, достатньо показати, що функція  $E(x, y)$  додатно визначена в деякому околі точки  $(0, 0)$ . Але ж цей факт є простим наслідком припущення про те, що  $x = 0$  — ізольована точка локального мінімуму потенціальної енергії. Стійкість положення рівноваги доведено.

Перш ніж застосовувати прямий метод Ляпунова до дослідження асимптотичної стійкості положень рівноваги автономних систем, установимо дві важливі властивості їх розв'язків.

Нагадаємо, що  $x(t, t_0, x_0)$  — це розв'язок системи (5.57), який задовольняє початкову умову  $x|_{t=t_0} = x_0$ . У випадку, коли  $t_0 = 0$ , вводимо скорочене позначення:  $x(t, x_0) := x(t, 0, x_0)$ .

## Твердження 5.6

Нехай розв'язок  $x(t, x_0)$  існує на інтервалі  $(t_-, t_+)$ . Тоді для будь-якого  $t_0 \in \mathbb{R}$  розв'язок  $x(t, t_0, x_0)$  визначений на інтервалі  $(t_0 + t_-, t_0 + t_+)$  і при цьому

$$x(t, t_0, x_0) = x(t - t_0, x_0) \quad \forall t \in (t_0 + t_-, t_0 + t_+).$$

### Доведення

Функція  $x(t - t_0, x_0)$  визначена на інтервалі  $(t_0 + t_-, t_0 + t_+)$ . А оскільки при фіксованих  $t_0, x_0$  і для довільного  $t \in (t_0 + t_-, t_0 + t_+)$  виконується рівність

$$\frac{dx(t - t_0, x_0)}{dt} = f(x(t - t_0, x_0)),$$

то ця функція — розв'язок системи (5.57). Крім того, при  $t = t_0$  вона набуває значення  $x(0, x_0) = x_0$ . Із властивості єдиності розв'язку задачі Коші й випливає потрібний результат.

### Твердження 5.7

Нехай розв'язок  $x(t, x_0)$  існує на півосі  $[0, \infty)$ . Тоді при кожному  $s \geq 0$  розв'язок  $x(t, x(s, x_0))$  можна продовжити на піввісь  $[-s, \infty)$  так, щоб виконувалася рівність

$$x(t, x(s, x_0)) = x(t + s, x_0) \quad \forall t \geq -s.$$

### Доведення

Функція  $x(t + s, x_0)$  визначена на півосі  $[-s, \infty)$  і являє собою розв'язок системи (5.57), який при  $t = 0$  набуває значення  $x(s, x_0)$ . Цей факт впливає з попереднього твердження, якщо покласти  $t_0 = -s$ . Функція  $x(t, x(s, x_0))$  — теж розв'язок системи (5.57), який перетворюється в  $x(s, x_0)$  при  $t = 0$ . Тепер потрібний результат знову є наслідком властивості єдиності розв'язку задачі Коші.

### Теорема 5.22

Нехай система (5.57) у деякому околі  $B_r(0)$  має функцію Ляпунова  $V(x)$ . Припустимо також, що умова

$$\dot{V}_f(x(t, x_0)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

може справджуватися лише при  $x_0 = 0$ . Тоді положення рівноваги  $x = 0$  асимптотично стійке.

### Доведення

За першою теоремою Ляпунова про стійкість положення рівноваги  $x = 0$  стійке. Отже, зафіксувавши  $\epsilon \in (0, r)$ , можемо вибрати таке  $\delta \in (0, \epsilon)$ , щоб для кожного  $x_0 \in B_\delta(0)$  розв'язок  $x(t, x_0)$

існував на півосі  $[0, \infty)$  і задовольняв умову  $\|x(t, x_0)\| < \epsilon$  при всіх  $t \geq 0$ . Залишилося показати, що  $x(t, x_0) \rightarrow 0$ , коли  $t \rightarrow \infty$ , як тільки  $x_0 \in B_\delta(0)$ . Адже тоді відповідно до твердження 5.6

$$x(t, t_0, x_0) = x(t - t_0, x_0) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

У доведенні теореми 5.21 уже відзначалося, що функція  $v(t) = V(x(t, x_0))$  не зростає. Вона обмежена знизу нулем. Тому існує границя  $v_* := \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t, x_0)) \geq 0$ . Покажемо, що існує точка  $x_* \in B_\epsilon(0)$ , для якої

$$V(x(t, x_*)) = v_* \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.60)$$

Оскільки точки  $x(t, x_0)$ ,  $t \geq 0$  лежать у компактній замкнутій кулі  $B_\epsilon(0)$ , то можна вказати послідовність  $t_k \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$  і точку  $x_* \in B_\epsilon(0)$  такі, що  $x(t_k, x_0) \rightarrow x_*$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Очевидно, що  $V(x_*) = v_*$ . На підставі твердження 5.7 маємо

$$x(t + t_k, x_0) = x(t, x(t_k, x_0)) \quad \forall t \geq -t_k.$$

Спрямуємо  $k$  до  $\infty$  і скористаємося неперервністю розв'язку задачі Коші як функції початкових значень. Дістанемо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_k, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t, x(t_k, x_0)) = x(t, x_*) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Проте тоді

$$v_* = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t, x_0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(x(t + t_k, x_0)) = V(x(t, x_*)) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

тобто рівність (5.60) правильна.

Тепер з урахуванням твердження 5.5 та співвідношення (5.60) маємо рівність  $\dot{V}_f(x(t, x_*)) = 0$ . За умовою теореми  $x_* = 0$ , а тому  $v_* = 0$  і, нарешті,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t, x_0)) = 0. \quad (5.61)$$

Покажемо, що звідси випливає потрібна рівність  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0$ .

Міркуючи від супротивного, припустимо, що це не так. Тоді знайдеться число  $\rho > 0$  і послідовність  $t_k \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$ , для яких  $\rho \leq \|x(t_k, x_0)\| \leq \epsilon$ ,  $k = 1, 2, \dots$  Тому, всупереч (5.61),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(x(t_k, x_0)) \geq \min_{\rho \leq \|x\| \leq c} V(x) > 0.$$

Одержана суперечність завершує доведення теореми.

Із доведеної теореми просто випливає такий наслідок.

### Теорема 5.23

#### (теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість)

Нехай у деякому околі  $B_r(0)$  система (5.57) має додатно визначену функцію Ляпунова, похідна якої в силу цієї системи є функцією від'ємно визначеною. Тоді  $x = 0$  — асимптотично стійке положення рівноваги системи (5.57).

#### □ Приклад 5.8

Як узагальнення прикладу 5.7 розглянемо рух матеріальної точки масою  $m$  у тривимірному просторі  $\mathbb{R}^3$  за умови, що на неї, крім потенціального силового поля, діє також сила опору середовища (сила тертя), котра залежить лише від швидкості й має вигляд  $-k(\dot{x})\dot{x}$ . Тут  $k(y) \in C(\mathbb{R}^3 \mapsto \{0, \infty\})$  — додатна або додатно визначена функція. Рівняння руху мають вигляд

$$m\ddot{x} = -\text{grad } \Pi(x) - k(\dot{x})\dot{x}.$$

Запишемо еквівалентну шестивимірну систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1}{m}(\text{grad } \Pi(x) + k(y)y). \quad (5.62)$$

Розглянемо випадок, коли  $x = 0$  — точка локального мінімуму потенціальної енергії, причому в деякому її околі,  $B_r(0)$ , немає інших стаціонарних точок функції  $\Pi(x)$ . Як і в прикладі 5.7, можна вважати, що  $\Pi(0) = 0$ . Покажемо, що точка  $(0, 0)$  — асимптотично стійке положення рівноваги. За функцію Ляпунова знову візьмемо повну енергію

$$E(x, y) := \frac{m}{2} \|y\|^2 + \Pi(x).$$

Оскільки похідна цієї функції в силу системи (5.59) дорівнює нулю, то її похідна в силу системи (5.62) має вигляд

$$\left\langle my, -\frac{1}{m}k(y)y \right\rangle = -k(y)\|y\|^2$$

і, отже, не набуває додатних значень. Для застосування теореми про



асимптотичну стійкість залишилося показати, що не існує нетривіального розв'язку  $(x(t), y(t))$  такого, що  $x(0) \in B_\epsilon(0)$  і  $y(t) = 0$  при всіх  $t \in \mathbb{R}$ . У цьому легко переконатися, міркуючи від супротивного. Якби розв'язок з указаними властивостями існував, то, як випливає з (5.62),  $\dot{x}(t) \equiv 0$ ,  $x(t) \equiv x^* \in B_\epsilon(0)$  і  $\text{grad } \Pi(x^*) = 0$ . Дійшли суперечності з припущенням про відсутність критичних точок потенціальної енергії в  $B_\epsilon(0)$ .

Отже, за теоремою 5.22 точка  $(0, 0)$  — асимптотично стійке положення рівноваги системи (5.62).

### 5.6.2. Теореми про нестійкість

Покажемо, як певне узагальнення поняття функції Ляпунова може бути використане для встановлення умов нестійкості положення рівноваги. Сформулюємо й доведемо теорему, що належить М. Г. Четаєву (1946).

#### Теорема 5.24 (Четаєва)

Припустимо, що область  $D$  містить положення рівноваги  $x_* = 0$  системи (5.57) і існує функція  $V(x) \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$  з такими властивостями:

1) знайдеться підобласть  $D_+ \subset D$ , межа якої  $\partial D_+$  містить точку  $0$  (рис. 5.8), і

$$V(x) > 0 \quad \forall x \in D_+;$$

$$V(x) = 0 \quad \forall x \in \partial D_+ \cap D;$$

2) виконується нерівність  $\dot{V}_f > 0 \quad \forall x \in D_+$ .  
Тоді положення рівноваги  $x = 0$  системи (5.57) нестійке.

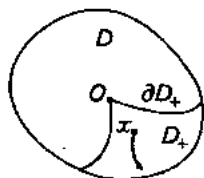


Рис. 5.8

#### Доведення

Виберемо число  $\epsilon > 0$  так, щоб  $\overline{B_\epsilon(0)} \subset D$ . Оскільки за умовою  $0$  є межевою точкою області  $D_+$ , то для довільного  $\delta \in (0, \epsilon)$  множина  $B_\delta(0) \cap D_+$  непорожня. Покажемо, що дуга фазової кривої, яка починається в точці  $x_0 \in B_\delta(0) \cap D_+$  і відповідає значенням  $t \geq 0$ , перетинає межу кулі  $B_\epsilon(0)$ .

Припустимо, навпаки, що виконується умова

$$x(t, x_0) \in B_\epsilon(0) \quad \forall t \geq 0. \quad (5.63)$$

Покажемо, що тоді функція  $v(t) := V(x(t, x_0))$  задовольняє нерівність

$$v(t) \geq V(x_0) = v_0 \quad \forall t \geq 0. \quad (5.64)$$

Справді, доки точка  $x(t, x_0)$  перебуває в області  $D_+$ , виконується нерівність  $\dot{v}(t) = \dot{V}_f(x(t, x_0)) > 0$  і функція  $v(t)$  зростає. Тому умова (5.64) може порушитися лише в тому випадку, коли існує перший момент  $t = T > 0$  виходу фазової кривої точки  $x_0$  на меж  $\partial D_+ \cap D$  або, інакше кажучи, знайдеться  $T > 0$ , для якого

$$x(t, x_0) \in D, \quad \forall t \in [0, T) \quad \text{і} \quad x(T, x_0) \in \partial D_+ \cap D.$$

Однак, якби таке значення  $T$  існувало, то, з одного боку, ми мали

$$\dot{v}(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T) \Rightarrow v(t) \geq v_0 > 0 \quad \forall t \in [0, T),$$

а з іншого —  $v(T) = 0$ , оскільки  $x(T, x_0) \in \partial D_+ \cap D$ . Це неможливо, тому що функція  $v(t)$  неперервна.

Таким чином, наслідком припущення (5.63) є нерівність (5.64). Більше того, доведено, що при кожному  $t \geq 0$  точка  $x(t, x_0)$  належить компактну

$$K_\epsilon := \{x \in \overline{B_\epsilon(0)} \cap D_+ : V(x) \geq V(x_0)\}.$$

Звідси випливає, що функція  $v(t)$  зростає, залишаючись обмеженою. З іншого боку, компакт  $K_\epsilon$  не містить точок межі  $\partial D_+$ , і такому разі

$$\begin{aligned} \min_{x \in K_\epsilon} \dot{V}_f(x) =: v > 0 &\Rightarrow \dot{v}(t) = \dot{V}_f(x(t, x_0)) \geq v \Rightarrow \\ &\Rightarrow v(t) \geq v_0 + vt \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Дійшли суперечності, джерелом якої є припущення (5.63).

Застосуємо теорему Четаєва для доведення теореми про нестійкість за першим наближенням.

**Теорема 5.25**  $\dot{x} = f(x)$

Нехай  $x_*$  — положення рівноваги системи (5.57). Якщо серед власних чисел матриці  $\frac{\partial f(x_*)}{\partial x}$  знайдеться хоча б одне з додатною дійсною частиною, то положення рівноваги  $x_*$  нестійке.

**Доведення**

Як і в доведенні теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням (див. п. 5.5.4), зробимо заміну залежної змінної  $x = x_* + y$  і перейдемо до системи

$$\dot{y} = Ay + G(y)y, \quad (5.65)$$

в якій матрична функція  $G(y)$  має властивість

$$\mu(\rho) := \max_{y \in B_\rho(0)} \|G(y)\| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Тепер потрібно довести нестійкість тривіального розв'язку системи (5.65).

Припустимо, нам удалося знайти таку  $(n \times n)$ -вимірну симетричну матрицю  $S$ , що породжена нею квадратична форма  $V(y) := \langle Sy, y \rangle$  має такі властивості:

- 1)  $V(y)$  не є від'ємно визначеною функцією в  $\mathbb{R}^n$ ;
- 2) виконується рівність  $\dot{V}_{Ay}(y) = \gamma V(y) + \|y\|^2$ , де  $\gamma$  — деяке додатне число.

Покажемо, що тоді система (5.65) задовольняє умови теореми Четаєва.

Насамперед зауважимо, що множина

$$\{y \in \mathbb{R}^n : V(y) > 0\} \quad (5.66)$$

не порожня. Справді, існує точка  $y_0 \neq 0$ , в якій  $V(y_0) = 0$ , а оскільки

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V(e^{At} y_0) = \dot{V}_{Ay}(y_0) = \|y_0\|^2 > 0, \text{ то } V(e^{At} y_0) > 0 \text{ для всіх до-}$$

сить малих  $t > 0$ . Отже, для таких значень  $t$  точки  $e^{At} y_0$  належать множині (5.66).

Далі, множина (5.66) відкрита. Оскільки  $V(\lambda y) = \langle S\lambda y, \lambda y \rangle = \lambda^2 V(y)$  для довільного  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то  $0$  — її межева точка. Перша умова

теореми Четаєва виконуватиметься, якщо за  $D_+$  взяти зв'язну компоненту перетину кулі  $B_\rho(\mathbf{0})$  досить малого радіуса з множиною (5.66) і вважати, що  $D = B_\rho(\mathbf{0})$ .

Нарешті, обчислимо похідну функції  $V(y)$  в силу системи (5.65). Маємо

$$\dot{V}_{A_y + G(y)y} = \dot{V}_{A_y} + \dot{V}_{G(y)y} = \gamma V(y) + \|y\|^2 + 2\langle Sy, G(y)y \rangle.$$

Звідси

$$\dot{V}_{A_y + G(y)y} \geq \gamma V(y) + \|y\|^2 - 2\|G(y)\| \|S\| \|y\|^2.$$

Вибравши число  $\rho > 0$  настільки малим, щоб  $2\mu(\rho)\|S\| \leq 1$ , дістанемо:

$$\dot{V}_{A_y + G(y)y} \geq \gamma V(y) + \|y\|^2 - 2\mu(\rho)\|S\| \|y\|^2 \geq \gamma V(y) \quad \forall y \in B_\rho(\mathbf{0}).$$

Остаточно приходимо до такого висновку: якщо існує матриця  $S$ , для якої виконуються властивості 1 та 2, то система (5.65) задовольняє умови теореми Четаєва, а отже, тривіальний розв'язок цієї системи нестійкий.

Тепер нам залишається довести існування матриці  $S$  із властивостями 1, 2.

Оскільки

$$\dot{V}_{A^*y}(y) = \langle SAy, y \rangle + \langle Sy, Ay \rangle = \langle (SA + A^*S)y, y \rangle,$$

то властивість 2 виконуватиметься, якщо

$$SA + A^*S = \gamma S + E \quad (5.67)$$

(тут  $A^*$  — спряжена матриця,  $E$  — одинична матриця). Дане співвідношення будемо розглядати як рівняння відносно невідомої симетричної матриці  $S$ . Покажемо, що існує таке  $\gamma_0 > 0$ , що при всіх  $\gamma \in (0, \gamma_0)$  зазначене рівняння має розв'язок.

Для цього зауважимо, що дійсні симетричні  $(n \times n)$ -вимірні матриці утворюють скінченновимірний векторний простір  $\mathcal{S}$ . Лінійний оператор  $L_A$ , визначений рівністю

$$L_A S := SA + A^*S,$$

відображає простір  $\mathcal{S}$  у себе. Справді, якщо  $S^* = S$ , то

$$(L_A S)^* = (SA + A^* S)^* = A^* S^* + S^* A = A^* S + SA = L_A S.$$

Позначимо через  $\text{Id}$  тотожний оператор у  $\mathbb{S}$ , тобто  $\text{Id } S = S \forall S \in \mathbb{S}$ . Тоді рівняння (5.67) набирає вигляду  $(L_A - \gamma \text{Id})S = E$ . Якщо  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  — власні числа оператора  $L_A$ , то власними числами оператора  $L_A - \gamma \text{Id}$  будуть  $\lambda_1 - \gamma, \dots, \lambda_N - \gamma$ . Серед останніх не буде числа 0, якщо  $\gamma \in (0, \gamma_0)$ , де  $\gamma_0 := \min_{j: \lambda_j > 0} \lambda_j$ . Отже, оператор  $L_A - \gamma \text{Id}$  не вироджений і розв'язок рівняння (5.67) існує при кожному  $\gamma \in (0, \gamma_0)$ .

Виберемо тепер  $\gamma \in (0, \gamma_0)$  настільки малим, щоб серед власних чисел матриці  $A - \frac{\gamma}{2} E$  було хоча б одне з додатною дійсною частиною, і за розв'язком  $S$  рівняння (5.67) утворимо квадратичну форму  $V(y) := \langle Sy, y \rangle$ . Нам залишилося перевірити, що вона має властивість 1. Припустимо, навпаки, що  $V(y)$  від'ємно визначена. Її похідною в силу системи

$$\dot{y} = \left( A - \frac{\gamma}{2} E \right) y \quad (5.68)$$

є

$$\left\langle S \left( A - \frac{\gamma}{2} E \right) y, y \right\rangle + \left\langle Sy, \left( A - \frac{\gamma}{2} E \right) y \right\rangle = \|y\|^2.$$

Тому функція  $-V(y)$  є функцією Ляпунова для системи (5.68), а отже, ця система стійка. Такий висновок, однак, суперечить наявності хоча б одного додатного власного числа матриці  $A - \frac{\gamma}{2} E$ .

### 5.6.3. Другий метод Ляпунова в теорії лінійних систем\*

Матеріал цього підпункту виходить за межі стандартного курсу диференціальних рівнянь. Викладаючи його, ми маємо на меті показати, як класична ідея другого методу Ляпунова розвивається в наукових дослідженнях сьогодення.

Дотримуючися статті А. М. Самойленка\*, проаналізуємо ЛОС

\* Самойленко А. М. Об экспоненциальной дихотомии на  $\mathbb{R}$  линейных дифференциальных уравнений в  $\mathbb{R}^n$  // Укр. мат. журн. — 2001. — 53, № 3. — С. 356–371.

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n, \quad a_{ij}(t) \in C(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}) \quad (5.69)$$

і покажемо, які важливі висновки про властивості її розв'язків випливають із припущення про існування залежної від часу квадратичної форми  $V(t, x)$  з від'ємно визначеною похідною  $\dot{V}_{A(t)x}(t, x)$ .

Спочатку наведемо деякі оцінки розв'язків рівняння (5.69) загального характеру. Для цього поряд із (5.69) розглянемо систему

$$\dot{x} = A_I(t)x,$$

де  $A_I(t) := \frac{1}{2}(A(t) - A^T(t))$  — косиметрична компонента матриці  $A(t)$ .

Нехай  $X_I(t)$  — нормована в точці  $t = 0$  фундаментальна матриця цієї системи. Як нам уже відомо (див. приклад 4.9), матриця  $X_I(t)$  ортогональна.

Покажемо, що заміна змінних

$$x = X_I(t)y$$

перетворює систему (5.69) на лінійну однорідну систему із *симетричною матрицею*.

Справді, нова шукана вектор-функція  $y$  має задовольняти рівняння  $\dot{y} = X_I^{-1}(t)[A(t)X_I(t) - \dot{X}_I(t)]y$ , яке з урахуванням рівностей  $\dot{X}_I(t) = A_I(t)X_I(t)$  і  $X_I^{-1}(t) = X_I^T(t)$  набуває вигляду

$$\dot{y} = X_I^T(t)A_R(t)X_I(t)y. \quad (5.70)$$

Очевидно, що матриця цієї лінійної однорідної системи симетрична. До того ж вона має ще одну важливу властивість:

$$\|X_I(t)A_R(t)X_I^T(t)\| = \|A_R(t)\|.$$

Щоб у цьому переконатися, достатньо взяти до уваги такі факти: 1)  $\|A\|^2 = \|a_1\|^2 + \dots + \|a_n\|^2$ , де  $a_1, \dots, a_n$  — стовпці матриці  $A$ ; 2) стовпцями добутку матриці  $B$  на матрицю  $A$  є вектори  $Ba_1, \dots, Ba_n$ ; 3)  $\|A\| = \|A^T\|$ .

Якщо нетривіальна вектор-функція  $y(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  перетворює (5.70) на тотожність, то, домноживши обидві частини останньої скалярно на  $y(t)$ , дістанемо

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y(t)\|^2 = \langle \dot{y}(t), y(t) \rangle = \langle X_I^T(t) A_R(t) X_I(t) y(t), y(t) \rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси випливає нерівність

$$-2 \|A_R(t)\| \|y(t)\|^2 \leq \frac{d}{dt} \|y(t)\|^2 \leq 2 \|A_R(t)\| \|y(t)\|^2.$$

Перепишемо її у вигляді

$$-\|A_R(t)\| \leq \frac{d}{dt} \ln \|y(t)\| \leq \|A_R(t)\|$$

і зінтегруємо в межах від  $\tau$  до  $t$ . Після очевидних перетворень матимемо

$$e^{-\int_{\tau}^t \|A_R(s)\| ds} \leq \frac{\|y(t)\|}{\|y(\tau)\|} \leq e^{\int_{\tau}^t \|A_R(s)\| ds}.$$

Звідси з урахуванням рівності  $\|y\| = \|X_I(t)y\|$  дістанемо оцінку довільного нетривіального розв'язку  $x(t)$  вихідної системи (5.69):

$$e^{-\int_{\tau}^t \|A_R(s)\| ds} \leq \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} \leq e^{\int_{\tau}^t \|A_R(s)\| ds}. \quad (5.71)$$

Якщо для кожного  $t \in \mathbb{R}$  позначити через  $\lambda(t)$  і  $\Lambda(t)$  відповідно найменше й найбільше власні числа матриці  $A_R(t)$ , то з урахуванням нерівності

$$\lambda(t) \|y(t)\|^2 \leq \langle X_I^T(t) A_R(t) X_I(t) y(t), y(t) \rangle \leq \Lambda(t) \|y(t)\|^2$$

легко дістаємо оцінки

$$e^{\int_{\tau}^t \lambda(s) ds} \leq \frac{\|y(t)\|}{\|y(\tau)\|} \leq e^{\int_{\tau}^t \Lambda(s) ds}$$

і

$$e^{\int_{\tau}^t \lambda(s) ds} \leq \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} \leq e^{\int_{\tau}^t \Lambda(s) ds}.$$

Їх називають нерівностями Важевського.

Надалі будемо припускати, що система (5.69) задовольняє такі додаткові умови.

1. Існує стала  $M > 0$  така, що  $\|A_R(t)\| \leq M$  для всіх  $t \in \mathbb{R}^*$ .

2. Існує матриця  $W(t) = \{w_{ij}(t)\}$  така, що  $w_{ij}(t) \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|W(t)\| := m < \infty$ , і для деякої додатної сталої  $\alpha$  виконується нерівність

$$\frac{d\langle W(t)x(t), x(t) \rangle}{dt} < -\alpha \|x(t)\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.72)$$

де  $x(t)$  — довільний нетривіальний розв'язок системи (5.69).

Легко переконатися в тому, що умова 2 виконується, якщо

$$\langle (\dot{W}(t) + A^T(t)W(t) + W(t)A(t))x, x \rangle < -\alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Справді, ліворуч у цій нерівності знаходиться похідна функції  $\langle W(t)x, x \rangle$  у силу системи (5.69).

Нехай  $x(t)$  — нетривіальний розв'язок системи (5.69). Покладемо  $w(t) = \langle W(t)x(t), x(t) \rangle$  і введемо в розгляд функцію

$$v(t) := \frac{w(t)}{\alpha \|x(t)\|^2},$$

яка відіграватиме важливу роль у всіх подальших міркуваннях. Якщо здиференціювати рівність  $v(t) \|x(t)\|^2 = w(t)/\alpha$  і врахувати припущення 2, то дістанемо лінійну диференціальну нерівність

$$\dot{v}(t) + \left[ \frac{d}{dt} \ln \|x(t)\|^2 \right] v(t) + 1 \leq 0.$$

Назвемо її *основною нерівністю методу Ляпунова* для системи (5.69). Розв'язавши цю нерівність, можна дістати важливу інформацію про властивості функції  $v(t)$ .

### Твердження 5.8

Якщо функція  $v(t)$  не перетворюється в нуль на  $\mathbb{R}$ , то

$$|v(t)| \geq \frac{1}{2M} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.73)$$

\* Замість цієї умови достатньо вимагати, щоб функція  $\|A_R(t)\|$  була інтегрально обмеженою (див. задачу 6 наприкінці п. 5.6).



У протилежному разі ця функція має єдиний нуль  $t_*$  і тоді

$$|v(t)| \geq \frac{1 - e^{-2M}}{2M} \quad \forall t \in (-\infty, t_* - 1) \cup (t_* + 1, \infty). \quad (5.74)$$

### Доведення

Здиференціювавши рівність  $v(t) \|x(t)\|^2 = w(t)/\alpha$ , переконуємося в тому, що  $v(t)$  є розв'язком лінійного рівняння

$$\dot{y} = a(t)y + b(t), \quad (5.75)$$

$$\text{де } a(t) := -\frac{d \ln \|x(t)\|^2}{dt}, \quad b(t) := \frac{\dot{w}(t)}{\alpha \|x(t)\|^2}.$$

Згідно з припущенням 2 виконується нерівність

$$b(t) < -1.$$

Поряд із (5.75) розглянемо задачу Коші

$$\dot{y} = a(t)y - 1, \quad y|_{t=\tau} = v(\tau).$$

Її розв'язком є функція

$$u(t) = e^{\int_{\tau}^t a(s) ds} \left[ v(\tau) - \int_{\tau}^t e^{-\int_{\tau}^s a(\xi) d\xi} ds \right],$$

яку, враховуючи вигляд коефіцієнта  $a(t)$ , можна подати так:

$$u(t) = \frac{\|x(\tau)\|^2}{\|x(t)\|^2} \left[ v(\tau) - \int_{\tau}^t \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds \right].$$

Застосувавши теорему порівняння з п. 1.5.3, дістанемо

$$v(t) < \frac{\|x(\tau)\|^2}{\|x(t)\|^2} \left[ v(\tau) - \int_{\tau}^t \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds \right] \quad \forall t > \tau, \quad (5.76)$$

$$v(t) > \frac{\|x(\tau)\|^2}{\|x(t)\|^2} \left[ v(\tau) - \int_{\tau}^t \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds \right] \quad \forall t < \tau \quad (5.77)$$

З (5.76) та (5.71) маємо: якщо  $v(t) \geq 0$ , то

$$\begin{aligned} v(\tau) &\geq \int_{\tau}^t \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds \geq \int_{\tau}^t e^{-2\int_{\tau}^s \|A_K(\xi)\| d\xi} ds \geq \\ &\geq \int_{\tau}^t e^{-2M(s-\tau)} ds = \frac{1 - e^{-2M(t-\tau)}}{2M} \quad \forall \tau < t. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Аналогічно з (5.77) випливає: якщо  $v(t) \leq 0$ , то

$$\begin{aligned} v(\tau) &\leq -\int_{\tau}^t \frac{\|x(s)\|^2}{\|x(\tau)\|^2} ds \leq -\int_{\tau}^t e^{2\int_{\tau}^s \|A_K(\xi)\| d\xi} ds \leq \\ &\leq -\int_{\tau}^t e^{2M(s-\tau)} ds = -\frac{1 - e^{2M(t-\tau)}}{2M} \quad \forall \tau > t. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Розглянемо тепер три можливих випадки:

1) якщо  $v(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , то з (5.78) у границі при  $t \rightarrow \infty$  дістаємо  $v(t) \geq 1/2M$  при всіх  $\tau \in \mathbb{R}$ ;

2) якщо  $v(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , то з (5.79) у границі при  $t \rightarrow -\infty$  дістаємо  $v(t) \leq -1/2M$  при всіх  $\tau \in \mathbb{R}$ ;

3) якщо існує таке  $t_*$ , що  $v(t_*) = 0$ , то з (5.78) при  $t = t_*$  і  $\tau \leq t_* - 1$  маємо  $v(\tau) \geq (1 - e^{-2M})/2M$ , а з (5.79) при  $t = t_*$  і  $\tau \geq t_* + 1$  дістаємо  $v(\tau) \leq -(1 - e^{-2M})/2M$ .

### Теорема 5.26

Припустимо, що система (5.69) задовольняє умови 1 та 2 і покладемо

$$\beta := (1 - e^{-2M})/2M, \quad K := \sqrt{m/\alpha\beta}, \quad \gamma := \alpha/2m.$$

Тоді справджуються такі оцінки:

- якщо  $v(t) > 0$  при всіх  $t \in \mathbb{R}$ , то

$$\|x(t)\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)} \|x(\tau)\| \quad \forall t \geq \tau, \forall \tau \in \mathbb{R}; \quad (5.80)$$

- якщо  $v(t) < 0$  при всіх  $t \in \mathbb{R}$ , то

$$\|x(t)\| \leq Ke^{\gamma(t-\tau)} \|x(\tau)\| \quad \forall t \leq \tau, \forall \tau \in \mathbb{R}; \quad (5.81)$$

- якщо ж існує таке  $t_*$ , що  $v(t_*) = 0$ , то

$$\|x(t)\| \geq K^{-1} e^{\gamma(t-\tau)} \|x(\tau)\| \quad (5.82)$$

для всіх  $t \leq \tau \leq t_* - 1$  і всіх  $t \geq \tau \geq t_* + 1$ .

### Доведення

З умови 2 випливає нерівність  $\dot{w}(t) < -\alpha \|x(t)\|^2$ . Якщо  $v(t) > 0$ , то й  $w(t) > 0$ , і з урахуванням нерівності  $w(t) \leq m \|x(t)\|^2$  маємо

$$\dot{w}(t) < -\frac{\alpha}{m} w(t) \Rightarrow \frac{d \ln w(t)}{dt} < -2\gamma.$$

Звідси легко дістаємо  $w(t) \leq w(\tau) e^{-2\gamma(t-\tau)}$  для всіх  $t \geq \tau$ . А тоді з урахуванням твердження 5.8 маємо

$$\|x(t)\|^2 = \frac{w(t)}{\alpha v(t)} \leq \frac{m}{\alpha \beta} \|x(\tau)\|^2 e^{-2\gamma(t-\tau)} \quad \forall t \geq \tau. \quad (5.83)$$

Далі, якщо  $v(t) < 0$ , то  $-m \|x(t)\|^2 \leq w(t) < 0$ . Тоді

$$\dot{w}(t) < \frac{\alpha}{m} w(t) \Rightarrow \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} > 2\gamma.$$

Зінтегрувавши останню нерівність у межах від  $t$  до  $\tau$ , дістаємо  $|w(\tau)|/|w(t)| \geq e^{2\gamma(\tau-t)}$  і  $|w(t)| \leq |w(\tau)| e^{2\gamma(t-\tau)}$  для всіх  $t \leq \tau$ . А тоді з урахуванням твердження 5.8 маємо

$$\|x(t)\|^2 = \frac{|w(t)|}{\alpha |v(t)|} \leq \frac{m}{\alpha \beta} \|x(\tau)\|^2 e^{2\gamma(t-\tau)} \quad \forall t \leq \tau.$$

Нарешті, якщо існує точка  $t_*$ , в якій  $v(t_*) = 0$ , то  $w(t) < 0$  при

всіх  $t > t_*$  і  $w(t) > 0$  при всіх  $t < t_*$ . Зрозуміло, що з огляду на твердження 5.8 при  $\tau \leq t \leq t_* - 1$  виконуватиметься оцінка (5.83). Перепозначивши в ній  $t \leftrightarrow \tau$ , дістаємо шукану оцінку

$$\|x(\tau)\| \leq K \|x(t)\| e^{-\gamma(t-\tau)}$$

при  $t \leq \tau \leq t_* - 1$ .

Випадок  $t \geq t_* + 1$  пропонуємо проаналізувати самостійно.

#### О Наслідок 5.4

Якщо додатково припустити, що матриця  $W(t)$  додатно визначена для всіх  $t \in \mathbb{R}$ , то фундаментальна матриця  $X(t)$  системи (5.69) задовольняє оцінку

$$\|X(t)\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} \|X(\tau)\|,$$

а отже, така система асимптотично стійка.

Виявляється, якщо виконуються умови теореми 5.26, а матриця  $W(t)$  не вироджена на всій дійсній осі й не є додатково визначеною, то існує фундаментальна матриця, утворена лише тими розв'язками, які задовольняють оцінки (5.80) і (5.81). Система (5.69) із такою властивістю називається експоненціально дихотомічною. Якщо ж  $W(t)$  має точки виродження, то будь-яка фундаментальна матриця містить розв'язок, який задовольняє оцінку (5.82).

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① За допомогою функції  $V(x, y)$  дослідити на стійкість тривіальні розв'язки систем:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y; \end{cases} \quad V = 2x^2 + y^2/3;$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3; \end{cases} \quad V = 2x^2 - 2xy + y^2;$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = x - 2y - y^3; \end{cases} \quad V = x^2 + 2y^2;$$

$$\text{г) } \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + x^2 - y, \end{cases} \quad V = 3(x^2 + y^2) - 2x^3.$$

- ② Знайти всі положення рівноваги рівняння

$$\ddot{x} + x^2 \dot{x} + x - x^3 = 0$$

та дослідити їх на стійкість.

- ③ У просторі параметрів  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  виділити області стійкості та нестійкості тривіального розв'язку системи

$$\dot{x} = ax^3 + by, \quad \dot{y} = cx + dy^5.$$

- ✓ *Вказівка.* При  $bc < 0$  для дослідження використати перший інтеграл лінеаризованої системи.

- ④ Дослідити на стійкість тривіальні розв'язки систем, знайшовши функції, які задовольняють умови теорем Ляпунова або Четаєва:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \dot{x} = -x - xy, \\ \dot{y} = y^3 - x^3. \end{cases}$$

- ⑤ Встановити нерівність Важевського для лінійних систем із комплексними коефіцієнтами.

- ⑥ Довести теорему 5.26, замінивши припущення 1 умовою: існує стала  $M > 0$  така, що  $\int_t^{t+1} \|A_R(s)\| ds \leq M$ .

- ✓ *Вказівка.* Скористатись оцінкою

$$\int_t^{t+\tau} \|A_R(s)\| ds = \left( \int_t^{t-1} + \int_{t-1}^{t-2} + \dots + \int_{t-|\tau|}^{t+|\tau|-1} \right) \|A_R(s)\| ds \leq (\tau + 1)M,$$

яка справджується для всіх  $t \in \mathbb{R}$  і  $\tau \geq 0$ .

## 5.7

Векторні поля,  
автономні системи, потоки

У даному пункті ми познайомимось із сучасною термінологією теорії автономних систем, узагальнимо вже відомі їхні властивості та вивчимо низку нових. Нехай  $D$  — область у  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  —  $r$ -разів неперервно диференційовне відображення,  $r \geq 1$ . За його допомогою кожній точці  $x \in D$  поставимо у відповідність вектор  $f(x)$ , прикладений до цієї точки. Так задана відповідність називається *векторним полем*  $f$  класу  $C^r$  в області  $D$ . Далі, для фіксованої точки  $x \in D$  кожне відображення  $x(t) \in C^1((-h, h) \rightarrow D)$ ,  $h > 0$  таке, що  $x(0) = x$ , визначає прикладений до точки  $x$  вектор  $\dot{x}(0)$ . Він являє собою вектор миттєвої швидкості, яку має в момент  $t = 0$  точка, що рухається по області  $D$  за законом  $(-h, h) \ni t \mapsto x(t) \in D$ . Якщо тепер векторне поле  $f$  інтерпретувати як поле миттєвих швидкостей, то в  $D$  виникає автономна система

$$\dot{x} = f(x). \quad (5.84)$$

Вивчаючи питання стійкості, ми вже зустрічались із ситуацією, коли розв'язки досліджуваних систем продовжувалися на нескінченний інтервал часу. Відтак припускатимемо, що система (5.84) задовольняє таку умову *продовжуваності*: *кожен розв'язок системи (5.84) може бути продовжений на всю дійсну вісь*.

Нагадаємо, що  $x(t, x_0)$  — розв'язок системи (5.84), який перетворюється в  $x_0 \in D$  при  $t = 0$ . Ця функція змінних  $t, x_0$  з природною областю визначення  $\mathbb{R} \times D$  має такі властивості.

1. *Властивість єдиності*: для довільних  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times D$  точка  $(t_0, x(t_0, x_0))$  є точкою єдиності розв'язку задачі Коші (теорема 5.6).
2. *Властивість диференційовності*:  $x(t, x_0) \in C^r(\mathbb{R} \times D)$  (теорема (5.13)).

3. *Групова властивість*:

$$x(t, x(s, x_0)) = x(t + s, x_0) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

(доводиться так само, як і твердження 5.7).

Досі ми, як правило, аналізували індивідуальні розв'язки й, зафіксувавши якесь  $x_0 \in D$ , вивчали властивості відображення  $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t, x_0) \in D$ . Виявляється, однак, що дуже важливу інформацію про

систему можна дістати, досліджуючи певні характеристики відображення  $D \ni x_0 \mapsto x(t, x_0) \in D$  при фіксованому  $t$ . З причин, які стануть зрозумілими дещо пізніше, нам зручно буде запровадити деякі нові позначення. А саме, покладемо

$$g^t x_0 := x(t, x_0). \quad (5.85)$$

Це позначення не випадково нагадує показникову функцію: ми побажимо, що воно справді має низку властивостей, притаманних експоненті. При цьому в одновимірному випадку, коли векторне поле на прямій задається відображенням  $x \mapsto a \cdot x$ , де  $a$  — фіксоване дійсне число, маємо очевидний прямий збіг:  $x(t, x_0) = e^{at}x_0 = (e^a)^t x_0$ .

Тепер не виникне жодних непорозумінь, якщо надалі замість  $x_0$  ми писатимемо  $x$ . При кожному фіксованому  $t \in \mathbb{R}$  маємо відображення  $g^t : D \mapsto D$ . Сукупність таких відображень утворює сім'ю, залежну від одного параметра  $t$ .

### ➤ Означення 5.14

Однопараметричну сім'ю відображень  $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  разом із областю їх визначення  $D$  називають потоком, породженим векторним полем  $f$  [автономною системою (5.84)], і позначають  $(D, \{g^t\}_{t \in \mathbb{R}})$ .

У подальшому вживатимемо скорочене позначення  $\{g^t\}$  для потоку. Вкажемо основні властивості цього об'єкта.

1. Відображення  $(t, x) \mapsto g^t x$  належить класу  $C^1(\mathbb{R} \times D \mapsto D)$  [див. властивість диференційовності розв'язку  $x(t, x_0)$ ].

2. Сім'я відображень  $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  утворює абелеву групу відносно операції суперпозиції.

- Одиниця групи —  $g^0$  — це тотожне відображення  $\text{Id}$  [рівність  $g^0 x = x$  для кожного  $x \in D$  випливає з означення розв'язку  $x(t, x_0)$ , адже  $x(0, x_0) = x_0$ ].

- Для будь-яких  $t, s \in \mathbb{R}$  виконуються рівності

$$g^t \circ g^s = g^{t+s} = g^{s+t} = g^s \circ g^t$$

[останні випливають із групової властивості розв'язку  $x(t, x_0)$ ].

- Оберненим до  $g^t$  є відображення  $g^{-t}$ :

$$g^t \circ g^{-t} = g^0$$

(наслідок попередніх двох властивостей).

- Асоціативна властивість операції суперпозиції очевидна.

3. Для кожного  $t \in \mathbb{R}$  відображення  $g^t$  є дифеоморфізмом класу  $C^r$  області  $D$  на себе. Це означає, що  $g^t \in C^r(D \mapsto D)$  і  $g^{-t} \in C^r(D \mapsto D)$  (властивість 1). Оскільки областю визначення відображення  $g^{-t}$  є вся область  $D$ , то  $g^t: D \mapsto D$  — скор'єкція.

4. Для всіх  $(t, x) \in \mathbb{R} \times D$  виконуються рівність

$$\frac{\partial g^t x}{\partial t} = f(g^t x)$$

[наслідок того, що  $x(t, x_0)$  — розв'язок системи (5.84)].

### □ Приклад 5.9

Нехай  $A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  — лінійний оператор. Він породжує векторне поле в  $\mathbb{R}^n$ : для кожного  $x \in \mathbb{R}^n$  вектором, прикладеним до  $x$ , є  $Ax$ . Відповідну автономну систему  $\dot{x} = Ax$ , яка є лінійною й однорідною, було розглянуто в п. 2.3.4. У даному випадку  $x(t, x_0) = e^{tA}x_0$ , а отже, потоком є однопараметрична сім'я лінійних операторів  $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$ .

У зв'язку з наведеним прикладом звернемо увагу на ще одну властивість сім'ї відображень  $\{g^t\}$ . Нехай  $f$  — векторне поле класу  $C^\infty$ . Візьмемо довільну функцію  $u(x) \in C^\infty(D \mapsto \mathbb{R})$  і покладемо

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(g^t x) := f \cdot u(x).$$

Це — не що інше, як похідна функції  $u(x)$  у силу системи (5.84), однак тепер праву частину виписаної рівності ми інтерпретуємо як дію векторного поля  $f$  на  $u(x)$ . Через  $f^k \cdot u(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  позначимо  $\underbrace{f \dots f}_{k} \cdot u(x)$ , тобто  $k$ -кратну дію векторного поля на  $u(x)$ . З урахуванням цих позначень запишемо формулу Тейлора

$$\begin{aligned} u(g^t x) &= u(x) + t \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(g^t x) + \\ &+ \frac{t^2}{2!} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} u(g^t x) + \dots + \frac{t^k}{k!} \left. \frac{d^k}{dt^k} \right|_{t=0} u(g^t x) + o(t^k) = \\ &= u(x) + t f \cdot u(x) + \frac{t^2}{2!} f^2 \cdot u(x) + \dots + \frac{t^k}{k!} f^k \cdot u(x) + o(t^k) \end{aligned}$$

або



$$u(g^t x) = \left( 1 + tf + \frac{(tf)^2}{2} + \dots + \frac{(tf)^k}{k!} + o(t^k) \right) u(x).$$

Дана формула пояснює природність запровадження позначення

$$\text{хр}(tf) \cdot u(x) := u(g^t x)$$

для відображення, яке функції  $u(x)$  ставить у відповідність функцію  $u(g^t x)$ .

### ➤ Означення 5.15

Рухом точки  $x \in D$  під дією потоку називають відображення  $\mathbb{R} \mapsto D$ , яке кожному моментові часу  $t \in \mathbb{R}$  ставить у відповідність точку  $g^t x$ . Образ цього відображення, тобто множину точок  $\Gamma(x) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} g^t x$ , називають траєкторією точки  $x$ . Додатною (від'ємною) півтраєкторією точки  $x$  називають множину  $\Gamma_+(x) = \bigcup_{t \geq 0} g^t x$  ( $\Gamma_-(x) = \bigcup_{t < 0} g^t x$ ).

### ➤ Означення 5.16

Множину  $M \subset D$  називають інваріантною множиною потоку  $\{g^t\}$ , якщо

$$x \in M \Rightarrow \Gamma(x) \subset M.$$

Термін «траєкторія» має синоніми: «фазова крива», «орбіта». Дотично вважати, що траєкторія є орієнтованою кривою. Орієнтація на  $\Gamma(x)$  визначається вектором  $f(x)$ , дотичним до  $\Gamma(x)$  у точці  $x$ . Він укаже, в якому напрямі відбувається рух точки по цій кривій зі зростанням часу. Відзначимо також, що поняття додатної півтраєкторії коректно визначене й тоді, коли умова продовжуваності розв'язків системи (5.84) на всю дійсну вісь не виконується, однак кожен розв'язок існує на півосі  $[0, \infty)$ . У цьому випадку система (5.84) породжує півпотік  $(D, \{g^t\}_{t \geq 0})$ , де  $g^t$  задається формулою (5.85).

### Твердження 5.9

Траєкторії двох різних точок або не мають спільних точок, або збігаються.

### Доведення

Траєкторії точок  $x_1, x_2$  перетинаються тоді й лише тоді, коли є такі моменти  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , що  $g^{t_1} x_1 = g^{t_2} x_2$ . Скориставшись групувою властивістю потоку, маємо:

$$x_2 = g^{-t_2} g^{t_1} x_1 = g^{(t_1 - t_2)} x_1 \in \Gamma(x_1).$$

Аналогічно  $x_1 \in \Gamma(x_2)$ .

### ⇒ Означення 5.17

*Нерухомою точкою (положенням рівноваги) потоку називають таку точку  $x_* \in D$ , що  $g^t x_* = x_*$  для всіх  $t \in \mathbb{R}$ .*

Зрозуміло, що нерухома точка потоку  $\{g^t\}$  є положенням рівноваги автономної системи (5.84) й водночас *особливою точкою векторного поля  $f(x)$* . Нагадаємо, що так називається точка, в якій вектор векторного поля перетворюється в нуль. Твердження 5.9 має такий прямий наслідок.

### Твердження 5.10

Жодна точка, відмінна від положення рівноваги  $x_*$ , не може потрапити в процесі руху під дією потоку в точку  $x_*$  за скінченний час.

Покажемо, що можуть бути лише два типи траєкторій, відмінних від положень рівноваги:

- 1) *регулярні незамкнені криві без самоперетинів;*
- 2) *регулярні замкнені криві без самоперетинів.*

### Твердження 5.11

Якщо не існує таких  $t_1, t_2$ , що  $t_1 \neq t_2$  і  $g^{t_1} x_0 = g^{t_2} x_0$ , то  $\Gamma(x_0)$  — траєкторія першого типу.

### Доведення

Очевидно, що  $f(x_0) \neq 0$ ; інакше  $g^t x_0 \equiv x_0$ , і умови нашого твердження не виконувалися б. Відображення  $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) = g^t x_0 \in D$  взаємно однозначне й неперервно диференційовне. З твердження 5.9 та четвертої властивості потоку випливає, що  $\dot{x}(t) = f(x(t)) \neq 0$  для всіх  $t \in \mathbb{R}$ . Тому  $\Gamma(x_0)$  — регулярна незамкнена крива без самоперетинів.

### Твердження 5.12

Якщо  $f(x_0) \neq 0$  й існує пара таких  $t_1 \neq t_2$ , що  $g^{t_1} x_0 = g^{t_2} x_0$ , то  $\Gamma(x_0)$  — траєкторія другого типу. При цьому існує таке  $\theta > 0$ , що рух кожної точки  $\Gamma(x_0)$  періодичний із найменшим додатним періодом  $\theta$ , тобто

$$g^{t+\theta} x = g^t x \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \Gamma(x_0).$$

## Доведення

Нехай  $t_1 < t_2$ . Тоді  $g^{t_2-t_1}x_0 = x_0$ , а це означає, що  $P_{x_0} := \{t > 0 : g^t x_0 = x_0\}$  — множина додатних періодів точки  $x_0$  — містить точку  $t_2 - t_1$ . Визначимо  $\theta := \inf P_{x_0}$  і покажемо, що  $\theta > 0$ . Достатньо переконатися в тому, що існує таке число  $a > 0$ , що на відрізку  $[0, a]$  немає точок множини  $P_{x_0}$ . Але цей факт одразу випливає з формули Тейлора

$$g^t x_0 = g^0 x_0 + t \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t x_0 + o(t) = x_0 + t f(x_0) + o(t), \quad t \rightarrow 0$$

і припущення про те, що  $f(x_0) \neq 0$ . Дійсно,  $g^t x_0 - x_0 = t f(x_0) + o(t) \neq 0$  для всіх досить малих значень  $t$ .

Тепер покажемо, що  $\theta \in P_{x_0}$ . Справді, за означенням нижньої межі знайдеться послідовність періодів  $\theta_k \in P_{x_0}$ , яка збігається до  $\theta$  при  $k \rightarrow \infty$ . У послідовності рівностей  $g^{\theta_k} x_0 = x_0$  перейдемо до границі. Дістанемо  $g^\theta x_0 = x_0$ . Отже,  $\theta$  — найменший додатний період точки  $x_0$ .

Нехай  $\theta_0$  — будь-який додатний період точки  $x_0$ ,  $x_1 = g^{\theta_0} x_0$  — інша точка траєкторії  $\Gamma(x_0)$ . Оскільки

$$g^{\theta_0} x_1 = g^{\theta_0} \circ g^{\theta_1} x_0 = g^{\theta_1} \circ g^{\theta_0} x_0 = g^{\theta_1} x_0,$$

то  $\theta_0$  є водночас і періодом точки  $x_1$ . Отже,  $P_{x_0} \subset P_{x_1}$ . Аналогічні міркування показують, що  $P_{x_1} \subset P_{x_0}$ . Звідси легко зробити висновок, що всі точки траєкторії  $\Gamma(x_0)$  мають однакові найменші періоди й що відображення  $g^t x_0 : \{0, \theta\} \mapsto D$  взаємно однозначні інакше на  $\Gamma(x_0)$  знайшлася б точка з періодом, меншим за  $\theta$ .

### Означення 5.18

*Замкнену траєкторію, відмінну від положення рівноваги, називають циклом.*

Задача про існування циклів — одна з головних при дослідженні автономних систем. Цикли є математичними еквівалентами періодичних у часі процесів (одночастотних автоколивань), які так часто можна спостерігати під час функціонування реальних систем — фізичних, хімічних, біологічних, технічних тощо. Особливе значення мають цикли, що притягують до себе інші траєкторії. Такі цикли називаються *граничними*.

## □ Приклад 5.10

Розглянемо автономну систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases} \quad (5.86)$$

Її можна подати у вигляді одного комплексного рівняння

$$\dot{z} = iz - z(|z|^2 - 1), \quad z := x + iy.$$

Поклавши в цьому рівнянні  $z = re^{i\varphi}$ , перейдемо до полярних координат  $(r, \varphi)$ . Маємо

$$\dot{r}e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}re^{i\varphi} = ire^{i\varphi} - re^{i\varphi}(|z|^2 - 1).$$

Відокремивши тут дійсну та уявну частини, дістанемо систему

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\varphi} = 1, \end{cases}$$

для якої розв'язок задачі Коші з початковими умовами  $r(0) = r_0 \neq 0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$  має вигляд

$$r(t) = \left(1 - \frac{(r_0^2 - 1)}{r_0^2} e^{2t}\right)^{-1/2}, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + t. \quad (5.87)$$

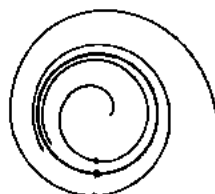


Рис. 5.9

Оскільки  $r(t) \rightarrow 1$  і  $\varphi(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , то коло  $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  є граничним циклом системи (5.86). Кожна півтраєкторія, яка виходить із точки поза колом  $S^1$ , відмінної від початку координат, навивається на це коло при  $t \rightarrow \infty$  у вигляді спіралі (рис. 5.9). Зауважимо, що система (5.86) визначає потік лише в крузі  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Якщо ж для початкового значення  $(x_0, y_0)$  розв'язку виконується умова  $r_0 := x_0^2 + y_0^2 > 1$ , то такий розв'язок, як це

впливає з формули (5.87), існує на інтервалі  $\left(\ln\left(\frac{\sqrt{r_0^2 - 1}}{r_0}\right), \infty\right)$ . Тому на всій площині  $\mathbb{R}^2$  зазначена система визначає півпотік.

Важлива задача якісної теорії автономних систем полягає у вивченні граничної поведінки траєкторій (півтраєкторій).

### Означення 5.19

Точку  $x_*$  називають  $\omega$ -граничною ( $\alpha$ -граничною) точкою півтраєкторії  $\Gamma_+(x_0)$  ( $\Gamma_-(x_0)$ ), якщо існує така послідовність  $\{t_k\}_{k=1,2,\dots} \subset [0, \infty)$  ( $\{t_k\}_{k=1,2,\dots} \subset (-\infty, 0]$ ), що  $t_k \rightarrow \infty$  ( $t_k \rightarrow -\infty, k \rightarrow \infty$ ) і  $g^{t_k} x_0 \rightarrow x_*$  при  $k \rightarrow \infty$ .

### Означення 5.20

Множину всіх  $\omega$ -граничних ( $\alpha$ -граничних) точок півтраєкторії  $\Gamma_+(x_0)$  ( $\Gamma_-(x_0)$ ) називають  $\omega$ -граничною ( $\alpha$ -граничною) множиною цієї півтраєкторії і позначають через  $\omega(x_0)$  ( $\alpha(x_0)$ ).

Структуру граничних множин автономних систем на площині було досліджено в працях А. Пуанкаре та І. Бендіксона. Виявилось, що коли півтраєкторія  $\Gamma_+(x_0)$  належить компакт, в якому немає неізованих особливих точок векторного поля  $f(x)$ , то  $\omega(x_0)$  є непорожньою, зв'язною, компактною, інваріантною множиною одного з трьох типів:

- одне положення рівноваги  $x_*$  (у цьому випадку  $g^t x_0 \rightarrow x_*, t \rightarrow \infty$ );
- один цикл (у цьому випадку півтраєкторія  $\Gamma_+(x_0)$  або збігається з циклом  $\omega(x_0)$ , або навивається на нього у вигляді спіралі);
- зв'язне об'єднання положень рівноваги та траєкторій, які їх сполучають [у цьому випадку траєкторія  $\Gamma_+(x_0)$  навивається на  $\omega(x_0)$ ].

Наприклад, на рис. 5.10 множина  $\omega(x_0)$  складається з одного положення рівноваги й двох траєкторій, які входять у це положення рівноваги як при  $t \rightarrow \infty$ , так і при  $t \rightarrow -\infty$ .

Вкажемо достатні умови реалізації випадку, коли  $\omega(x_0)$  є циклом.

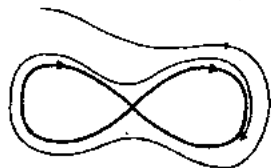


Рис. 5.10

### Теорема 5.27

Нехай півтраєкторія  $\Gamma_+(x_0)$  двовимірної автономної системи (5.84) належить компакт  $K$ , який не містить особливих точок векторного поля  $f(x)$ . Тоді множина  $\omega(x_0)$  є циклом. Півтраєкторія  $\Gamma_+(x_0)$  або збігається з  $\omega(x_0)$ , або навивається на цикл  $\omega(x_0)$  у вигляді спіралі.

### Доведення\*

Якщо траєкторія точки  $x_0$  є циклом, то  $\Gamma(x_0) = \Gamma_+(x_0) = \omega(x_0)$ . Дійсно, цикл є замкненою множиною, а тому  $\omega(x_0) \subset \Gamma_+(x_0)$ . На-

впаки, кожна точка циклу є  $\omega$ -граничною точкою для  $\Gamma_+(x_0)$  (доведіть!).

Отже, надалі розглядатимемо випадок, коли траєкторія точки  $x_0$  не є циклом. Оскільки  $\Gamma_+(x_0) \subset K$ , то існує така послідовність  $\{t_k\}_{k=1, 2, \dots}$  і така точка  $x_* \in K$ , що  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$  і  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{t_k} x_0 = x_*$ . Зрозуміло, що  $x_* \in \omega(x_0) \subset K$ .

Розглянемо траєкторію  $\Gamma(x_*)$  точки  $x_*$ . Для кожного  $t \in \mathbb{R}$  маємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g^{t - t_k} x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} g^t \circ g^{t_k} x_0 = g^t x_*.$$

Це означає, що кожна точка множини  $\Gamma(x_*)$  належить  $\omega(x_0)$ , а тому  $\Gamma(x_*) \subset K$ .

Доведемо, що  $\Gamma(x_*)$  — замкнена крива.

Припустимо, навпаки, що  $\Gamma(x_*)$  не є циклом. Тоді існує така послідовність  $\{T_k\}_{k=1, 2, \dots}$  і така точка  $X_* \in K$ , що  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{T_k} x_* = X_*$ ,  $g^{T_i} x_* \neq g^{T_j} x_*$ ,  $i \neq j$ .

За умовою  $f(X_*) \neq 0$ . Проведемо через точку  $X_*$  відрізок  $l$  малої довжини  $2\delta > 0$ , ортогональний вектору  $f(X_*)$ . Із кожної точки цього відрізка випустимо дугу траєкторії потоку  $\{g^t\}$ , яка відповідає часовому інтервалові  $[-\delta, \delta]$ . При досить малому  $\delta$  об'єднання всіх таких дуг утворює криволінійний чотирикутник  $ABCD$  (рис. 5.11), у точках якого  $f(x) \neq 0$ . За побудовою дуга  $AD$  під дією потоку за час  $\delta$  переходить у  $l$ , а за час  $2\delta$  — у дугу  $BC$ .

Наведемо строгі міркування стосовно побудови чотирикутника  $ABCD$ . Нехай  $e$  — одиничний вектор, ортогональний век-

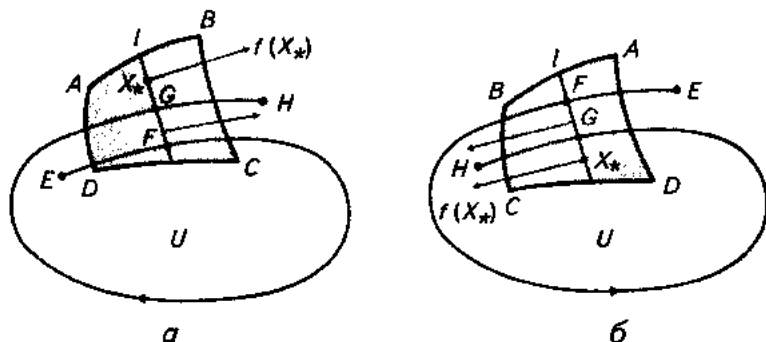


Рис. 5.11

тору  $f(X_*)$ . Тоді відрізок  $l$  можна задати, наприклад, параметричним рівнянням  $x = \xi(s) := X_* + se, s \in [-\delta, \delta]$ . Уведемо відображення

$$F(t, s) := g^t \xi(s) : [-\delta, \delta] \times [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Оскільки  $F_t(0, 0) = f(X_*)$ ,  $F_s^t(0, 0) = e$ , то за теоремою про обернене відображення (див. дод. 2) при досить малому  $\delta$  відображення  $F$  дифеоморфно перетворює квадрат  $[-\delta, \delta] \times [-\delta, \delta]$  на криволінійний чотирикутник

$$ABCD := \bigcup_{(t, s) \in [-\delta, \delta] \times [-\delta, \delta]} F(t, s).$$

Чотирикутник  $ABCD$  має важливу властивість: потрапити в нього під дією потоку зі зростанням часу можна лише через дугу  $AD$ , а вийти — лише через  $BC$ ; при цьому траєкторія будь-якої точки  $x \in ABCD$  перетинає як  $AD$ , так і  $BC$ .

Виберемо  $k_* \in \mathbb{N}$  настільки великим, щоб  $g^{T_k} x_* \in ABCD$  для всіх  $k \geq k_*$ . Легко бачити, що тоді на півтраєкторії  $\Gamma_+(x_*)$  можна вказати дугу  $EFGH$ , яка перетинає відрізок  $l$  послідовно в точках  $F$  і  $G$  і кінці якої  $E$  та  $H$  лежать за межами чотирикутника  $ABCD$ .

Розглянемо область  $U$ , межа якої складається з відрізка  $FG$  та траєкторної дуги з початком у точці  $F$  і кінцем у точці  $G$ . Точка  $H$  (точка  $E$ ) може знаходитись або поза  $\bar{U}$  (усередині  $U$ ), як на рис. 5.11, а, або всередині  $U$  (поза  $\bar{U}$ ), як на рис. 5.11, б. У першому випадку додатна півтраєкторія будь-якої точки  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{U}$  не має спільних точок із  $U$ , а в другому — область  $U$  та її замикання  $\bar{U}$  мають властивість півінваріантності: якщо  $x \in U$  ( $x \in \bar{U}$ ), то  $g^t x \in U$  ( $g^t x \in \bar{U}$ ) для всіх  $t \geq 0$  (обґрунтуйте!).

Тепер покажемо, що точки  $E$  та  $H$  не можуть одночасно бути  $\omega$ -граничними для  $\Gamma_+(x_0)$ . Для цього виберемо  $\epsilon > 0$  настільки малим, щоб круг  $B_\epsilon^2(H)$  не перетинався з  $U$  у першому випадку і  $B_\epsilon^2(H) \subset U$  — в другому. Оскільки  $H \in \Gamma(x_*) \subset \omega(x_0)$ , то існує  $\tau > 0$  таке, що  $g^t x_0 \in B_\epsilon^2(H)$ . А тоді  $g^t x_0 \in \bar{U} \forall t \geq \tau$  у першому випадку й  $g^t x_0 \in U \forall t \geq \tau$  — у другому. В обох випадках  $E$  не може бути  $\omega$ -граничною точкою для  $\Gamma_+(x_0)$ . Водночас  $E \in \Gamma_+(x_*) \subset \omega(x_0)$ . Одержана суперечність доводить, що крива  $\Gamma(x_*)$  замкнена.

Нарешті, покажемо, що  $\Gamma_+(x_0)$  навивається на  $\Gamma(x_*)$ . Через  $X_*$  ми тепер позначимо довільну точку циклу  $\Gamma(x_*)$ . Оскільки  $X_* \in \omega(x_0)$ ,

то для цієї точки можна виконати ті самі геометричні побудови, що зображені на рис. 5.11, з тією лише різницею, що тепер уже  $EFGH$  є дугою півтраєкторії  $\Gamma_+(x_0)$ . Зауважимо, що  $\Gamma_+(x_0)$  перетинає відрізок  $FG$  тільки в точках  $F$  та  $G$  (обгрунтуйте!). Тому цей відрізок не може містити  $\omega$ -граничних точок півтраєкторії  $\Gamma_+(x_0)$ . Зокрема,  $X_* \neq FG$ . Тепер зрозуміло, що в першому випадку  $X_* \neq \bar{U}$  і тому точка  $G$  має міститися між  $F$  та  $X_*$ , а в другому —  $X_* \in U$  — і точка  $G$  лежить між  $F$  та  $X_*$ . Міркуючи за індукцією, неважко тепер показати, що в першому випадку  $\Gamma_+(x_0)$  навивається на цикл  $\Gamma(x_*)$ , залишаючися всередині області, обмеженої  $\Gamma(x_*)$ , а в другому — ззовні.

Оскільки півтраєкторія  $\Gamma_+(x_0)$  може навиватися лише на один цикл, то  $\Gamma(x_*) = \omega(x_0)$ .

Насамкінець розглянемо ситуацію, коли для системи (5.84) умова продовжуваності розв'язків на всю дійсну вісь (або на піввісь) не справджується, так що непродовжуваний розв'язок  $x(t, x_0)$  існує на інтервалі  $I(x_0)$ , який у загальному випадку залежить від початкового значення  $x_0$ . У цій ситуації траєкторією точки  $x_0$  є множина  $\Gamma(x_0) = \bigcup_{t \in I(x_0)} x(t, x_0)$ . Для того щоб уникнути певних незручностей, пов'язаних із залежністю  $I(x_0)$  від  $x_0$ , замість (5.84) можна, наприклад, досліджувати таку допоміжну систему:

$$\dot{x} = \hat{f}(x) := (1 + \|f(x)\|^2)^{-1/2} f(x). \quad (5.88)$$

### Твердження 5.13

Якщо  $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$ , то кожен розв'язок системи (5.88) існує на всій дійсній осі й системи (5.84) та (5.88) мають однакові траєкторії.

### Доведення

Нехай  $x_0$  — довільна точка з області  $D$ . Застосуємо до системи (5.88) теорему Пікара, поклавши

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} : |t| \leq a, \|x - x_0\| \leq a\},$$

де  $a$  — довільне додатне число. Оскільки  $M := \max_P \|\hat{f}(x)\| \leq 1/2$ , то  $h := \min(a, a/M) = a$ . Отже, розв'язок  $x(t, x_0)$  існує на відрізку  $[-a, a]$  і має властивість єдиності.

Траєкторії систем (5.84) та (5.88), які проходять через точку  $x_0$ , збігаються, оскільки цим двом системам відповідають еквівалентні системи в симетричній формі (див. п. 4.1.3).



## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Показати, що рівняння одновидової популяції  $\dot{x} = x(1-x)$  породжує потік на інтервалі  $\{x \in (0, 1)\}$  і півпотік на півосі  $\{x > 0\}$ .
- ② Побудувати фазові портрети систем:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x} = \sin x, \\ \dot{y} = \sin y, \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \dot{x} = \sin y, \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$$

- ③ Довести, що векторне поле  $[\text{grad } F(x), \text{grad } G(x)]$ , де  $F(x), G(x) \in C^2(\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R})$ , а  $[\cdot, \cdot]$  — операція векторного добутку в  $\mathbb{R}^3$ , породжує потік у  $\mathbb{R}^3$ , якщо для кожної пари дійсних чисел  $c_1, c_2$  множина

$$M_{c_1, c_2} = \{x \in \mathbb{R}^3 : F(x) = c_1, G(x) = c_2\}$$

обмежена (можливо, порожня). Показати, що ця множина є інваріантною.

- ④ Нехай система  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

породжує потік. Довести, що графік функції  $y = u(x) \in C^1(\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m)$  є інваріантною множиною такої системи тоді й лише тоді, коли

$$\langle \text{grad } u(x), f(x, u(x)) \rangle = g(x, u(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- ⑤ Описати  $\omega$ -граничні множини скалярного автономного рівняння.
- ⑥ Знайти цикли,  $\alpha$ - та  $\omega$ -граничні множини траєкторій системи

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x \sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y, \\ \dot{y} = \frac{y \sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x. \end{cases}$$

- ⑦ Нехай функція  $f \in C^1(\mathbb{C} \mapsto (0, \infty))$  задовольняє умови

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} f(z) = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \infty.$$

Довести, що тоді рівняння  $\dot{z} = izf(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$  має цикл будь-якого наперед заданого найменшого періоду.

## 5.8

### Консервативна система з одним ступенем вільності

У цьому пункті буде побудовано глобальний фазовий портрет важливої двовимірної автономної системи, яка моделює рух матеріальної частинки масою  $m$  по прямій  $Ox$  під дією сили  $F(x)$ , що залежить лише від положення частинки.

Згідно з другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху частинки має вигляд  $m\ddot{x} = F(x)$ . Без обмеження загальності міркувань надалі вважатимемо, що  $m = 1$ . Крім того, припускати будемо, що  $F(x) \in C^1(J \rightarrow \mathbb{R})$ , де  $J := (a, b)$  — деякий інтервал (не виключаються випадки, коли  $a = -\infty$  і (або)  $b = \infty$ ). Умова диференційовності функції  $F(x)$  забезпечує існування й єдиність неперодовжаного розв'язку  $x(t)$ ,  $t \in I$  задачі Коші

$$\ddot{x} = F(x), \quad x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = y_0$$

для довільної точки  $(x_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}$ . Функція  $x(t)$  описує закон руху частинки, яка стартує в момент часу  $t = 0$  із положення  $x_0$  з початковою швидкістю  $y_0$ .

#### 5.8.1. Інтеграл енергії

##### ⇒ Означення 5.21

*Функцію*

$$\Pi(x) = -\int_{x_0}^x F(\xi) d\xi$$

*називають потенціальною енергією частинки.*

Досліджуване рівняння руху набирає вигляду

$$\ddot{x} = -\Pi(x). \tag{5.89}$$

Його можна розглядати як одновимірний аналог системи з прикладу 4.10. Отже, за зроблених припущень частинка рухається в потен-

ціальному силовому полі, а тому для неї має виконуватися закон збереження повної механічної енергії. Пряме обґрунтування цього висновку випливає з такого спостереження. Якщо обидві частини тотожності  $\dot{x}(t) \equiv -\Pi(x(t))$  домножити на  $\dot{x}(t)$ , то одержаний результат можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2(t)}{2} + \Pi(x(t)) \right) \equiv 0.$$

Звідси й маємо таке твердження.

#### Твердження 5.14

У процесі руху частинки в потенціальному силовому полі її повна механічна енергія (сума кінетичної й потенціальної енергій) зберігається:

$$\frac{\dot{x}^2(t)}{2} + \Pi(x(t)) \equiv \frac{y_0^2}{2} + \Pi(x_0). \quad (5.90)$$

Запровадивши фазовий вектор  $(x, y) := (x, \dot{x})$ , дістанемо двовимірну систему, еквівалентну рівнянню (5.89):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\Pi(x). \end{cases} \quad (5.91)$$

Із твердження 5.14 випливає, що ця система має перший інтеграл — інтеграл енергії

$$\mathcal{E}(x, y) := \frac{y^2}{2} + \Pi(x).$$

Гому її називають *консервативною системою* з одним ступенем вільності.

Зауважимо, що положення рівноваги системи (5.91) — це стаціонарні точки функції  $\mathcal{E}(x, y)$ , тобто точки, координати яких визначаються системою

$$\mathcal{E}'_x = \Pi'(x) = 0, \quad \mathcal{E}'_y = y = 0.$$

Як бачимо, всі вони лежать на осі  $Ox$ , і їх абсциси є стаціонарними точками потенціальної енергії.

Введемо позначення

$$M_E := \{(x, y) \in J \times \mathbb{R} : \mathcal{E}(x, y) = E\}$$

для множини рівня повної енергії і виділимо в  $\mathbb{R}^2$  область  $D$ , яка утворюється вилученням із  $J \times \mathbb{R}$  положень рівноваги системи (5.91).

### Твердження 5.15

Нехай  $(x_0, y_0) \in D$  і  $E := \mathcal{E}(x_0, y_0)$ . Фазова крива рівнянь руху (5.91), яка проходить через точку  $(x_0, y_0)$ , збігається з лінією рівня повної енергії — тією зв'язною компонентою множини  $M_E \cap D$ , яка містить точку  $(x_0, y_0)$ .

### Доведення

Достатньо зауважити, що в області  $D$  функція  $\mathcal{E}(x, y)$  є невідродженим першим інтегралом рівняння в повних диференціалах

$$P'(x)dx + y dy = 0,$$

яке природно відповідає системі (5.91) (див. п. 1.8, теорема 1.18).

Таким чином, траєкторії системи (5.91), відмінні від положень рівноваги, — це лінії рівня функції  $\mathcal{E}(x, y)$ , розташовані в області  $D$ . Орієнтація (напрямок руху) на них визначається векторним полем  $(y, -P(x))$ , породженим правою частиною системи (5.91). Зокрема, рух по тій частині фазової кривої, яка лежить у верхній півплощині, відбувається зліва направо ( $\dot{x} = y > 0$ ). Навпаки, доки фазова точка  $(x(t), y(t))$  перебуває у нижній півплощині, її абсциса спадає.

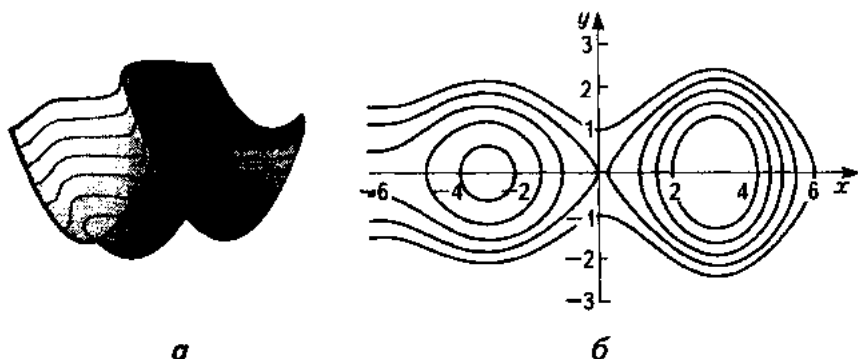


Рис. 5.12

Частину графіка повної енергії системи з потенціальною енергією  $\Pi(x) = (a + bx) \cos x$ , де  $a, b$  — додатні числа, зображено на рис. 5.12,  $a$ , кілька ліній рівня — на рис. 5.12,  $b$ .

### 5.8.2. Класифікація ліній рівня повної енергії

Позначимо через  $\Pi(J)$  множину значень функції  $\Pi(x)$  і покладемо  $\alpha := \inf \Pi(J)$ .

Зрозуміло, що коли  $(x, y) \in M_E \neq \emptyset$ , то  $\Pi(x) \leq E$ , причому рівність тут може досягатися лише при  $y = 0$ . Тому множина  $M_E$  порожня, якщо: 1)  $\alpha > -\infty$  і  $E < \alpha$ ; 2)  $E = \alpha$ , але функція  $\Pi(x)$  не досягає свого мінімального значення на  $J$ .

Рівність  $\Pi(x) = \alpha$  можлива лише в тих точках, де  $\Pi'(x) = 0$ . Тому, якщо множина  $M_\alpha$  не порожня, то вона складається з положень рівноваги системи (5.91), абсциси яких відповідають точкам мінімуму потенціальної енергії.

Відтак припускаємо, що  $E > \alpha$ . Тоді множина  $M_E$  є об'єднанням графіків функцій

$$y = \sqrt{2(E - \Pi(x))} \quad \text{і} \quad y = -\sqrt{2(E - \Pi(x))} \quad (5.92)$$

в природною областю визначення  $\{x \in J := \Pi(x) \leq E\}$ . Звідси, зокрема, випливає, що множина  $M_E$  розташована симетрично відносно осі абсцис.

Дамо класифікацію найважливіших типів ліній рівня функції  $\Pi(x, y)$  та проаналізуємо характер руху на них.

Множина  $\{x \in J := \Pi(x) < E\}$  відкрита. Тому вона є об'єднанням не більше ніж зліченної множини інтервалів, які не перетинаються (див., наприклад, [5], гл. 10; п. 1.9.). Зафіксуємо один із них — нехай це буде інтервал  $(x_1, x_2)$  — і розглянемо такі випадки.

1. Відрізок  $[x_1, x_2]$  належить інтервалу  $J$ .
  - 1.1. Жодна з точок  $x_1, x_2$  не є стаціонарною для функції  $\Pi(x)$ .
  - 1.2. Лише одна з цих точок є стаціонарною для потенціальної енергії.
  - 1.3. Обидві точки  $x_1$  та  $x_2$  є стаціонарними для потенціальної енергії.
2. Виконується одна з рівностей:  $x_1 = a$  або  $x_2 = b$ .

2.1. Та з точок  $x_1, x_2$ , яка належить  $J$ , не є стаціонарною для  $\Pi(x)$ .

2.2. Та з точок  $x_1, x_2$ , яка належить  $J$ , є стаціонарною для  $\Pi(x)$ .

3. Інтервал  $(x_1, x_2)$  збігається з  $J$  і, отже,  $E > \Pi(x)$  для всіх  $x \in J$ .

**Випадок 1.1** характеризується умовами  $\Pi(x_1) = \Pi(x_2) = E$ ,  $\Pi'(x_1) < 0$ ,  $\Pi'(x_2) > 0$  і  $\Pi(x) < E$  при  $x \in (x_1, x_2)$  (рис. 5.13, а).

### Твердження 5.16

У випадку 1.1 лінія рівня  $\Gamma(x_0, y_0)$  функції  $\mathcal{E}(x, y)$ , яка проходить через точку  $(x_0, y_0) \in M_E$ , де  $x_0 \in [x_1, x_2]$ , є регулярною замкнутою кривою.

### Доведення

Якщо  $x_0 \in (x_1, x_2)$ , то  $y_0 \neq 0$  і в околі  $(x_0, y_0)$  лінія рівня, яка проходить через цю точку, є графіком однієї з двох функцій (5.92). Обидві вони належать класу  $C^2((x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R})$ .

Якщо  $x_0$  збігається з кінцем відрізка  $[x_1, x_2]$ , то  $y_0 = 0$ . В до-  
сить малому околі точки  $(x_1, 0)$  множина  $M_E$  є графіком неперервно диференційовної функції  $x = f(y)$ , в якій  $f'(0) = 0$ . Справді, оскільки  $\mathcal{E}(x_1, 0) = \Pi(x_1) = E$  і  $\mathcal{E}'_x(x_1, 0) = \Pi'(x_1) \neq 0$ , то цей факт є наслідком теореми про неявну функцію: існують інтервали  $(-h, h)$  та  $(E - \eta, E + \eta)$  і єдина функція  $f: (-h, h) \rightarrow (E - \eta, E + \eta)$  така, що

$$f(0) = x_1 \text{ і } \mathcal{E}(f(y), y) = E \quad \forall y \in (-h, h); \quad (5.93)$$

ця функція має неперервну похідну на  $(-h, h)$ , значення якої можна знайти, здиференціювавши другу з рівностей (5.93):

$$y + \Pi'(f(y))f'(y) = 0 \Rightarrow f'(0) = -y/\Pi'(f(y))|_{y=0} = 0.$$

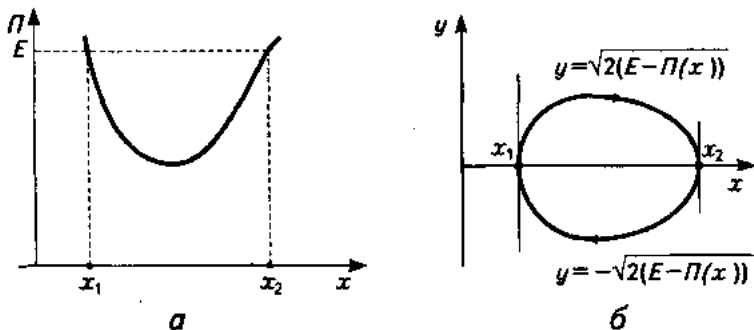


Рис. 5.13

Аналогічний висновок можна зробити про характер множини  $M_E$  в околі точки  $(x_2, 0)$ .

Таким чином, об'єднання графіків функцій (5.92) на відрізку  $[x_1, x_2]$  утворює одну регулярну замкнену криву (рис. 5.13, б).

Покажемо, що у випадку 1.1 частинка здійснює періодичні коливання, і знайдемо їх період. Оскільки точки  $(x(t), y(t))$  при всіх  $t \in I$  належать замкненій кривій  $\Gamma(x_0, y_0)$ , то з урахуванням твердження 5.4 маємо  $I = \mathbb{R}$ . Зазначена крива не містить положень рівноваги. Тому модуль швидкості руху фазової точки по  $\Gamma(x_0, y_0)$  обмежений знизу додатною величиною  $v_0$ :

$$\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \sqrt{y^2(t) + |\Pi'(x(t))|^2} \geq v_0 > 0.$$

Як наслідок фазова точка обходить криву  $\Gamma(x_0, y_0)$  за скінченний час. Отже, ця точка здійснює періодичні рухи з деяким найменшим додатним періодом  $\theta = \theta(E)$  (твердження 5.12). Обчислимо  $\theta$ .

Нехай у момент часу  $t = 0$  фазова точка має координати  $(x_0, y_0) = (x_1, 0)$ . Позначимо через  $T$  час, за який фазова точка вперше після початку руху досягає положення  $(x_2, 0)$ . Оскільки  $\dot{x}(0) = -\Pi'(x_1) > 0$ , то на часовому інтервалі  $(0, T)$  вона знаходиться у верхній півплощині ( $\dot{x}(t) > 0$ ). З урахуванням (5.90) маємо

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2|E - \Pi(x(t))|}, \quad t \in [0, T] \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{2|E - \Pi(x(t))|}} = 1, \quad t \in (0, T).$$

Інтегрувавши останню рівність у межах від  $s$  до  $t$ , дістанемо

$$\int_{x(s)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2|E - \Pi(x)|}} = t - s \quad \forall t \in (0, T), \quad \forall s \in (0, t).$$

У лівій частині цієї рівності фігурує час, за який фазова точка переміщується з положення  $(x(s), y(s))$  у положення  $(x(t), y(t))$ . Перейшовши до границі при  $s \rightarrow +0, t \rightarrow T - 0$ , знайдемо

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2|E - \Pi(x)|}}.$$

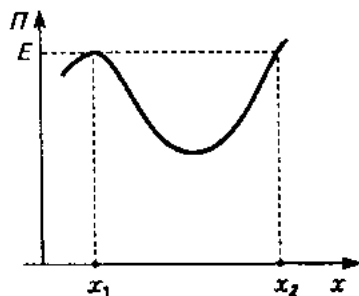
Водночас ми обґрунтували збіжність невласного інтеграла в правій частині цієї рівності.

Легко бачити, що за той самий час  $T$  фазова точка потрапить із положення  $(x_2, 0)$  у  $(x_1, 0)$ , рухаючися по дузі кривої  $\Gamma(x_0, y_0)$ , яка лежить у нижній півплощині. Отже, шуканий найменший додатний період руху по  $\Gamma(x_0, y_0)$  становить

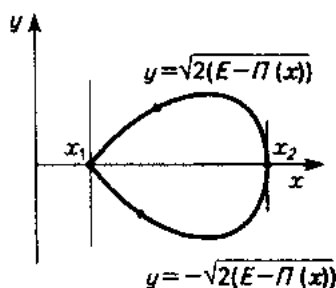
$$0(E) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2|E - \Pi(x)|}} \quad (5.94)$$

Кажуть, що у випадку 1.1 частинка рухається в потенціальній ямі. Переміщення точки  $(x(t), \Pi(x(t)))$  у площині  $xOP$  справді нагадує рух кульки по абсолютно гладкій поверхні плоскої ями, яка має форму графіка потенціальної енергії на відрізку  $[x_1, x_2]$ . Якщо в початковий момент кулька знаходиться в точці з координатами  $(x_1, \Pi(x_1))$  ( $\Pi(x_1) = E$ ) і має нульову швидкість, то в процесі скочування в яму її потенціальна енергія зменшується, а кінетична — зростає. Остання набуває максимального значення, коли потенціальна енергія досягає мінімуму. В цей момент кулька має найбільшу швидкість. Далі відбувається зворотний процес перетворення кінетичної енергії на потенціальну. Абсциса кульки продовжує зростати, поки не досягне значення  $x_2$ . В цей момент швидкість кульки стає нульовою, а потенціальна енергія набуває початкового значення  $E$ . Далі кулька знову починає скорочуватися в яму й через деякий час повертається в початкове положення.

*Випадок 1.2.* Припустимо для визначеності, що критичною точкою потенціальної енергії є  $x_1$ . Тоді  $\Pi(x_1) = \Pi(x_2) = E$ ,  $\Pi'(x_1) = 0$ ,  $\Pi'(x_2) > 0$  і  $\Pi(x) < E$  при  $x \in (x_1, x_2)$  (рис. 5.14, а). У даному випадку



а



б

Рис. 5.14



фазова крива, відмінна від положення рівноваги, є лінією рівня, яка утворюється «склеюванням» графіків функцій (5.92) на проміжку  $(x_1, x_2]$ . Вона виходить із положення рівноваги  $(x_1, 0)$  у верхню півплощину, проходить через точку  $(x_2, 0)$ , маючи в ній вертикальну дотичну, переходить у нижню півплощину й знову повертається в точку  $(x_1, 0)$  (рис. 5.14, б). Траєкторія точки  $(x_2, 0)$  має двобічно-асимптотичний характер: вона входить у  $(x_1, 0)$  як при  $t \rightarrow -\infty$ , так і при  $t \rightarrow +\infty$ . Через це таку фазову криву називають *гомоклінною*, або *петлею сепаратиси*.

**Випадок 1.3** характеризується умовами  $\Pi(x_1) = \Pi(x_2) = E$ ,  $\Pi'(x_1) = \Pi'(x_2) = 0$  і  $\Pi(x) < E$  при  $x \in (x_1, x_2)$  (рис. 5.15, а). Маємо пару ліній рівня, кожна з яких сполучає пару положень рівноваги  $(x_1, 0)$  та  $(x_2, 0)$

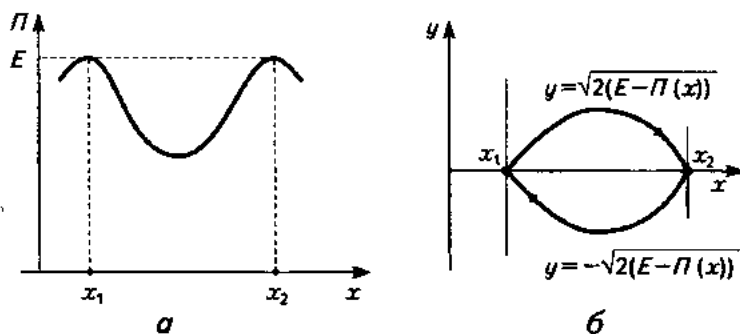


Рис. 5.15

(рис. 5.15, б). Траєкторія точки, відмінної від положення рівноваги, яка належить такій лінії рівня, є двоякоасимптотичною сепаратрисою:

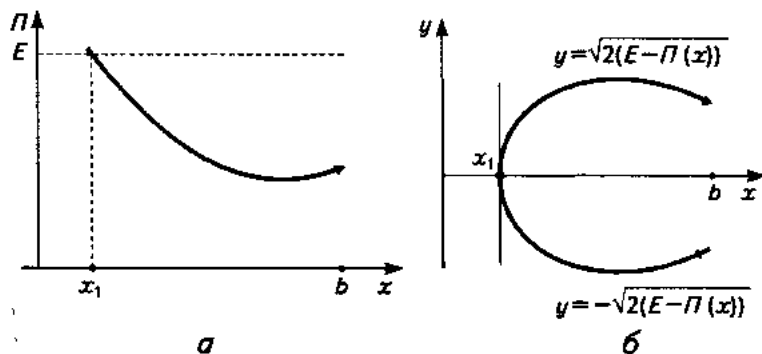


Рис. 5.16

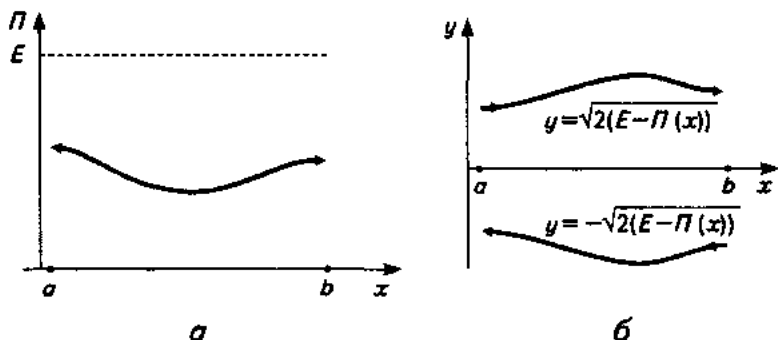


Рис. 5.17

при  $t \rightarrow -\infty$  вона входить в одне, а при  $t \rightarrow +\infty$  — в інше положення рівноваги. Звідси ще одна її назва: *гетероклінна крива*.

**Випадок 2.1.** Для визначеності вважаємо, що  $x_1 \in (a, b)$ ,  $x_2 = b$ . Тоді  $P(x_1) = E$ ,  $P'(x_1) < 0$  і  $P(x) < E$  для всіх  $x \in (x_1, b)$  (рис. 5.16, а). Лінія рівня, яка проходить через точку  $(x_1, 0)$ , є незамкненою регулярною кривою й утворюється «склеюванням» графіків функцій (5.92) на проміжку  $[x_1, b)$  (рис. 5.16, б). За цих умов частинка, яка стартує з точки  $x_0 > x_1$  з від'ємною швидкістю, спочатку досягає точки  $x_1$ , а потім змінює напрям руху на протилежний.

**Випадок 2.2.** Припустимо для визначеності, що  $x_1 \in (a, b)$ ,  $x_2 = b$ . Тоді  $P(x_1) = E$ ,  $P'(x_1) = 0$  і  $P(x) < E$  для всіх  $x \in (x_1, b)$ . Відповідні фазові криві, відмінні від положення рівноваги, — графіки функцій (5.92) на інтервалі  $(x_1, b)$ . Рух на кожній із цих кривих має однібічно-асимптотичний характер (який саме?).

**Випадок 3.** Лінії рівня є графіками функцій (5.92), кожна з яких визначена на всьому проміжку  $J$  (рис. 5.17). Рух частинки відбувається в одному напрямі й визначається знаком початкової швидкості.

### 5.8.3. Лінії рівня повної енергії в околі її стаціонарних точок

Надалі без обмеження загальності міркувань розглядатимемо випадок, коли стаціонарною точкою потенціальної енергії є точка  $x = 0$  і при цьому  $P(0) = 0$ .

### ➔ Означення 5.22

Стационарну точку потенціальної енергії називають невідродженою, якщо  $\Pi''(0) \neq 0$ .

В околі невідродженої стаціонарної точки маємо асимптотичну формулу

$$\Pi(x) = \frac{\Pi''(0)x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Природно висловити припущення, що в околі початку координат лінії рівня функції  $\mathcal{E}(x, y)$  і спрощеної функції  $\bar{\mathcal{E}}(x, y) := \frac{y^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$ ,  $k := \Pi''(0)$  поводять себе аналогічно.

За умови, що  $k \neq 0$ , маємо таких два основних типи ліній рівня спрощеної функції:

- якщо  $k > 0$ , то при кожному значенні  $E > 0$  рівняння  $\bar{\mathcal{E}}(x, y) = E$  визначає еліпс (рис. 5.18, а).
- якщо  $k < 0$ , то при кожному значенні  $E \neq 0$  рівняння  $\bar{\mathcal{E}}(x, y) = E$  визначає дві вітки гіперболи, а при  $E = 0$  — пару асимптот  $y = \pm kx$  (рис. 5.18, б).

Зауважимо, що при  $k > 0$  точка  $x = 0$  є точкою локального максимуму, а при  $k < 0$  — точкою локального мінімуму потенціальної енергії.

Обґрунтувати висловлене вище припущення щодо однакового якісного характеру ліній рівня функцій  $\mathcal{E}(x, y)$  та  $\bar{\mathcal{E}}(x, y)$  дає змогу таке твердження.

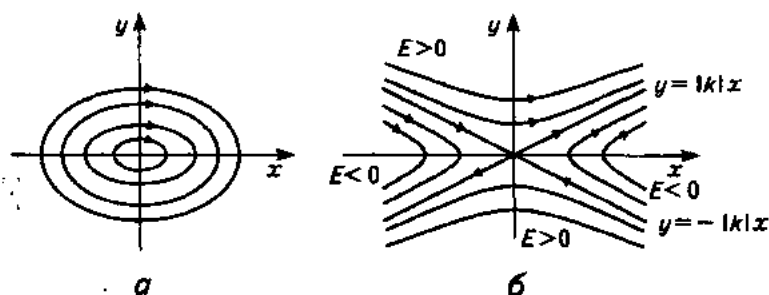


Рис. 5.18

**Лема 5.5. (Морса)**

Нехай виконуються умови

$$\Pi(x) \in C^2((-a, a) \mapsto \mathbb{R}), \quad \Pi(0) = 0, \quad \Pi'(0) = 0, \quad \Pi''(0) \neq 0.$$

Тоді при деякому  $\eta \in (0, a)$  існує функція  $\varphi(x) \in C^1((-\eta, \eta) \mapsto (-a, a))$ , яка задовольняє такі умови: 1)  $\varphi(x) = x + o(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ ;  
2)  $\Pi(\varphi(x)) = \frac{kx^2}{2}$ .

**Доведення**

Спочатку рівняння  $\frac{kx^2}{2} = \Pi(z)$  розв'яжемо відносно  $x$ :

$$x = \operatorname{sign} z \sqrt{\frac{2\Pi(z)}{k}} := f(z).$$

Зауважимо, що підкореневий вираз у правій частині при досить малому  $h \in (0, a)$  і всіх  $z \in (-h, h) \setminus \{0\}$  набуває лише додатних значень, адже  $2\Pi(z)/k = 2\Pi(z)/\Pi''(0) = z^2 + o(z^2)$ ,  $z \rightarrow 0$ . Показавши, що в деякому околі точки  $z = 0$  функція  $f(z)$  має неперервно диференційовну обернену, покладемо  $\varphi(x) = f^{-1}(x)$ , і лему буде доведено.

Функція  $f(z)$  неперервна на  $(-h, h)$  і має неперервну похідну на кожному з інтервалів  $(-h, 0)$ ,  $(0, h)$ :

$$f'(z) = \operatorname{sign} z \frac{\Pi'(z)}{k\sqrt{2\Pi(z)/k}} = \operatorname{sign} z \frac{\Pi'(0)z + o(z)}{k\sqrt{z^2 + o(z^2)}} = 1 + o(1), \quad z \rightarrow 0.$$

Звідси випливає, що функція  $f(z)$  має похідну й у точці 0:

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} f'(z) = 1.$$

Таким чином,  $f(z) \in C^1((-h, h) \mapsto \mathbb{R})$ . Отже, на деякому інтервалі  $(-\eta, \eta)$  існує обернена функція  $\varphi(x) = f^{-1}(x) \in C^1((-\eta, \eta) \mapsto (-h, h))$ . При цьому  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = 1$ .

З доведеної леми випливає, що заміна змінної (дифеоморфізм)  $x \mapsto \varphi(x)$  в околі нуля перетворює функцію  $\Pi(x)$  на функцію  $kx^2/2$ .

Таким чином, малою деформацією околу початку координат лінії рівня функції  $\mathcal{E}(x, y)$  можна перевести в лінії рівня функції  $\bar{\mathcal{E}}(x, y)$ . А це означає, що положення рівноваги  $(x_*, 0)$ , де  $x_*$  — невироджена стаціонарна точка потенціальної енергії, є центром, якщо в точці  $x_*$  функція  $\Pi(x)$  досягає (локального) мінімуму, і сідлом, якщо  $x_*$  — точка (локального) максимуму для  $\Pi(x)$ .

#### 5.8.4. Побудова фазового портрета консервативної системи за графіком потенціальної енергії

На підставі наведеного вище аналізу за одним лише графіком потенціальної енергії можна дістати досить повне уявлення про фазовий портрет системи (5.91) в цілому. Для цього потрібно: 1) знайти стаціонарні точки, точки мінімумів і максимумів функції  $\Pi(x)$ ; 2) зобразити на фазовій площині положення рівноваги, які відповідають цим точкам; 3) визначити значення потенціальної енергії в її стаціонарних точках (так звані критичні значення енергії) і побудувати відповідні сепаратриси (гомо- й гетероклініні криві); 4) побудувати фазові криві в областях, обмежених сепаратрисами (рис. 5.19).

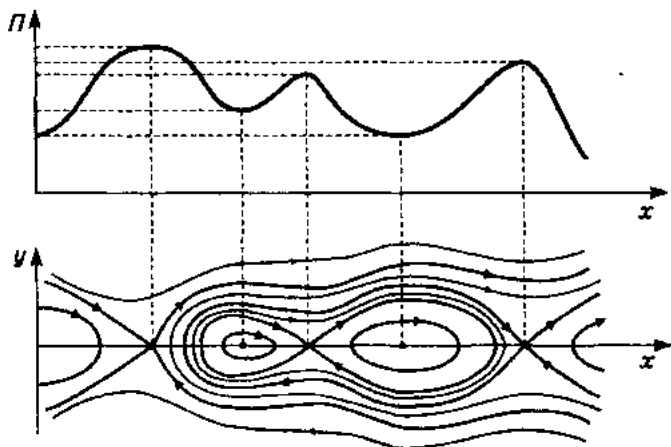


Рис. 5.19



Рис. 5.20

## □ Приклад 5.11

Дослідимо коливання плоского математичного маятника — матеріальної точки масою  $m$ , прикріпленої до абсолютно твердого стержня, який може обертатись у вертикальній площині навколо точки  $O$  (рис. 5.20). Якщо нехтувати вагою стержня, силами тертя й опором середовища, то закон, за яким змінюється в часі кут  $x$  відхилення стержня від вертикалі  $OA$ , опишеться диференціальним рівнянням

$$m\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0, \quad (5.95)$$

де  $g$  — прискорення вільного падіння;  $l$  — довжина стержня.

Без обмеження загальності міркувань надалі розглядаємо випадок, коли  $\frac{g}{ml} = 1$  (цього завжди можна досягти зміною масштабу часу). Рівняння  $\ddot{x} + \sin x = 0$  описує рух частинки по прямій у потенціальному періодичному полі з потенціальною енергією  $\Pi(x) = -\cos x$  (рис. 5.21, а). Екстремальними точками цієї функції є  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (точки мінімумів) і  $(2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (точки максимумів). Для значень енергії  $|E| < 1$  реалізується випадок 1.1 — рух у потенціальній ямі. Критичним рівням енергії  $E = 1$  відповідають гетероклініні криві випадку 1.3. Випадок 3 маємо при  $E > 1$ .

Фазовий портрет у смужці  $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$  зображено на рис. 5.21, б (через періодичність функції  $\Pi(x)$  така сама картина спостерігатиметься й у будь-якій смужці  $[2k\pi, (2k+1)\pi] \times \mathbb{R}$ ).

Точки  $x = 0$  відповідає нижнє стійке положення рівноваги, а точки  $x = \pi$  — верхнє нестійке. Маятник з енергією  $|E| < 1$  здійснює періодичні коливання, не піднімаючися до верхнього положення рівноваги. Період коливань маятника знаходимо з формули (5.94):

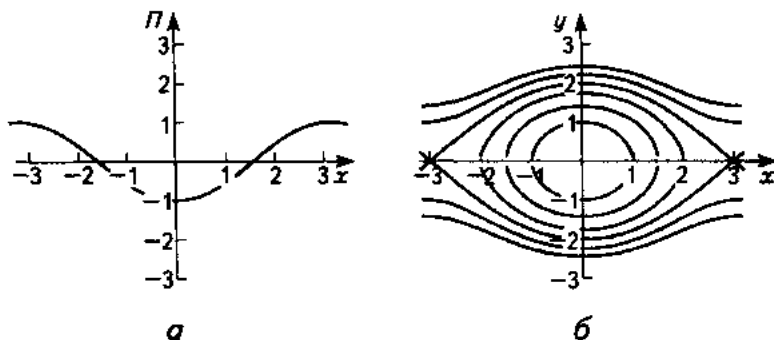


Рис. 5.21

$$\Theta(E) = \sqrt{2} \int_{\varphi}^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos \varphi}} = 2 \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2(\varphi/2) - \sin^2(x/2)}},$$

де  $\varphi$  — максимальний кут відхилення маятника від вертикалі;  $E = -\cos \varphi$ . Можна показати, що при малих  $\varphi$  залежність періоду від амплітуди коливань має вигляд

$$\Theta(E) = 2\pi \left( 1 + \frac{\varphi^2}{16} + \dots \right).$$

Якщо енергія маятника  $E = 1$ , а швидкість ненульова, то він асимптотично піднімається до верхнього положення рівноваги. Такий рух маятника практично не спостерігається, але теоретично існує. Нарешті, маятник з енергією  $E > 1$  здійснює обертальні рухи навколо точки  $O$ .

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Побудувати фазові портрети систем з одним ступенем вільності:

а)  $\ddot{x} = x^3 - x$ ;      б)  $\ddot{x} = x - x^3$ .

З'ясувати питання про існування гомо- та гетероклінічних кривих.

- ② У моделі Кеплера сонячної системи маса кожної планети (комети) вважається нескінченно малою порівняно з масою Сонця. Виявляється, в цьому випадку відстань планети від Сонця змінюється з часом так, як координата  $x$  у консервативній системі з одним ступенем вільності й потенціальною енергією  $\Pi(x) = k/x^2 - 1/x$ , де  $k$  — додатна стала. Побудувати фазовий портрет такої системи; дати інтерпретацію різних типів траєкторій у термінах вихідної моделі.

- ③ Побудувати фазовий портрет системи

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + \sin(x + y), \\ \dot{y} = x - y - \sin(x + y). \end{cases}$$

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З КІЛЬКОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

### 6.1

#### Рівняння з частинними похідними першого порядку

Рівнянням із частинними похідними першого порядку називається диференціальне рівняння вигляду

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (6.1)$$

в якому  $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) \in C(G \mapsto \mathbb{R})$ , де  $G$  — деяка область у  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Це рівняння ми будемо записувати також у компактнішому вигляді:  $F(x, u, \text{grad } u) = 0$ .

Розв'язком рівняння (6.1) в області  $D \in \mathbb{R}^n$  називається функція  $u(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  така, що  $(x, u(x), \text{grad } u(x)) \in G$  і  $F(x, u(x), \text{grad } u(x)) = 0$  для всіх  $x \in D$ .

Відшукування розв'язків рівняння (6.1) можна звести до інтегрування деякої системи звичайних диференціальних рівнянь — так званої системи характеристик. Саме тому зазначене рівняння природно розглядати в курсі звичайних диференціальних рівнянь.



### 6.1.1. Лінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку

Лінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку має вигляд

$$f_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (6.2)$$

де  $f_i(x) \in C(D \mapsto \mathbb{R})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — задані функції,  $D$  — область у  $\mathbb{R}^n$ .

Будемо припускати, що  $\sum_{i=1}^n |f_i(x)| \neq 0$  при всіх  $x \in D$ .

Запровадивши вектор-функцію  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ , рівняння (6.2) можна записати в компактному вигляді:  $\langle f(x), \text{grad } u \rangle = 0$ . З аналітичного критерію автономного інтеграла автономної системи (див. п. 4.3.5) негайно випливає таке твердження.

#### Теорема 6.1

Функція  $u(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  є розв'язком рівняння (6.2) тоді й лише тоді, коли вона є першим інтегралом автономної системи

$$\dot{x} = f(x) \quad (6.3)$$

або, що одне й те саме, першим інтегралом системи в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x)}. \quad (6.4)$$

#### Означення 6.1

Автономну систему (6.3) [систему в симетричній формі (6.4)] називають системою характеристик рівняння (6.2), а її фазові криві (відповідно інтегральні криві) називають характеристиками цього рівняння.

Надалі припускаємо, що кожен розв'язок системи (6.3) має власність єдиності.

Нехай  $U_1(x), \dots, U_{n-1}(x)$  — повний набір перших інтегралів системи (6.4) і

$$\mathcal{U} := \{(u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (u_1, \dots, u_{n-1}) = (U_1(x), \dots, U_{n-1}(x)), x \in D\}$$

— область значень відображення, яке кожній точці  $x \in D$  ставить у відповідність точку  $(U_1(x), \dots, U_{n-1}(x)) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Скориставшись теоремою про неявну функцію, можна довести, що  $\mathcal{U}$  — відкрита множина в  $\mathbb{R}^{n-1}$  (перевірте!).

Довільна функція  $\Phi(u_1, \dots, u_{n-1}) \in C^1(\mathcal{U} \mapsto \mathbb{R})$  породжує перший інтеграл

$$u(x) = \Phi(U_1(x), \dots, U_{n-1}(x)) \quad (6.5)$$

системи (6.4). Справді, оскільки кожна функція  $U_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) перетворюється в сталу вздовж довільної інтегральної кривої системи (6.4), то таку саму властивість має й функція (6.5). Із теореми 6.1 тепер випливає, що  $u(x)$  — розв'язок рівняння (6.2).

Навпаки, в п. 4.3.4 було показано, що будь-який перший інтеграл системи (6.4), принаймні локально, є функцією від  $U_1(x), \dots, U_{n-1}(x)$ . Тому формулу (6.5) називають *загальним розв'язком рівняння (6.2)*.

#### □ Приклад 6.1

*Розглянемо рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Запишемо систему характеристик:  $dt = dx/a$ . Її перший інтеграл  $U(t, x) = x - at$ . Загальний розв'язок рівняння:  $u = \Phi(x - at)$ , де  $\Phi: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  — довільна неперервно диференційовна функція.

Для кожної фіксованої функції  $\varphi(x) \in C^1(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$  розв'язок  $u = \varphi(x - at)$  являє собою так звану *біжучу хвилю*. Графік функції  $\varphi$  задає профіль хвилі, який зі зростанням часу  $t$  переміщається в площині  $(x, u)$  вздовж осі  $Ox$  зі швидкістю  $a$  (вправо при  $a > 0$  і вліво при  $a < 0$ ), не змінюючи своєї форми. З розв'язками такого типу ми вже зустрічалися в п. 4.2.5.

#### □ Приклад 6.2

*Знайдемо рівняння поверхонь у  $\mathbb{R}^3$ , кожна з яких перетинає сім'ю сфер, заданих у стандартних координатах  $(x, y, z)$  рівняннями  $x^2 + y^2 + z^2 = c$ , під прямим кутом ( $c > 0$  — параметр сім'ї).*

Дві поверхні у спільній точці ортогональні тоді й лише тоді, коли їхні нормалі в цій точці ортогональні. Шукану поверхню задамо рівнянням  $u(x, y, z) = 0$ , де  $u(x, y, z)$  — поки що невідома функція. Вектор

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$  ортогональний до цієї поверхні в точці  $(x, y, z)$ , а радіус-вектор  $r = (x, y, z)$  є нормаллю до сфери, центр якої знаходиться в початку координат і яка проходить через точку  $(x, y, z)$ . Умова ортогональності вказаних векторів (рівність нулю їх скалярного добутку) має вигляд диференціального рівняння

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Запишемо відповідну систему характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \neq 0.$$

Повний набір її перших інтегралів у кожному з півпросторів  $x > 0$  та  $x < 0$  має вигляд  $U_1(x, y, z) = y/x$ ,  $U_2(x, y, z) = z/x$ . Для кожної неперервно диференційовної функції  $\Phi(u_1, u_2)$  поверхня, задана рівнянням

$$\Phi(y/x, z/x) = 0,$$

є шуканою. Звичайно, при цьому від функції  $\Phi$  потрібно вимагати виконання відповідних умов невідродженості.

Відзначимо, що в околі площини  $x = 0$  з виколотим початком координат за перші інтеграли слід брати функції  $U_1(x, y, z) = x/z$ ,  $U_2(x, y, z) = y/z$ .

### 6.1.2. Квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку

**Квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку має вигляд**

$$f_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = g(x, u). \quad (6.6)$$

де  $f_i(x, u) \in C(G \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $g(x, u) \in C(G \rightarrow \mathbb{R})$  — задані функції в області  $G \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Будемо припускати, що  $\sum_{i=1}^n |f_i(x, u)| + |g(x, u)| \neq 0$  при всіх  $(x, u) \in G$ .

Метод розв'язання рівняння (6.6) впливає з таких міркувань. Нехай  $u(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  — розв'язок цього рівняння в деякій області  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$\sum_{i=1}^n f_i(x, u(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - g(x, u(x)) = 0 \quad \forall x \in D. \quad (6.7)$$

При кожному  $x \in D$  ліва частина цієї тотожності є скалярним добутком векторів

$$\tau(x) := (f_1(x, u), \dots, f_n(x, u), g(x, u)) \Big|_{u=u(x)}$$

та

$$v(x) := \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}, -1 \right).$$

Як відомо, при кожному  $x \in D$  вектор  $v(x)$  є ортогональним до графіка функції  $u(x)$ , тобто до гіперповерхні, заданої в  $\mathbb{R}^{n+1}$  рівнянням  $F(x, u) := u(x) - u = 0$ . Адже  $\text{grad } F(x, u) \equiv v(x)$ . Але в такому разі тотожність (6.7) означає, що вектор  $\tau(x)$  дотикається цієї поверхні. Отже, справджується таке твердження.

### Твердження 6.1

Функція  $u(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$ , графік якої лежить в області  $G$ , є розв'язком рівняння (6.6) тоді й лише тоді, коли векторне поле

$$(f, g) := (f_1(x, u), \dots, f_n(x, u), g(x, u))$$

дотикається гіперповерхні  $u = u(x)$  у кожній її точці.

Векторне поле  $(f, g)$  природно породжує автономну систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{u} = g(x, u), \quad (6.8)$$

а також систему в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{f_1(x, u)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x, u)} = \frac{du}{g(x, u)}. \quad (6.9)$$

Надалі припускаємо, що кожен розв'язок системи (6.8) має властивість єдиності.

## Означення 6.2

Систему (6.8) [або (6.9)] називають системою характеристик рівняння (6.6), а її фазові криві (відповідно інтегральні криві) — характеристиками цього рівняння.

Нагадаємо, що множина  $M \subset G$  називається інтегральною множиною системи (6.9), якщо ця множина разом із кожною точкою  $x \in M$  містить інтегральну криву, яка проходить через точку  $x$ . Така множина є інваріантною відносно автономної системи (6.8) (див. п. 5.7), оскільки фазові криві останньої збігаються з інтегральними кривими системи (6.9). У подальшому ми розглядатимемо інтегральні (інваріантні) множини, які мають структуру поверхонь. Під  $m$ -вимірною поверхнею в просторі  $\mathbb{R}^N$  ми розуміємо образ взаємно однозначного неперервно диференційовного невиродженого відображення, яке діє з деякої області простору  $\mathbb{R}^m$  у простір  $\mathbb{R}^N$  (див. дод. 2);  $(N-1)$ -вимірною поверхнею в  $\mathbb{R}^N$  називається гіперповерхнею. Поверхня, яка водночас є інтегральною множиною, називається інтегральною поверхнею.

Зауважимо, що означення інтегральної множини (поверхні) можна деталізувати, ввівши поняття глобальної та локальної інтегральних поверхонь. Глобальна інтегральна множина (поверхня) разом із кожною своєю точкою повинна містити неперодовжану інтегральну криву, яка через цю точку проходить. В означенні локальної інтегральної множини (поверхні) вимога неперодовжаності інтегральної кривої відсутня. Надалі терміном «інтегральна поверхня» позначатимемо, як правило, локальну інтегральну поверхню.

Зв'язок між розв'язками рівняння (6.6) та інтегральними поверхнями системи (6.9) встановлює така теорема.

### Теорема 6.2

Функція  $u(x) \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$  тоді й лише тоді є розв'язком рівняння (6.6), коли її графік є інтегральною поверхнею системи характеристик (6.9).

### Доведення

**Достатність.** Якщо графік функції  $u(x) \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$  є інтегральною поверхнею, то через кожну його точку проходить інтегральна крива системи (6.9), яка цьому графікові належить. Векторне поле  $(f, g)$  дотикається інтегральних кривих системи (6.9), а

отже, й графіка функції  $u(x)$ . Тому з огляду на твердження 6.1 ця функція є розв'язком рівняння (6.6).

**Необхідність.** Нехай  $u(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  — розв'язок рівняння (6.6). Візьмемо довільну точку  $(x_0, u_0)$ ,  $x_0 \in D$ ,  $u_0 = u(x_0)$  графіка функції  $u(x)$  і покажемо, що через цю точку проходить характеристика, яка лежить на поверхні  $u = u(x)$ . Для цього розглянемо криву  $C(x_0, u_0)$ , задану рівняннями  $x = x(t)$ ,  $u = u(x(t))$ ,  $t \in I$ , де  $x(t)$ ,  $t \in I$  — непродовжуваний розв'язок задачі Коші

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad x|_{t=0} = x_0. \quad (6.10)$$

Ця крива лежить на поверхні  $u = u(x)$  і проходить через точку  $(x_0, u_0)$ . Якщо взяти до уваги (6.7) і (6.10), то дістанемо рівності

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t))),$$

$$\begin{aligned} \frac{du(x(t))}{dt} &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \bigg|_{x=x(t)} \dot{x}_i(t) \equiv \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \right] \bigg|_{x=x(t)} \equiv \\ &\equiv g(x(t), u(x(t))). \end{aligned}$$

Із цих тотожностей випливає, що  $C(x_0, u_0)$  є фазовою кривою системи (6.8), тобто характеристикою рівняння (6.6). Таким чином, графік розв'язку цього рівняння є інтегральною поверхнею системи характеристик (6.9).

### ❶ Наслідок 6.1

Нехай функція  $V(x, u) \in C^1(G \mapsto \mathbb{R})$  є першим інтегралом системи характеристик (6.9) і  $(x_0, u_0) \in G$  — довільна точка, в якій  $V'_u(x_0, u_0) \neq 0$ . Тоді, *принаймні в деякому околі*  $B(x_0) \subset \mathbb{R}^n$  *точки*  $x_0$ , *співвідношення*

$$V(x, u) = V(x_0, u_0)$$

*визначає в неявному вигляді розв'язок*  $u = u(x) \in C^1(B(x_0) \mapsto \mathbb{R})$  *рівняння (6.6) такий, що*  $u(x_0) = u_0$ .

Справді, непорожня множина рівня першого інтеграла  $V(x, u)$  системи (6.9) є її інтегральною множиною (див. п. 4.3.2), а за теоремою про неявну функцію (див. дод. 2) в околі точки  $(x_0, u_0)$  ця множина є графіком функції  $u(x) \in C^1(B(x_0) \mapsto \mathbb{R})$ .

Із наслідку 6.1 випливає таке *правило розв'язання рівняння* (6.6):

- виписуємо за коефіцієнтами рівняння (6.6) систему характеристик (6.9);
- знаходимо повний набір її перших інтегралів  $V_1(x, u), \dots, V_n(x, u)$ ;
- записуємо співвідношення

$$\boxed{V(x, u) := \Phi(V_1(x, u), \dots, V_n(x, u)) = 0}, \quad (6.11)$$

де  $\Phi(v_1, \dots, v_n) \in C^1(V \mapsto \mathbb{R})$  — довільна функція, яка задовольняє рівність (6.11) і для якої  $V_n'(x, u) \neq 0$  у кожній точці  $(x, u) \in G$ , а  $V$  — область значень відображення  $G \ni (x, u) \mapsto (V_1(x, u), \dots, V_n(x, u)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ; при цьому додатково вимагаємо, щоб  $V(x, u)$  перетворювалася в нуль хоча б в одній точці множини  $V$ ;

- оскільки функція  $V(x, u)$  є першим інтегралом системи (6.9), то неявна функція  $u(x)$ , визначена співвідношенням (6.11), є розв'язком рівняння (6.6).

У п. 6.1.4 буде показано, що довільний розв'язок рівняння (6.6), принаймні локально, можна неявно задати у вигляді (6.11) за відповідного вибору функції  $\Phi$ . Тому формулу (6.11) називають *загальним розв'язком рівняння* (6.6).

#### ◆ Зауваження 6.1

Якщо лінійне однорідне рівняння (6.2) розглядати як квазілінійне, то відповідна система характеристик матиме вигляд

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x)} = \frac{du}{0}.$$

Ця система має очевидний перший інтеграл  $u = c$ , а повний набір її перших інтегралів утворюють функції  $V_i(x, u) = U_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $V_n(x, u) = u$ , де  $\{U_i(x)\}_{i=1, \dots, n-1}$  — повний набір перших інтегралів системи (6.4).

#### □ Приклад 6.3

*Знайдемо рівняння поверхні, яка має таку властивість: відстань довільної точки  $p$  поверхні до осі апікат дорівнює довжині відрізка, що відтинає на цій осі площина, дотична до поверхні в точці  $p$ .*

Шукану поверхню задамо рівнянням  $z = z(x, y)$ . Рівняння дотичної площини в точці поверхні  $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$  має вигляд

$$z = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + z(x_0, y_0).$$

Поклавши тут  $x = 0$ ,  $y = 0$ , знайдемо довжину  $d(x_0, y_0)$  відрізка, що його відтинає від осі аплікату ця площина:

$$d(x_0, y_0) = \left| \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} x_0 + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} y_0 - z(x_0, y_0) \right|.$$

Але за умовою задачі  $d(x_0, y_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ . Отже, диференціальне рівняння шуканої поверхні можна подати у вигляді

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z \pm \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (6.12)$$

Запишемо рівняння характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z \pm \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Із першого рівняння цієї системи знаходимо перший інтеграл  $V_1 = x/y$ .

Для відшукання ще одного першого інтеграла утворимо інтегровну комбінацію

$$\frac{x dx + y dy}{x \cdot x + y \cdot y} = \frac{dz}{z \pm \sqrt{x^2 + y^2}} \Leftrightarrow \frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{z \pm \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Звідси

$$d \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{dz}{z \pm \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Покладемо тут  $\sqrt{x^2 + y^2} = e^v$ . Дістанемо лінійне рівняння відносно  $z$ :

$$\frac{dz}{dv} = z \pm e^v.$$

Зінтегрувавши його за методом невизначених коефіцієнтів, знайдемо загальний розв'язок  $z = ce^v \pm ve^v$  і перший інтеграл  $\frac{z \pm ve^v}{e^v}$ , який породжує ще один перший інтеграл системи характеристик:



$$V_2 = \frac{z \pm \sqrt{x^2 + y^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Отже, шукана функція  $z(x, y)$  визначається в неявному вигляді рівнянням

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{z \pm \sqrt{x^2 + y^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = 0.$$

Тут функція  $\Phi(v_1, v_2) \in C^1(\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R})$  має бути такою, щоб рівняння  $\Phi(v_1, v_2) = 0$  можна було розв'язати відносно  $v_2$ :  $v_2 = f(v_1)$ . За цієї умови дістаємо розв'язок диференціального рівняння (6.12) в явному вигляді:

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} f\left(\frac{x}{y}\right).$$

У цій формулі за  $f$  можна брати довільну неперервно диференційовну функцію.

### 6.1.3. Задача Коші

Повернемося до прикладу 6.1. Задаючи профіль біжучої хвилі у вигляді графіка функції  $\varphi(x) \in C^1(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ , ми водночас з усієї множини розв'язків рівняння виділяли той, що задовольняє умову  $u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x)$ . Умову такого типу природно називати початковою. Неважко в цій ситуації помітити аналогію із задачею Коші для звичайного диференціального рівняння. Однак, якщо для останнього початкове значення розв'язку — це точка скінченновимірного простору, то для рівняння з частинними похідними в початковій умові фігурує функція — елемент нескінченновимірного простору [в нашому випадку — простору  $C^1(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ ].

Початковій умові з прикладу 6.1 можна дати також геометричне тлумачення. А саме, в тривимірному просторі з координатами  $(t, x, u)$  задамо плоску криву рівняннями  $t = 0, u = \varphi(x)$ . Тоді знайдений розв'язок  $u = \varphi(x - at)$  однозначно виділяється серед інших тим, що його графік проходить через зазначену криву.

Відштовхуючися від цього спостереження, у випадку рівняння з двома незалежними змінними

$$f_1(x_1, x_2, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} = g(x_1, x_2, u), \quad (6.13)$$

визначеного в області  $G \subseteq \mathbb{R}^3$ , природно поставити задачу відшукування такого розв'язку  $u(x, y)$ , графік якого проходив би через наперед задану криву  $\Gamma$  (у загальному випадку неплоску), розташовану в області  $G$ . Це й є загальна постановка задачі Коші для рівняння (6.13).

Теорема 6.2 вказує наочний геометричний спосіб побудови розв'язку сформульованої задачі. А саме: випустимо з кожної точки кривої  $\Gamma$  інтегральну криву системи характеристик

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, u)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, u)} = \frac{du}{g(x_1, x_2, u)}.$$

У такий спосіб буде утворено інтегральну поверхню, яка проходить через криву  $\Gamma$  (рис. 6.1). Тепер залишається тільки показати, що ця поверхня, принаймні в деякому околі кривої  $\Gamma$ , є графіком неперервно диференційовної функції  $u(x_1, x_2)$ . З урахуванням теореми 6.2 функція  $u(x_1, x_2)$  буде шуканим розв'язком задачі Коші.

Після цих попередніх міркувань поставимо задачу Коші для квазілінійного (зокрема, лінійного) рівняння з частинними похідними першого порядку в загальному випадку.

**Задача Коші:** для заданої  $(n - 1)$ -вимірної поверхні

$$\Gamma: \mathbf{x} = \xi(s), \quad u = \varphi(s), \quad s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathcal{D}, \quad (6.14)$$

розташованої в області  $G$ , знайти розв'язок  $u(x)$  рівняння (6.6), який задовольняв би початкову умову

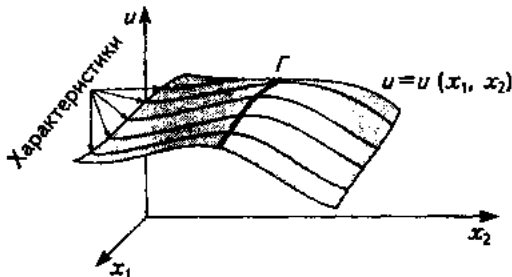


Рис. 6.1

$$u(\xi(s)) = \varphi(s) \quad \forall s \in \mathcal{D},$$

тобто розв'язок, графік якого проходить би через поверхню  $\Gamma$ .

І ут  $\mathcal{D}$  — область у  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\xi(s) \in C^1(\mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi(s) \in C^1(\mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^n)$ . Усюди надалі будемо припускати, що відображення  $\xi: \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^n$  взаємно однозначне й вектори

$$\frac{\partial \xi(s)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \xi(s)}{\partial s_{n-1}} \quad (6.15)$$

лінійно незалежні. Тоді

$$\gamma: x = \xi(s), \quad s \in \mathcal{D} \quad (6.16)$$

є гіперповерхнею в  $\mathbb{R}^n$ , кожен із векторів (6.15), якщо його вважати прикладеним до точки  $\xi(s)$ , дотикається в цій точці  $\gamma$ , а  $(n-1)$ -вимірна площина, натягнена на вектори (6.15), утворює дотичний простір до  $\gamma$  у точці  $x(s)$ .

Зауважимо, що початкову поверхню  $\Gamma$  можна задавати не лише параметрично, а й у «налів'явному» вигляді

$$\begin{cases} F(x) = 0 & (\text{рівняння гіперповерхні } \gamma), \\ u = \psi(x), \end{cases}$$

а також системою рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, u) = 0, \\ F_2(x, u) = 0. \end{cases}$$

При цьому на функції  $F$ ,  $\psi$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  накладаються природні умови неперервної диференційовності та невиводженості.

Сформулюємо тепер практичний спосіб розв'язання задачі Коші — так званий *метод характеристик*.

- Виписуємо за коефіцієнтами рівняння (6.6) систему характеристик (6.9).
- Інтегруємо систему характеристик і записуємо її загальний інтеграл

$$V_1(x, u_0) = c_1, \dots, V_n(x, u) = c_n. \quad (6.17)$$

Тут  $\{V_i(x, u)\}_{i=1}^n$  — повний набір перших інтегралів.

- До загального інтеграла дописуємо рівняння початкової поверхні  $\Gamma$  і з одержаної системи виключаємо змінні  $s$  (якщо  $\Gamma$  задано параметрично),  $x$ ,  $u$  так, щоб дістати співвідношення  $\Phi(c_1, \dots, c_n) = 0$ .
- Шуканий розв'язок задаємо як неявну функцію рівнянням (6.11)

Неважко зрозуміти, що в основі викладеного способу лежить уже знайома нам у випадку  $n = 2$  ідея побудови інтегральної гіперповерхні яка проходить через початкову  $(n - 1)$ -вимірну поверхню  $\Gamma$ . Наприклад, якщо  $\Gamma$  задано у вигляді (6.14), то, вилучивши із системи (6.14)–(6.17) змінні  $x$ ,  $u$ , матимемо

$$c_1 = V_1(\xi(s), \varphi(s)), \dots, c_n = V_n(\xi(s), \varphi(s)). \quad (6.18)$$

При фіксованому  $s \in \mathcal{D}$  такому наборові довільних сталих відповідає інтегральна крива системи характеристик, яка проходить через точку  $(\xi(s), \varphi(s))$  і визначається рівняннями

$$V_1(x, u) = V_1(\xi(s), \varphi(s)), \dots, V_n(x, u) = V_n(\xi(s), \varphi(s))$$

(див. теорему 4.3). Якщо тепер із (6.18) виключити параметри  $s$ , то одержане співвідношення  $\Phi(c_1, \dots, c_n) = 0$  встановлює зв'язок між довільними сталими, який з усієї множини характеристик виділяє саме ті, що проходять через поверхню  $\Gamma$ . Але тоді рівняння (6.11) виділяє в області  $G$  інтегральну поверхню, утворену об'єднанням характеристик, які мають указану властивість. Зрозуміло, що ця інтегральна поверхня містить у собі поверхню  $\Gamma$ . Отже, якщо (6.11) визначає неперервно диференційовну функцію  $u(x)$ , то остання й буде шуканим розв'язком задачі Коші.

У випадку, коли вдається знайти загальний розв'язок системи (6.8 або (6.9) у явному вигляді, використовують дещо інший варіант методу характеристик. Нехай для визначеності початкову поверхню задано у вигляді (6.14), а характеристиками є фазові криві системи (6.8). Тоді *схема розв'язання задачі Коші* є такою.

- Для кожного фіксованого  $s \in \mathcal{D}$  знаходимо розв'язок системи (6.8), який задовольняє початкові умови

$$x|_{t=0} = \xi(s), \quad u|_{t=0} = \varphi(s).$$

Уведемо для цього розв'язку позначення

$$x = \chi(t, s), \quad u = \eta(t, s). \quad (6.19)$$

Таким чином,  $\chi(0, s) = \xi(s)$ ,  $\eta(0, s) = \varphi(s)$ , а система рівнянь (6.19) визначає в параметричному вигляді інтегральну множину, яку утворюють характеристики, випущені з поверхні  $\Gamma$ .

- Систему рівнянь  $\chi(t, s) = x$  розв'язуємо відносно змінних  $t, s$ . Припустимо, що для кожного  $x$  із деякого околу гіперповерхні  $\Gamma$  ця система має єдиний розв'язок  $t = \tau(x)$ ,  $s = \sigma(x)$ .
- Утворюємо функцію

$$u = \eta(\tau(x), \sigma(x)).$$

Якщо вона неперервно диференційовна, то її графік є інтегральною поверхнею, яка проходить через початкову поверхню  $\Gamma$ . Отже, знайдена функція є шуканим розв'язком задачі Коші.

#### Приклад 6.4

Розглянемо одновимірне середовище, яке складається з частинок масою  $m = 1$ , що рухаються за інерцією.

Якщо відстані між частинками нехтовно малі, то таке середовище можна вважати суцільним. Припустимо, що на початку руху відстані між частинками набагато більші, ніж розміри частинок. Тоді останні протягом певного часу можуть рухатися з різними швидкостями, не зіштовхуючись одна з одною.

Запровадимо функцію  $u(t, x)$ , яка точці  $(t, x)$  ставить у відповідність швидкість частинки, розташованої в момент  $t$  у точці з координатою  $x$ . Нехай при  $t = 0$  функція розподілу швидкостей частинок відома:  $u(0, x) = \varphi(x) \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ . Задача полягає у відшуванні функції розподілу швидкостей у довільний момент часу  $t > 0$ .

Оскільки закон руху частинки за інерцією описується диференціальним рівнянням  $\dot{x} = 0$ , то шукана функція  $u(t, x)$  характеризується умовою  $\frac{d}{dt}u(t, x) = 0$ . Припустивши, що  $u(t, x)$  неперервно диференційовна, звідси дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (6.20)$$

Це так зване *рівняння Гопфа*. До нього слід долучити початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (6.21)$$

Розв'яжемо задачу Коші (6.20)–(6.21). Утворимо систему характеристик

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0} \quad (6.22)$$

Використавши очевидний перший інтеграл  $V_1(t, x) = u$ , при кожному  $u = c_1$  знаходимо розв'язок першого рівняння  $x = c_1 t + c_2$ . Таким чином, загальний інтеграл системи (6.22) має вигляд

$$u = c_1, \quad x - ut = c_2. \quad (6.23)$$

Допишемо сюди початкову умову

$$t = 0, \quad u = \varphi(x) \quad (6.24)$$

і з системи (6.23)—(6.24) вилучимо  $t, x, u$ . Дістанемо  $c_1 = \varphi(c_2)$ . Отже, розв'язок задачі Коші (6.20)—(6.21) визначається як неявна функція рівнянням

$$u = \varphi(x - ut). \quad (6.25)$$

Цей розв'язок моделює рух хвилі, профіль якої в момент  $t = 0$  задано графіком функції  $\varphi(x)$  і яка з плином часу змінює свою форму (порівняйте з прикладом 6.1). Справді, та частинка, яка в момент  $t = 0$  мала координату  $x$  і швидкість  $u(0, x) = \varphi(x)$ , рухаючися зі сталою швидкістю  $\varphi(x)$ , у момент часу  $t$  перебуватиме в точці  $x + \varphi(x)t$  і матиме ту саму швидкість. Це означає, що  $u(t, x + \varphi(x)t) = \varphi(x)$ . Отже, з часом профіль

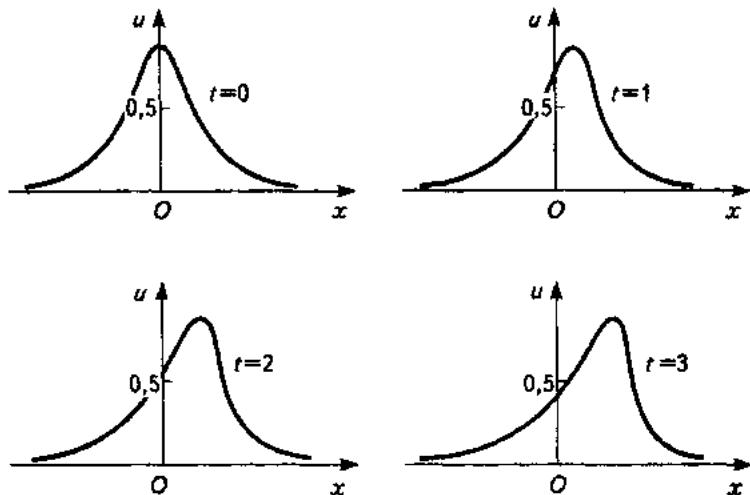


Рис. 6.2

хвилі змінюється так, що точки його перетину з прямою  $u = \varphi(a)$ , де  $a$  — будь-яке число, рухаються паралельно осі  $Ox$  зі швидкістю  $\varphi'(a)$ .

У випадку, зображеному на рис. 6.2, ті точки профілю хвилі, які мають більшу ординату, рухаються вправо швидше. Зрозуміло, що тоді  $u(t, x)$  може залишатись однозначною функцією тільки до певного моменту  $t = t_*$ , який характеризується тим, що графік функції  $u(t, x)$  має точку з вертикальною дотичною. Із цим пов'язане явище утворення так званих ударних хвиль.

Зауважимо, що задача Коші для рівняння Голфа з початковою умовою

$$u|_{x=t} = 1 \quad (6.26)$$

має безліч розв'язків. Справді, функція  $u(t, x)$ , визначена неявно формулою (6.25), задовольнятиме умову (6.26), якщо від функції  $\varphi(x)$  вимагати лише, щоб вона перетворювалася в 1 при  $x = 0$ . Несединість розв'язку задачі Коші в даному випадку спричинена тим, що початкова «поверхня» збігається з характеристикою.

#### 6.1.4. Існування розв'язку задачі Коші\*

Природно виникає запитання: за яких умов інтегральна гіперповерхня, яка проходить через початкову поверхню  $\Gamma$ , є графіком неперервно диференційовної функції?

##### ⇒ Означення 6.3

Поверхню (6.14) називатимемо неособливою, якщо при кожному  $s \in D$  система векторів

$$f(x(s), \varphi(s)), \frac{\partial \xi(s)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \xi(s)}{\partial s_{n-1}} \quad (6.27)$$

лінійно незалежна в  $\mathbb{R}^n$ , тобто при кожному  $s \in D$  вектор  $f(x(s), \varphi(s))$  не дотикається гіперповерхні  $\gamma$  у точці  $\xi(s)$ .

Нехай  $x_0$  — довільна точка гіперповерхні  $\gamma$ , а  $s_0 \in D$  — така точка, що  $x_0 := \xi(s_0)$ .

##### ⇒ Означення 6.4

Розв'язок  $u(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  рівняння (6.6) називатимемо локальним

у точці  $x_0$  розв'язком задачі Коші з початковою поверхнею  $\Gamma$ , якщо існує окіл  $\mathcal{B}(s_0) \subset \mathcal{D}$  точки  $s_0$  такий, що  $u(\xi(s)) = \varphi(s) \quad \forall s \in \mathcal{B}(s_0)$ .

### Теорема 6.3

Припустимо, що  $f(x, u) \in C^1(G \mapsto \mathbb{R}^n)$ ,  $g(x, u) \in C^1(G \mapsto \mathbb{R})$  і  $\Gamma$  — неособлива поверхня, задана рівняннями (6.14). Тоді для кожної точки  $x_0 \in \gamma$  існує локальний у точці  $x_0$  розв'язок задачі Коші з початковою поверхнею  $\Gamma$ . Будь-які два локальних у точці  $x_0$  розв'язки такої задачі збігаються в деякому околі цієї точки.

### Доведення

Для кожного  $s \in \mathcal{D}$  позначимо через  $I(s)$  інтервал існування неперервованого розв'язку системи характеристик (6.8), визначеного формулами (6.19). Нагадаємо, що цей розв'язок задовольняє початкові умови  $\chi(0, s) = \xi(s)$ ,  $\eta(0, s) = \varphi(s)$ . З теореми про диференційовність розв'язку задачі Коші за початковими даними й параметрами (див. п. 5.3.5) випливає, що функції  $\chi(t, s)$  та  $\eta(t, s)$  неперервно диференційовні в області  $\mathcal{E} := \{(t, s) \in \mathbb{R}^n : s \in \mathcal{D}, t \in I(s)\}$ . Як уже зазначалося вище, в цій області рівняння (6.19) визначають інтегральну множину  $M_\Gamma$ , утворену характеристиками, випущеними з точок поверхні  $\Gamma$ . Якщо знайдеться окіл  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  точки  $(0, s_0) \in \mathcal{E}$  такий, що множина  $\mathcal{M} \subset M_\Gamma$ , визначена рівняннями

$$\mathcal{M} : x = \chi(t, s), \quad u = \eta(t, s), \quad (t, s) \in \mathcal{F},$$

є графіком неперервно диференційовної функції  $u = u(x)$ , то остання й буде шуканим локальним розв'язком задачі Коші.

Щоб знайти таку функцію  $u(x)$ , покажемо, що в деякому околі  $B(x_0)$  точки  $x_0 = \xi(s_0)$  систему рівнянь  $\chi(t, s) = x$  можна однозначно розв'язати відносно змінних  $t, s$ . Точніше, існують функції  $\tau(x) \in C^1(B(x_0) \mapsto \mathbb{R})$ ,  $\sigma(x) \in C^1(B(x_0) \mapsto \mathbb{R}^{n-1})$ , які визначають обернене відображення

$$\chi^{-1} : B(x_0) \ni x \mapsto (\tau(x), \sigma(x)) \in \mathcal{E},$$

так що  $\tau(x_0) = 0$ ,  $\sigma(x_0) = s_0$  і  $\chi(\tau(x), \sigma(x)) \equiv x$ .

Для застосування теореми про існування оберненого відображення (див. дод. 2) достатньо перевірити умову невідродженості матриці Якобі відображення  $\chi(t, s)$  у точці  $(0, s_0)$  або, що одне й те саме, переконатися в лінійній незалежності векторів



$$\frac{\partial \chi(0, s_0)}{\partial t}, \frac{\partial \chi(0, s_0)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \chi(0, s_0)}{\partial s_{n-1}}.$$

Оскільки  $\dot{\chi}(t, s)|_{t=0} = f(\chi(t, s), \eta(t, s))|_{t=0} = f(\xi(s), \varphi(s))$  і  $\chi(0, s) = \xi(s)$ , то виписаний набір векторів збігається з (6.27) і за умовою утворення базис у  $\mathbb{R}^n$ .

Таким чином, функції  $\tau(x)$ ,  $\sigma(x)$  існують, а тоді, якщо за  $\mathcal{F}$  взяти образ відображення  $\chi^{-1}$ , то множина  $\mathcal{M}$  збігатиметься з графіком функції

$$u(x) := \eta(\tau(x), \sigma(x)) \in C^1(B(x_0) \mapsto \mathbb{R}).$$

За теоремою 6.2 ця функція є розв'язком рівняння (6.6).

Виберемо окіл  $B(s_0)$  точки  $s_0$  настільки малим, щоб  $\xi(s) \in B(x_0)$  для всіх  $s \in B(s_0)$ . Усі точки  $(\xi(s), \varphi(s))$ ,  $s \in B(s_0)$  належать  $\mathcal{M}$ , а отже, й графіку функції  $u(x)$ , тобто  $u(\xi(s)) = \varphi(s) \quad \forall s \in B(s_0)$ . Звідси випливає, що  $u(x)$  — локальний у точці  $x_0$  розв'язок задачі Коші.

Якщо  $\tilde{u}(x)$  — інший такий розв'язок, то його графік є інтегральною поверхнею, причому  $\tilde{u}(\xi(s)) = \varphi(s)$  для всіх  $s$ , досить близьких до  $s_0$ . Тому в досить малому околі точки  $(0, s_0)$  виконується рівність  $\tilde{u}(\chi(t, s)) = \eta(t, s) = u(\chi(t, s))$ , а тоді  $\tilde{u}(x) \equiv u(x)$  у деякому околі точки  $x_0$ .

Доведемо тепер теорему, яка дасть нам змогу обґрунтувати правомірність уживання терміна «загальний розв'язок» стосовно формули (6.11).

### Теорема 6.4

Припустимо, що  $f(x, u) \in C^1(G \mapsto \mathbb{R}^n)$ ,  $g(x, u) \in C^1(G \mapsto \mathbb{R})$ . Нехай  $u(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R})$  — довільний розв'язок рівняння (6.6),  $x_0$  — довільна точка області  $D$  і  $u_0 := u(x_0)$ .

У деякому околі точки  $(x_0, u_0)$  існує перший інтеграл  $V(x, u)$  системи характеристик (6.9) такий, що  $V(x_0, u_0) = 0$ ,  $V'_x(x_0, u_0) \neq 0$  і неявна функція  $u = \tilde{u}(x)$ , визначена рівнянням  $V(x, u) = 0$ , у досить малому околі точки  $x_0$  збігається з  $u(x)$ .

### Доведення

Оскільки  $\sum_{i=1}^n |f_i(x, u)| + |g(x, u)| \neq 0$  при всіх  $(x, u) \in G$  і виконується тотожність (6.7), то  $\sum_{i=1}^n |f_i(x, u(x))| \neq 0$  для всіх  $x \in D$ .

Припустимо для визначеності, що  $f_n(x_0, u_0) \neq 0$ . Тоді вектор  $f(x_0, u_0)$  не дотикається площини, заданої рівнянням  $x_n = x_{0n}$ . Функцію  $u(x)$  можна тепер інтерпретувати як локальний у точці  $x_0$  розв'язок задачі Коші з неособливою в околі  $x_0$  початковою поверхнею

$$\Gamma : x_n = x_{0n}, \quad u = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) := u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0n}).$$

На підставі аналізу, проведеного в п. 5.3.5, можна зробити висновок, що в околі точки  $(x_0, u_0)$  існує повний набір перших інтегралів  $W_1(x, u), \dots, W_n(x, u)$  системи (6.9) такий, що

$$W_i(x, u)|_{x_n = x_{0n}} = x_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad \text{і} \quad W_n(x, u)|_{x_n = x_{0n}} = u.$$

Покладемо

$$V(x, u) := W_n(x, u) - \varphi(W_1(x, u), \dots, W_{n-1}(x, u)).$$

Ця функція є першим інтегралом системи характеристик (6.6), для якої  $V(x, u)|_{x_n = x_{0n}} = u - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$  і, як наслідок,  $V'_u(x, u)|_{x_n = x_{0n}} = 1$ . Звідси випливає, що рівняння  $V(x, u) = 0$  у деякому околі точки  $x_0$  визначає єдину неперервно диференційовну функцію  $u = \tilde{u}(x)$ , яка задовольняє початкову умову  $\tilde{u}(x)|_{x_n = x_{0n}} = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ . Ця функція є локальним у точці  $x_0$  розв'язком задачі Коші з початковою поверхнею  $\Gamma$ . Тому в досить малому околі точки  $x_0$  маємо тождність  $\tilde{u}(x) \equiv u(x)$ .

Оскільки будь-який перший інтеграл системи (6.9) локально є функцією від її перших інтегралів із повного набору (див. п. 4.3.4), то з урахуванням доведеної теореми можна стверджувати, що формула (6.11) включає в себе всі розв'язки рівняння (6.6).

Природно висловити припущення, що з локальних розв'язків задачі Коші можна утворити розв'язок цієї задачі, визначений у деякому околі всієї гіперповерхні  $\gamma$ . Це припущення, однак, не завжди справджується, якщо не накласти додаткових умов на характер укладення гіперповерхні  $\gamma$  у простір  $\mathbb{R}^n$ . Наприклад, може виявитися, що для деякого  $s_* \in \mathcal{D}$  знайдеться послідовність  $\{s_k\}_{k=1, 2, \dots} \subset \mathcal{D}$ , яка не збігається до  $s_*$ , однак  $\xi(s_k) \rightarrow \xi(s_*)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тоді, якщо послідовність  $\{\varphi(s_k)\}$  не збігається до  $\varphi(s_*)$ , то в як завгодно малому околі точки  $x_0 = \xi(s_0)$ , крім локального в цій точці розв'язку задачі Коші  $u(x)$ , при всіх досить великих  $k$  визначені інші локальні розв'язки  $u_k(x)$ , які відповідають

точкам  $\xi(s_k)$ . При цьому  $u(\xi(s_k)) \neq u_k(\xi(s_k)) = \varphi(s_k)$ .  
 (3) Ігже, в даному випадку локальний у точці  $x_0$  розв'язок не можна продовжити на всю гіперповерхню  $\gamma$  (рис. 6.3).

### Означення 6.5

Казатимемо, що гіперповерхня  $\gamma: x = \xi(s), s \in D$  правильно вкладена в  $\mathbb{R}^n$ , якщо кожна послідовність  $\{s_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$ , для якої існує  $s_* \in D$  таке, що  $\xi(s_k) \rightarrow \xi(s_*)$ , збігається до  $s_*$ .

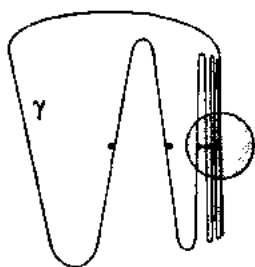


Рис. 6.3

### Теорема 6.5

Якщо поверхня  $\Gamma$  неособлива, а гіперповерхня  $\gamma$  правильно вкладена в  $\mathbb{R}^n$ , то розв'язок задачі Коші з початковою поверхнею  $\Gamma$  існує в деякому околі гіперповерхні  $\gamma$ .

### Доведення

З урахуванням теореми 6.3 та її доведення достатньо вказати підобласть  $\mathcal{G}$  області  $\mathcal{E}$ , яка мала б такі властивості: 1) відображення  $\chi: \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}^n$  взаємно однозначне; 2) якщо  $(t, s) \in \mathcal{G}$ , то й  $(\lambda t, s) \in \mathcal{G}$  для всіх  $\lambda \in [0, 1]$ .

Справді, припустимо, що така множина  $\mathcal{G}$  існує. Тоді: а) функції  $\tau(x)$ ,  $\sigma(x)$ , які визначають обернене відображення  $\chi^{-1} = (\tau, \sigma): \chi(\mathcal{G}) \mapsto \mathcal{G}$ , неперервно диференційовні в області  $\chi(\mathcal{G})$  — образі множини  $\mathcal{G}$  (інакше кажучи, відображення  $\chi: \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}^n$  — дифеоморфізм); б) область  $\chi(\mathcal{G})$  містить гіперповерхню  $\gamma$ ; в) гіперповерхня, задана в  $\mathbb{R}^{n+1}$  рівняннями (6.19), де  $(t, s) \in \mathcal{G}$ , є інтегральною поверхнею, яка проходить через  $\Gamma$  і яка є графіком функції  $u(x) := \eta(\tau(x), \sigma(x)) \in C^1(\chi(\mathcal{G}) \mapsto \mathbb{R})$ . Остання й є шуканим розв'язком задачі Коші.

Перейдемо до побудови області  $\mathcal{G}$ . Нехай  $\mathcal{K} \subset D$  — компакт. Існує таке  $h > 0$ , що множина  $[-h, h] \times \mathcal{K}$  належить області визначення відображення  $\chi(t, s)$ . Дійсно, частина гіперповерхні  $\gamma$ , утворена точками  $\xi(s)$ ,  $s \in \mathcal{K}$ , є компактом. Тому число  $h > 0$  можна вибрати так, щоб  $[-h, h] \in I(s)$  при кожному  $s \in \mathcal{K}$  (див. твердження 1.7).

Тепер у разі потреби це число можна зменшити настільки, щоб воно залишилося додатним і відображення  $\chi$  було взаємно однозначним на  $[-h, h] \times \mathcal{K}$ . Справді, якби це було неможливо, то з урахуванням компактності множини  $\mathcal{K}$  існували б такі дві послідовності точок  $\{(t_k^1, s_k^1)\}_{k=1,2,\dots} \subset \mathcal{E}$ ,  $i = 1, 2$ , що  $(t_k^1, s_k^1) \neq (t_k^2, s_k^2)$ ,

$$\chi(t_k^1, s_k^1) = \chi(t_k^2, s_k^2), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.28)$$

і  $(t_k^i, s_k^i) \rightarrow (0, s_i^!)$  при  $k \rightarrow \infty$ , де  $s_i^! \in \mathcal{K}$ ,  $i = 1, 2$ .

Перейшовши в (6.28) до границі при  $k \rightarrow \infty$ , дістанемо  $\xi(s_1^k) = \xi(s_2^k)$ , звідки  $s_1^k = s_2^k =: s_k$ . Але в такому разі рівності (6.28) не можуть виконуватися при всіх досить великих  $k$ , оскільки відображення  $\chi$  взаємно однозначне в деякому околі точки  $(0, s_*)$ .

Малізною числа  $h > 0$  можна досягти й виконання такої умови: для кожного  $s \in \mathcal{K}$  відрізок кривої  $x = \chi(t, s)$ ,  $t \in [-h, h]$  перетинає гіперповерхню  $\gamma$  лише в точці  $\xi(s)$  у момент  $t = 0$ . Дійсно, в протилежному разі знайшлася б збіжна до деякої точки  $(0, s_*)$  послідовність  $\{(t_k, s_k)\} \subset \mathcal{E}$  і послідовність  $\{s'_k\} \subset \mathcal{D}$  такі, що  $\{s_k\} \subset \mathcal{K}$ ,  $s_k \neq s'_k$ , але

$$\chi(t_k, s_k) = \xi(s'_k) \Leftrightarrow \chi(t_k, s_k) = \chi(0, s'_k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.29)$$

Спрямувавши тут  $k$  до нескінченності, дістанемо  $\xi(s'_k) \rightarrow \xi(s_*)$ , звідки, з огляду на правильність укладення гіперповерхні  $\gamma$ , матимемо  $s'_k \rightarrow s_*$ . Але тоді рівності (6.29) не можуть виконуватися при всіх досить великих  $k$ , адже відображення  $\chi$  взаємно однозначне в деякому околі точки  $(0, s_*)$ .

Таким чином, для довільного компакту  $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$  існує таке  $h > 0$ , що зазначені вище властивості 1 та 2 виконуються на множині  $[-h, h] \times \mathcal{K}$ . До того ж при кожному  $s \in \mathcal{K}$  відрізок кривої  $x = \chi(t, s)$ ,  $t \in [-h, h]$  перетинає гіперповерхню  $\gamma$  лише в точці  $\xi(s)$  у момент  $t = 0$ .

Нехай  $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{D}$  — іще один компакт. Для нього існує таке  $h_1 > 0$ , що відображення  $\chi$  на множині  $[-h_1, h_1] \times \mathcal{K}_1$  має ті самі властивості, що й на  $[-h, h] \times \mathcal{K}$ . Малізною  $h_1 > 0$  можна досягти взаємної однозначності відображення  $\chi$  на множині  $([-h, h] \times \mathcal{K}) \cup ([-h_1, h_1] \times \mathcal{K}_1)$ . Справді, в протилежному разі знайдуться збіжні послідовності  $\{(t_k, s_k)\} \subset [-h, h] \times \mathcal{K}$  та  $\{(t'_k, s'_k)\} \subset [-h_1, h_1] \times \mathcal{K}_1$  такі, що  $(t_k, s_k) \neq (t'_k, s'_k)$ .

$$\chi(t_k, s_k) = \chi(t'_k, s'_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.30)$$

$(t_k, s_k) \rightarrow (t_*, s_*)$ ,  $(t'_k, s'_k) \rightarrow (0, s'_*)$ , де  $! t_*| \leq h$ ,  $s_* \in \mathcal{K}$ ,  $s'_* \in \mathcal{K}_1$ . Перейшовши (6.30) до границі при  $k \rightarrow \infty$ , дістанемо  $\chi(t_*, s_*) = \xi(s'_*)$ . Але відрізок кривої  $x = \chi(t, s_*)$ ,  $t \in [-h, h]$  перетинає гіперповерхню лише в точці  $\xi(s_*)$  у момент  $t = 0$ . Тому  $t_* = 0$ ,  $s_* = s'_*$ . Знову дійшли суперечності: рівності (6.30) не можуть виконуватися для всіх досить великих  $k$  з огляду на взаємну однозначність відображення  $\chi$  в околі точки  $(0, s_*)$ .

Тепер зрозуміло: для послідовності компактів  $\{\mathcal{K}_i\}_{i=1, 2, \dots}$  такої, що  $\mathcal{D} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_i$ , описаним вище способом можна побудувати послідовність долатних чисел  $\{h_i\}$  так, щоб відображення  $\chi$  було взаємно однозначним на множині

$$\mathcal{G} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [-h_i, h_i] \times \mathcal{K}_i.$$

### 6.1.5. Нелінійне рівняння з частинними похідними першого порядку

Застосуємо метод характеристик до розв'язання рівняння (6.1) загального вигляду. Надалі припускати, що  $F \in C^2(G \mapsto \mathbb{R})$ .

За аналогією з неявним звичайним диференціальним рівнянням поставимо у відповідність (6.1) гіперповерхню  $S$  у просторі  $\mathbb{R}^{n+1+n}$  з координатами  $(x, u, p) = (x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ , задану рівнянням

$$F(x, u, p) = 0.$$

#### ⇒ Означення 6.6

Точку гіперповерхні  $S$  називатимемо *регулярною*, якщо в цій точці

вектор  $\frac{\partial F}{\partial p} := \left( \frac{\partial F}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_n} \right)$  не перетворюється в нуль.

Надалі обмежимося вивченням випадку, коли всі точки гіперповерхні  $S$  регулярні.

Вийшовши з простору  $\mathbb{R}^{n+1}$  у простір  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , рівнянню (6.1) поставимо у відповідність систему

$$\begin{cases} F(x, u, p) = 0, \\ du = p dx \quad (p dx := p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n). \end{cases} \quad (6.31)$$

Зрозуміло, що друге з рівнянь (6.31) еквівалентне системі рівностей

$\frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а тому після виключення змінних  $p_1, \dots, p_n$  система (6.31) перетворюється на рівняння (6.1).

#### ⇒ Означення 6.7

*Розв'язком системи (6.31) в області  $D \subset \mathbb{R}^n$  називатимемо вектор-функцію  $(u(x), p(x)) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R}^{1+n})$ , графік якої належить гіперповерхні  $S$  і для якої рівність  $du(x) = p(x) dx$  виконується для всіх  $x \in D$ , тобто градієнт  $u(x) = p(x)$ .*

У цьому означенні можна було б вимагати лише неперервності компоненти  $p(x)$ , проте для подальших міркувань буде потрібна її неперервна диференційовність.

Демо геометричне тлумачення системи (6.31). Розглянемо в просторі  $\mathbb{R}^{2n+1}$  диференціальну форму  $\omega := du - p dx$ . Значення цієї форми на довільному векторі  $(a, b, c) = (a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_n)$ , прикладеному до точки  $(x, u, p)$ , обчислюється за правилом

$$\omega(a, b, c) = b - pa := b - \sum_{i=1}^n p_i a_i.$$

Тоді в кожній точці  $(x_0, u_0, p_0)$  рівняння  $\omega = 0$  визначає множину всіх векторів, прикладених до цієї точки, на яких форма  $\omega$  перетворюється в нуль, а отже, гіперплощину, задану рівнянням

$$u - u_0 - p_0(x - x_0) = 0. \quad (6.32)$$

### ⇒ Означення 6.8

*Гіперплощину (6.32) називають контактною гіперплощиною в точці  $(x_0, u_0, p_0)$ .*

Фактично рівняння  $\omega = 0$  визначає в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  поле гіперплощин, ставлячи у відповідність кожній точці простору  $\mathbb{R}^{2n+1}$  контактну гіперплощину, яка проходить через цю точку.

### ⇒ Означення 6.9

*Характеристичною площиною в точці  $(x_0, u_0, p_0)$  називають множину точок, координати яких задовольняють систему лінійних рівнянь*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial u}(u - u_0) + \frac{\partial F}{\partial p}(p - p_0) = 0, \\ u - u_0 - p_0(x - x_0) = 0, \end{cases}$$

де похідні функції  $F$  обчислено в точці  $(x_0, u_0, p_0)$ .

Зауважимо, що перше з рівнянь цієї системи визначає дотичну площину до поверхні, заданої рівнянням  $F(x, u, p) = F(x_0, u_0, p_0)$ . У перетині цієї площини з контактною площиною й утворюється характеристична площина. Оскільки ми припустили, що всі точки поверхні  $S$  регулярні, то принаймні для кожної точки з деякого околу цієї поверхні характеристична площина має вимірність  $2n - 1$ .

Таким чином, система рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial p} dp = 0, \\ du - p dx = 0 \end{cases}$$

в області  $G$  визначає поле характеристичних площин.

### Твердження 6.2

Для того щоб вектор-функція  $(u(x), p(x)) \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^{n+1})$  була розв'язком системи (6.31), необхідно й достатньо, щоб її графік дотикався поля характеристичних площин (тобто дотична площина в кожній точці гіперповерхні, заданої в  $G$  рівняннями  $u = u(x)$ ,  $p = p(x)$ , належала характеристичній площині, яка проходить через цю точку) і мав хоча б одну спільну точку з гіперповерхнею  $S$ .

### Доведення

**Достатність.** За умовою існує точка  $(x_0, u_0, p_0)$ , для якої  $F(x_0, u_0, p_0) = 0$ , і графік вектор-функції  $(u(x), p(x))$  дотикається поля характеристичних площин. Нехай  $x = \xi(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  — рівняння довільної кривої, що виходить при  $t = 0$  з точки  $x_0$ . Тоді крива  $x = \xi(t)$ ,  $u = \eta(t) := u(\xi(t))$ ,  $p = \zeta(t) := p(\xi(t))$  належить графіку вектор-функції  $(u(x), p(x))$ , а тому дотикається поля характеристичних площин, тобто

$$\frac{\partial F}{\partial x} \dot{\xi}(t) + \frac{\partial F}{\partial u} \dot{\eta}(t) + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{\zeta}(t) = 0, \quad \dot{\eta}(t) - \zeta(t)\dot{\xi}(t) = 0$$

або

$$\frac{d}{dt} [F(x, u(x), p(x))|_{x=\xi(t)}] = 0,$$

$$\frac{d}{dt} u(\xi(t)) = \frac{\partial u(\xi(t))}{\partial x} \dot{\xi}(t) = p(\xi(t))\dot{\xi}(t).$$

Оскільки криву  $x = \xi(t)$  можна вибирати довільно, так що  $\xi(1)$  може бути довільною точкою області  $D$ , а  $\dot{\xi}(1)$  — довільним вектором простору  $\mathbb{R}^n$ , то звідси

$$F(x, u(x), p(x)) = 0, \quad \text{grad } u(x) = p(x) \quad \forall x \in D. \quad (6.33)$$

Необхідність умов теореми пропонуємо довести самостійно.

Перейдемо до відшукування автономної системи

$$\dot{x} = f(x, u, p), \quad \dot{u} = g(x, u, p), \quad \dot{p} = h(x, u, p), \quad (6.34)$$

для якої було б правильним таке твердження.

### Теорема 6.6

Неперервно диференційовна вектор-функція  $(u(x), p(x)) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R}^{n-1})$ , де  $p(x) = \text{grad } u(x)$ , тоді й лише тоді є розв'язком системи (6.31), коли її графік є інваріантною поверхнею системи (6.34) і має хоча б одну спільну точку з  $S$ .

Нагадаємо, що поверхня, розташована в області  $G$ , є інваріантною для системи (6.34), якщо вона разом із кожною своєю точкою містить і ту фазову криву системи (6.34), яка через цю точку проходить.

Перш ніж шукати праві частини системи (6.34), зауважимо, що з огляду на твердження 6.2 векторне поле  $(f, g, h)$  повинне дотикатися поля характеристичних площин, тобто всюди на  $S$  мають виконуватися рівності

$$\frac{\partial F}{\partial x} f + \frac{\partial F}{\partial u} g + \frac{\partial F}{\partial p} h = 0, \quad g - pf = 0$$

або, що одне й те саме,

$$g = pf, \quad \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} p \right) f + \frac{\partial F}{\partial p} h = 0. \quad (6.35)$$

У випадку  $n = 1$  друга рівність визначає компоненти  $f$  та  $h$  із точністю до деякого множника  $\lambda$ :  $f = \lambda \frac{\partial F}{\partial p}$ ,  $h = \lambda \left[ -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial u} p \right]$ . Не обмежуючи загальності, можна вважати, що  $\lambda = 1$ . Ці міркування дають підстави для припущення, що потрібні нам властивості має векторне поле, для якого

$$f = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad g = p \frac{\partial F}{\partial p}, \quad h = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial u} p. \quad (6.36)$$

Воно, очевидно, задовольняє другу з рівностей (6.35).



Доведемо, що вибір компонент векторного поля  $(f, g, h)$  у вигляді (6.36) забезпечує правильність теореми 6.6.

У подальшому нам знадобиться формула

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F(x, u(x), \text{grad } u(x)) &= \\ &= \left[ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} p + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial p} \right]_{u=u(x), p=\text{grad } u(x)}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

яка виконується для кожної функції  $u(x) \in C^2(D \mapsto \mathbb{R})$  такої, що

$(x, u(x), \text{grad } u(x)) \in G \quad \forall x \in D$ . У цій формулі  $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} := \left\{ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1}^n$  —

це так звана матриця Гессе. З урахуванням симетричності цієї матриці перевірка правильності формули (6.37) зводиться до простої вправи на диференціювання складної функції.

### Доведення теореми 6.6

**Необхідність.** Покажемо, що графік кожного розв'язку системи (6.31) є інваріантною поверхнею системи (6.34), (6.36). Нехай функції  $u(x) \in C^2(D \mapsto \mathbb{R})$ ,  $p(x) := \text{grad } u(x)$  задовольняють систему (6.31), тобто для них виконуються рівності (6.33). Візьмемо довільну точку  $x_0 \in D$  і покажемо, що через точку  $(x_0, u_0, p_0) = (x_0, u(x_0), p(x_0))$  проходить фазова крива системи (6.34), (6.36), яка належить графіку вектор-функції  $(u(x), p(x))$ .

Нехай  $x = x(t)$ ,  $t \in I$  — розв'язок системи  $\dot{x} = f(x, u(x), p(x))$  такий, що  $x(0) = x_0$ . Тоді

$$\dot{x}(t) = f(x, u(x), p(x)) \Big|_{x=x(t)}. \quad (6.38)$$

Крива, задана рівняннями

$$x = x(t), u = u(x(t)), p = p(x(t)), t \in I, \quad (6.39)$$

належить графіку  $(u(x), p(x))$ . Залишається встановити, що вона є фазовою кривою системи (6.34), (6.36). З урахуванням другої з рівностей (6.33) маємо

$$\begin{aligned} \frac{du(x(t))}{dt} &= \frac{\partial u(x(t))}{\partial x} \dot{x}(t) = \left[ p(x) f(x, u(x), p(x)) \right]_{x=x(t)} = \\ &= g(x, u(x), p(x)) \Big|_{x=x(t)}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Далі, диференціювання першої з рівностей (6.33) з урахуванням формули (6.37) дає такий результат:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \frac{\partial F(x, u(x), p(x))}{\partial p} = h(x, u(x), p(x)).$$

Тому

$$\begin{aligned} \frac{dp(x(t))}{dt} &= \frac{\partial^2 u(x(t))}{\partial x^2} \dot{x}(t) = \\ &= \left[ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \frac{\partial F(x, u(x), p(x))}{\partial p} \right]_{x=x(t)} = h(x, u(x), p(x)) \Big|_{x=x(t)}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Формули (6.38), (6.40) та (6.41) доводять, що крива (6.39) є фазовою кривою системи (6.34), (6.36).

**Достатність.** Нехай поверхня, задана рівняннями  $u = u(x)$ ,  $p = p(x) := \text{grad } u(x)$ , де  $u(x) \in C^2(D \mapsto \mathbb{R})$ , є інваріантною для системи (6.34), (6.36). Тоді для довільно вибраної точки  $x_0 \in D$  ця система має розв'язок такого вигляду:

$$x = x(t), \quad u = u(x(t)), \quad p = p(x(t)), \quad t \in I,$$

де  $x(0) = x_0$ . Потрібно довести, що виконується перша з рівностей (6.33). Маємо

$$\frac{dp(x(t))}{dt} = h(x, u(x), p(x)) \Big|_{x=x(t)},$$

звідки

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \frac{\partial F(x, u(x), p(x))}{\partial p} \right]_{x=x(t)} = \\ &= \left[ -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial u} p \right]_{x=x(t), u=u(x(t)), p=p(x(t))} \end{aligned}$$

Якщо тут покласти  $t = 0$ , урахувати формулу (6.37) та той факт, що  $x_0$  — довільна точка області  $D$ , то дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, u(x), p(x)) = 0 \quad \forall x \in D.$$

Оскільки за умовою існує точка  $x_* \in D$ , в якій  $F(x_*, u(x_*), p(x_*)) = 0$ , то перша з рівностей (6.33) дійсно виконується.

Тепер ми з повним правом можемо дати таке означення.

### ⇒ Означення 6.10

*Систему (6.34), (6.36) називають системою характеристик рівняння (6.1).*

### ◆ Зауваження 6.2

Зверніть увагу: якщо інтегральна поверхня системи характеристик є графіком вектор-функції  $(u(x), p(x)) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R}^{n+1})$ , то  $u(x)$  буде розв'язком рівняння (6.1) за додаткової умови  $\text{grad } u(x) = p(x)$ .

Система характеристик має вимірність  $2n + 1$ . Повний набір її автономних інтегралів містить  $2n$  функцій. Оскільки за побудовою векторне поле  $(f, g, h)$  дотикається поверхонь рівня функції  $F$ , а отже, похідна функції  $F$  у силу системи (6.34) дорівнює нулю, то має місце таке твердження.

### Твердження 6.3

Функція  $F(x, u, p)$  є першим інтегралом системи характеристик рівняння (6.1).

Питання про зображення загального розв'язку рівняння (6.1) за допомогою повного набору перших інтегралів системи характеристик вирішується не так просто, як для квазілінійного рівняння, і тут не розглядатиметься.

### 6.1.6. Задача Коші для нелінійного рівняння з частинними похідними першого порядку

Для того щоб поставити задачу Коші для рівняння (6.1), потрібно задати:

- початкову поверхню

$$\hat{\Gamma} : x = \xi(s), u = \varphi(s), p = \psi(s), s \in \mathcal{D}, \quad (6.42)$$

яка належить гіперповерхні  $S$  і дотикається поля характеристичних площин;

- початкові умови

$$u|_{x = \xi(s)} = \varphi(s), \quad (6.43)$$

$$\text{grad } u|_{x = \xi(s)} = \psi(s), \quad (6.44)$$

які мають виконуватися для всіх  $s \in \mathcal{D}$ . Тут  $(\xi(s), \varphi(s), \psi(s)) \in C^1(\mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^{n+1+n})$ .

Дамо пояснення з приводу такої постановки задачі Коші. На відміну від квазілінійного рівняння, однієї умови (6.43) ще недостатньо для однозначного визначення розв'язку рівняння (6.1). Потрібно додатково задати градієнт шуканої функції в точках гіперповерхні

$$\gamma : x = \xi(s), s \in \mathcal{D}$$

(згадайте неявне звичайне диференціальне рівняння). Так з'являється вектор-функція  $\psi(s)$ . Зауважимо, що її не можна вибрати довільно: з рівності  $du = \text{grad } u \, dx$  випливає, що

$$d\varphi(s) = \psi(s) d\xi(s) \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s_i} - \psi(s) \frac{\partial \xi(s)}{\partial s_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Виписані рівності означають, що форма  $du - p \, dx$  перетворюється в нуль на векторах  $\left( \frac{\partial \xi(s)}{\partial s_i}, \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s_i}, \frac{\partial \psi(s)}{\partial s_i} \right)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , які утворюють базис дотичного простору до  $\hat{\Gamma}$  у точці  $(\xi(s), \varphi(s), \psi(s))$ . Звідси й випливає умова дотику поверхнею  $\hat{\Gamma}$  поля контактних площин, яка фігурує у формулюванні задачі Коші.

Наведені вище міркування дають змогу зробити такий висновок: значення градієнта шуканої функції в точках гіперповерхні  $\gamma$  слід вибирати серед розв'язків  $p = \psi(s)$  системи  $n$  рівнянь із  $n$  невідомими

$$\begin{cases} p \frac{\partial \xi(s)}{\partial s_i} - \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s_i} = 0, & i = 1, \dots, n-1, \\ F(\xi(s), \eta(s), p) = 0. \end{cases} \quad (6.45)$$

Нехай існують точки  $s_0 \in \mathcal{D}$  і  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  такі, що  $(x_0, u_0, p_0) := (\xi(s_0), \varphi(s_0), p_0) \in S$  і вектори

$$\frac{\partial F(x_0, u_0, p_0)}{\partial p}, \frac{\partial \xi(s_0)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \xi(s_0)}{\partial s_{n-1}}$$

лінійно незалежні (якщо вектор  $\frac{\partial F(x_0, u_0, p_0)}{\partial p}$  вважати прикладеним до точки  $x_0$ , то сформульована умова означає, що цей вектор не дотикається гіперповерхні  $\gamma$ ). Тоді за теоремою про неявну функцію для  $s$  із деякого околу  $\mathcal{B}(s_0)$  точки  $s_0$  система (6.45) має розв'язок  $p = \psi(s) \in C^1(\mathcal{B}(s_0) \mapsto \mathbb{R}^n)$  (перевірте!).

Наведемо схему розв'язання задачі Коші методом характеристик.

- Із кожної точки поверхні  $\hat{\Gamma}$  випускаємо характеристику, тобто для кожного  $s \in \mathcal{D}$  знаходимо (непродовжуваний) розв'язок системи (6.34), (6.36)

$$x = \chi(t, s), \quad u = \eta(t, s), \quad p = \zeta(t, s), \quad (6.46)$$

який задовольняє умову  $\chi(0, s) = \xi(s)$ ,  $\eta(0, s) = \varphi(s)$ ,  $\zeta(0, s) = \psi(s)$  і визначений на інтервалі  $I(s)$ . Рівняння (6.46) при  $(t, s) \in \mathcal{E} := \{(t, s) \in \mathbb{R}^n : s \in \mathcal{D}, t \in I(s)\}$  задають інваріантну множину  $M_t$  системи (6.34), (6.36).

- Перше з рівнянь системи (6.46) розв'язуємо відносно змінних  $t$  та  $s$ :  $t = \tau(x)$ ,  $s = \sigma(x)$ .
- Шуканий розв'язок задачі Коші подаємо у вигляді

$$u = \eta(\tau(x), \sigma(x)).$$

Висвітлимо тепер основні моменти, які стосуються обґрунтування запропонованої схеми.

⇒ **Означення 6.11**

Поверхню  $\hat{\Gamma}$  називатимемо неособливою, якщо вектори

$$\frac{\partial F(\xi(s), \varphi(s), \psi(s))}{\partial p}, \frac{\partial \xi(s)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \xi(s)}{\partial s_{n-1}}$$

лінійно незалежні для кожного  $s \in \mathcal{D}$ .

**Твердження 6.4**

Якщо початкова поверхня  $\hat{\Gamma}$  неособлива, то в околі кожної її точки  $(x_0, u_0, p_0)$  інваріантна множина  $M_{\Gamma}$ , задана рівняннями (6.46), є графіком вектор-функції  $(u(x), p(x)) \in C^1(B(x_0) \mapsto \mathbb{R}^{1+n})$ , визначеної в деякому околі  $B(x_0)$  точки  $x_0$ . Графік цієї вектор-функції проходить через початкову поверхню  $\hat{\Gamma}$  і належить гіперповерхні  $S$ .

**Доведення**

Скористаємося міркуваннями, наведеними в доведенні теореми 6.3, і покажемо, що локально перше з рівнянь (6.46) можна однозначно розв'язати відносно  $(t, s)$ . А саме, існують функції  $\tau(x) \in C^1(B(x_0) \mapsto \mathbb{R})$ ,  $\sigma(x) \in C^1(B(x_0) \mapsto \mathbb{R}^{n-1})$ , які локально визначають обернене відображення

$$\chi^{-1} : B(x_0) \ni x \mapsto (\tau(x), \sigma(x)) \in \mathcal{E},$$

так що  $\tau(x_0) = 0$ ,  $\sigma(x_0) = s_0$  і  $\chi(\tau(x), \sigma(x)) \equiv x$ . Тут  $s_0 \in \mathcal{D}$  — така точка, що  $\xi(s_0) = x_0$ . Для застосування теореми про існування оберненого відображення (див. дод. 2) перевіримо умову невідродженості матриці Якобі відображення  $\chi(t, s)$  у точці  $(0, s_0)$ . Для цього покажемо, що система векторів

$$\frac{\partial \chi(0, s_0)}{\partial t}, \frac{\partial \chi(0, s_0)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \chi(0, s_0)}{\partial s_{n-1}}$$

лінійно незалежна. Оскільки  $\dot{\chi}(t, s)|_{t=0} = \frac{\partial F(\xi(s), \varphi(s), \psi(s))}{\partial p}$  і

$\chi(0, s) = \xi(s)$ , то потрібна нам властивість вписаної системи векторів випливає з припущення про неособливість поверхні  $\hat{\Gamma}$ . Таким чином, функції  $\tau(x)$ ,  $\sigma(x)$  існують, а тому в околі точки

$(x_0, u_0, p_0)$  інваріантна поверхня (6.46) є графіком вектор-функції  $(u(x), p(x)) \in C^1(B(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^{1+n})$ , де

$$u(x) := \eta(\tau(x), \sigma(x)), \quad p(x) := \zeta(\tau(x), \sigma(x)). \quad (6.47)$$

Залишилося зауважити, що  $n$ -вимірною поверхню (6.46) проходить через  $(n-1)$ -вимірну поверхню  $\hat{\Gamma}$  за побудовою й належить гіперповерхні  $S$  згідно з твердженням 6.3.

### ⇒ Означення 6.12

Розв'язок  $u(x) \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$  рівняння (6.6) називатимемо локальним у точці  $x_0 \in \gamma$  розв'язком задачі Коші з початковою поверхнею  $\hat{\Gamma}$ , якщо існує око  $B(s_0) \subset D$  точки  $s_0$  такий, що початкові умови (6.43), (6.44) виконуються для всіх  $s \in B(s_0)$ .

### Теорема 6.7

Якщо початкова поверхня  $\hat{\Gamma}$  неособлива, то для кожної точки  $x_0 \in \gamma$  локальний у цій точці розв'язок задачі Коші існує.

### Доведення

З огляду на твердження 6.4 достатньо довести, що функції, визначені формулами (6.47), задовольняють тотожність  $p(x) \equiv \text{grad } u(x)$  або, що одне й те саме,  $du(x) - p(x) dx \equiv 0$ . Для цього покажемо, що

$$d\eta(t, s) - \zeta(t, s) d\chi(t, s) \equiv 0. \quad (6.48)$$

Ця тотожність означає, що форма  $du - p dx$  на векторах, дотичних до поверхні  $M_{\hat{\Gamma}}$ , визначеної рівняннями (6.46), перетворюється в нуль, тобто що ця поверхня дотикається поля контактних гіперплосшин.

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} & |d\eta(t, s) - \zeta(t, s) d\chi(t, s)|_0 = \\ & = (\dot{\eta}(0, s) - \zeta(0, s) \dot{\chi}(0, s)) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \eta(0, s)}{\partial s_i} - \zeta(0, s) \frac{\partial \chi(0, s)}{\partial s_i} \right) ds_i = \\ & = ((g - pf)|_x)_{\xi(s), u = \eta(s), p = \psi(s)} dt + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \eta(s)}{\partial s_i} - \psi(s) \frac{\partial \chi(s)}{\partial s_i} \right) ds_i = 0. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Інакше кажучи, поверхня  $M_{\Gamma}^{\wedge}$  дотикається поля контактних гіперплощин у точках поверхні  $\Gamma$ .

Обчислимо похідну

$$\frac{\partial}{\partial t} [d\eta(t, s) - \zeta(t, s)d\chi(t, s)] = d\dot{\eta} - \dot{\zeta} d\chi - \zeta d\dot{\chi}$$

[цей вираз слід розглядати просто як скорочений запис частинної похідної за змінною  $t$  вектора коефіцієнтів при  $dt, ds_1, \dots, ds_{n-1}$  у формі  $d\eta(t, s) - \zeta(t, s)d\chi(t, s)$ ]. Маємо

$$d\dot{\eta} - \dot{\zeta} d\chi - \zeta d\dot{\chi} = |dg - h dx - p df|_{x=\chi, u, \eta, p=\zeta}$$

Але

$$\begin{aligned} dg - h dx - p df &= f dp - h dx = \\ &= \frac{\partial F}{\partial p} dp + \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} p \right) dx = dF + \frac{\partial F}{\partial u} (p dx - du), \end{aligned}$$

і оскільки  $F(\chi, \eta, \zeta) \equiv 0$ , то остаточно дістаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} [d\eta - \zeta d\chi] = - \frac{\partial F(\chi, \eta, \zeta)}{\partial u} [d\eta - \zeta d\chi].$$

Отже, кожен коефіцієнт форми  $d\eta - \zeta d\chi$  задовольняє скалярне лінійне однорідне рівняння вигляду  $\dot{x} = - \frac{\partial F(\chi, \eta, \zeta)}{\partial u} x$ . Розв'язавши ці рівняння, маємо

$$\begin{aligned} & d\eta(t, s) - \zeta(t, s)d\chi(t, s) = \\ &= \exp \left[ - \int_0^t \frac{\partial F(\chi(\tau, s), \eta(\tau, s), \zeta(\tau, s))}{\partial u} d\tau \right] \times \\ & \times [d\eta(t, s) - \zeta(t, s)d\chi(t, s)]_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Отже, тотожність (6.48) виконується.

Пропонуємо самостійно довести, що будь-які два локальні в точці  $x_0$  розв'язки задачі Коші з неособливою початковою поверхнею  $\hat{\Gamma}$  збігаються в деякому околі цієї точки.



Спираючися на доведення теореми 6.5, неважко встановити правильність такого твердження.

### Теорема 6.8

Якщо поверхня  $\hat{\Gamma}$  неособлива, а гіперповерхня  $\gamma$  правильно вкладається в  $\mathbb{R}^n$ , то розв'язок задачі Коші з початковою поверхнею  $\hat{\Gamma}$  існує в деякому околі гіперповерхні  $\gamma$ .

### □ Приклад 6.5

Розглянемо рівняння ейконалу («ейконал» означає «зображення»)

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{c^2},$$

яке описує поширення світлових променів зі швидкістю  $c$  в однорідному ізо-  
тропному середовищі. Поверхні рівня шуканої функції  $u(x)$  називаються  
хвильовими фронтами.

Покладемо  $c = 1$  і проаналізуємо плоский випадок  $n = 2$ . Для рівняння

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 = 1$$

гіперповерхня  $S$  у просторі  $\mathbb{R}^5$  задається рівнянням

$$p_1^2 + p_2^2 = 1. \quad (6.50)$$

Гіперповерхня  $\gamma$  є кривою на площині:

$$\gamma: x_1 = \xi_1(s), \quad x_2 = \xi_2(s), \quad s \in J. \quad (6.51)$$

Вважатимемо, що  $s$  — натуральний параметр.

Фізично виправданою є початкова умова

$$u|_{\gamma} = 0. \quad (6.52)$$

Згідно з викладеною вище теорією початкові значення похідних  $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ ,  
 $p_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}$  функції  $u$  слід знаходити із системи

$$\begin{cases} p_1 \xi_1'(s) + p_2 \xi_2'(s) = 0, \\ p_1^2 + p_2^2 = 1. \end{cases}$$

Ці співвідношення означають, що в кожній точці кривої  $\gamma$  вектор  $\text{grad } u$  є вектором нормалі одиничної довжини. Останній можна вибрати двома способами. Для визначеності розглянемо такий випадок:

$$p_1|_\gamma = \xi_2'(s), \quad p_2|_\gamma = -\xi_1'(s). \quad (6.53)$$

Враховано, що оскільки  $s$  — натуральний параметр, то  $(\xi_1')^2 + (\xi_2')^2 = 1$ .

Система характеристик для рівняння ейконала в  $\mathbb{R}^2$  після масштабного перетворення часу  $t \rightarrow t/2$  набуває вигляду

$$\dot{x}_1 = p_1, \quad \dot{x}_2 = p_2, \quad \dot{u} = 1, \quad \dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = 0.$$

Розв'язавши ці рівняння, бачимо, що фазова крива, яка починається момент  $t = 0$  у точці  $(x_1^0, x_2^0, u^0, p_1^0, p_2^0)$ , визначається рівняннями

$$x_1 = p_1^0 t + x_1^0, \quad x_2 = p_2^0 t + x_2^0, \quad u = t + u^0, \quad p_1 = p_1^0, \quad p_2 = p_2^0.$$

Розв'яжемо методом характеристик задачу Коші з початковими умовами (6.52)—(6.53). Характеристики, які виходять із точок поверхні

$$\hat{\Gamma}: x_1 = \xi_1(s), \quad x_2 = \xi_2(s), \quad u = 0, \quad p_1 = \xi_2'(s), \quad p_2 = -\xi_1'(s),$$

утворюють інтегральну поверхню  $M_{\hat{\Gamma}}$ , параметричні рівняння якої мають вигляд

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_2'(s)t + \xi_1(s), \quad x_2 = -\xi_1'(s)t + \xi_2(s), \quad u = t, \\ p_1 &= \xi_2'(s), \quad p_2 = -\xi_1'(s), \quad (t, s) \in \mathbb{R} \times J. \end{aligned} \quad (6.54)$$

В околі кривої  $\gamma$  рівняння (6.54) визначають шуканий розв'язок у параметричному вигляді. Для того щоб знайти його явний вигляд, потрібні з перших двох рівнянь виразити  $s$  і  $t$  через  $x_1, x_2$ :  $t = \tau(x_1, x_2)$ ,  $s = \sigma(x_1, x_2)$ . Тоді  $u = u(x_1, x_2) := \tau(x_1, x_2)$ .

При фіксованому  $s \in J$  пряма на площині, задана першими двома рівняннями (6.54), називається променем, який виходить із точки  $(\xi_1(s), \xi_2(s))$ . Цей промінь напрямлений по нормалі до кривої  $\gamma$ .

Як уже зазначалося вище, лінії рівня функції  $u(x_1, x_2)$  називають хвильовими фронтами. Фіксованому значенню  $t = t_*$  відповідають параметричні рівняння хвильового фронту

$$x_1 = \xi_2'(s)t_* + \xi_1(s), \quad x_2 = -\xi_1'(s)t_* + \xi_2(s), \quad s \in J.$$

Вони визначають ту лінію, якої за час  $t = t_*$  досягає світло від кривої  $\gamma$ , котра «спалахнула» в момент  $t = 0$ . Справді, оскільки  $(\xi_1'(s))^2 + (\xi_2'(s))^2 = 1$ , то відстань між точками  $(\xi_1(s), \xi_2(s))$  та  $(\xi_2'(s)t_* + \xi_1(s), -\xi_1'(s)t_* + \xi_2(s))$

дорівнює  $t$ . Таку відстань світло долає за час  $t = t$ , адже ми припустили, що  $c = 1$ .

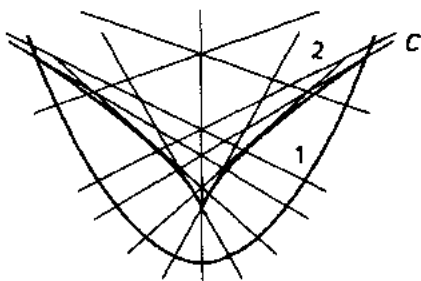


Рис. 6.4

Зауважимо, що в загальному випадку поверхня (6.54) визначає розв'язок задачі Коші тільки в деякому околі кривої  $\gamma$ . Нехай, наприклад, цією кривою є парабола  $x_2 = x_1^2/2$  (рис. 6.4). Тоді через кожну точку області 1 проходить один промінь. У цій області поверхня (6.54) є графіком однозначної функції. Через кожну точку кривої C, яка є обвідною в сім'ї нормалей до  $\gamma$  (еволютою кривої  $\gamma$ ), та область 2 проходить більше ніж один промінь. Тому  $C \cup 2$  — область мнозначності розв'язку задачі Коші. В оптиці криву C називають *каустикою*.

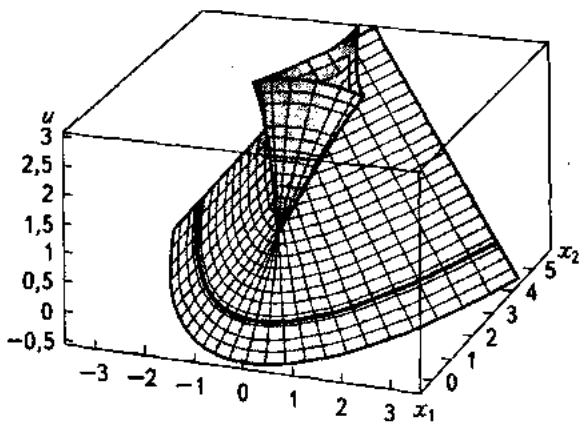


Рис. 6.5

Поверхню (6.54) для випадку, коли крива  $\gamma$  є параболою, зображено на рис. 6.5. Її називають «ластівчиним хвостом». Цей термін виник у теорії катастроф — математичній дисципліні, яка вивчає особливості диференційовних відображень.

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Знайти загальні розв'язки та розв'язки задач Коші:
- а)  $xu'_x + yu'_y = u - xy$ ;  $u(2, y) = y^2 + 1$ ;  
 б)  $u'_x \lg x + yu'_y = u$ ;  $u(x, x) = x^{-1}$ ;  
 в)  $xu'_x - 2yu'_y = x^2 + y^2$ ;  $u(x, 1) = x^2$ .
- ② Знайти всі розв'язки задач Коші:
- а)  $(u^2 + y^2)u'_x + tu'_t - y = 0$ ; 1)  $u(x, x^{-1}) = x$ ; 2)  $u\left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t, \operatorname{ch} t\right) = \operatorname{sh} t$ ;  
 б)  $yu'_x - xu'_y - (x^2 - y^2)u^2 = 0$ ; 1)  $u(x, x) = x^2$ ; 2)  $u(\cos t, \sin t) = 2/\sin 2t$ ;  
 в)  $xy^2u'_x + x^2yu'_y - (x^2 + y^2)u = 0$ ; 1)  $u(x, 2x) = x$ ; 2)  $u(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) = \operatorname{sh} 2t$ ;  
 г)  $(u^2 - y^2)u'_x - yu'_y - u = 0$ ; 1)  $u(x, \cos x) = \sin x$ ; 2)  $u((y^2 + y^{-2})/2, y) = y^{-1}$ .
- ③ В одновимірному середовищі, яке складається з частинок, розташованих на прямій  $Ox$ , рух частинок відбувається під дією сили  $F(x)$ . У початковий момент часу середовище нерухоме. Знайти залежність розподілу швидкостей частинок від часу в таких випадках:
- а)  $F(x) = \operatorname{sign} x$ ; б)  $F(x) = -x \operatorname{sign} x$ ; в)  $F(x) = -\operatorname{sign} x/x^2$ .

## 6.2

### Рівняння Пфаффа

Нехай в області  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  задано диференціальну форму

$$\omega := a(x) dx := a_1(x) dx_1 + \dots + a_n(x) dx_n$$

з неперервно диференційовними коефіцієнтами  $a_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Усюди надалі ми розглядатимемо лише не вироджений випадок, для якого виконується умова  $\|a(x)\| \neq 0 \quad \forall x \in D$ .

Рівняння вигляду

$$\omega = 0 \tag{6.55}$$

називається *рівнянням Пфаффа*.

При  $n = 2$  це рівняння знайоме нам із п. 1.6, де, зокрема, було дано його геометричну інтерпретацію. Тепер ми зробимо це в загальному випадку. Ставлячи кожній точці  $x_0 \in D$  у відповідність гіперплощину

$$P(x_0) : a_1(x_0)(x_1 - x_{01}) + \dots + a_n(x_0)(x_n - x_{0n}) = 0, \quad (6.56)$$

ортогональну до вектора  $a(x_0)$ , рівняння (6.55) задає в області  $D$  поле гіперплощин  $P$ . Природно сформулювати задачу про відшукування  $k$ -вимірної ( $k \leq n - 1$ ) інтегральної поверхні поля  $P$ , тобто такої поверхні, яка в кожній своїй точці  $x_0$  дотикається відповідної гіперплощини  $P(x_0)$ . Про таку поверхню можна також сказати, що вона ортогональна до векторного поля  $a(x)$ . Для  $k$ -вимірної поверхні, заданої параметричними рівняннями

$$x = x(s), \quad x(s) \in C^1(D \mapsto D),$$

де  $D$  — область у  $\mathbb{R}^k$ , умова інтегральності виражається тотожністю

$$a(x(s)) dx(s) \equiv 0.$$

Основною для рівняння Пфаффа є задача відшукування інтегральних поверхонь максимально можливої вимірності  $k = n - 1$ .

### 6.2.1. Цілоком інтегровні рівняння Пфаффа

#### Означення 6.13

Рівняння (6.55) називають цілоком інтегровним, якщо через кожну точку області  $D$  проходить інтегральна гіперповерхня (тобто  $(n - 1)$ -вимірна інтегральна поверхня) поля  $P$ .

Як нам уже відомо, при  $n = 2$  кожне рівняння Пфаффа є цілоком інтегровним. Цього, однак, уже не можна стверджувати при  $n \geq 3$ .

Найпростішим прикладом цілоком інтегровного рівняння Пфаффа є рівняння в повних диференціалах, яке характеризується тим, що форма  $\omega$  є точною, тобто існує функція  $U(x) \in C^2(D \mapsto \mathbb{R})$  така, що

$$\omega = dU. \quad (6.57)$$

[Зрозуміло, що точній формі  $\omega$  відповідає потенціальне векторне поле  $a(x) = \text{grad } U(x)$ .] У цьому випадку область  $D$  розширюється інтегральними гіперповерхнями

$$M_c := \{x \in D : U(x) = c\} \quad (6.58)$$

— поверхнями рівня функції  $U(x)$  (стала  $c$  пробігає область значень функції  $U(x)$ ).

Навпаки, припустимо, що для довільної точки  $x_0 \in D$  у деякому її околі  $B(x_0)$  існує функція  $U(x) \in C^2(D \mapsto \mathbb{R})$  з ненульовим градієнтом, поверхні рівня якої є інтегральними для поля  $P$ , а отже, ортогональними до векторного поля  $a$ . Легко бачити, що тоді вектори  $\text{grad } U(x)$  та  $a(x)$  будуть колінеарними кожному  $x \in D$ . А це, своєю чергою, означає, що в околі точки  $x_0$  для форми  $\omega$  існує інтегровувальний множник, тобто функція  $\mu : D \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , яка має властивість

$$\mu\omega = dU. \quad (6.59)$$

Із невідродженості форми  $\omega$  випливає, що функція  $\mu$  неперервно диференційовна.

Зрозуміло, що рівняння Пфаффа, для якого існує інтегровувальний множник, цілком інтегровне, причому, знаючи інтегровувальний множник, ми зможемо виписати й рівняння інтегральних поверхонь (принаймні локально).

Далі, якщо для форми

$$\mu\omega := b(x) dx \equiv b_1(x) dx_1 + \dots + b_n(x) dx_n$$

виконується рівність (6.59), то з урахуванням рівностей  $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  дістаємо умови на коефіцієнти  $b_j$ :

$$\frac{\partial b_i}{\partial x_j} - \frac{\partial b_j}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (6.60)$$

### ⇒ Означення 6.14

Форму  $b(x) dx$ , для якої умови (6.60) виконуються в кожній точці  $x \in D$ , називають замкненою формою в області  $D$ .

Відомо (див., наприклад, [4]), що в разі виконання умов (6.60) криволінійний інтеграл  $\int_{\gamma(x_0, x)} b(x) dx$ , принаймні в околі точки  $x_0$ , не залежить від конкретного вибору шляху  $\gamma(x_0, x)$ , який сполучає  $x_0$  з  $x$  і цілком лежить в околі точки  $x_0$ . Даний інтеграл і визначає функцію  $U(x)$ , яка рівностями (6.58) задає інтегральні поверхні рівняння (6.55). Таку функцію назовемо інтегралом рівняння Пфаффа.

Знайдемо необхідні умови існування інтегрувального множника. При  $b_j = \mu a_j$ , як наслідок (6.60) маємо

$$\mu \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) + a_i \frac{\partial \mu}{\partial x_j} - a_j \frac{\partial \mu}{\partial x_i} = 0.$$

За допомогою визначників цю рівність можна подати у вигляді

$$\mu \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} \\ a_i & a_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ \frac{\partial \mu}{\partial x_i} & \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \end{vmatrix}. \quad (6.61)$$

Оскільки всі мінори третього порядку матриці

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{\partial \mu}{\partial x_1} & \frac{\partial \mu}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mu}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

дорівнюють нулю, то з огляду на рівності (6.61) таку саму властивість має й символічна матриця

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (6.62)$$

Щоб переконатися в цьому, достатньо розкласти будь-які два відповідних мінори таких матриць за їх першими рядками.

Виявляється, знайдена умова є не лише необхідною, а й достатньою.

### Теорема 6.9 (Фробеніуса)

Для того щоб рівняння (6.55) було цілком інтегровним, необхідно й достатньо, щоб усі мінори третього порядку матриці (6.62) перетворювалися в нуль в області  $D$ .

Доведення цієї теореми для  $n = 3$  буде наведено в п. 6.2.3. У цьому випадку умова теореми Фробеніуса набирає вигляду

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{a}(x) \operatorname{rot} \mathbf{a}(x) = 0} \quad (6.63)$$

і означає, що векторне поле  $\mathbf{a}(x)$  ортогональне до свого ротора.

### 6.2.2. Інтегральні криві рівняння Пфаффа

Для рівняння (6.55) завжди можна побудувати одновимірні «інтегральні поверхні», тобто інтегральні криві. При  $n = 3$  це можна зробити таким чином. Візьмемо довільну точку  $x_0 \in D$ . У деякому її околі  $B(x_0)$  завжди можна визначити двічі неперервно диференційовну функцію  $F: B(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ , для якої  $\operatorname{grad} F(x)$  був би неколінеарний вектору  $\mathbf{a}(x)$ . Тоді система

$$\begin{cases} \omega = 0, \\ dF = 0 \end{cases} \quad (6.64)$$

визначає поле напрямів у  $B(x_0)$ . Це поле напрямів можна задати деякою системою в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \frac{dx_2}{f_2(x)} = \frac{dx_3}{f_3(x)}, \quad (6.65)$$

якій відповідає автономна система

$$\dot{x} = f(x). \quad (6.66)$$

Векторне поле  $f = (f_1, f_2, f_3)$  з точністю до множника визначається умовою: вектор  $f(x)$  ортогональний до векторів  $\mathbf{a}(x)$  та  $\operatorname{grad} F(x)$ . Наприклад, можна покласти

$$f(x) := \{\mathbf{a}(x), \operatorname{grad} F(x)\}, \quad (6.67)$$

де  $\{\cdot, \cdot\}$  — операція векторного добутку в  $\mathbb{R}^3$ .



Інтегральні криві системи (6.65) [фазові криві системи (6.66)] будуть інтегральними кривими системи (6.64), а отже, рівняння (6.55).

Зауважимо, що система (6.64) має очевидний перший інтеграл  $F$ . Тому її вимірність можна знизити на одиницю.

Припустимо, наприклад, що  $a_3(x_0) \neq 0$ . Нехай  $F = F(x_1, x_2)$  — довільна двічі неперервно диференційовна в околі точки  $(x_{01}, x_{02})$  функція, яка в цьому околі задовольняє умову невідродженості

$\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big| + \left| \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right| \neq 0$ , і  $F(x_{01}, x_{02}) = 0$ . На площині  $x_1 O x_2$  рівняння

$$F(x_1, x_2) = 0 \quad (6.68)$$

визначає криву  $\gamma$ , яка проходить через точку  $(x_{01}, x_{02})$ . У просторі  $\mathbb{R}^3$  воно визначає циліндричну поверхню  $S$  із напрямною  $\gamma$  і твірними, паралельними осі  $O x_3$ . Зрозуміло, що вектори  $a(x)$  та  $\text{grad } F(x) :=$

$= \left( \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2}, 0 \right)$  неколінеарні в деякому околі точки  $x_0$ .

Тоді існує єдина інтегральна крива

$$\Gamma : x = \xi(s), s \in I \quad (6.69)$$

системи (6.64), яка лежить на поверхні  $S$  і проходить через точку  $x_0$ .

Для відшукування цієї кривої потрібно рівняння (6.68) розв'язати відносно однієї зі змінних і результат підставити в рівняння (6.55). Дістанемо рівняння Пфаффа на площині. Якщо, наприклад, із (6.68) можна виразити змінну  $x_2$  через  $x_1$ , так що  $x_2 = \varphi(x_1)$  ( $x_{02} = \varphi(x_{01})$ ), то рівняння на площині  $x_1 O x_3$  матиме вигляд

$$[a_1(x_1, \varphi(x_1), x_3) + a_2(x_1, \varphi(x_1), x_3)\varphi'(x_1)]dx_1 + \\ + a_3(x_1, \varphi(x_1), x_3)dx_3 = 0.$$

Звичайно, функцію  $F$  слід намагатися вибирати так, щоб це рівняння легко розв'язувалося. Знайшовши його інтегральну криву  $x_1 = \xi_1(s)$ ,  $x_3 = \xi_3(s)$ , яка проходить через точку  $(x_{01}, x_{02})$ , дістанемо рівняння кривої (6.69), в якому  $\xi(s) = (\xi_1(s), \varphi(\xi_1(s)), \xi_3(s))$ . Вона водночас є фазовою кривою автономної системи (6.66), де  $f(x)$  визначено формулою (6.67).

## □ Приклад 6.6

Приріст  $dW$  теплової енергії газу пов'язаний із приростами об'єму  $dV$  та тиску  $dp$  співвідношенням (закон збереження енергії)

$$\omega \equiv dW - \frac{C_v}{R} V dp - \frac{C_p}{R} p dV = 0, \quad (6.70)$$

де  $R$  — газова стала,  $C_v$  — теплоємність газу при сталому об'ємі,  $C_p = C_v + AR$  — теплоємність газу при сталому тиску,  $A$  — стала (термічний еквівалент роботи).

Для даного випадку умова теореми Фробеніуса не виконується:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{C_v}{R} V & -\frac{C_p}{R} p \\ \frac{\partial}{\partial W} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial V} \\ 1 & -\frac{C_v}{R} V & -\frac{C_p}{R} p \end{vmatrix} = -\frac{C_p}{R} + \frac{C_v}{R} \neq 0.$$

Тому рівняння (6.70) не є цілком інтегровним. Із фізичного погляду це означає, що тепла енергія газу не є функцією його стану, який визначається значеннями  $V$ ,  $p$ . Тепло, котре поглинається (виділяється) під час деякого процесу — переходу зі стану  $(V_0, p_0)$  у стан  $(V, p)$ , залежить від кривої  $\gamma$ , що сполучає точки  $x_0$  та  $x$ , і зображається криволінійним інтегралом

$$W = \int_{\gamma} \frac{C_v}{R} V dp + \frac{C_p}{R} p dV.$$

Наприклад, крива, вздовж якої виконується рівність

$$\frac{C_v}{R} V dp + \frac{C_p}{R} p dV = 0, \quad (6.71)$$

забезпечує адіабатичний процес ( $W = \text{const}$ ). Із рівняння (6.71) після відокремлення змінних дістаємо формулу Пуассона для адіабати:

$$pV^k = C \left( k = \frac{C_p}{C_v} > 1 \right), \text{ де } C \text{ — довільна стала.}$$

Якщо скористатися формулою Клапейрона  $pV = RT$ , де  $T$  — абсолютна температура газу, й домножити обидві частини рівняння (6.70) на  $1/T$ , то побачимо, що

$$\frac{dW}{T} = C_p \frac{dV}{V} + C_v \frac{dp}{p} = d(C_p \ln V + C_v \ln p).$$

Тому криволінійний інтеграл  $\int_{(V_0, p_0)}^{(V, p)} \frac{dW}{T}$  не залежить від шляху інтегрування, який сполучає точку  $(V_0, p_0)$  зі змінною точкою  $(V, p)$ . Цей інтеграл визначає ентропію — фізичну величину, яка вже є функцією стану газу.

### 6.2.3. Цілком інтегровні рівняння Пфаффа в $\mathbb{R}^3$

Нехай  $n = 3$ , а форма  $\omega$  задовольняє умову (6.63). Покажемо, що через кожну точку  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in D$  можна провести інтегральну поверхню рівняння (6.55), і притому лише одну. Спосіб побудови цієї поверхні нагадує конструкцію розв'язку задачі Коші для рівняння з частинними похідними й передбачає такі кроки.

- Знаходимо інтегральну криву  $\Gamma : x = \xi(s)$ ,  $s \in I$  рівняння Пфаффа, яка проходить через точку  $x_0$  (див. п. 6.2.2).
- Задаємо в  $D$  векторне поле  $g(x) \in C^1(D; \mathbb{R}^3)$  так, щоб воно було ортогональне до векторного поля  $a(x)$ , тобто задовольняло умову

$$a(x)g(x) = 0, \quad (6.72)$$

і не дотикалося кривої  $\Gamma$  у жодній її точці. Зокрема, якщо для кожного  $s \in I$  вектори  $\xi'(s)$  і  $\text{rot } a(\xi(s))$  неколінеарні, то можна покласти

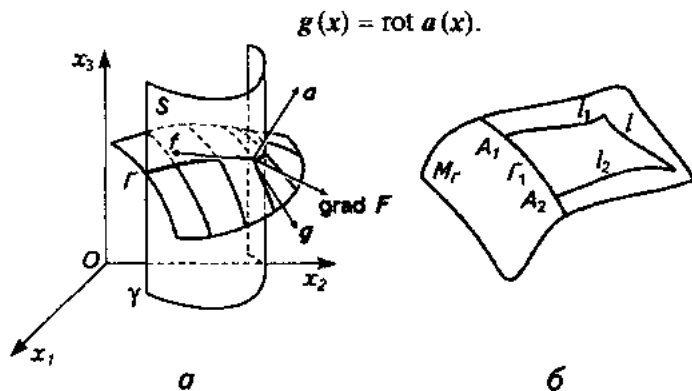


Рис. 6.6

Поле  $g(x)$  бажано вибирати так, щоб система

$$\dot{x} = g(x) \tag{6.73}$$

була інтегрованою.

- З кожної точки кривої  $\Gamma$  випускаємо фазову криву системи (6.73) і таким чином утворюємо поверхню  $M_\Gamma$ , яка проходить через цю криву (рис. 6.6, а).

Виявляється,  $M_\Gamma$  є шуканою інтегральною поверхнею рівняння Пфаффа. Точніше, якщо позначити через  $\chi(t, s)$  розв'язок системи (6.73), який задовольняє початкову умову  $\chi(0, s) = \xi(s)$ , то для деякого  $\delta > 0$  рівняння

$$x = \chi(t, s), \quad t \in (-\delta, \delta), \quad s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \tag{6.74}$$

визначають (локальну) інтегральну поверхню рівняння Пфаффа (6.55), яка проходить через точку  $x_0$ .

Множина (6.74) справді є поверхнею. Цей факт впливає з міркувань, наведених у доведенні теореми існування розв'язку задачі Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку. Отже, для обґрунтування сформульованого алгоритму залишається переконатися в тому, що

$$\omega'_s := a(\chi(t, s)) d\chi(t, s) = 0 \quad \forall (t, s) \in (-\delta, \delta) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta).$$

Для цього виведемо диференціальні рівняння, які описують зміну в часі  $t$  коефіцієнтів при  $ds$  і  $dt$  форми  $\omega'_s$ . Маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega'_s &= \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial t} \right) dx + a d \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_{x=\chi(t,s)} = \\ &= \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} \right) dx_i + \sum_{j=1}^3 a_j d \frac{\partial x_j}{\partial t} \right]_{x=\chi(t,s)} = \\ &= \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} g_j + a_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) dx_i \right]_{x=\chi(t,s)} \end{aligned} \tag{6.75}$$

З (6.72) знаходимо

$$0 = d(ag) = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_j}{\partial x_i} g_j + a_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) dx_i.$$

Тому

$$\sum_{j=1}^3 a_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_j}{\partial x_i} g_j.$$

З (6.75) тепер дістаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega'_s = \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) g_j dx_i \right]_{x=\chi(t,s)} = \{[\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{g}] dx\}_{x=\chi(t,s)}.$$

Оскільки виконуються умови (6.63) та (6.72), то векторне поле  $[\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{g}]$  колінеарне векторному полю  $\mathbf{a}$ . Тому знайдеться така функція  $\rho(x)$ , що

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega'_s = \{ \rho(x) \mathbf{a}(x) dx \}_{x=\chi(t,s)} \equiv \rho(\chi(t,s)) \omega'_s.$$

Це й є шукане рівняння для  $\omega'_s$ . Розв'язавши його, дістанемо

$$\omega'_s = \exp \left[ \int_0^t \rho(\chi(t,s)) dt \right] \omega_s^0.$$

Оскільки  $\Gamma$  є інтегральною кривою рівняння Пфаффа, то

$$\omega_s^0 = \mathbf{a}(\xi(s)) d\xi(s) = \mathbf{a}(\xi(s)) \xi'(s) ds = 0,$$

а тому й  $\omega'_s = 0$ . Таким чином, рівняння (6.74) справді визначають інтегральну поверхню рівняння (6.55).

Доведемо її єдиність. Нехай, навпаки, існують дві інтегральні поверхні  $S_1$  та  $S_2$  рівняння (6.55), які проходять через точку  $x_0$  і не збігаються в будь-якому околі цієї точки. Вони мають спільну дотичну площину  $\Pi$ , ортогональну до вектора  $\mathbf{a}(x_0)$ . Уведемо в  $\mathbb{R}^3$  нову декартову прямокутну систему координат  $(x, y, z)$  із початком  $O$  у точці  $x_0$  так, щоб площина  $xOy$  збігалася з  $\Pi$ , а вісь  $Oz$  була

спрямована вздовж вектора  $\mathbf{a}(x_0)$ . Тоді кожна поверхня  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) в околі точки  $O$  буде графіком деякої неперервно диференційовної функції  $z = f_i(x, y)$ . Згідно з припущенням для як завгодно малого  $\epsilon > 0$  існує точка  $(x_*, y_*)$  така, що  $|x_*| + |y_*| < \epsilon$  і  $f_1(x_*, y_*) \neq f_2(x_*, y_*)$ . Покладемо  $F = y_*x - x_*y$ . Рівняння  $F = 0$  визначає площину, яка проходить через точки  $(x_*, y_*, f_1(x_*, y_*))$  і перетинає поверхні  $S_1$  та  $S_2$  по двох різних кривих  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$ .

Повернемося до старих координат. Кожна з кривих  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  проходить через точку  $x_0$  і є інтегральною кривою системи (6.64). Для останньої існує лише одна інтегральна крива, яка проходить через точку  $x_0$ . Ця суперечність доводить єдиність інтегральної поверхні, яка проходить через задану точку.

### □ Приклад 6.7

*Розглянемо рівняння*

$$(2yz + 3x) dx + xz dy + xy dz = 0. \quad (6.76)$$

У даному випадку  $\mathbf{a}(x, y, z) = (2yz + 3x, xz, xy)$ . Оскільки  $\text{rot } \mathbf{a}(x, y, z) = (0, y, -z)$ , то умова (6.63) виконується.

Знайдемо інтегральні криві рівняння (6.76), які лежать у площині

$$F := y = 1.$$

На ній рівняння (6.76) набуває вигляду

$$(2z + 3x) dx + x dz = 0.$$

Це лінійне відносно  $z$  рівняння легко інтегрується, і ми дістаємо сім'ю інтегральних кривих рівняння (6.76), які лежать у площині  $y = 1$ :

$$y = 1, z = \frac{c}{x^2} - x. \quad (6.77)$$

Тепер побудуємо векторне поле  $\mathbf{g}$  так, щоб воно не лежало в площині  $y = 1$ , задовольняло умову  $\mathbf{a}\mathbf{g} = 0$  і систему  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  можна було легко зінтегрувати. Зручно покласти  $\mathbf{g}(x, y, z) := \text{rot } \mathbf{a}(x, y, z) = (0, y, -z)$ . Відповідна система в симетричній формі має вигляд

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z}.$$

Її загальний інтеграл

$$yz = c_1, \quad x = c_2. \quad (6.78)$$

Тепер для того щоб утворити поверхню з інтегральних кривих сім'ї (6.78), які для фіксованого  $c$  виходять із точок кривої (6.77), робимо так само, як і під час розв'язування задачі Коші для рівняння з частинними похідними: підставляємо (6.77) у (6.78), виключаємо змінну  $x$ , в одержаному співвідношенні  $c/c_2^2 - c_2 = c_1$  заміняємо  $c_1, c_2$  лівими частинами рівностей (6.78). Остаточно дістаємо рівняння сім'ї інтегральних поверхонь рівняння (6.76):

$$x^2 y z + x^3 = c.$$

Звідси, зокрема, випливає, що інтегрувальним множником форми  $(2yz + 3x) dx + xz dy + xy dz$  є функція  $\mu = x$ .

## ВПРАВИ ТА ЗАДАЧІ

- ① Знайти інтегральні поверхні рівнянь Пфаффа:
- а)  $(x + y^2 z^3) dx + (1 + 2xyz^3) dy + (z^4 + 3xy^2 z^2) dz = 0$ ;
- б)  $yz dx + 2xz dy + xy dz = 0$ .
- ② Нехай  $n = 3$ , форма  $\omega := a(x) dx$  задовольняє умову (6.63), інтегральна крива  $\Gamma$  рівняння Пфаффа (6.55) не дотикається векторного поля  $g(x) := \text{rot } a(x)$  і поверхню  $M_\Gamma$  утворено з фазових кривих системи  $\dot{x} = g(x)$ , які проходять через  $\Gamma$ . Довести, що  $M_\Gamma$  є інтегральною поверхнею рівняння  $\omega = 0$  за допомогою формули Стокса. Для цього показати, що  $\int_l \omega = 0$  для будь-якої незамкненої (а отже, й замкненої) кривої  $l \subset M_\Gamma$ .
- ✓ *Вказівка.* Кінці кривої  $l$  можна сполучити дугами  $l_1, l_2$  фазових кривих системи (6.73) з кривою  $\Gamma$  (рис. 6.6, б). Нехай  $A_i = \Gamma \cap l_i$  ( $i = 1, 2$ ) і  $\Gamma_1 \subset \Gamma$  — дуга з кінцями в точках  $A_1, A_2$ . Маємо цикл  $c = l + l_1 + \Gamma_1 + l_2 \subset M_\Gamma$ . Довести, що  $\int_c \omega = 0, \int_l \omega = 0$ .
- ③ Нехай  $n = 3$ , форма  $\omega := a(x) dx$  задовольняє умову (6.63),  $a_3(x) \neq 0$  і для кожного фіксованого  $x_3$  функція  $V(x_1, x_2, x_3)$  є інтегралом рівняння

$$a_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 + a_2(x_1, x_2, x_3) dx_2 = 0.$$

Показати, що інтеграл рівняння (6.55) можна знайти у вигляді  $U(x) = V(x) + \varphi(x_3)$ .

---

---

## ЩО ВИВЧАЄ СУЧАСНА ТЕОРІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ?

Розбудова теорії звичайних диференціальних рівнянь триває вже понад три століття. Сьогодні ця математична дисципліна являє собою багаторівневу систему знань із розгалуженою внутрішньою структурою, різноманітними зв'язками з іншими розділами математики, розвинутим понятійним апаратом, потужним арсеналом аналітичних, геометричних та чисельних методів.

Коло проблем, які досліджує теорія диференціальних рівнянь, невпинно розширюється. Зараз у ній можна виділити близько двадцяти великих розділів. Згідно з класифікаційною системою провідних реферативних математичних журналів загальне число тематичних напрямів (рубрик), які безпосередньо стосуються теорії звичайних диференціальних рівнянь, перевищує півтори сотні й продовжує зростати. Можна також налічити кілька десятків рубрик, які відображають зв'язки цієї теорії з іншими математичними дисциплінами. І тому навіть лаконічні огляди її здобутків за останні десятиліття нерідко виливаються в багатотомні видання.

Для того щоб дати читачеві хоча б поверхове уявлення про сучасний стан теорії звичайних диференціальних рівнянь, стисло схарактеризуємо кілька, на наш погляд, найважливіших її розділів, наведемо короткий перелік задач, які формували обличчя цієї теорії в ХХ ст.

Розпочнемо з *якісної теорії диференціальних рівнянь* (ЯТ). Основою її завдання полягає у вивченні властивостей розв'язків диференціальних рівнянь без відшукання явного виду самих розв'язків. Класичним прикладом, який дає змогу дістати досить добре уявлення про підходи ЯТ, є запропонований Ж. Пуанкаре і І. Бендіксоном опис можливого розташування траєкторій автономних систем на площині (див. п. 5.7).



В ідеалі основна задача ЯТ стосовно окремо взятої автономної (не-автономної) системи мала б полягати в змалюванні глобальної картини розташування її фазових (інтегральних) кривих. На жаль, якщо вимірність системи перевищує 2, то таку задачу вдається розв'язати лише у виняткових випадках. Тому більш скромне й реальне завдання полягає в локальному дослідженні якісної поведінки траєкторій, наприклад в околі специфічної фазової кривої (положення рівноваги, циклу, квазіперіодичної орбіти тощо). Результати, які вдалося на сьогодні дістати в цьому напрямі, ідейно близькі до теореми Гробмана—Хартмана, сформульованої в п. 1.9.4.

Самостійний інтерес становить і сама проблема існування траєкторій указаних типів. Відповідні твердження досить часто одержують із застосуванням топологічних принципів. Наприклад, *задачу про періодичні розв'язки* попередньо зводять до задачі існування нерухомої точки спеціальним чином побудованого відображення. Після цього з'являється можливість скористатися топологічними результатами типу теореми Боля—Брауера. Остання стверджує, що неперервне відображення  $n$ -вимірного симплексу в себе має принаймні одну нерухому точку.

Як приклад наведемо один цікавий результат, одержаний у 1937 р. Дж. Літлвудом під час дослідження вимушених коливань у так званому осциляторі Ван дер Поля. Відповідне диференціальне рівняння має вигляд

$$\ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} + x = kb\lambda \sin \lambda t.$$

Воно виникає в радіоелектроніці як спрощена модель лампового генератора. Виявляється, це рівняння при великих значеннях параметра  $k$  і спеціальному виборі параметра  $b$  має два асимптотично стійких розв'язки з періодами  $(2n + 1)2\pi/\lambda$  та  $(2n - 1)2\pi/\lambda$ , де  $n$  — досить велике натуральне число. Ці розв'язки притягують до себе «більшість» інших розв'язків. Крім того, існує зліченна множина нестійких періодичних розв'язків і континуум неперіодичних із певними властивостями повторюваності — так званих рекурентних розв'язків (про властивість рекурентності йтиметься далі).

Дуже складною виявилася *задача про визначення кількості граничних циклів* автономної системи на площині, в правій частині якої фігурують поліноми степеня  $n \geq 2$ . У 1923 р. А. Дюлак опублікував доведення теореми про скінченність числа граничних циклів такої системи. Однак через шістдесят років виявилось, що в цьому доведенні є про-

галина<sup>\*</sup>. Гіпотеза про те, що для кожного  $n$  існує таке  $N$ , що зазначена система має не більше ніж  $N$  граничних циклів, пов'язана з шістнадцятою проблемою Гільберта. В усій повноті правильність цієї гіпотези не підтверджено й досі, хоча вже відомо, наприклад, що: у випадку, коли поліноміальна система має лише так звані невивроджені особливі точки, кількість її граничних циклів скінченна; жоден круг на площині  $\mathbb{R}^2$  не містить зліченного числа граничних циклів поліноміального векторного поля степеня 2.

Кожна зріла математична теорія повинна мати засоби класифікації об'єктів, які вона вивчає. *Задача класифікації* в загальному випадку полягає в тому, щоб, увівши в досліджуваній множині певне відношення еквівалентності, розбити її на класи, утворені еквівалентними елементами, й описати кожен такий клас. Наприклад, у лінійній алгебрі класифікацію операторів, які діють в одному векторному просторі, можна здійснювати за нормальними жордановими формами їх матриць.

Якісна теорія досить успішно вирішує проблему локальної класифікації систем диференціальних рівнянь. Нехай, наприклад, вивчається множина автономних систем, які мають спільне положення рівноваги. Еквівалентними природно вважати кожні дві системи, одну з яких можна перетворити на іншу певною заміною змінних. Відображення, що визначає таку заміну, має залишати положення рівноваги нерухомим, бути невивродженим і принаймні один раз неперервно диференційовним. Для класифікації автономних систем за так уведеним відношенням еквівалентності успішно використовується *метод нормальних форм Пуанкаре*. Цей метод дає змогу зводити досліджувану систему до, в певному сенсі, найпростішого, канонічного вигляду, знищуючи в її правій частині другорядні компоненти й залишаючи саме ті члени, які істотно впливають на локальну поведінку розв'язків. Особливо ефективним виявився метод Пуанкаре для розв'язання *задач стійкості* положень рівноваги, періодичних, квазіперіодичних рухів у *критичних випадках*, коли порушуються умови теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням.

Досліджуючи проблему *глобальної класифікації нелінійних систем*, використовують поняття топологічної еквівалентності й, особливо, топологічної орбітальної еквівалентності. Нехай на двох фазових

<sup>\*</sup> *Ильяшенко Ю. С. Особые точки и предельные циклы дифференциальных уравнений на вещественной и комплексной плоскости. — Пушино, 1982. — 39 с. — (Препринт / НИВЦ АН СССР).*

просторах  $D_1$  і  $D_2$  відповідно задано дві системи, які породжують потоки  $(D_1, \{g_1^t\}_{t \in \mathbb{R}})$  і  $(D_2, \{g_2^t\}_{t \in \mathbb{R}})$ . Такі системи називаються *топологічно еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм  $h: D_1 \rightarrow D_2$  простору  $D_1$  на простір  $D_2$ , який переводить потік першої системи в потік другої, тобто  $h \circ g_1^t = g_2^t \circ h$  для всіх  $t \in \mathbb{R}$ . Дві системи називаються *топологічно орбітально еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм фазового простору першої системи на фазовий простір другої, при якому образом кожної орієнтованої фазової кривої першої системи є орієнтована фазова крива другої.

Однак, як з'ясувалося в 60-х роках ХХ ст., задача глобальної топологічної класифікації систем, вимірність яких більша за 2, є в певному сенсі безперспективною. Фазові портрети таких систем можуть мати надзвичайно складну структуру. Чого вартий один лише такий факт<sup>\*</sup>: розв'язки диференціального рівняння

$$3y^4 y'' y''' - 4y^4 y''^2 y''' + 6y^3 y''^2 y''' y''' + \\ + 24y^2 y''^4 y''' - 12y^3 y'' y'''^3 - 29y^2 y''^3 y'''^2 + 12y''^7 = 0$$

утворюють щільну множину в просторі неперервних функцій  $C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ . Точніше, для будь-якої функції  $f(x) \in C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$  і для будь-якої функції  $\epsilon(x) \in C(\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty))$  існує такий розв'язок  $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$  вписаного рівняння, що

$$|y(x) - f(x)| < \epsilon(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Нерідко поведінка окремих розв'язків багатовимірних систем суперечить нашій інтуїції. На підтвердження цієї тези наведемо такий приклад. Порівняно недавно було встановлено, що в системі  $n$  частинок, які рухаються в тривимірному просторі й взаємодіють між собою за законом гравітації (див. приклад В. 6), при  $n \geq 5$  існують такі рухи, коли хоча б одна з частинок за скінченний (!) час утікає на нескінченність. При цьому зіткнень частинок у системі не відбувається<sup>\*</sup>.

Розмаїття можливих типів фазових портретів багатовимірних систем примусило математиків замислитися над питанням про те, які саме системи взагалі доцільно вивчати, які властивості систем слід вважати «стійкими», «тиловими», а які можуть проявлятися лише як виняток.

\* Rubel L. A. A universal differential equation// Bull. Amer. Math. Soc. — 1981. — 4, N 3. — P. 345–349.

\*\* Xia Z. The existence of non-collision singularities in Newtonian systems// Ann. Math. — 1992. — 135. — P. 411–468.

У зв'язку з цим не зайвим буде згадати поняття коректності, яке розглядалося в п. 5.2. Розвиваючи останнє, ввели поняття структурно стійкої (грубої) системи. Систему  $\dot{x} = f(x)$ , де  $f(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ , називають *структурно стійкою (грубою)*, якщо при всіх досить малих  $\delta > 0$  вона топологічно орбітально еквівалентна системі  $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ , де  $\tilde{f}(x) \in C^1(D \mapsto \mathbb{R}^n)$ ,  $\sup_{x \in D} (\|f(x) - \tilde{f}(x)\| + \|f'(x) - \tilde{f}'(x)\|) < \delta$ , і при цьому гомеоморфізм, який визначає вказану еквівалентність, має бути близьким до тотожного.

Починаючи з другої половини ХХ ст. структурно стійкі системи стали одним з основних об'єктів дослідження *теорії динамічних систем* (ТДС). Ця математична дисципліна виросла з ЯТДС і вивчає властивості абстрактних потоків — однопараметричних груп гомеоморфізмів (дифеоморфізмів) — безвідносно до того, пов'язані останні з деякими автономними системами, чи ні. Фазовими просторами динамічних систем, поряд із областями скінченновимірному евклідового простору, можуть виступати складніші множини, що мають певну структуру, наприклад многовиди, абстрактні метричні простори тощо.

На сьогодні детально з'ясовано природу грубих потоків на двовимірних поверхнях, зокрема на торах, виявлено й проаналізовано деякі важливі класи грубих потоків на багатовимірних фазових просторах: системи Аносова, системи Морса—Смейла... Цікаво відзначити, що характерною особливістю таких систем є нестійкість окремо взятої траєкторії, більше того, «розбігання» траєкторій. При цьому відстань між точками, які в початковий момент могли знаходитись як завгодно близько, зростає з часом за експоненціальним законом. Природно припустити, що саме такі системи можуть виступати в ролі математичних моделей турбулентних явищ, які вивчаються в аерогідромеханіці.

Слід зауважити, що з часу свого зародження ТДС вивчала переважно різноманітні властивості рекурентності (повторюваності) та граничної поведінки рухів, породжених потоками. Сформулюємо лише один результат, одержаний в цьому напрямі Дж. Біркгофом.

Попередньо дамо кілька означень. Нехай  $(X, \{g^t\}_{t \in \mathbb{R}})$  — динамічна система на фазовому просторі  $X$ . Точка  $x \in X$  називається *рекурентною*, якщо для довільного  $\epsilon > 0$  знайдеться таке  $L > 0$ , що вся траєкторія цієї точки належить  $\epsilon$ -околу будь-якого свого відрізка завдовжки  $L$ . Кожна точка траєкторії рекурентної точки теж рекурентна. Отже, можна говорити про рекурентну траєкторію. Множина  $M \subseteq X$  називається *мінімальною*, якщо вона непорожня, замкнена, інваріантна й не має власних підмножин із такими самими властивостями. Дж. Біркгоф

довів, що кожна мінімальна множина є замиканням рекурентної траєкторії. Звідси, зокрема, випливає, що замикання кожної обмеженої півтраєкторії містить рекурентну траєкторію.

Цікавою проблемою ТДС є питання про те, які многовиди можуть правити за мінімальні, тобто фазові простори мінімальних потоків. Найвідомішим нетривіальним прикладом мінімального многовиду є тор. Поведінку траєкторій динамічних систем без особливих точок на двовимірних торах було з'ясовано А. Пуанкаре та А. Данжуа. Вона цілковито визначається так званим числом обертання, яке характеризує середній нахил траєкторій потоку на торі до його паралелі. Якщо число обертання раціональне, то кожна траєкторія або сама є циклом, або притягується до деякого циклу. У випадку ірраціонального числа обертання кожна траєкторія утворює всюди щільну обмотку тора.

Важливу роль у дослідженні граничної поведінки траєкторій динамічних систем відіграють *атрактори*. Замкнена інваріантна множина  $\mathcal{A}$  динамічної системи  $(X, \{g^t\}_{t \in \mathbb{R}})$  називається *атрактором*, якщо вона стійка за Ляпуновим (тобто для довільного околу  $U$  множини  $\mathcal{A}$  знайдеться такий її окіл  $V$ , що будь-яка півтраєкторія точки з околу  $V$  належить  $U$ ) і будь-яка досить близька до неї точка під дією потоку необмежено наближається до  $\mathcal{A}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Структура атракторів може бути вельми різноманітною. Так, найпростішими атракторами є ізолювані точки (асимптотично стійкі положення рівноваги) та орбітально стійкі граничні цикли.

У 1934 р. М. М. Крилов та М. М. Боголюбов дослідили випадок, коли в ролі атрактора динамічної системи виступає двовимірний інваріантний тор  $T^2$ . Спираючися на результати А. Пуанкаре та А. Данжуа, вони описали властивості рухів точок, які під дією потоку наближаються до тора  $T^2$ . Ці дослідження в подальшому стимулювали розвиток *теорії інваріантних та інтегральних многовидів*, важливим завданням якої є вивчення впливу збурень на такі многовиди й поведінки траєкторій (інтегральних кривих) в їхніх околах.

Використання комп'ютерів для проведення чисельного аналізу поведінки траєкторій математичних моделей фізичних систем дало змогу виявити атрактори з вельми складною внутрішньою структурою — так звані «дивні (хімерні)» атрактори (strange attractors). Якщо такий об'єкт перетнути з деякою гіперповерхнею, то в перерізі буде дуже посічене «діряве» утворення, близьке за структурою до канторової множини. Наявність дивного атрактора спричиняє дуже нерегулярну, хаотичну поведінку траєкторій відповідної динамічної системи. Науковий напрям на стику ЯТ, ТДС та нелінійної фізики, який вивчає явища ви-

никнення хаосу в детермінованих системах, прийнято називати *хаотичною динамікою*.

Мабуть, найвідоміша система з «дивним» атрактором має вигляд

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy.$$

Її пов'язують з ім'ям американського метеоролога Е. Лоренца, котрий використовував цю систему як модель для аналізу певних гідродинамічних процесів і в 1963 р. експериментально виявив у ній «дивний» атрактор при значеннях параметрів  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ .

Заслуговує на увагу той факт, що перш ніж у системі Лоренца, при зміні параметра  $\sigma$  в межах від 0 до 10, з'являється «дивний» атрактор, її фазовий портрет зазнає серії кардинальних перетворень — біфуркацій.

*Теорія біфуркацій* — це ще один важливий напрям ЯТ, який дуже інтенсивно розвивався в другій половині ХХ ст. У цій теорії об'єктом дослідження є системи, які залежать від одного або кількох параметрів. При біфуркаційному аналізі заданої сім'ї систем  $\dot{x} = f(x, \lambda)$  множину значень параметрів  $\mathcal{L}$  намагаються розбити на відкриті області так, щоб кожні дві системи  $\dot{x} = f(x, \lambda_1)$ ,  $\dot{x} = f(x, \lambda_2)$ , для яких  $\lambda_1, \lambda_2$  належать одній області, були орбітально топологічно еквівалентними (слід зауважити, що таке відношення еквівалентності не є єдино можливим). Межі вказаних областей складаються з критичних точок — біфуркаційних значень параметрів. Якісні перетворення в досліджуваній системі відбуваються саме в той «момент», коли параметр  $\lambda$  проходить через критичні межі. При послідовних біфуркаціях поведінка траєкторій системи може шоразу ускладнюватися й урешті-решт ставати хаотичною.

Один зі шляхів виникнення хаосу в детермінованій системі може бути таким. Спочатку атрактором системи є положення рівноваги. При зміні параметрів системи настає момент, коли воно втрачає стійкість і від нього відгалужується граничний цикл, який притягує до себе інші траєкторії — народжується одночастотний режим коливальності (таку побудову в системі називають біфуркацією Андронова—Гопфа). При подальшій зміні параметрів розмір граничного циклу збільшується. Однак настає момент, коли й він втрачає стійкість і опиняється «всередині» двовимірного інваріантного тора — атрактора, про який ми вже згадували у зв'язку з дослідженнями М. М. Крилова і М. М. Боголюбова. У разі втрати стійкості двовимірний тор може породжувати стійкий тривимірний і т. д. Відомі, однак, приклади, коли після втрати

стійкості тривимірним тором у системі відразу з'являється дивний атрактор.

Інший сценарій переходу до хаосу пов'язують із послідовністю біфуркацій подвоєння періоду. При кожній біфуркації такого типу втрата властивості атрактора циклом  $s$  супроводжується появою нового атрактора у вигляді цикла, який має приблизно вдвічі більший період і обвиває цикл  $s$ .

Строге пояснення цілої низки біфуркаційних явищ у динамічних системах стало можливим значною мірою завдяки досягненням *теорії збурень*. Методи, які розробляються в рамках зазначеної теорії (так звані методи збурень, або асимптотичні методи), дають змогу конструювати аналітичні наближення до розв'язків систем, у певному сенсі близьких до інтегрованих. Як уже відзначалося у вступі, теорія збурень спочатку розвивалася для задоволення потреб небесної механіки. Згодом вона дістала широке застосування в дослідженні математичних моделей, що виникають в інших природничих науках. <sup>7</sup>

Один з елементарних асимптотичних методів розглядався нами в п. 5.4. Там же було вказано на вельми суттєву ваду утворених відповідно до цього методу асимптотичних розвинень — непридатність для опису розв'язків на великих проміжках часу. На сьогодні розроблено багато рецептів побудови асимптотичних розвинень, вільних від указанного недоліку.

Слід відзначити, що тривалий час застосування методів збурень відбувалося за відсутності строгої математичної бази. Теоретичне обґрунтування більшості з них розпочалося тільки в середині ХХ ст. Так, у 1945 р. М. М. Боголюбов опублікував монографію, в якій міститься строге обґрунтування одного з найвідоміших методів теорії збурень — *методу усереднення*.

Викладемо ідею цього методу. Нехай для деякої незбуреної інтегрованої системи  $\dot{x} = f(t, x)$  відомий загальний розв'язок  $x = \varphi(t, c)$ , де  $c = (c_1, \dots, c_n)$  — набір довільних сталих. Досліджуючи збурену систему  $\dot{x} = f(t, x) + \epsilon f_1(t, x)$ , в якій  $\epsilon$  — так званий малий параметр ( $|\epsilon| \ll 1$ ), можна використати ідею методу варіації довільних сталих і шукати її розв'язок у вигляді  $x = \varphi(t, y)$ , де  $y = y(t)$  — нова невідома вектор-функція. Якщо таку заміну зробити в незбуреній системі, то, очевидно, прийдемо до тривіального рівняння  $\dot{y} = 0$  із загальним розв'язком  $y = c$ . Неважко тепер зрозуміти, що права частина збуреної системи в нових змінних буде пропорційною малому параметрові:

$$\dot{y} = \epsilon g(t, y).$$

[Випишіть явний вигляд  $g(t, y)$ .] Нові змінні у прийнято називати *повільними*.

Принцип усереднення полягає в тому, що для опису еволюції повільних змінних на проміжках часу порядку  $1/\epsilon$  використовують так звану усереднену систему

$$\dot{y} = \epsilon \bar{g}(y), \quad \bar{g}(y) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t, y) dt,$$

яка в багатьох прикладних задачах виявляється набагато простішою ніж вихідна система.

Так, у випадку  $n$ -вимірної лінійної системи  $y' = (A + \epsilon B(t))y$ , де  $A$  — стала, а  $B(t)$  —  $2\pi$ -періодична матриця, усереднена система на-

буває вигляду  $y' = (A + \epsilon \bar{B})y$ , де  $\bar{B} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(t) dt$ .

Зрозуміло, що таку систему можна зінтегрувати. Зауважимо, що в скалярному випадку ( $n = 1$ ) розв'язок усередненого лінійного рівняння має вигляд  $y = \exp((A + \epsilon \bar{B})t)y_0$ , а відповідним (у сенсі збігу початкових значень) розв'язком вихідного рівняння є функція  $y = \exp\left((A + \epsilon \bar{B})t + \epsilon \int_0^t \tilde{B}(s) ds\right)y_0$ , де  $\tilde{B}(t) := B(t) - \bar{B}(t)$  — коливна складова функції  $B(t)$ . Як бачимо, застосування принципу усереднен-

ня полягає в тому, що ми заміняємо множник  $\left(\epsilon \int_0^t \tilde{B}(s) ds\right) = 1 + O(\epsilon)$  на одиницю.

З теоретичного й прикладного поглядів дуже важливим є випадок, коли загальний розв'язок незбуреної автономної системи утворює сім'ю квазіперіодичних функцій часу  $t$ . (З поняттям квазіперіодичної функції ми зустрічалися в п. 2.5.) Якщо частоти цієї сім'ї є фіксованими числами, то вектор-функція  $g(t, y)$  квазіперіодична, завжди має середнє значення й застосування принципу усереднення є цілком виправданим. Однак природнішим є випадок, коли частоти загального розв'язку залежать від частини довільних сталих. (Саме така ситуація виникає, наприклад, у задачі про рух планет навколо Сонця.) Виявляється, тоді, як правило, можна ввести такі повільні змінні  $y = (y_1, \dots, y_l)$  і швидкі «кутові» змінні  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ , в яких збурена система набуває вигляду

$$\dot{y} = \epsilon a(y, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega(y) + \epsilon b(y, \varphi), \quad (1)$$



де  $\omega(y) = (\omega_1(y), \dots, \omega_m(y))$  — набір частот загального розв'язку незбуреної системи, а вектор-функції  $a(y, \varphi)$  та  $b(y, \varphi)$  мають період  $2\pi$  щодо кожної змінної  $\varphi_j, j = 1, \dots, m$ . У розглядуваному випадку застосування принципу усереднення полягає в тому, що для опису еволюції повільних змінних на проміжках часу порядку  $1/\epsilon$  використовують усереднену систему

$$\dot{y} = \epsilon \bar{a}(y), \quad \bar{a}(y) := \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} a(y, \varphi) d\varphi_1 \dots d\varphi_m.$$

Під час обґрунтування такого підходу виникає низка нетривіальних проблем, пов'язаних із необхідністю враховувати резонансні ефекти в системі. Останні проявляються тоді, коли в процесі еволюції повільних змінних комбінації вигляду  $k_1\omega_1(y) + \dots + k_m\omega_m(y)$ , де  $k_1, \dots, k_m$  — цілі числа, стають близькими до нуля. В певних областях фазового простору резонанси можуть спричиняти дуже складну (наприклад, хаотичну) поведінку розв'язків збурених рівнянь.

Системи вигляду (1) належать до основних об'єктів дослідження *теорії нелінійних коливань*. У рамках цієї теорії для вказаних систем вирішуються, зокрема, питання існування й наближеної побудови періодичних та квазіперіодичних розв'язків, а також періодичних інваріантних множин вигляду  $y = u_\epsilon(\varphi)$  (інваріантних торів), залежних від малого параметра.

Особливо складною виявилася задача про існування квазіперіодичних рухів та інваріантних торів. Вона виникла в надрах небесної механіки ще в середині XVIII ст. у зв'язку з фундаментальною проблемою стійкості Сонячної системи. Істотного прогресу в її розв'язанні вдалося досягти лише в середині 50-х — на початку 60-х років XX ст., коли зусиллями А. М. Колмогорова, В. І. Арнольда, М. М. Боголюбова, Ю. Мозера було створено неформальну теорію збурень для рівнянь вигляду (1).

У другій половині XX ст. інтенсивно розвивалася *асимптотична теорія так званих сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь*, які містять малий параметр  $\epsilon$  при похідних усіх або частини змінних. При нульовому значенні параметра настає виродження: утворюється гібридна система, що містить як алгебричні, так і, можливо, диференціальні рівняння. За цих обставин класична схема розвинення розв'язків за степенями малого параметра потребує суттєвої модифікації, а саме: до стандартного степеневого розвинення потрібно дописати ще й так званий примежовий ряд. Це означає, що розв'язок  $x(t, \epsilon)$  будуть у вигляді

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \Pi_0(t/\epsilon) + \epsilon(x_1(t) + \Pi_1(t/\epsilon)) + \epsilon^2(x_2(t) + \Pi_2(t/\epsilon)) + \dots,$$

де  $x_0(t)$  — розв'язок виродженої системи, а  $\Pi_k(t)$  — так звані *примежові функції*. Графіки компонент розв'язків сингулярно збурених систем нерідко мають «майже розривний» тип: кінці главних ділянок сполучаються між собою кривими, схожими на прямолінійні вертикальні відрізки.

Досі йшлося про асимптотичні методи, пов'язані з розвиненнями за малим параметром. Однак не менш важливою є задача відшукування асимптотик розв'язків диференціальних рівнянь у разі прямування незалежної змінної до нескінченності або до деякої особливої точки. В цьому напрямі було проведено чимало цікавих і глибоких досліджень, які дали змогу з дивовижною точністю описати асимптотичну поведінку розв'язків важливих класів як лінійних, так і нелінійних систем.

Для прикладу згадаємо знамените *рівняння Емдена—Фаулера*

$$\frac{d}{dx} \left( x^\alpha \frac{dy}{dx} \right) \pm x^\beta y^\nu = 0, \quad \alpha, \beta, \nu \in \mathbb{R}, \quad \nu > 1.$$

Воно має низку цікавих застосувань в астрофізиці та атомній фізиці. Існує проста заміна змінних  $(x, y) \mapsto (t, u)$ , степенева щодо  $x$  і лінійна щодо  $y$ , яка зводить рівняння Емдена—Фаулера до двочленного вигляду

$$\ddot{u} \pm t^\sigma u^\nu = 0 \quad (2)$$

з деяким  $\sigma \in \mathbb{R}$ . За різних співвідношень між числами  $\sigma$  та  $\nu$  вдається дістати асимптотичні зображення всіх розв'язків рівняння (2), продовжуваних на додатну піввісь. Такі розв'язки називаються правильними. Наприклад, при  $\sigma + 2 = 0$  кожен додатний правильний розв'язок рівняння (2), яке відповідає знаку «-», має асимптотичний вигляд  $u \sim [(v-1) \ln t]^{1/(v-1)}$ ,  $t \rightarrow \infty$ , а при  $\sigma + 2 > 0$  такі розв'язки мають асимптотику  $u \sim ct^{-(\sigma+2)/(v-1)}$ ,  $t \rightarrow \infty$ , де

$$c = \left[ \frac{(\sigma+2)(\sigma+v+1)}{(v-1)^2} \right]^{-1/(v-1)}$$

Точнішу інформацію про розв'язки дають їх нескінченні асимпто-

гичні розвинення. Як приклад наведемо формулювання результату, котрий уже можна віднести до розряду класичних. Розглянемо лінійну однорідну систему  $\dot{x} = A(t)x$ . Припустимо, що матричнозначна функція  $A(t)$  допускає асимптотичне розвинення

$$A(t) \sim A_0 + t^{-1}A_1 + \dots + t^{-m}A_m + \dots$$

і матриця  $A_0$  має прості власні числа. Тоді кожному власному числу  $\lambda_k$  відповідає розв'язок

$$x_k(t) \sim e^{\lambda_k t} t^{\mu_k} \left( a_0 + \frac{a_1}{t} + \dots + \frac{a_m}{t^m} + \dots \right),$$

де  $a_0$  — ненульовий вектор, а  $\mu_k$  — коефіцієнт біля  $t^{-1}$  у розвиненні того власного числа  $\lambda_k(t)$  матриці  $A_0 + t^{-1}A_1$ , яке прямує до  $\lambda_k$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Асимптотичні розвинення розв'язків диференціальних рівнянь природно будувати не лише при дійсних, а й при комплексних значеннях незалежної змінної. Саме так роблять в *аналітичній теорії диференціальних рівнянь*, основний принцип якої полягає в тому, що розв'язки досліджуються з позицій теорії аналітичних функцій комплексної змінної. (З поняттям аналітичної функції ми зустрічалися в п. 3.3.)

Розглянемо систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3)$$

в якій вектор-функція  $f: D \rightarrow \mathbb{C}^n$  в околі кожної точки  $(t_0, x_0)$  області  $D \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$  є сумою степеневих рядів змінних  $(t - t_0)$ ,  $(x_j - x_{0j})$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тоді за теоремою Коші (див. п. 5.4) у деякому крузі  $B_{r_0}(t_0) \subset \mathbb{C}$  із центром у точці  $t_0$  і радіусом  $r_0 = r_0(t_0, x_0)$  існує збіжний степеневий ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t_0, x_0)(t - t_0)^k$ ,  $a_0(t_0, x_0) = x_0$ ,  $a_k(t_0, x_0) \in \mathbb{C}^n$ , який задовольняє

рівняння (3) в сенсі збігу відповідних коефіцієнтів біля  $(t - t_0)^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Сума  $x(t; t_0, x_0)$  зазначеного ряду називається локальним розв'язком системи (3) у точці  $(t_0, x_0)$ .

Розв'язок  $x(t; t_0, x_0)$  природно спробувати продовжити за межі круга  $B_{r_0}(t_0)$  за допомогою локальних розв'язків у точках  $(t_j, x(t_j))$ , де  $t_j \in B_{r_0}(t_0)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  — деякий набір комплексних чисел, розташованих поблизу кола, яке обмежує круг  $B_{r_0}(t_0)$ . Специфіка процедури послідовного продовження в комплексному випадку проявляється в

тому, що область визначення непродовжуваного глобального розв'язку досить часто виявляється деякою неоднорозв'язною множиною  $G$ . Більше того, для замкненої кривої  $\gamma \subset G$  із набором кіл  $B_{r_j}(t_j) \subset G$ ,  $t_j \in \gamma$ ,  $j = 1, \dots, N$ , на які послідовно продовжується розв'язок [продовження здійснюється так, що  $x(t; t_j, x_j) = x(t; t_{j+1}, x_{j+1})$  при  $t \in B_{r_j}(t_j) \cap B_{r_{j+1}}(t_{j+1}) \neq \emptyset$ ,  $j = 1, \dots, N-1$ ], загальним слід вважати випадок, коли  $x(t; t_N, x_N) \neq x(t; t_0, x_0)$  при  $t \in B_{r_N}(t_N) \cap B_{r_0}(t_0) \neq \emptyset$ . Інакше кажучи, продовження розв'язку вздовж замкненої кривої може породжувати багатозначну функцію. Точка  $t_* \in \mathbb{C}$  називається критичною точкою глобального розв'язку  $x(t)$ , якщо при всіх досить малих  $\epsilon > 0$  цей розв'язок є багатозначною функцією в  $B_\epsilon(t_*) \setminus \{t_*\}$ . Основна задача аналітичної теорії диференціальних рівнянь полягає в тому, щоб вивчити властивості глобальних розв'язків.

Може статися, що критичні точки розв'язків диференціального рівняння не є ізольованими й навіть заповнюють деяку область. Точки цієї області називаються *рухомими критичними точками*. Французькі математики П. Пенлеве та Б. Гамб'є на межі XIX—XX століть класифікували рівняння  $\ddot{z} = R(t, z, \dot{z})$ , які не мають рухомих критичних точок, за умови, що  $R$  раціональна стосовно  $z$  та  $\dot{z}$  і має мероморфні\* за змінною  $t$  коефіцієнти. Одержаний ними список канонічних форм містить 50 рівнянь, 44 з яких інтегруються в квадратурах або зводяться до алгебричних рівнянь першого порядку. Шість рівнянь, що залишилися, називають *рівняннями Пенлеве*. Порівняно недавно виявлено цікаві зв'язки між рівняннями Пенлеве та нелінійними інтегровними рівняннями математичної фізики, такими, наприклад, як рівняння Кортевега—де Фріза (останнє згадувалося в п. 4.2).

Процедура продовження вздовж циклу  $\gamma$ , застосована до комплексної  $n$ -вимірної лінійної системи  $\dot{x} = A(t)x$  з аналітичною в  $D$  матрицею-функцією  $A(t)$ , породжує перетворення її фундаментальної матриці  $X(t) \mapsto X(t)C_\gamma$ , де стала невинуджена матриця  $C_\gamma$ , за аналогією з теорією  $T$ -періодичних систем, називається матрицею монодромії. Виявляється, якщо криві  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  гомотопні в  $D$ , то  $C_{\gamma_1} = C_{\gamma_2}$ . Якщо  $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$ , то  $C_\gamma = C_{\gamma_1} C_{\gamma_2}$ . Унаслідок цих властивостей відобра-

\* Функція  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  називається мероморфною, якщо вона аналітична в кожній точці області  $D \setminus \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ , де  $\tau_1, \tau_2, \dots$  — ізольовані полюси — такі точки, що  $\lim_{t \rightarrow \tau_j} |f(t)| = \infty$ .

ження  $\gamma \mapsto C_\gamma$  задає гомоморфізм фундаментальної групи області  $G$  у групу невідроджених комплексних  $(n \times n)$ -вимірних матриць. Образ цього гомоморфізму називається групою монодромії розглядуваної лінійної системи.

До важливих проблем аналітичної теорії належать задачі обчислення групи монодромії лінійної системи і, навпаки, відновлення лінійної системи за її групою монодромії та особливими точками фундаментальної матриці. Так, *проблема Римана* полягає в тому, щоб знайти раціональну матрицю  $A(t)$  лінійної системи, якщо відомі особливі точки її фундаментальної матриці. А знаменита *двадцять перша проблема Гільберта* формулюється так: «показати, що завжди існує лінійне диференціальне рівняння фуксового типу із заданими особливими точками й заданою групою монодромії». Принагідно зауважимо, що гіпергеометричне рівняння Гаусса (див. п. 3.3) є якраз рівнянням типу Фукса з особливими точками  $0, 1, \infty$ .

Розповідаючи про диференціальне рівняння в комплексній області, не можна не згадати новаторських праць С. В. Ковалевської, присвячених інтегруванню рівнянь руху важкого твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки. Саме за ці дослідження їй було присуджено премії Паризької (1888) та Шведської (1889) академії наук. С. В. Ковалевська вперше запропонувала в зазначеній механічній задачі розглядати час як комплексну змінну. Ставлячи вимогу, щоб рівняння руху мали однозначні й мероморфні розв'язки, і шукаючи останні у вигляді узагальнених степеневих рядів  $t^{-m} \sum_{k=0}^r a_k t^k$ , де  $m$  — деяке натуральне число, вона дійшла висновку, що такі розв'язки існують лише в чотирьох випадках співвідношень між моментами інерції тіла та координатами його центра мас. Три випадки були вже відомі раніше, зокрема випадок Ейлера, який ми розглянули в п. 4.3. Відкриття четвертого, найбільш нетривіального випадку належить особисто С. В. Ковалевській.

Досі йшлося про звичайні диференціальні рівняння в класичному розумінні цього терміна. Однак далеко не завжди математична модель, яка адекватно описує той чи інший процес, може бути представлена у вигляді системи класичних звичайних диференціальних рівнянь. Так, у різноманітних системах автоматичного регулювання зі зворотним зв'язком доводиться враховувати ефекти запізнення, спричинені скінченною швидкістю передачі будь-якого сигналу. Відповідні процеси моделюють за допомогою системи диференціальних рівнянь із запізненням. Ось приклад системи такого типу:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)).$$

Тут  $f: \mathbb{R}^{1+2n} \mapsto \mathbb{R}^n$ , а додатне число  $\tau > 0$  — характеристика запізнення. Особливість постановки початкової задачі для системи із запізненням полягає в тому, що як початкові дані слід брати число  $t_0 \in \mathbb{R}$  і вектор-функцію  $\xi(t)$ , визначену на відрізку  $[t_0 - \tau, t_0]$ ; шукати ж потрібно розв'язок, який на вказаному відрізку перетворюється на  $\xi(t)$ .

Під час розробки зразків сучасної техніки нерідко доводиться моделювати процеси, які супроводжуються стрибкоподібними змінами стану досліджуваної системи. Такі процеси описують за допомогою *диференціальних рівнянь з імпульсною дією (впливом)*. Ось приклад системи з імпульсною дією в задані фіксовані моменти часу  $\tau_1, \tau_2, \dots$ :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$x(\tau_k + 0) - x(\tau_k) = I_k(x(\tau_k)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тут  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  та  $I_k: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \dots$  — задані відображення. Розв'язок даної системи на проміжку  $J$  — це вектор-функція  $x(t), t \in J$  з такими властивостями: 1)  $x(t)$  є розв'язком системи  $\dot{x} = f(t, x)$  на кожному інтервалі, з яких складається множина  $J \setminus \{\tau_k\}_{k=1, 2, \dots}$ ; 2)  $x(t)$  неперервна зліва в кожній із тих точок послідовності  $\{\tau_k\}$ , які належать  $J$ ; 3) у кожній такій точці  $\tau_k$  вектор-функція  $x(t)$  має стрибок  $I(x(\tau_k))$ , який визначається умовою імпульсної дії.

У загальнішому випадку умову імпульсної дії задають на деякій гіперповерхні або послідовності деяких гіперповерхонь у  $\mathbb{R}^{1+n}$ . Природно, нарешті, розглядати й такі рівняння, в яких умова імпульсної дії враховує вплив випадкових факторів на систему.

Диференціальні рівняння, розв'язками яких є випадкові процеси, вивчає *теорія стохастичних диференціальних рівнянь*. Останні широко застосовуються в радіоелектроніці, вимірювальній техніці, економіці, фінансовій математиці, теорії масового обслуговування.

Дедалі більшу роль у сучасній теорії диференціальних рівнянь відіграють *методи функціонального аналізу*. Цей розділ математики вивчає нескінченновимірні, зокрема функціональні, простори й визначені на таких просторах відображення (оператори). В ефективності функціонально-аналітичного підходу ми мали змогу переконатися в п. 2.1 на прикладі залучення принципу стиснених відображень до доведення існування розв'язку лінійної однорідної системи (див. зауваження до теореми 2.1). Могутнім засобом аналізу розв'язності лінійних і особливо нелінійних крайових задач є *теорема Шаудера*. Остання стверджує:

якщо неперервний оператор  $F$  перетворює опуклу множину  $\mathcal{M}$  банахового простору на компакту частину множини  $\mathcal{M}$ , то знайдеться така точка  $x \in \mathcal{M}$ , що  $x = Fx$ . Для того щоб застосувати теорему Шаудера, досліджувану крайову задачу зводять до рівняння вигляду  $x = Fx$ , де  $F$  — оператор на відповідним чином вибраному банаховому просторі функцій, які задовольняють крайові умови.

Ще один напрям, тісно пов'язаний із функціональним аналізом, — *теорія абстрактних диференціальних рівнянь*, в якій, зокрема, вивчаються диференціальні рівняння вигляду  $\dot{x} = f(t, x)$ , де  $f: I \times D \rightarrow \mathcal{B}$  — оператор,  $I \subseteq \mathbb{R}$  — інтервал,  $D$  — множина банахова простору  $\mathcal{B}$ . Додатково багато важливих фактів якісної теорії, теорії стійкості, теорії бурень, інших розділів теорії звичайних диференціальних рівнянь на сьогодні вдалося поширити й на диференціальні рівняння в банахових просторах.

Активна розробка теорії неklasичних диференціальних рівнянь, до яких належать, зокрема, й рівняння із запізненням, імпульсні та стохастичні диференціальні рівняння, розпочалася лише в середині ХХ ст. У цей самий час було закладено основи *математичної теорії оптимальних процесів*. Проблеми, які вивчає цей важливий розділ математики, виникли, головним чином, із потреб теорії автоматичного керування та механіки керованого космічного польоту.

Наведемо формулювання однієї з основних задач теорії оптимальних процесів. Розглядається  $n$ -вимірна система

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4)$$

в якій  $u$  —  $m$ -вимірний параметр керування з деякої множини допустимих керувань  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ . Нехай  $\varphi(x, u) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathcal{U})$  — задана функція,  $x_0$  та  $x_1$  — задані точки в просторі  $\mathbb{R}^n$  і, нарешті,  $t_0$  — заданий початковий момент часу. Задача полягає в тому, щоб серед усіх  $\mathcal{U}$ -значних кусково-неперервних функцій  $u(t)$ , визначених на відрізку  $[t_0, t_1]$  (момент  $t_1$  може бути й не фіксованим) і таких, що крайова задача  $\dot{x} = f(x, u(t))$ ,  $x|_{t=t_0} = x_0$ ,  $x|_{t=t_1} = x_1$  має розв'язок  $x(t)$ , вказати ту, для якої функціонал

$$J := \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x(t), u(t)) dt$$

\* *Банаховим простором* називається лінійний простір  $\mathcal{B}$ , в якому введено норму елементів  $\|\cdot\|$  і який є повним метричним простором відносно метрики  $\rho(x, y) := \|x - y\|$ ,  $x, y \in \mathcal{B}$ .

досягає екстремального значення. Сформульована задача належить до некласичних варіаційних задач. (Прикладом класичної варіаційної задачі є задача про брахістохрону, сформульована в п. 4.2.) У важливому окремому випадку, коли  $\varphi \equiv 1$ , а отже,  $J = t_1 - t_0$ , маємо оптимальну задачу швидкодії: керування  $u(t)$  потрібно вибрати так, щоб час руху від точки  $x_0$  до точки  $x_1$  уздовж розв'язку системи (4) при  $u = u(t)$  був найменшим.

Наріжним каменем теорії оптимальних процесів є *принцип максимуму Понтрягіна*, сформульований Л. С. Понтрягіним у 1956 р. Цей принцип виражає необхідні умови оптимальності керування  $u(t)$  і відповідного розв'язку  $x(t)$ .

На цьому ми завершимо наш короткий екскурс у сучасну теорію звичайних диференціальних рівнянь. Читачеві, в якого виникло бажання поглибитися з цим розділом математики ґрунтовніше, можна порекомендувати звернутися до посібників і монографій, наведених у списку літератури. Зокрема, питання загальної та якісної теорії диференціальних рівнянь висвітлено в [1, 19, 20, 21, 29, 32, 37, 39, 41]. Прекрасним посібником із теорії стійкості є [2]. Про динамічні системи можна прочитати в [32, 41]. Різноманітні аспекти теорії збурень та теорії нелінійних коливань розглядаються в [19, 22, 36]. Про сингулярно збурені рівняння можна прочитати в підручнику [14]. Теорія асимптотичних розвинень за незалежною змінною викладається в [24, 30]. Питання аналітичної теорії диференціальних рівнянь висвітлено в [26, 29]. Хорошим вступом до теорії диференціальних рівнянь із відхиленням аргументу є книга [38]. Теорію рівнянь з імпульсною дією викладено в [35]. Стохастичним диференціальним рівнянням присвячено книгу [25]. У монографії [27] досліджуються проблеми стійкості розв'язків диференціальних рівнянь у банахових просторах. Принцип максимуму Понтрягіна викладено в [31]. Нарешті, в [18, 34, 39, 40] можна знайти багато цікавих застосувань диференціальних рівнянь у прикладних задачах.



## ДОДАТКИ

### Додаток 1

#### БУДОВА ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА

##### Д.1.1. Лінійні оператори та їх матриці

Нехай  $V^n$  —  $n$ -вимірний векторний простір над полем скалярів  $P$ , де  $P = \mathbb{R}$  або  $P = \mathbb{C}$ .

Віображення  $A : V^n \mapsto V^n$  називається *лінійним оператором*, якщо для будь-яких векторів  $x, y \in V^n$  і будь-яких скалярів  $\alpha, \beta \in P$  виконується рівність

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Нехай  $\{e_i\}_{i=1}^n$  — базис простору  $V^n$ . *Матрицею оператора  $A$*  в цьому базисі називається матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

де скаляри  $a_{ij}$  однозначно визначаються з розкладів векторів  $Ae_j$  за базисом  $\{e_i\}_{i=1}^n$ :

$$Ae_j = a_{1j}e_1 + \dots + a_{nj}e_n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Систему цих рівностей у символічному вигляді запишемо так:

$$A[e_1; \dots; e_n] = [e_1; \dots; e_n] \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(Зверніть увагу, як формуються індекси скалярів  $a_{ij}$ .)

Нехай  $x_1, \dots, x_n$  — координати вектора  $x$  у базисі  $\{e_i\}_{i=1}^n$ :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n := [e_1; \dots; e_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Поставивши вектору  $x$  у взаємно однозначну відповідність вектор-стовпець із його координат

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

дістанемо

$$Ax \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

тобто образу вектора  $x$  при дії оператора  $A$  відповідає добуток матриці  $A$  на вектор-стовпець із координат вектора  $x$ .

Множина

$$\ker A := \{x \in V^n : Ax = 0\}$$

називається *ядром оператора  $A$* . Множина

$$\operatorname{im} A = \bigcup_{x \in V^n} Ax := A(V^n)$$

називається *образом оператора  $A$* . Обидві ці множини є лінійними підпросторами простору  $V^n$ .

Нехай  $B : V^n \mapsto V^n$  — лінійний оператор і  $\alpha \in P$ . Оператори, що діють за правилом  $x \mapsto \alpha Ax$ ,  $x \mapsto Ax + Bx$ ,  $x \mapsto ABx$ , називаються відповідно *добутком скаляра  $\alpha$  на оператор  $A$*  (позначення  $\alpha A$ ), *сумою операторів  $A$  і  $B$*  (позначення  $A + B$ ), *добутком оператора  $A$  на оператор  $B$*  (позначення  $AB$ ). За означенням  $A^k := \underbrace{A \dots A}_k$ .

операторів  $A$  та  $B$  відповідно в деякому базисі простору  $V^n$ . Легко бачити, що матрицями операторів  $\alpha A$ ,  $A + B$ ,  $AB \in$  відповідно  $\alpha A$ ,  $A + B$ ,  $AB$ .

Лінійний взаємно однозначний оператор  $S$  називається *лінійним автоморфізмом* простору  $V^n$ . Для такого оператора визначено обернений оператор  $S^{-1}$ . За означенням  $S^{-1}S = SS^{-1} = \text{Id}$ , де  $\text{Id}$  — тотожний оператор:  $\text{Id } x := x \quad \forall x \in V^n$ .

Лінійний автоморфізм  $S$  ставить у відповідність оператору  $A$  подібний оператор  $A' := S^{-1}AS$ , який визначається умовою комутативності діаграми

$$\begin{array}{ccc} V^n & \xrightarrow{A} & V^n \\ S \uparrow & & \uparrow S \\ V^n & \xrightarrow{A'} & V^n \end{array}$$

Нехай  $V^m$  і  $V^n$  — пара лінійних просторів над спільним полем скалярів  $P$ . Відображення  $A: V^m \mapsto V^n$  називають *лінійним*, якщо воно для будь-яких  $\alpha, \beta \in P$  і будь-яких  $x, y \in V^m$  задовольняє умову

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Нехай  $\{e_j\}_{j=1}^m$  та  $\{h_j\}_{j=1}^n$  — базиси відповідно у  $V^m$  та  $V^n$ . Прямокутна матриця  $A := \{a_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n, m}$ , утворена скалярами  $a_{ij}$ , які однозначно визначаються розкладами

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} h_i, \quad j = 1, \dots, m.$$

називається *матрицею відображення  $A$*  відносно вказаних базисів. Після зіставлень

$$x = \sum_{j=1}^m x_j e_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad A \leftrightarrow A$$

дістанемо

$$Ax \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

### Д.1.2. Інваріантні підпростори та розщеплення матриці оператора

Векторний підпростір  $V^m \subset V^n$  називається *інваріантним* відносно оператора  $A$ , якщо  $A(V^m) \subset V^m$ .

Звуженням оператора  $A$  на інваріантний підпростір  $V^m$  називається оператор  $A|_{V^m}$ , який кожному векторові  $x \in V^m$  ставить у відповідність вектор  $Ax \in V^m$ .

Нагадаємо, що простір  $V^n$  є прямою сумою підпросторів  $V_1^{n_1}, \dots, V_p^{n_p}$  ( $V^n = V_1^{n_1} \oplus \dots \oplus V_p^{n_p}$ ), де  $n_1 + \dots + n_p = n$ , якщо кожен вектор  $x \in V^n$  єдиним чином можна подати у вигляді суми  $x = x_1 + \dots + x_p$ , де  $x_i \in V_i^{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$  (еквівалентна умова  $V_i^{n_i} \cap V_j^{n_j} = \{0\}$  при  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, p$ ).

Припустимо, що  $V^n = V_1^{n_1} \oplus \dots \oplus V_p^{n_p}$  і кожен із підпросторів  $V_i^{n_i}$  є інваріантним відносно оператора  $A$ . Нехай  $\{e_k^i\}_{k=1}^{n_i}$  — базис підпростору  $V_i^{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Оскільки  $Ae_k^i \in V_i^{n_i}$ , то вектор  $Ae_k^i$  є лінійною комбінацією векторів  $e_1^i, \dots, e_{n_i}^i$ . Тому в базисі  $\{e_k^i\}_{k=1}^{n_i}$  матриця оператора  $A$  розщеплюється в так звану *кронекерову суму* квадратних матриць  $A_1, \dots, A_p$  розмірами  $n_1 \times n_1, \dots, n_p \times n_p$  відповідно:

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_p) := \begin{pmatrix} A_1 & 0_{n_1, n_2} & 0_{n_1, n_3} & \dots & 0_{n_1, n_p} \\ 0_{n_2, n_1} & A_2 & 0_{n_2, n_3} & \dots & 0_{n_2, n_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{n_p, n_1} & 0_{n_p, n_2} & 0_{n_p, n_3} & \dots & A_p \end{pmatrix},$$

де через  $0_{ij}$  позначено матрицю, яка має  $i$  рядків та  $j$  стовпців і складається з одних нулів.

### Д.1.3. Характеристичний многочлен, власні числа та вектори

*Визначником оператора  $A$*  називається скаляр  $\det A := \det A$ , де  $A$  — матриця оператора  $A$  в деякому базисі. Оскільки матриці оператора в двох різних базисах пов'язані між собою перетворенням подібності, то це означення коректне.

Надалі  $P = \mathbb{C}$ . Многочлен

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda \text{Id}) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

називається *характеристичним многочленом* цього оператора. Незавжди переконайтеся в тому, що коефіцієнти  $a_i$ , від вибору базису не залежать.

### Теорема Д.1.1. (Гамільтона—Кейлі)

Многочлен  $P(\lambda)$  анулює оператор  $A$ :

$$P(A) := A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n \text{Id} = 0,$$

де  $0$  — нульовий оператор.

Доведення спирається на відомий факт із теорії матриць: якщо  $M$  —  $n$ -вимірний квадратна матриця,  $M_i$  — її приєднана матриця, тобто матриця,  $i$ -й рядок якої утворено з алгебричних доповнень  $i$ -го стовпця матриці  $M$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то  $MM_i = M_i M = (\det M) E_n$ , де  $E_n$  —  $n$ -вимірний одинична матриця. Нехай  $C(\lambda)$  — оператор, що відповідає приєднаній матриці  $(A - \lambda E_n)$ . Оскільки елементами такої матриці є многочлени щодо  $\lambda$  степеня, не вищого за  $n - 1$ , то  $C(\lambda)$  можна подати у вигляді

$$C(\lambda) = \lambda^{n-1} C_1 + \dots + C_n$$

де  $C_j: V_n \rightarrow V_n$  — лінійні оператори, незалежні від  $\lambda$ . Цей оператор має властивість

$$C(\lambda)(A - \lambda \text{Id}) = (A - \lambda \text{Id})C(\lambda) = P(\lambda) \text{Id}, \quad (\text{Д.1.1})$$

наслідком якої, зокрема, є рівності  $AC_i = C_i A$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Але тоді формула (Д.1.1) дає змогу дістати потрібний результат

$$P(A) = (A - A \cdot \text{Id})C(A) = 0.$$

Ненульовий вектор  $a$  і скаляр  $\mu$ , для яких виконується рівність  $Aa = \mu a$ , називається відповідно *власним вектором* і *власним числом оператора*  $A$ . Кожне власне число є коренем характеристичного многочлена. Одновимірний підпростір, натягнений на власний вектор, є інваріантним підпростором оператора  $A$ .

## Д.1.4. Кореневий підпростір

Нехай  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  — повний набір різних власних векторів оператора  $A$ ,  $n_i$  — кратність кореня  $\lambda_i$  характеристичного полінома  $P(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Таким чином,  $n_1 + \dots + n_p = n$  і

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{n_p}. \quad (\text{Д.1.2})$$

Множина всіх векторів  $x \in V^n$ , які задовольняють умову

$$(A - \lambda_i \text{Id})^{n_i} x = 0,$$

тобто ядро  $\ker(A - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$ , називається *кореневим підпростором*, який відповідає власному числу  $\lambda_i$  оператора  $A$ . Цей лінійний підпростір позначимо через  $V^{n_i}(\lambda_i)$ .

Із рівності  $(A - \lambda_i \text{Id})^{n_i} A = A(A - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$  одразу випливає таке твердження:

**Твердження Д.1.1**

Кореневий підпростір є інваріантним підпростором оператора  $A$ .

**Твердження Д.1.2**

Власний вектор, який відповідає власному числу  $\lambda_i$ , належить підпросторові  $V^{n_i}(\lambda_i)$  і не належить жодному підпросторові  $V^{n_j}(\lambda_j)$  при  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, p$ .

Справді, якщо для деякого  $a \in V^n$  одночасно виконуються рівності  $a \neq 0$ ,  $Aa = \lambda_i a$  і  $(A - \lambda_j \text{Id})^{n_j} a = 0$ , то

$$0 = (A - \lambda_j \text{Id})^{n_j} a = (A - \lambda_j \text{Id})^{n_j - 1} (\lambda_i - \lambda_j) a = \dots = (\lambda_i - \lambda_j)^{n_j} a.$$

Тому  $\lambda_i = \lambda_j$ .

Із тверджень Д.1.1 і Д.1.2 випливають такі.

**Твердження Д.1.3**

Звуження оператора  $A$  на підпростір  $V^{n_i}(\lambda_i)$  є оператором з єдиним власним числом  $\lambda_i$ .

**Твердження Д.1.4**

Для довільних  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, p$ ,  $i \neq j$  виконується  $V^{n_i}(\lambda_i) \cap V^{n_j}(\lambda_j) = \{0\}$ .

Справді, нехай, навпаки, існує вектор  $a \neq 0$  такий, що  $(A - \lambda_j \text{Id})^{n_j} a = 0$  і  $(A - \lambda_j \text{Id})^{n_j - 1} a \neq 0$ . Тоді знайдеться натуральне  $k \leq n_j$  таке, що  $(A - \lambda_j \text{Id})^k a = 0$ , але  $b_j := (A - \lambda_j \text{Id})^{k-1} a \neq 0$ . Очевидно, що  $b_j$  — власний вектор оператора  $A$ , який відповідає власному числу  $\lambda_j$ . Водночас  $(A - \lambda_j \text{Id})^{n_j} b_j = (A - \lambda_j \text{Id})^{k-1} (A - \lambda_j \text{Id})^{n_j} a = 0$ , що суперечить твердженню Д.1.2.

### Теорема Д.1.2

Простір  $V^n$  є прямою сумою всіх кореневих підпросторів оператора  $A$ :

$$V^n = V^{n_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V^{n_p}(\lambda_p).$$

При цьому  $\dim V^{n_i}(\lambda_i) = n_i$ .

З урахуванням твердження Д.1.4 достатньо показати, що будь-який вектор  $x \in V^n$  можна подати у вигляді  $x = \sum_{i=1}^p x_i$ , де  $x_i \in V^{n_i}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

Зауваживши, що правильний дріб  $1/P(\lambda)$  допускає розклад

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{Q_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{n_1}} + \dots + \frac{Q_p(\lambda)}{(\lambda - \lambda_p)^{n_p}},$$

де  $Q_i(\lambda)$  — поліном степеня, меншого ніж  $n_i$ , та врахувавши рівність (Д.1.2), маємо тотожність

$$1 = R_1(\lambda)Q_1(\lambda) + \dots + R_p(\lambda)Q_p(\lambda), \quad R_i(\lambda) := \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p (\lambda - \lambda_k)^{n_k}.$$

Її наслідком є важлива операторна рівність

$$\text{Id} = P_1(A) + \dots + P_p(A), \quad P_i(A) := R_i(A)Q_i(A).$$

Звідси

$$x = P_1(A)x + \dots + P_p(A)x \quad \forall x \in V^n.$$

Оскільки за теоремою Гамільтона—Кейлі  $P(A) = 0$ , і  $P(A) = (A - \lambda_1 \text{Id})^{n_1} \times \dots \times R_i(A)$ , то  $R_i(A) : V^n \rightarrow V^{n_i}(\lambda_i)$ . Тому  $x_i := P_i(A)x \in V^{n_i}(\lambda_i)$ .

Через інваріантність кореневих підпросторів оператора  $A$  його характеристичний поліном є добутком характеристичних поліномів

операторів  $A|_{V^{n_i}(\lambda_i)}$ . Зрозуміло, що власне число  $\lambda_i$  оператора  $A|_{V^{n_i}(\lambda_i)}$  є  $n_i$ -кратним коренем його характеристичного полінома. Звідси маємо твердження про вимірність простору  $V^{n_i}(\lambda_i)$ .

З теореми Д.1.2 випливає, що в базисі, утвореному об'єднанням базисів кореневих підпросторів оператора  $A$ , матриця останнього є кронекеровою сумою  $p$  матриць.

Таким чином, залишається дослідити структуру оператора з одним власним числом.

### Д.1.5. Циклічний підпростір. Жорданова нормальна форма матриці оператора

Нехай оператор  $A : V^q \mapsto V^q$  має єдине власне число  $\mu$  і, таким чином, сам простір  $V^q$  є кореневим простором цього оператора. Покладемо  $B = A - \mu \text{Id}$ . Підпростір  $Z^m \subseteq V^q$  називається *циклічним підпростором* (відносно  $B$ ), якщо для деякого натурального  $k$  і деякого вектора  $g \in Z^m$  ланцюжок векторів  $g, Bg, \dots, B^{m-1}g$  утворює його базис і  $B^m g = 0$ .

Базис, утворений векторами

$$e_1 := B^{m-1}g, e_2 := B^{m-2}g, \dots, e_{m-1} := Bg, e_m := g, \quad (\text{Д.1.3})$$

має таку властивість:

$$Ae_1 = \mu e_1, Ae_2 = e_1 + \mu e_2, \dots, Ae_m = e_{m-1} + \mu e_m.$$

Таким чином, підпростір  $Z^m$  є інваріантним відносно оператора  $A$ , причому  $e_1$  — це власний вектор цього оператора. Матриця оператора  $A|_{Z^m}$  у базисі (Д.1.3) має вигляд клітини Жордана

$$J_m(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$



Сформулюємо підсумкове твердження.

### Теорема Д.1.3

Простір  $V^q$  розпадається на пряму суму циклічних відносно  $B$  підпросторів.

Побудову базисів циклічних підпросторів із теореми Д.1.3 можна здійснити таким чином. Оскільки за теоремою Гамільтона—Кейлі  $B^q = 0$ , то існує найменше натуральне  $m \leq q$ , для якого  $B^m = 0$ , але  $B^{m-1} \neq 0$ . Покладемо  $W_j := \ker B^j, j = 1, \dots, m$ . Зрозуміло, що  $W_m = V^q, W_1 \subset W_2 \subset W_{m-1} \subset W_m$ . Зауважимо, що  $W_1$  — це підпростір власних векторів оператора  $A$ .

Утворимо таку таблицю векторів:

$$\begin{array}{ccc}
 e_1^m, \dots, e_{q_1}^m \in W_m & & \\
 B \downarrow & & \\
 e_1^{m-1}, \dots, e_{q_1}^{m-1}, & e_{q_1+1}^{m-1}, \dots, e_{q_2}^{m-1} \in W_{m-1} & \\
 B \downarrow & B \downarrow & \\
 e_1^{m-2}, \dots, e_{q_1}^{m-2}, & e_{q_1+1}^{m-2}, \dots, e_{q_2}^{m-2}, & e_{q_2+1}^{m-2}, \dots, e_{q_3}^{m-2} \in W_{m-2} \\
 B \downarrow & B \downarrow & B \downarrow \\
 \dots & \dots & \dots \\
 B \downarrow & B \downarrow & B \downarrow \\
 \underbrace{e_1^1, \dots, e_{q_1}^1}_{\in W_m} & \underbrace{e_{q_1+1}^1, \dots, e_{q_2}^1}_{\in W_{m-1}} & \underbrace{e_{q_2+1}^1, \dots, e_{q_3}^1}_{\in W_{m-2}} \dots \\
 B^{m-1}(W_m) & \subset B^{m-2}(W_{m-1}) & \subset B^{m-3}(W_{m-2}) \subset \dots
 \end{array}$$

Пояснимо її будову. У просторі  $\text{im } B^{m-1} := B^{m-1}(W_m) \subset W_1$  виберемо базис  $e_1^1, \dots, e_{q_1}^1$ . Існують вектори  $e_1^m, \dots, e_{q_1}^m$  у  $W_m$  такі, що  $B^{m-1} e_j^m = e_j^1, j = 1, \dots, q_1$ . Вони є прообразами векторів  $e_1^1, \dots, e_{q_1}^1$  при відображенні  $B^{m-1}$ . Утворюємо ланцюжки

$$e_j^1 = B^{m-1} e_j^m, e_j^2 = B^{m-2} e_j^m, \dots, e_j^{m-1} = B e_j^m, e_j^m, j = 1, \dots, q_1.$$

Перші  $q_1$  колонок таблиці сформовано.

Далі, зауважимо, що  $B(W_m) \subset W_{m-1}$ , а тому  $B^{m-1}(W_m) = B^{m-2}(B W_m) \subset B^{m-2}(W_{m-1})$ . Якщо це включення строге, то вектори  $e_1^1, \dots, e_{q_1}^1$

доповнюємо векторами  $e_{q_1+1}^1, \dots, e_{q_2}^1$  до базису підпростору  $B^{m-2}(W_{m-1})$ . Після цього знаходимо вектори  $e_{q_1+1}^{m-1}, \dots, e_{q_2}^{m-1}$  у  $W_{m-1}$  такі, що  $B^{m-2}e_j^{m-1} = e_j^1, j = q_1 + 1, \dots, q_2$ , утворюємо ланцюжки

$$e_j^1, e_j^2 = B^{m-3}e_j^{m-1}, \dots, e_j^{m-2} = Be_j^{m-1}, e_j^{m-1}, j = q_1 + 1, \dots, q_2$$

і формуємо наступні колонки таблиці до номера  $q_2$  включно. Зрозуміло, що за скінченне число кроків буде побудовано такий базис підпростору  $W_1$  власних векторів, який утворює останній рядок зазначеної таблиці.

Міркуваннями від супротивного доводимо, що вектори кожної колонки таблиці лінійно незалежні й, отже, утворюють базис деякого циклічного підпростору, а вектори  $j$ -го рядка лінійно незалежні над простором  $W^{m-j}, j = 1, \dots, m-1$ . Вектори побудованої таблиці утворюють базис усього простору  $V^q$ .

Із теорем Д.1.2, Д.1.3 випливає, що для довільного оператора існує базис, в якому матриця оператора є кронекеровою сумою жорданових клітин. Такий базис називається жордановим, а матриця оператора  $A$  в ньому — жордановою нормальною формою.

Інший підхід до побудови жорданової нормальної форми матриці спирається на теорію інваріантних множників та елементарних дільників.

Нехай  $A$  — квадратична матриця порядку  $n$ . Розглянемо так звану  $\lambda$ -матрицю  $F(\lambda) := \lambda E_n - A$ . Нехай  $r$  — ранг  $F(\lambda)$ . Це означає, що матриця  $F(\lambda)$  має хоча б один ненульовий мінор  $r$ -го порядку, і якщо  $r < n$ , то всі її мінори порядку  $r+1$  тотожно дорівнюють нулю. Покладемо  $D_0(\lambda) := 1$  і для кожного  $j \in \{1, \dots, r\}$  позначимо через  $D_j(\lambda)$  найбільший спільний дільник мінорів  $j$ -го порядку матриці  $F(\lambda)$ . Виявляється,  $D_{j-1}(\lambda)$  ділить  $D_j(\lambda)$ . Многочлен

$$I_j(\lambda) := D_j(\lambda) / D_{j-1}(\lambda)$$

називається  $j$ -м інваріантним множником матриці  $A$ . Подамо інваріантні множники у вигляді добутків

$$I_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1^j} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p^j}, j = 1, \dots, r,$$

де  $m_k^j \geq 0$ . Числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  є власними числами матриці  $A$ . Кожен множник  $(\lambda - \lambda_k)^{m_k^j}$  у випадку  $m_k^j \geq 1$  називається елементарним дільником матриці  $A$ . Виявляється, кожному такому елементарному дільникові відповідає жорданова клітина  $J_{m_k^j}(\lambda_k)$  у нормальній формі матриці  $A$ .

Додаток 2  
ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Д.2.1. Термінологія

Нехай  $e_1, \dots, e_n$  — деякий базис простору  $\mathbb{R}^n$ . Норму довільного вектора  $x = x_1 e_1 + \dots, x_n e_n$  визначимо за формулою

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

*Відкритою кулею* (в просторі  $\mathbb{R}^n$ ) радіусом  $r$  із центром у точці  $x_0$  називається множина

$$B_r^n(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}.$$

Множина

$$\overline{B_r^n(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$$

називається *замкненою кулею*. Там, де це не призведе до непорозумінь, показник вимірності  $n$  у позначенні кулі писати не будемо.

Множина  $X \subset \mathbb{R}^n$  називається *відкритою*, якщо  $\forall x \in X \exists r > 0 : B_r(x) \subset X$ .

Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  називається *граничною точкою* множини  $X$ , якщо  $\forall r > 0 \exists x \in X \cap B_r(x_0) : x \neq x_0$ .

Множина  $X$  називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої граничні точки.

Множина  $X$  називається *обмеженою*, якщо  $\exists r > 0 : X \subset B_r(0)$ .

Множина  $X$  називається зв'язною, якщо не існує пари відкритих множин  $X_1, X_2$ , які задовольняють такі умови: 1)  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ ; 2)  $X_i \cap X \neq \emptyset, i = 1, 2$ ; 3)  $X \subset X_1 \cup X_2$ .

Область в  $\mathbb{R}^n$  називається відкрита зв'язна множина; межею області  $D \subset \mathbb{R}^n$  називається множина  $\partial D$ , утворена всіма тими граничними точками області  $D$ , які не належать  $D$ . Замкнена область — це множина  $\bar{D} = D \cup \partial D$ , де область  $D$  обмежена. Сукупність відкритих множин  $U = \{U_j\}_{j \in J}$ , де  $J \subseteq \mathbb{N}$ , називається зліченим відкритим покриттям множини  $X$ , якщо  $X \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ . Якщо множина  $J$  скінченна, то й покриття називається скінченим. Сукупність множин  $U' = \{U_j\}_{j \in J'}$ , де  $J' \subset J$ , така, що  $X \subset \bigcup_{j \in J'} U_j$ , називається підпокриттям покриття  $U$ .

Множина  $X$  називається компактною множиною (компактом), якщо з будь-якого відкритого покриття цієї множини можна виділити скінченне підпокриття. Компакт має таку характеристичну властивість: довільна послідовність точок  $\{x_j \in X\}_{j=1, 2, \dots}$  містить підпослідовність  $\{x_{j_i}\}_{i=1, 2, \dots}$ , яка збігається до точки  $x_* \in X$ , тобто  $\|x_* - x_{j_i}\| \rightarrow 0, j_i \rightarrow \infty$ .

Відомо, що підмножина  $X \subset \mathbb{R}^n$  є компактом тоді й лише тоді, коли вона замкнена й обмежена.

### Д.2.2. Неперервні відображення

Нехай  $X \subset \mathbb{R}^m$  — множина, кожна точка якої є граничною точкою цієї самої множини (наприклад,  $X$  — область або замкнена область).

Відображення (вектор-функція)  $f: X \mapsto \mathbb{R}^n$  називається:

а) *неперервним у точці*  $x_0$ , якщо для кожного  $\epsilon > 0$  існує таке  $\delta > 0$ , що для всіх  $x \in X \cap B_\delta^m(x_0)$  виконується умова  $f(x) \in B_\epsilon^n(f(x_0))$ ;

б) *неперервним на множині*  $X$ , або *відображенням класу*  $C(X \mapsto \mathbb{R}^n)$ , якщо воно неперервне в кожній точці множини  $X$ ;

в) *рівномірно неперервним на множині*  $X$ , якщо для кожного  $\epsilon > 0$  існує таке  $\delta > 0$ , що для кожної пари точок  $x, y \in X$ , які задовольняють умову  $\|x - y\| < \delta$ , виконується нерівність  $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ .

Прикладом рівномірно неперервного відображення є будь-яке лінійне відображення  $A: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ . Справді, позначимо через  $\|A\|$  додатний корінь із суми квадратів елементів матриці  $A := \{a_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n, m}$  відобра-

ження  $A$ . Тоді за нерівністю Коші—Буняковського маємо  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ , звідки й випливає властивість в).

Зупинимось на кількох властивостях неперервних відображень, які узагальнюють відповідні властивості скалярної функції однієї змінної:

1) образ неперервного відображення зв'язної множини є зв'язною множиною;

2) образ неперервного відображення компакту є компактом. При цьому існує точка компакту, в якій норма неперервного відображення набуває максимального значення;

3) неперервне відображення на компактній множині є рівномірно неперервним (теорема Кантора);

4) композиція (суперпозиція) неперервних відображень — неперервне відображення;

5) нехай  $\{f_k : X \mapsto \mathbb{R}^n\}_{k=1,2,\dots}$  — послідовність неперервних відображень, яка рівномірно на  $X$  збігається до відображення  $f : X \mapsto \mathbb{R}^n$  (тобто для кожного  $\epsilon > 0$  існує таке натуральне  $N$ , що для всіх  $k > N$  і всіх  $x \in X$  виконується нерівність  $\|f(x) - f_k(x)\| < \epsilon$ ). Тоді  $f$  — неперервне відображення;

6) справджується ознака Вейерштрасса: якщо для послідовності  $\{f_k : X \mapsto \mathbb{R}^n\}_{k=1,2,\dots}$  існує така числова послідовність  $\{c_k\}_{k=1,2,\dots}$ , що  $\|f_k(x)\| \leq c_k \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in X$ , і ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  збігається, то послідовність часткових сум  $g_i(x) := \sum_{k=1}^i f_k(x)$  рівномірно збігається на  $X$ .

### Д.2.3. Диференційовне відображення

Зафіксуємо в  $\mathbb{R}^n$  деякий базис  $\{h_i\}_{i=1}^n$ . Нехай  $I \subseteq \mathbb{R}$  — інтервал. Для заданого відображення  $g : I \mapsto \mathbb{R}^n : t \mapsto g(t)$  маємо розклад  $g(t) = g_1(t)h_1 + \dots + g_n(t)h_n$ . Припустимо, що функції  $g_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  диференційовні. Покладемо

$$\frac{d}{dt} g(t) := \dot{g}(t) := \dot{g}_1(t)h_1 + \dots + \dot{g}_n(t)h_n.$$

Так визначене відображення  $\dot{g} : I \mapsto \mathbb{R}^n : t \mapsto \dot{g}(t)$  називається *похідною відображення*  $g(t)$ .

Зовсім не обов'язково похідну відображення визначати через його компоненти в деякому базисі. Еквівалентним чином її можна ввести ще й так: для кожного  $t \in I$  назовемо вектор  $\dot{g}(t)$  похідною відображення  $g(t)$  у точці  $t$ , якщо

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{s} (g(t+s) - g(t)) - \dot{g}(t) \right\| = 0$$

або, що одне й те саме,

$$\|g(t+s) - g(t) - s\dot{g}(t)\| = o(s), \quad s \rightarrow 0. \quad (\text{Д.2.1})$$

При кожному  $t \in I$  вектор  $\dot{g}(t)$  природно вважати прикладеним до точки  $g(t)$ , тобто ототожнювати його з напрямленим відрізком  $\{g(t) + s\dot{g}(t)\}_{s \in [0, 1]}$  з початком у  $g(t)$  і кінцем у  $g(t) + \dot{g}(t)$ .

Якщо відображення  $g: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  неперервне [в цьому випадку  $g(t)$  називається *неперервно диференційовним*, або відображенням класу  $C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ], то образ відображення  $g(t)$  називається *кривою*. Множина  $\Gamma$  називається *регулярною кривою*, якщо вона є образом деякого відображення  $g(t) \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$  і при цьому  $\dot{g}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ . Кожен вектор  $s\dot{g}(t)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  називається *дотичним вектором* до кривої  $\Gamma$  у точці  $g(t)$ , а пряма  $\{g(t) + s\dot{g}(t)\}_{s \in \mathbb{R}}$  — дотичною до  $\Gamma$  у цій точці. (У цій книзі термін «крива», як правило, вживається в сенсі саме регулярної кривої.)

Формулу (Д.2.1) можна взяти за основу при означенні диференційовності відображення, заданого на відкритій підмножині  $X$  простору  $\mathbb{R}^m$ . А саме, відображення  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  називається *диференційовним у точці*  $x_0 \in X$ , якщо існує таке лінійне відображення  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , що

$$\|f(x_0 + a) - f(x_0) - Aa\| = o(\|a\|), \quad a \in \mathbb{R}^m, \|a\| \rightarrow 0. \quad (\text{Д.2.2})$$

При цьому  $A$  називається *похідною відображення*  $f(x)$  у точці  $x_0$ . За аналогією з випадком  $m = 1$ ,  $n = 1$  будемо використовувати позначення

$$A := f'(x_0).$$

Із самого означення диференційовного в точці  $x_0 \in X$  відображення випливає найпростіша формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x; x_0),$$

де залишковий член  $r(x; x_0) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$  має влас-

тивість  $\|r(x; x_0)\| = o(\|x - x_0\|)$ ,  $\|x - x_0\| \rightarrow 0$ . Очевидно, що з диференційовності деякого відображення випливає також його неперервність.

Якщо відображення диференційовне в кожній точці множини  $X$ , то воно називається *диференційовним на  $X$* .

Зафіксуємо в  $\mathbb{R}^m$  базис  $\{e_i\}_{i=1}^m$ . Кожному лінійному відображенню з  $\mathbb{R}^m$  у  $\mathbb{R}^n$  можна поставити у взаємно однозначну відповідність його матрицю (у базисах  $\{e_i\}_{i=1}^m$ ,  $\{h_i\}_{i=1}^n$ ) розміром  $n \times m$ . Такі матриці утворюють векторний простір  $\mathbb{R}^{n \times m}$ . Отже, простір лінійних відображень із  $\mathbb{R}^m$  у  $\mathbb{R}^n$  можна ототожити з  $\mathbb{R}^{n \times m}$ . Тому диференційовне на  $X$  відображення  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  природно породжує відображення

$$f': X \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} : x \mapsto f'(x).$$

Якщо останнє є неперервним на  $X$ , то  $f(x)$  називається *неперервно диференційовним на  $X$* , або відображенням класу  $C^1(X \rightarrow \mathbb{R}^n)$ .

При фіксованому базисі в  $\mathbb{R}^m$  відображення  $f$  можна розглядати як векторну функцію  $m$  скалярних змінних  $x_1, \dots, x_m$  — координат точки  $x$ :

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_m e_m) := f(x_1, \dots, x_m).$$

Для диференційовного в точці  $x$  відображення визначене поняття частинної похідної. *Частинною похідною відображення  $f$  за змінною  $x_j$  у точці  $x$*  називається вектор

$$\begin{aligned} f'_{x_j}(x) &:= \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} := \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} f(x + t e_j) = \\ &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Зауважимо, що при фіксованому  $x$  із лінійності відображення  $f''(x)$  випливає рівність  $f'(x)(ta) = t f'(x)a$ , а тоді з (Д.2.2) маємо

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{t} (f(x + ta) - f(x)) - f'(x)a \right\| = 0.$$

Цим доведено існування так званої *похідної за напрямом  $a$*  для диференційовного в точці  $x$  відображення:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x+ta) = f'(x)a.$$

З одержаної формули й розкладу  $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)h_i$  випливає рівність

$$f'_{x_j}(x) = f'(x)e_j = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_j} h_1 + \dots + \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_j} h_n.$$

Отже, лінійному відображенню  $f'(x)$  відповідає матриця

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix},$$

яка називається *матрицею Якобі* відображення  $f$ .

В окремому випадку скалярної функції  $m$  змінних  $f(x_1, \dots, x_m)$  похідна називається *градієнтом* і, як правило, трактується як вектор-рядок

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} := \text{grad } f(x) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_m} \right).$$

Певним аналогом теореми про скінченні прирости для неперервно диференційованих відображень є таке твердження.

### Лема Д.2.1 (Адамара)

Нехай  $f(x) \in C^1(X \mapsto \mathbb{R}^n)$  і точка  $x$  міститься в  $X$  разом із кулею  $B_r^m(x)$ . Тоді

$$f(x+a) - f(x) = A(x, a)a \quad \forall a \in \overline{B_r^m(0)},$$

де

$$A(x, a) := \int_0^1 f'(x+ta) dt.$$

При цьому  $\|f'(x) - A(x, a)\| \rightarrow 0$ , при  $\|a\| \rightarrow 0$ .



### Доведення

Для довільного неперервного відображення  $g: [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^n$  покладемо

$$\int_0^1 g(t) dt = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 g_i(t) dt \right) e_i.$$

Зрозуміло, що тоді  $\int_0^1 \dot{g}(t) dt = g(1) - g(0)$ . Тому

$$f(x+a) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+ta) dt = \left( \int_0^1 f'(x+ta) dt \right) a.$$

Нехай тепер  $\epsilon > 0$  довільне. З неперервності відображення  $f'$  випливає, що існує  $\delta > 0$  таке, що для довільних  $a \in B_\delta^m(0)$ ,  $t \in [0, 1]$  виконується нерівність  $\|f'(x) - f'(x+ta)\| < \epsilon$ . Але тоді

$$\begin{aligned} \|f'(x) - A(x, a)\| &= \left\| \int_0^1 f'(x) - f'(x+ta) dt \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|f'(x) - f'(x+ta)\| dt < \epsilon. \end{aligned}$$

З диференційовними відображеннями пов'язані певні геометричні об'єкти. Нехай  $1 < m \leq n$  і  $f(x) \in C^1(X \mapsto \mathbb{R}^n)$ . Припустимо, що ранг матриці Якобі відображення  $f$  дорівнює  $m$  у кожній точці множини  $X$ . У цьому випадку  $f$  називається *невиродженим*. Якщо до того ж воно взаємно однозначне, то його образ являє собою  $m$ -вимірну поверхню  $f(X)$  у  $\mathbb{R}^n$ .

Нехай  $\Gamma$  — крива, яка є образом відображення  $g: I \mapsto X$  і проходить через точку  $x_0$ ;  $g(t_0) = x_0$ ,  $t_0 \in I$ . Розглянемо композицію відображень:  $f \circ g(t) := f(g(t))$ . Тоді з (Д.2.2) маємо

$$\begin{aligned} \|f(g(t)) - f(x_0) - f'(x_0)(g(t) - g(t_0))\| &= o(\|g(t) - g(t_0)\|) = \\ &= o(\|\dot{g}(t_0)(t - t_0) + o((t - t_0))\|) = o((t - t_0)), t \rightarrow t_0. \end{aligned}$$

Звідси

$$\|f(g(t)) - f(x_0) - f'(x_0)(\dot{g}(t_0)(t - t_0))\| = o(t - t_0), t \rightarrow t_0$$

і, отже,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} f \circ g(t) = f'(x_0)g'(t_0). \quad (\text{Д.2.3})$$

За припущенням про невідродженість  $f'(x)$  цей вектор ненульовий. Отже, образом кривої  $\Gamma$  є крива  $f(\Gamma)$  у  $\mathbb{R}^n$ , а відображення  $f'(x_0)$  переводить дотичний вектор до  $\Gamma$  у точці  $x_0$  у дотичний вектор до кривої  $f(\Gamma)$  у точці  $f(x_0)$ . Зокрема, якщо  $g(t) = x_0 + ta$ ,  $t \in I$ , то образом вектора  $a$  є вектор  $f'(x_0)a$ . Останній вектор природно вважати прикладеним до точки  $x_0$ . Множина всіх таких векторів утворює  $m$ -вимірну дотичну площину (дотичний простір) до поверхні  $f(X)$  у точці  $f(x_0)$ . Цю площину можна задати параметричними рівняннями

$$y = f(x_0) + f'(x_0)x, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

На підставі міркувань, аналогічних тим, які дали змогу встановити формулу (Д.2.3), можна вивести *правило диференціювання композиції відображень*:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Тут  $f$  і  $g$  — диференційовні відображення, причому вимагається, щоб образ другого з них належав області визначення першого.

#### Д.2.4. Теорема про неявну функцію

Нехай  $G$  — область у просторі  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n\}$  і  $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  — неперервно диференційовне відображення. Розглянемо довільну точку  $c$ , що належить образу  $F(G)$  цього відображення. Прообраз точки  $c$  — множина, яку прийнято позначати як  $F^{-1}(c)$ , тобто

$$F^{-1}(c) := \{(x, y) \in G : F(x, y) = c\},$$

називається *множиною рівня відображення  $F$* . Виникає запитання: що являє собою множина  $F^{-1}(c)$ ?

Відповідь на це запитання доволі просто дістати, якщо обмежитися вивченням будови зазначеної множини в досить малому околі *регулярної точки*. Так називається точка, в якій ранг матриці Якобі відображення  $F$  дорівнює  $n$ . Із теореми про неявну функцію, яку буде доведе-

но нижче, впливає, що в досить малому околі регулярної точки множина рівня є графіком деякого неперервно диференційовного відображення.

Нагадаємо, що *графіком відображення*  $f: X \mapsto \mathbb{R}^n$ , де  $X \in \mathbb{R}^m$ , називається множина точок  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : x \in X, y = f(x)\}$ , тобто образ взаємно однозначного відображення

$$gr_f: X \mapsto \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : x \mapsto (x, f(x)).$$

Якщо  $f$  неперервно диференційовне, то й відображення  $gr_f$  — неперервно диференційовне і, крім того, невироджене. Тому графік відображення  $f$  є  $m$ -вимірною поверхнею в  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ .

Для кожної фіксованої точки  $(x_0, y_0) \in G$  виберемо число  $r > 0$  настільки малим, щоб  $(x_0, y_0) \in G \forall u \in B_r^n(y_0)$ . Тоді відображення  $F(x_0, y) \in C^1(B_r^n(y_0) \mapsto \mathbb{R}^n)$  у точці  $y_0$  має похідну  $F'_y(x_0, y_0)$  з матрицею

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n(x_0, y_0)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n(x_0, y_0)}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

### Теорема Д.2.1 (про неявну функцію)

Нехай  $G$  — відкрита множина у  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  і  $(x_0, y_0) \in G$ . Припустимо, що відображення  $F: G \mapsto \mathbb{R}^n$  має такі властивості:

- а)  $F(x, y) \in C^1(G \mapsto \mathbb{R}^n)$ ;
- б) оператор  $F'_y(x_0, y_0)$  — невироджений (або, що одне й те саме,  $\det \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$ ).

Тоді існують числа  $\delta > 0$ ,  $\rho > 0$  і єдине відображення  $f: B_\delta^m(x_0) \mapsto B_\rho^n(y_0)$ , які задовольняють умови: 1)  $B_\delta^m(x_0) \times B_\rho^n(y_0) \subset G$ ; 2)  $f(x_0) = y_0$ ; 3)  $F(x, f(x)) \equiv c_0 := F(x_0, y_0)$ . Крім того, це відображення належить класу  $C^1(B_\delta^m(x_0) \mapsto \mathbb{R}^n)$ , а його похідна виражається формулою

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} F'_x(x, y) \Big|_{y=f(x)} \quad \forall x \in B_\delta^m(x_0). \quad (\text{Д.2.4})$$

## Доведення

Без обмеження загальності міркувань вважатимемо, що  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $c_0 = 0$ . Для доведення базується на такому спостереженні. За формулою Тейлора

$$F(x, y) = F(x, 0) + F'_y(x, 0)y + o(\|y\|).$$

У першому наближенні шукане відображення природно визначити з лінеаризованого рівняння

$$F(x, 0) + F'_y(x, 0)y = 0. \quad (\text{Д.2.5})$$

При  $x$ , близьких до  $0$ , за неперервністю лінійний оператор  $J(x) := F'_y(x, 0)$  невідроджений. Тому рівняння (Д.2.5) можна розв'язати відносно  $y$ . Переписавши вихідне рівняння  $F(x, y) = 0$  у вигляді

$$J(x)y + (F(x, y) - J(x)y) = 0,$$

природно спробувати знайти шукане відображення методом послідовних наближень за схемою

$$J(x)y_j + (F(x, y_{j-1}) - J(x)y_{j-1}) = 0, \quad y(x_0) = 0. \quad (\text{Д.2.6})$$

Перейдемо до обґрунтування запропонованого підходу. Надалі домовимося використовувати скорочене позначення  $B_i^m$  для  $B_i^m(0)$ .

За умовою  $\left| \det \frac{\partial F(0, 0)}{\partial y} \right| =: \sigma > 0$ . Тому можна вказати таке  $r_1 > 0$ , що

$$\left| \det \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right| > \frac{\sigma}{2} \quad \forall (x, y) \in \overline{B_1^m} \times \overline{B_1^n} \subset G.$$

Отже, в кожній точці  $(x, y) \in \overline{B_1^m} \times \overline{B_1^n}$  існує обернений оператор  $[F'_y(x, y)]^{-1} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  і для деякого  $L > 0$  виконується нерівність

$$\|[F'_y(x, y)]^{-1}\| \leq L \quad \forall (x, y) \in \overline{B_1^m} \times \overline{B_1^n}. \quad (\text{Д.2.7})$$

З урахуванням (Д.2.6) побудуємо послідовність відображень

$$\begin{aligned} y_j(x) &= J^{-1}(x)[J(x)y_{j-1}(x) - (F(x, y_{j-1}(x)))] := \\ &:= H(x, y_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{Д.2.8})$$

Дослідимо властивості відображення  $H$ . Для цього встановимо кілька технічних оцінок. Як і при доведенні леми Адамара дістаємо формулу

$$F(x, y_2) - F(x, y_1) = \left[ \int_0^1 F'_y(x, y_1 + t(y_2 - y_1)) dt \right] (y_2 - y_1), \quad (\text{Д.2.9})$$

за допомогою якої встановлюємо оцінки

$$\|H(x, y)\| \leq L \left( \left\| \int_0^1 (J(x) - F'_y(x, ty)) dt \right\| \|y\| + \|F(x, 0)\| \right). \quad (\text{Д.2.10})$$

$$\begin{aligned} \|H(x, y_2) - H(x, y_1)\| &\leq \\ &\leq L \left\| \int_0^1 (J(x) - F'_y(x, y_1 + t(y_2 - y_1))) dt \right\| \|y_2 - y_1\|. \end{aligned} \quad (\text{Д.2.11})$$

Врахуємо, що відображення  $F: \overline{B_1^m} \times \overline{B_1^n} \mapsto \mathbb{R}^n$  і  $F'_y: \overline{B_1^m} \times \overline{B_1^n} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$  рівномірно неперервні за теоремою Кантора (див. п. Д.2.2). Тому існують  $r_2 \in (0, r_1)$  і  $r_3 \in (0, r_2)$  такі, що

$$\|J(x) - F'_y(x, y)\| \leq \frac{1}{2L}, \quad \|F(x, 0)\| \leq \frac{r_2}{2L} \quad \forall x \in \overline{B_3^m}, \quad \forall y \in \overline{B_2^n}.$$

Отже, з (Д.2.10), (Д.2.11) дістаємо

$$\|H(x, y)\| \leq L \left( \frac{1}{2L} r_2 + \frac{r_2}{2L} \right) = r_2 \quad (\text{Д.2.12})$$

$$\|H(x, y_2) - H(x, y_1)\| \leq \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\| \quad (\text{Д.2.13})$$

$$\forall x \in \overline{B_3^m}, \quad \forall \{y_1, y_2\} \subset \overline{B_2^n}.$$

3 (Д.2.12), (Д.2.13) впливає, що рекурентна формула (Д.2.8) визначає послідовність відображень  $y_j(x) \in C(B_3^m \mapsto B_2^n)$ ,  $y_j(0) = 0$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , для яких виконуються оцінки

$$\begin{aligned} \|y_j(x) - y_{j-1}(x)\| &= \|H(x, y_{j-1}(x)) - H(x, y_{j-2}(x))\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|y_{j-1}(x) - y_{j-2}(x)\| \leq \dots \leq \frac{1}{2^{j-1}} \|y_1(x)\| \leq \frac{r_2}{2^{j-1}} \quad \forall x \in \overline{B_3^m}. \end{aligned}$$

За ознакою Вейєрштрасса (див. п. Д.2.2) часткові суми

$$\sum_{k=1}^j (y_k(x) - y_{k-1}(x)) \equiv y_j(x)$$

при  $j \rightarrow \infty$  збігаються до деякого неперервного відображення  $f: \overline{B_3^m} \mapsto \overline{B_2^n}$ , яке задовольняє умови

$$f(0) = 0, \quad f(x) = H(x, f(x)) \Leftrightarrow F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in \overline{B_3^m}. \quad (\text{Д.2.14})$$

Доведемо єдиність такого відображення. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що існує точка  $(x_*, y_*)$ , яка задовольняє умови

$$(x_*, y_*) \in \overline{B_3^m} \times \overline{B_2^n}, \quad y_* \neq f(x_*), \quad F(x_*, y_*) = 0.$$

Тоді  $y_* = H(x_*, y_*)$  і з урахуванням (Д.2.13), (Д.2.14)

$$\|y_* - f(x_*)\| = \|H(x_*, y_*) - H(x_*, f(x_*))\| \leq \frac{1}{2} \|y_* - f(x_*)\|,$$

що неможливо.

Нарешті, покажемо, що  $f$  — диференційовне відображення. Запишемо рівність

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + a, f(x + a)) - F(x, f(x)) = \\ &= [F(x + a, f(x + a)) - F(x, f(x + a))] + \\ &\quad + [F(x, f(x + a)) - F(x, f(x))]. \end{aligned} \quad (\text{Д.2.15})$$

З урахуванням формули Тейлора і леми Адамара маємо

$$\begin{aligned} F(x+a, f(x+a)) - F(x, f(x+a)) &= \\ &= F'_x(x, f(x+a))a + r(x, a); \end{aligned} \quad (\text{Д.2.16})$$

$$F(x, f(x+a)) - F(x, f(x)) = Q(x, a)(f(x, a) - f(x)), \quad (\text{Д.2.17})$$

де  $Q(x, a) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  — деякий лінійний оператор, явний вигляд якого можна дістати з формули (Д.2.9) і який має властивість

$$\|Q(x, a) - F'_y(x, f(x))\| \rightarrow 0, \quad \|a\| \rightarrow 0.$$

Але тоді для всіх досить малих за нормою векторів  $a$  існує обернений оператор  $[Q(x, a)]^{-1}$  і

$$\|[Q(x, a)]^{-1} - [F'_y(x, f(x))]^{-1}\| \rightarrow 0, \quad \|a\| \rightarrow 0.$$

Тепер із (Д.2.15)—(Д.2.17) впливає рівність

$$\begin{aligned} F'_x(x, f(x+a))a + r(x, a) + \\ + Q(x, a)(f(x+a) - f(x)) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Д.2.18})$$

Якщо покласти

$$A(x, a) = -[Q(x, a)]^{-1}F'_x(x, f(x+a)),$$

то з (Д.2.18) дістанемо

$$f(x+a) - f(x) - A(x, a)a = -[Q(x, a)]^{-1}r(x, a),$$

і, нарешті,

$$\begin{aligned} f(x+a) - f(x) - A(x, 0)a = \\ = [A(x, a) - A(x, 0)]a - [Q(x, a)]^{-1}r(x, a). \end{aligned}$$

Легко бачити, що норма виразу в правій частині цієї формули є величиною  $o(\|a\|)$  при  $\|a\| \rightarrow 0$ . Тому, враховуючи означення диференційовності, похідна відображення  $f(x)$  існує й має вигляд (Д.2.4). Тепер факт неперервності відображення  $f' : B_3^m \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$  стає очевидним.

### Д.2.5. Теорема про обернене відображення

#### Теорема Д.2.2

Нехай  $Y$  — відкрита множина в  $\mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in Y$ . Припустимо, що відображення  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  неперервно диференційовне, а оператор  $g'(y_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  невинроджений  $\left( \det \frac{\partial g(y_0)}{\partial y} \neq 0 \right)$ . Тоді існують числа  $\delta > 0$ ,  $\rho > 0$  і єдине відображення  $f: B_\rho^n(x_0) \rightarrow B_\delta^n(y_0)$ , де  $x_0 = g(y_0)$ , таке, що  $g(f(x)) = x$  для всіх  $x \in B_\rho^n(x_0)$ . Крім того,  $f \in C^1(B_\rho^n(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n)$  і  $f'(x) = [g'(y)]^{-1}|_{y=f(x)}$ .

Доведення полягає в застосуванні теореми про неявну функцію до відображення

$$F(x, y) := x - g(y), \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in Y.$$

Відображення  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  називається *дифеоморфізмом*, якщо воно неперервно диференційовне, взаємно однозначне й обернене до нього відображення неперервно диференційовне на  $g(Y)$ .

Якщо відображення є дифеоморфізмом лише в деякому околі фіксованої точки множини  $Y$ , то воно називається *локальним дифеоморфізмом* у цій точці.

Для того щоб неперервно диференційовне відображення було локальним дифеоморфізмом у певній точці, необхідно й достатньо, щоб його похідна в цій точці була невинродженою. Достатність випливає з теореми Д.2.2. Для доведення необхідності досить зауважити, що наслідком тотожності  $f^{-1}(f(x)) \equiv x$  є рівність  $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = \text{Id}$ , яка можлива лише за умови невинродженості  $f'(x)$ .



## **КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГАДУЮТЬСЯ В КНИЗІ**

---

**АБЕЛЬ Нільс Генріх** (1802—1829) — норвезький математик. Викладав в університеті та в Інженерній школі в Осло. Автор важливих відкриттів в алгебрі та математичному аналізі. Встановив нерозв'язність загального алгебричного рівняння степеня  $n \geq 5$ , разом із К. Г. Я. Якобі заклав основи теорії еліптичних функцій, дістав класичні ознаки збіжності числових та функціональних рядів.

**АДАМАР Жак** (1865—1963) — французький математик, член Паризької АН, професор Колеж де Франс, Паризького університету, Політехнічної школи. Почесний член АН СРСР. Автор важливих праць із теорії чисел, комплексного аналізу, диференціальних рівнянь, варіаційного числення.

**АДАМС Джон Кауч** (1819—1892) — англійський астроном і математик, член Лондонського королівського товариства. Відомий працями з небесної механіки.

**АНДРОНОВ Олександр Олександрович** (1901—1952) — російський фізик і математик, академік АН СРСР, професор Горьковського університету. Основоположник математичної теорії автоколивань, засновник горьковської школи диференціальних рівнянь.

**АНОСОВ Дмитро Вікторович** (нар. 1936) — російський математик, академік Російської АН, професор. Працює в Математичному інституті ім. В. А. Стеклова. Дістав важливі результати в теорії динамічних систем. Запровадив і дослідив важливий клас систем, які нині називають системами Аносова.

**АРНОЛЬД Володимир Ігорович** (нар. 1937) — російський математик, академік Російської АН. Викладав у Московському університеті. Працює в Математичному інституті ім. В. А. Стеклова, професор Університету-ІХ Парижа. Разом зі своїм учителем А. М. Колмогоровим розв'язав знамениту тринадцяту проблему Гільберта. Відомий працями з теорії збурень гамільтонових систем, теорії біфуркацій, теорії катастроф, топології, алгебричної геометрії, гідродинаміки.

**АРЦЕЛА Чезаре** (1847—1912) — італійський математик, член Болонської АН. Фахівець із теорії функцій.

**АСКОЛІ Джуліо** (1843—1896) — італійський математик. Основні праці стосуються теорії функцій та тригонометричних рядів.

**БАНАХ Стефан** (1892—1945) — польський і український математик, член-кореспондент Академії наук у Кракові, професор Львівського університету. Один із творців функціонального аналізу.

**БАРРОУ Ісаак** (1630—1677) — англійський математик. Очолював кафедру в Кембриджському університеті, яку згодом успадкував його учень І. Ньютон. Розв'язав низку важливих задач геометричної оптики. Винайшов геометричний метод розв'язання диференціальних рівнянь із відокремлюваними змінними.

**БЕНДІКСОН Івар Отто** (1861—1935) — шведський математик. Був ректором Стокгольмського університету. Відомий працями з теорії диференціальних рівнянь, алгебри, теорії точкових множин.

**БЕРНУЛЛІ Даниїл І** (1700—1782) — швейцарський математик, механік, фізик. Син Йоганна І Бернуллі. Професор Базельського університету. Почесний член Петербурзької, Берлінської, Французької АН і Лондонського королівського товариства. Автор праць з алгебри, геометрії, теорії диференціальних рівнянь, аналізу, теорії імовірностей, математичної фізики.

**БЕРНУЛЛІ Йоганн І** (1667—1748) — швейцарський математик. Молодший брат Якова І Бернуллі. Член Французької АН. Професор Гронінгенського (Голландія) та Базельського університетів. Почесний член Петербурзької АН. Автор видатних відкриттів у математичному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, варіаційному численні.

**БЕРНУЛЛІ Якоб І** (1654—1705) — швейцарський математик, професор Базельського університету. Автор видатних праць з математичного аналізу, варіаційного числення, теорії імовірностей.

**БЕССЕЛЬ Фрідріх Вільгельм** (1784—1846) — німецький астроном і математик, член Берлінської АН, професор Кенігсберзького університету, директор астрономічної обсерваторії при університеті. Почесний член Петербурзької АН. Праці присвячені теорії диференціальних рівнянь і небесній механіці (рівняння Бесселя).

**БРКГОФ Джордж Дейвід** (1884—1944) — американський математик, член Національної АН США, професор Гарвардського університету. Відомий працями з асимптотичної та якісної теорії диференціальних рівнянь, теорії динамічних систем.

**БОГОЛЮБОВ Микола Миколайович** (1909—1992) — вітчизняний математик, механік і фізик-теоретик, академік НАН України та Російської АН, професор Київського та Московського університетів. Очолював Об'єднаний інститут ядерних досліджень (Дубна, Росія) та Математичний інститут ім. В. А. Стеклова (Москва). Один із засновників київської наукової школи нелінійної механіки. Фундаментальні дослідження присвячені варіаційному численню, нелінійній механіці, теорії майже періодичних функцій, теорії динамічних систем, статистичній фізиці, квантовій теорії поля, теорії елементарних частинок.

**БОЛЬ Пірс Георгійович** (1865—1921) — латвійський математик, професор Ризького політехнічного інституту і Латвійського університету. Заклав основи теорії квазіперіодичних функцій, за 5 років до Л. Е. Я. Брауера довів теорему про нерухому точку, дістав важливі результати в теорії стійкості.

**БРАУЕР Лейтзен Егберт Ян** (1881—1966) — голландський математик, член Нідерландської АН, професор Амстердамського університету. Член-кореспондент Паризької і Геттінгенської АН, член Лондонського королівського товариства. Дістав низку важливих результатів у топології.

**БУНЯКОВСЬКИЙ Віктор Якович** (1804—1889) — російський математик, академік, віце-президент Петербурзької АН. Відомий працями з математичного аналізу, теорії чисел та теорії імовірностей.

**ВАЖЕВСЬКИЙ Тадеуш** (1896—1972) — польський математик, член Польської АН, професор Ягеллонського університету в Кракові. Президент Польського математичного товариства. Основні праці присвячені розробці топологічних підходів у теорії звичайних диференціальних рівнянь та теорії оптимального керування.

**ВАНДЕРМОНД Шарль Огюст (Александр Теофіл) (1735—1796)** — французький математик, член Французької АН. Відомий працями з алгебри.

**ВЕЙЄРШТРАСС Карл Теодор Вільгельм (1815—1897)** — німецький математик, член Берлінської і Мюнхенської АН, професор Берлінського університету. Почесний член Петербурзької АН, член Паризької АН. Дістав важливі результати в математичному аналізі, теорії аналітичних функцій, варіаційному численні, диференціальній геометрії, лінійній алгебрі.

**ВОЛЬТЕРРА Віто (1860—1940)** — італійський математик, професор Пізанського, Туринського, Римського університетів. Член-кореспондент Петербурзької АН, почесний член АН СРСР. Відомий працями з математичної фізики, інтегральних та інтегродиференціальних рівнянь, функціонального аналізу. Розробляв математичну теорію боротьби за існування.

**ВРОНСЬКИЙ (ГЕНЕ-ВРОНСЬКИЙ) Юзеф Марія (1778—1853)** — польський математик і філософ. Професійний військовий. Після відставки займався науковою діяльністю в Парижі. Дістав цікаві результати в алгебрі, математичному аналізі, теорії різнищевих та диференціальних рівнянь.

**ГАМБ'Є Бертран (1879—1954)** — французький математик, учень П. Пенлеве. Очолював кафедру диференціального та інтегрального числень у Ліллі. Наукові інтереси стосуються теорії диференціальних рівнянь, теорії функцій, геометрії.

**ГАМЛЬТОН Вільям Роуен (1805—1865)** — ірландський математик, член Ірландської АН, був її президентом, професор Дублінського університету. Член-кореспондент Петербурзької АН. Автор важливих праць з аналітичної механіки та алгебри. Створив теорію кватерніонів. Його ім'ям названо важливу систему диференціальних рівнянь аналітичної механіки.

**ГАУСС Карл Фрідріх (1777—1855)** — німецький математик, астроном і фізик. Очолював кафедру та астрономічну обсерваторію в Геттінгенському університеті. Автор видатних праць із теорії чисел, диференціальної геометрії, спеціальних функцій, небесної механіки, теорії потенціалу, теорії магнетизму, геодезії.

**ГЛЬБЕРТ Давід (1862—1943)** — німецький математик, член-кореспондент Берлінської АН, професор Кенігсберзького і Геттінгенського університетів. Почесний член АН СРСР. Дістав видатні результати в теорії інваріантів, теорії чисел, математичній логіці, теорії інтегральних та диференціальних рівнянь, варіаційному численні. Дав повну систему аксіом евклідової геометрії. Першим одержав в остаточній формі рівняння гравітаційного поля.

**ГОПФ Ебергард (1902—1983)** — німецький математик, професор Лейпцизького й Мюнхенського університетів. Основні праці стосуються теорії динамічних систем і математичної фізики.

**ГРІН Джордж (1793—1841)** — англійський математик і фізик. Основоложник школи математичної фізики в Кембриджі. Дістав класичні результати в математичній фізиці, розвинув теорію електрики й магнетизму, спираючися на знайдені ним формули теорії потенціалу.

**ГРОБМАН Давид Матвійович (нар. 1922)** — російський математик, професор. Основні наукові дослідження присвячені якісній теорії диференціальних рівнянь,

теорії стійкості. У 1962 р. довів важливу теорему про лінеаризацію автономної системи в околі положення рівноваги. Аналогічний результат незалежно й іншим методом одержав відомий американський математик Ф. Хартман.

**ГУК Роберт** (1635—1703) — англійський природознавець, член Лондонського королівського товариства. Заклав основи теорії пружності. Розробляв теорію руху планет.

**ГУРВИЦ Адольф** (1859—1919) — німецький математик, професор Кенігсберзького університету і Цюрихського політехнікуму. Відомий працями з математичного аналізу, алгебри, теорії чисел.

**ГЮЙГЕНС Христіан** (1629—1695) — голландський фізик, механік і математик, перший президент Французької АН, перший іноземний член Лондонського королівського товариства. Математичні праці присвячені дослідженню властивостей кривих, теорії імовірностей. Автор визначних відкриттів у механіці, астрономії, оптиці.

**ДАЛАМБЕР Жан Лерон** (1717—1783) — французький математик, механік і філософ, член Французької АН. Почесний член Петербурзької АН. Автор фундаментальних праць з аналітичної та небесної механіки, математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь.

**ДАНЖУА Арно** (1884—1974) — французький математик, член Паризької АН. Іноземний член АН СРСР. Президент Французького математичного товариства. Основні праці стосуються теорії функцій. У теорії диференціальних рівнянь дослідив динамічні системи на торі.

**ДЕКАРТ Рене** (1596—1650) — французький філософ, математик, фізик. Уперше ввів поняття незалежної змінної величини і функції. Створив метод координат.

**ДІРАК Поль Адрієн Моріс** (1902—1984) — англійський фізик-теоретик, член Лондонського королівського товариства, професор Кембриджського університету. Іноземний член АН СРСР. Лауреат Нобелівської премії. Один із творців квантової механіки. З його ім'ям пов'язані такі математичні поняття, як дельта-функція Дірака, матриці Дірака, релятивістське хвильове рівняння Дірака.

**ДЮЛАК Анрі** (1870—1955) — французький математик, професор Ліонського університету. Основні праці присвячені теорії диференціальних рівнянь. Узагальнив метод нормальних форм Пуанкаре.

**ЕЙЛЕР Леонард** (1707—1783) — швейцарський математик, механік, фізик, астроном. Академік Петербурзької АН. Член Берлінської, Французької АН, Лондонського королівського товариства. Автор близько 850 наукових праць. Дослідження охоплюють основні розділи математики XVIII ст.

**ЕРМІТ Шарль** (1822—1901) — французький математик, член Паризької АН, професор Паризького університету. Член-кореспондент Петербурзької АН. Основні праці присвячені теорії спеціальних функцій та теорії чисел.

**ЖОРДАН Марі Едмон Каміль** (1838—1922) — французький математик, член Паризької АН. Член-кореспондент Петербурзької АН. Дістав фундаментальні результати в теорії груп, теорії матриць. З його ім'ям пов'язані такі поняття, як крива Жордана, міра Жордана, жорданова нормальна форма матриці тощо.

**КЕЙЛІ Артур** (1821—1895) — англійський математик, член Лондонського королівського товариства, професор Кембриджського університету. Член-кореспондент Петербурзької АН. Заклав основи алгебричної геометрії. Автор праць з алгебри, диференціальних рівнянь, комплексного аналізу.

**КЕШЛЕР Йоганн** (1571—1630) — німецький астроном, математик і механік. На основі астрономічних спостережень установив закони руху планет. Попередник творців аналізу нескінченно малих.

**КЛЕРО Алексіс Клод** (1713—1765) — французький математик і механік, член Французької АН. Почесний член Петербурзької АН. Ввів поняття повного диференціала функції кількох змінних, загального та окремого розв'язків диференціального рівняння, а також афінного перетворення. Вперше дійшов висновку про можливість розв'язання функції в тригонометричний ряд за косинусами. Відомий також працями з геометрії, аналітичної механіки та геодезії.

**КНЕЗЕР Адольф** (1862—1930) — німецький математик. Член-кореспондент Берлінської АН і АН СРСР. Очолював математичні кафедри в університетах Тарту (Естонія) та Бреслау (тепер Врошлав). Основні праці стосуються теорії лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь, варіаційного числення.

**КНЕЗЕР Гельмут** (1898—1973) — німецький математик. Син Адольфа Кнезера. Працював в університетах Геттінгена та Грайсвальда, очолював Інститут математичних досліджень в Обервольфаху. Дістав важливі результати в багатьох розділах математики: комплексному аналізі, топології, неевклідовій геометрії, теорії груп. Теорії майже періодичних функцій.

**КОВАЛЕВСЬКА Софія Василівна** (1850—1891) — російський математик і механік, член-кореспондент Петербурзької АН, професор Стокгольмського університету. Її вчителем був К. Т. В. Вейерштрасс. Дістала важливі результати в теоретичній механіці, теорії абелівих інтегралів, відкрила новий інтегровний випадок задачі про обертання твердого тіла навколо нерухомої точки, довела теорему існування аналітичного розв'язку системи рівнянь із частинними похідними.

**КОЛМОГОРОВ Андрій Миколайович** (1903—1987) — російський математик, академік АН СРСР, професор Московського університету. Іноземний член Паризької АН, член Лондонського королівського товариства. Основні праці присвячені теорії імовірностей, теорії наближення функцій, функціональному аналізу, теорії динамічних систем, теорії турбулентності. Разом зі своїм учнем В. І. Арнольдом розв'язав знамениту тринадцяту проблему Гільберта. Запропонував метод розв'язання так званої проблеми малих знаменників у теорії збурень гамільтонових систем.

**КОРТЕВЕГ Дідерік** (1848—1941) — нідерландський математик, професор Амстердамського університету. Основні праці присвячені дослідженню задач математичної фізики та прикладної математики. Разом зі своїм учнем де Фрізом вивів і дослідив важливе нелінійне диференціальне рівняння, яке описує поширення стаціонарних хвиль у прямокутному каналі.

**КОШІ Огюстен Луї** (1789—1857) — французький математик, член Французької АН. Почесний член Петербурзької АН. Опублікував понад 800 праць із теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, теоретичної і небесної механіки, математичної

фізики. Дав чітке означення неперервної функції, розвинув основи теорії аналітичних функцій. У теорії диференціальних рівнянь довів основну теорему існування розв'язку початкової задачі (задачі Коші). Розробив метод мажорант, який дає змогу обґрунтувати збіжність розвинень розв'язків у степеневі ряди.

**КРИЛОВ Микола Микрофанович** (1879—1955) — український математик і механік, академік АН УРСР та АН СРСР, професор Петербурзького гірничого інституту, Кримського університету, працював в АН УРСР. Один із засновників київської наукової школи нелінійної механіки. Основні праці стосуються варіаційного числення, математичної фізики, нелінійної механіки, теорії наближених методів.

**ЛАГРАНЖ Жозеф Луї** (1736—1813) — французький математик і механік, член Берлінської (був її президентом) та Французької АН, викладав у Туринському артилерійському училищі, Нормальній і Політехнічній школах у Парижі. Почесний член Петербурзької АН. Разом із Л. Ейлером створив новий розділ математики — варіаційне числення. Йому належить розробка математичного формалізму класичної механіки. Дістав видатні результати в аналізі, алгебрі, теорії чисел. У галузі диференціальних рівнянь запропонував метод варіації довільної сталої, розвинув теорію особливих розв'язків.

**ЛАПЛАС П'єр Сімон** (1749—1827) — французький математик, фізик і астроном, член Французької АН. Почесний член Петербурзької АН. Викладав у військових школах Парижа. Основні праці присвячені дослідженню диференціальних рівнянь із частинними похідними, теорії імовірностей, небесній механіці. Обґрунтував стійкість Сонячної системи в першому наближенні теорії збурень.

**ЛЕВЕР'Є Урбен Жан Жозеф** (1811—1877) — французький астроном, член Французької та Петербурзької АН. Очолював кафедру небесної механіки Паризького університету, Паризьку обсерваторію. Зробив висновок про існування Нептуна й обчислив його положення.

**ЛЕЖАНДР Андрієн Марі** (1752 — 1833) — французький математик, член Французької АН, професор Паризької військової школи й Політехнічної школи в Парижі. Відомий працями зі сферичної тригонометрії, теорії імовірностей, теорії чисел. Вивчаючи динаміку еліпсоїда обертання, відкрив і дослідив властивості многочленів, які згодом дістали назву поліномів Лежандра.

**ЛЕЙБНИЦ Готфрід Вільгельм** (1646—1716) — німецький математик, фізик, філософ, перший президент Берлінської АН. Член Лондонського королівського товариства, Французької АН. Один із творців диференціального та інтегрального числення, їхніх понять і символики.

**ЛІ Маріус Софус** (1842—1899) — норвезький математик, професор Христіанського та Лейпцизького університетів. Член-кореспондент Петербурзької АН. Створив класичну теорію нелінійних груп перетворень (груп Лі). Показав її значення для дослідження симетричних властивостей диференціальних рівнянь, а також як принципу класифікації в геометрії, топології, механіці.

**ЛІПШИЦ Рудольф Отто Сигізмунд** (1832—1903) — німецький математик, член-кореспондент Берлінської АН, професор університету в Бреслау (Вроцлав) і Боннського університету. Член-кореспондент Паризької АН. Автор важливих праць :

аналізу, теорії чисел, диференціальних рівнянь. Його ім'ям названо теорему, яка встановлює достатні умови збіжності ряду Фур'є.

**ЛІТЛВУД Джон Ідензор** (1885—1977) — англійський математик, професор Кембриджського університету. Основні праці присвячені аналітичній теорії чисел, комплексному аналізу, теорії рядів, теорії диференціальних рівнянь.

**ЛЮВІЦЬКІЙ Жозеф** (1809—1882) — французький математик, член Паризької АН, професор Політехнічної школи та Колеж де Франс. Автор важливих праць із комплексного аналізу, теорії чисел. Першим строго довів неінтегровність у квадратурах деяких класів диференціальних рівнянь. Разом зі Ж. Ш. Ф. Штурмом розробив теорію крайових задач на власні значення для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

**ЛЯПУНОВ Олександр Михайлович** (1857—1918) — російський математик і механік, дійсний член Петербурзької АН, професор Харківського, Одеського університетів. Член-кореспондент Паризької АН. Засновник математичної теорії стійкості руху, автор важливих досліджень про фігури рівноваги рідини, що рівномірно обертається. Зробив вагомий внесок у теорію ймовірностей, теорію потенціалу.

**МИТРОПОЛЬСЬКИЙ Юрій Олексійович** (нар. 1917) — український математик, академік НАН України та Російської АН, учень М. М. Боголюбова. Тривалий час очолював Інститут математики НАН України, викладав у Київському університеті. Один із засновників київської наукової школи нелінійної механіки. Найважливіші результати досліджень стосуються створення алгоритмів для побудови асимптотичних розв'язків розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, що описують нестационарні коливальні процеси, методу усереднення та методу інтегральних многовидів. Відомий також працями, присвяченими дослідженню квазіперіодичних систем.

**МОЗЕР Юрген Курт** (1928—1999) — німецький математик. Викладав у Геттінгені, Нью-Йоркському університеті, професор Массачусетського технологічного інституту. Дістав важливі результати в теорії динамічних систем та небесній механіці, теорії рівнянь із частинними похідними, нелінійному функціональному аналізі, варіаційному численні, комплексній геометрії. З його ім'ям пов'язують теорію збурень квазіперіодичних рухів динамічних систем (теорія Колмогорова—Арнольда—Мозера).

**МОРС Гарола Мерстон** (1892—1977) — американський математик, член Національної АН США. Викладав у Гарвардському університеті та Принстоні, професор Принстонського інституту перспективних досліджень. Розвинув варіаційне числення в цілому. Розроблена ним теорія, яку тепер називають теорією Морса, є важливим інструментом глобального аналізу звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними.

**НЕПЕР Джон** (1550—1617) — шотландський математик, винахідник логарифмів.

**НЬЮТОН Ісаак** (1643—1727) — англійський фізик, математик, механік, астроном, президент Лондонського королівського товариства. Іноземний член Паризької АН. Викладав у Кембриджському університеті. Разом із Г. В. Лейбніцем вважається творцем диференціального та інтегрального числення. Винайшов метод інтегрування диференціальних рівнянь розв'язанням їх розв'язків у степеневій ряди. На основі закону всесвітнього тяжіння дав математичне обґрунтування першого закону Кеплера.

**ОСТРОГРАДСЬКИЙ Михайло Васильович** (1801—1862) — український і російський математик, член Петербурзької АН та багатьох інших академій наук. Розв'язав цілу низку важливих задач математичної фізики, варіаційного числення, теоретичної механіки. Запропонував спосіб зведення неоднорідної крайової задачі до однорідної. Вперше одержав формулу перетворення поверхневого інтеграла в об'ємний та її узагальнення на випадок довільної кількості змінних.

**ПЕАНО Джузеппе** (1858—1932) — італійський математик, член Туринської АН, професор Туринського університету. Запропонував систему аксіом арифметики, довів теорему існування задачі Коші для диференціального рівняння з неперервною правою частиною, першим побудував неперервну криву, яка цілком заповнює квадрат (крива Пеано).

**ПЕНЛЕВЕ Поль** (1863—1933) — французький математик і механік, член Паризької АН. Викладав у Вищій нормальній школі та в Колеж де Франс у Парижі. Член-кореспондент АН СРСР. Один із засновників аналітичної теорії диференціальних рівнянь у комплексній області.

**ПКАР Шарль Еміль** (1856—1941) — французький математик, член Паризької АН (був її президентом), професор Сорбонни. Член Лондонського королівського товариства, член Французької АН, член-кореспондент Петербурзької АН, почесний член АН СРСР. Дістав фундаментальні результати в теорії аналітичних та алгебричних функцій, теорії диференціальних рівнянь.

**ПОНТРЯГІН Лев Семенович** (1908—1988) — російський математик, академік АН СРСР. Працював у Математичному інституті ім. В. А. Стеклова, викладав у Московському університеті. Дістав фундаментальні результати в топології, теорії неперервних груп. Разом з О. О. Андроном запровадив концепцію грубої динамічної системи. В теорії оптимальних процесів запропонував і обґрунтував принципи вибору оптимального керування.

**ПУАНКАРЕ Анрі** (1854—1912) — французький математик, фізик, астроном і філософ, член Паризької і Французької АН та більш як 35 іноземних академій наук. Йому належить понад 1000 важливих наукових праць із топології, теорії потенціалу, теорії імовірностей, математичної фізики, неевклідової геометрії, небесної механіки, спеціальної теорії відносності. Один із засновників якісної теорії диференціальних рівнянь. Розробив теорію збурень періодичних розв'язків. Досліджуючи лінійні диференціальні рівняння з раціональними коефіцієнтами, розвинув теорію автоморфних функцій.

**ПУАССОН Сімеон Дені** (1781—1840) — французький математик, механік і фізик, член Паризької АН, професор Політехнічної школи та Сорбонни. Почесний член Петербурзької АН. Автор важливих праць з аналітичної механіки, математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними, варіаційного числення, теорії імовірностей.

**ПФАФФ Йоганн Фрідріх** (1765—1825) — німецький математик і астроном, член Берлінської АН, професор Хельмштадського університету, університету в Галлі. Член Паризької АН, почесний член Петербурзької АН. Відомий дослідженнями з теорії диференціальних рівнянь.



**РАУС Едвард** (1831—1907) — англійський механік і математик, член Лондонського королівського товариства. Викладав у Кембриджському університеті. Відомий своїми трактатами з теоретичної механіки. З його ім'ям пов'язують алгебричний критерій стійкості лінійних систем зі сталими коефіцієнтами.

**РІККАТІ Джакомо Франческо** (1676—1754) — італійський математик та інженер. Основні праці стосуються інтегрального числення й диференціальних рівнянь. З його ім'ям пов'язують диференціальні рівняння та системи матричних диференціальних рівнянь із квадратичними нелінійностями.

**РІМАН Георг Фрідріх Бернгард** (1826—1866) — німецький математик, професор Геттінгенського університету. Дістав фундаментальні результати в комплексному аналізі, аналітичній теорії чисел, теорії диференціальних рівнянь, диференціальній геометрії. З його ім'ям пов'язано багато математичних тверджень, проблем і понять.

**РОЛЛЬ Мішель** (1652—1719) — французький математик, член Французької АН. Основні дослідження присвячені методам розв'язання діофантових та алгебричних рівнянь. Його ім'ям названо важливу теорему диференціального числення.

**СМЕЙЛ Стефан** (нар. 1930) — американський математик, член Національної АН США, професор Колумбійського університету. Лауреат премії ім. Дж. Філдса — однієї з найвищих відзнак у галузі математики. Автор важливих праць із диференціальної топології, теорії динамічних систем, математичної економіки, теорії алгоритмів.

**СТЕКЛОВ Володимир Андрійович** (1864—1926) — російський математик і механік, академік Петербурзької АН, академік АН УРСР. Був віце-президентом АН СРСР. Викладав у Харківському університеті, професор Петербурзького (Петроградського) університету. Основні дослідження присвячені розв'язанню важливих задач математичної фізики, гідромеханіки, геофізики. Його ім'ям названо теорему про повноту власних функцій крайової задачі Штурма—Ліувілья.

**СТОКС Джордж Габріель** (1819—1903) — англійський математик, механік і фізик, член Лондонського королівського товариства, був його президентом. Член Паризької АН. Основні праці присвячені дослідженню задач математичної фізики, оптики, гідродинаміки. Його ім'ям названо важливу формулу векторного аналізу, яка встановлює рівність циркуляції векторного поля вздовж замкненого контура та потоку ротора поля через поверхню, обмежену цим контуром.

**ТЕЙЛОР Брук** (1685—1731) — англійський математик, член Лондонського королівського товариства. Вивів загальну формулу розширення функцій у степеневі ряди, зачаткував математичну теорію коливання струни.

**ФАУЛЕР Ральф Говард** (1889—1944) — англійський фізик-теоретик, член Лондонського королівського товариства, професор Кембриджського університету. Один з основоположників теоретичної астрофізики. Математичні роботи присвячені дослідженню важливого нелінійного диференціального рівняння другого порядку (рівняння Емдена—Фаулера) для опису стану рівноваги зірок.

**ФЕРХЮЛЬСТ П'єр Франсуа** (1804—1849) — бельгійський математик, професор університету в Брюсселі та Королівської військової школи. Очоловав Бельгійську АН. Розробляючи теорію зростання популяцій, запропонував математичну модель,

яка описується нелінійним диференціальним рівнянням (логістичним рівнянням, або рівнянням Ферхюльста).

**ФРЕДГОЛЬМ Ерік Івар** (1866—1927) — шведський математик, професор Стокгольмського університету. Засновник загальної теорії лінійних інтегральних рівнянь (рівняння Фредгольма).

**ФРОБЕНІУС Ферлінард Георг** (1849—1917) — німецький математик, член Берлінської АН, професор Берлінського університету. Основні дослідження стосуються алгебри, теорії груп. Разом із К. Т. В. Вейерштрассом вважається творцем теорії матриць. Установив умови повної інтегрованості систем рівнянь Пфаффа.

**ФУКС Іммануель Лазарус** (1833—1902) — німецький математик, член Берлінської АН, професор Берлінського університету. Основні дослідження присвячені розробці теорії лінійних диференціальних рівнянь із регулярними особливими членами на замкненій комплексній площині. Тепер такі рівняння називають фуковими.

**ЧЕТАЄВ Микола Гурійович** (1902—1959) — російський математик і механік, член-кореспондент АН СРСР. Працював у Інституті механіки АН СРСР, професор Казанського, Московського університетів. Автор важливих праць із теорії стійкості. З його ім'ям пов'язують важливі теореми про нестійкість.

**ШАУДЕР Юліус Павел** (1899—1943) — польський математик, професор Львівського університету. Основні праці стосуються функціонального аналізу та його застосувань у теорії диференціальних рівнянь. Розвинув топологічні методи відшукування розв'язків нелінійних задач математичної фізики. Його ім'ям названо принцип існування нерухомої точки для відображень банахових просторів.

**ШРЬОДІНГЕР Ервін** (1887—1961) — австрійський фізик-теоретик і математик, професор Берлінського, Оксфордського, Грацького, Віденського університетів, директор Інституту вищих досліджень у Дубліні. Почесний член АН СРСР. Лауреат Нобелівської премії. Його роботи відіграли визначну роль у становленні квантової теорії та формуванні сучасної атомної фізики.

**ШТУРМ Жак Шарль Франсуа** (1803—1855) — швейцарський математик, член Паризької АН, професор Політехнічної школи, Сорбонни. Член-кореспондент Петербурзької АН. Основні праці присвячені розв'язанню задач математичної фізики та пов'язаних із ними крайових задач на власні значення. Заклав основи теорії коливності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь. Запропонував метод визначення числа коренів полінома, які належать заданому відрізкові.

**ЯКОБІ Карл Густав Якоб** (1804—1851) — німецький математик, член Берлінської АН, професор Берлінського, Кенігсберзького університетів. Член Лондонського королівського товариства, член-кореспондент Паризької АН, почесний член Петербурзької АН. Плідно працював у багатьох розділах математики. Разом із Н. Г. Абелем вважається засновником теорії еліптичних функцій. Запропонував ряд нових методів інтегрування рівнянь динаміки. Його ім'ям названо функціональний визначник (якобіан), ортогональні многочлени, що узагальнюють поліноми Лежандра, важливе рівняння з частинними похідними першого порядку (рівняння Гамільтона—Якобі).

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

### ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984. — 272 с.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
3. *Диференціальні рівняння / І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай та ін.* — К.: Вища шк. Головне вид-во, 1981. — 504 с.
4. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз: У 2 ч. — К.: Либідь, 1994. — Ч. I. — 320 с.
5. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз: У 2 ч. — К.: Либідь, 1994. — Ч. II. — 300 с.
6. *Калужнін Л. А., Вишенський В. А., Шуб Ц. А.* Лінійні простори. — К.: Вища шк. Головне вид-во, 1971. — 344 с.
7. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин, И. З. Штокало, П. С. Бондаренко и др.* — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1974. — 472 с.
8. *Лавренюк С. П.* Курс диференціальних рівнянь. — Львів: Вид-во наук.-техн. д-ри, 1997. — 216 с.
9. *Лопатинский Я. Б.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. — 200 с.
10. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высш. шк., 1967. — 564 с.
11. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982. — 312 с.

12. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння в задачах. — К.: Либінь, 2003. — 504 с.
13. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 468 с.
14. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980. — 232 с.
15. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
16. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. — М.: Наука, 1962. — Т. 1. — 608 с.
17. *Шкіль М. І., Сотниченко М. А.* Звичайні диференціальні рівняння. — К.: Виша шк., 1992. — 303 с.

## ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

18. *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука, 1987. — 160 с.
19. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
20. *Арнольд В. И., Ильашенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления: В 4 т. — М.: ВИНТИ, 1985. — Т. 1. — С. 7—149.
21. *Баутин Н. Н., Леситович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976. — 496 с.
22. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
23. *Бородін О. І., Бугай А. С.* Біографічний словник діячів у галузі математики. — К.: Рад. шк., 1973. — 552 с.
24. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
25. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — К.: Наук. думка, 1982. — 612 с.
26. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. — 436 с.
27. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

28. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
29. Коттингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — 474 с.
30. Латышев К. Я., Терещенко Н. И., Орел Г. С. Нормально-регулярные решения и их приложения. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1974. — 136 с.
31. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе и др. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 392 с.
32. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. — 550 с.
33. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.
34. Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М. Основи математичної економіки. — К.: Інформтехніка, 1995. — 320 с.
35. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. — 287 с.
36. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
37. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.
38. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.
39. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986. — 243 с.
40. Braun M. Differential equations and their applications. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1978. — 520 p.
41. Hirsch M. W., Smale S. Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. — New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1974. — 358 p.

<i>Передмова</i> .....	3
<i>Основні позначення</i> .....	5
<i>Вступ</i> .....	7
<b>Глава 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ</b> .....	<b>23</b>
1.1. Розв'язання окремих типів диференціальних рівнянь першого порядку .....	23
1.2. Скалярне автономне рівняння першого порядку .....	43
1.3. Елементи якісного аналізу лінійного рівняння .....	56
1.4. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші .....	63
1.5. Продовження розв'язку задачі Коші .....	73
1.6. Геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку .....	81
1.7. Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник .....	89
1.8. Рівняння в симетричній формі та двовимірні автономні системи .....	102
1.9. Класифікація фазових портретів автономних систем в околі положення рівноваги за лінійним наближенням .....	111
1.10. Рівняння, не розв'язані відносно похідної .....	125
<b>Глава 2. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ</b> .....	<b>151</b>
2.1. Основні факти лінійної теорії .....	151
2.2. Лінійні однорідні рівняння $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами .....	180
2.3. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами .....	193
2.4. Лінійні неоднорідні рівняння й системи .....	225
2.5. Аналіз найпростіших задач теорії коливань .....	253
2.6. Лінійні системи з періодичними коефіцієнтами .....	264
<b>Глава 3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ</b> .....	<b>269</b>
3.1. Канонічні форми ЛОР другого порядку .....	269

3.2. Коливність розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку .....	274
3.3. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів .....	282
3.4. Крайові задачі .....	308
<b>Глава 4. ІНТЕГРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ .....</b>	<b>332</b>
4.1. Базові поняття й основні об'єкти розгляду .....	332
4.2. Інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків .....	338
4.3. Розв'язання систем диференціальних рівнянь. Теорія перших інтегралів .....	363
<b>Глава 5. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ .....</b>	<b>384</b>
5.1. Існування розв'язку задачі Коші .....	384
5.2. Коректність задачі Коші .....	396
5.3. Властивості розв'язку нормальної системи як функції початкових даних і параметрів .....	405
5.4. Асимптотичні розвинення розв'язків диференціальних рівнянь .....	420
5.5. Стійкість за Ляпуновим .....	428
5.6. Функції Ляпунова .....	447
5.7. Векторні поля, автономні системи, потоки .....	470
5.8. Консервативна система з одним ступенем вільності .....	482
<b>Глава 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З КІЛЬКОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ .....</b>	<b>496</b>
6.1. Рівняння з частинними похідними першого порядку .....	496
6.2. Рівняння Пфаффа .....	532
<i>Що вивчає сучасна теорія диференціальних рівнянь? .....</i>	<i>544</i>
<b>Додатки .....</b>	<b>561</b>
<i>Додаток 1. Будова лінійного оператора .....</i>	<i>561</i>
<i>Додаток 2. Диференційовні відображення .....</i>	<i>571</i>
<b>Короткі відомості про вчених, які згадуються в книзі .....</b>	<b>585</b>
<i>Список рекомендованої літератури .....</i>	<i>595</i>