Л. С. ПОНТРЯГИН

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

22.161.6
П 56
УДК 517.9

УЧЕБНИК УДОСТОЕН ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРЕМИИ СССР
ЗА 1975 г.

$П \dfrac{1702050000-155}{053(02)\text{-}82}$ 82-83

СОДЕРЖАНИЕ

1*

ОТ АВТОРА

Эта книга написана на основе лекций, которые я в течение ряда лет читал на механико-математическом факультете Московского государственного университета. При составлении программы лекций я исходил из уверенности, что выбор материала не должен быть случайным и не должен опираться исключительно на сложившиеся традиции. Наиболее важные и интересные применения обыкновенные дифференциальные уравнения находят в теории колебаний и в теории автоматического управления. Эти применения и послужили руководством при выборе материала для моих лекций. Теория колебаний и теория автоматического управления, несомненно, играют очень важную роль в развитии всей современной материальной культуры, и потому я считаю, что такой подход к выбору материала для курса лекций является, если и не единственно возможным, то во всяком случае разумным. Стремясь дать студентам не только чисто математическое орудие, пригодное для применений в технике, но также продемонстрировать и сами применения, я включил в лекции некоторые технические вопросы. В книге они изложены в § 13, 27, 29. Эти вопросы составляют неотъемлемую органическую часть моего курса лекций и, соответственно, этой книги.

Кроме материала, излагавшегося на лекциях, в книгу включены некоторые более трудные вопросы, разбиравшиеся на студенческих семинарах. Они содержатся в § 19, 31 книги. Материал, содержащийся в § 14, 22, 23, 24, 25, 30, излагался на лекциях частично и не каждый год.

Для удобства читателя в конце книги приведены два добавления, которые содержат материал, не входящий в курс обыкновенных дифференциальных уравнений, но существенным образом использующийся в нем. В первом добавлении (отсутствовавшем в предыдущем издании) изложены основные топологические свойства множеств расположенных в эвклидовом пространстве, и дано доказательство теорем о неявных функциях; второе добавление посвящено линейной алгебре.

В этом, втором издании по новому изложены теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных значений и параметров, а также о дифференцируемости решений по этим величинам. Сделаны также многие более мелкие исправления.

В заключение я хочу выразить благодарность моим ученикам и ближайшим товарищам по работе В. Г. Болтянскому, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко, помогавшим мне при подготовке и чтении лекций, а также при написании и редактировании этой книги. Мне хочется также отметить решающее влияние на мои научные интересы, оказанное выдающимся советским специалистом в области теории колебаний и теории автоматического управления Александром Александровичем Андроновым, с которым меня связывали долголетние дружеские отношения. Его влияние существенно сказалось на характере и направленности этой книги.

Л. С. Понтрягин

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВВЕДЕНИЕ

Эта глава посвящена в первую очередь определению тех понятий, которые будут изучаться в дальнейшем. Что такое система обыкновенных дифференциальных уравнений, что называется ее решением и как много этих решений существует — таковы главные вопросы, на которые дается ответ в этой главе. Количество решений определяется теоремами существования и единственности, которые здесь не доказываются, а только формулируются. Доказательство этих и ряда других теорем того же типа дается в четвертой главе, а до этого сформулированные в первой главе теоремы многократно используются, чем выясняется их значение. Кроме этих основных сведений, в первой главе приводятся решения дифференциальных уравнений нескольких простейших типов. В конце главы рассматриваются комплексные дифференциальные уравнения и их комплексные решения и приводятся простейшие замечания относительно систем линейных дифференциальных уравнений.

§ 1. Дифференциальное уравнение первого порядка

Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестными являются функции одного или нескольких переменных, причем в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если неизвестными функциями являются функции многих переменных, то уравнения называются уравнениями в *частных производных*, в противном случае, т. е. при рассмотрении функций только одного независимого переменного, уравнения называются *обыкновенными* дифференциальными уравнениями. В дальнейшем мы будем иметь дело только с последними.

Так как в ряде физических применений независимым переменным, от которого зависят неизвестные искомые функции, является время, которое принято обозначать через t, то всюду в дальнейшем независимое переменное будет обозначаться через t. Неизвестные функции будут обозначаться через x, y, z и т. д. Производные функций по t

будут, как правило, обозначаться точками: $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$ и т. д. В тех случаях, когда это неудобно или невозможно, мы будем указывать порядок производной верхним индексом в скобках; например, $x^{(n)}=\frac{d^nx}{dt^n}$.

В первую очередь мы займемся рассмотрением одного дифференциального уравнения первого порядка, т. е. уравнения, в которое входит лишь первая производная неизвестной функции. Уравнение это может быть записано в виде:

$$F(t,\ x,\ \dot{x})=0. \tag{1}$$

Здесь t — независимое переменное, x — его неизвестная функция, $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ — ее производная, а F — заданная функция трех переменных. Функция F может быть задана не для всех значений ее аргументов; поэтому говорят *об области* В *задания функции* F. Здесь имеется в виду множество В точек координатного пространства трех переменных t, x, $\dot{x}$. *Решением* уравнения (1) называется такая функция $x=\varphi(t)$ независимого переменного t, определенная на некотором интервале $r_1<t<r_2$ (случаи $r_1=-\infty$; $r_2=+\infty$ не исключаются), что при подстановке ее вместо x в соотношение (1) мы получаем тождество на всем интервале $r_1<t<r_2$. Интервал $r_1<t<r_2$ называется *интервалом определения* решения $\varphi(t)$. Очевидно, что подстановка $x=\varphi(t)$ в соотношение (1) возможна лишь тогда, когда функция $\varphi(t)$ на всем интервале $r_1<t<r_2$ имеет первую производную (и, в частности, непрерывна). Для того чтобы подстановка $x=\varphi(t)$ в соотношение (1) была возможна, необходимо также, чтобы при произвольном значении переменного t из интервала $r_1<t<r_2$ точка с координатами $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ принадлежала множеству В, на котором определена функция F.

Соотношение (1) связывает три переменные величины t, x, $\dot{x}$. В некоторых случаях оно определяет переменное $\dot{x}$ как однозначную неявную функцию независимых переменных t, x. В этом случае дифференциальное уравнение (1) равносильно дифференциальному уравнению вида

$$\dot{x}=f(t,\ x). \tag{2}$$

Дифференциальное уравнение (2) называется *разрешенным относительно производной*; оно в некоторых отношениях более доступно для изучения, чем общее дифференциальное уравнение (1). Именно уравнения, разрешенные относительно производной, мы и будем теперь рассматривать. Мы не будем уже считать, что соотношение (2) получено в результате разрешения относительно $\dot{x}$ уравнения вида (1), а будем исходить из функции $f(t,\ x)$ как из заданной функции двух независимых переменных t, x.

Для того чтобы пользоваться наглядными геометрическими представлениями, мы введем в рассмотрение координатную плоскость P переменных t и x. При этом t как независимое переменное мы будем откладывать по оси абсцисс, а x как зависимое переменное — по оси ординат. Функция f, определяющая дифференциальное уравнение (2), может быть задана не для всех значений своих аргументов t и x, или, говоря геометрическим языком, не во всех точках плоскости P, а лишь в точках некоторого множества Γ плоскости P (рис. 1). Относительно множества Γ мы в дальнейшем всегда будем предполагать, что оно является *открытым*. Это значит, что наряду с каждой точкой p в Γ входит и некоторый круг положительного радиуса с центром в p (см. § 32). Относительно функции f будет предполагаться, что как она сама, так и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ являются непрерывными функциями пары переменных t, x на всем множестве Γ. Решение $x=\varphi(t)$ уравнения (2) будем геометрически изображать в плоскости P в виде кривой с уравнением $x=\varphi(t)$. Кривая эта в каждой точке имеет касательную и полностью проходит в открытом множестве Γ; она называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (2).

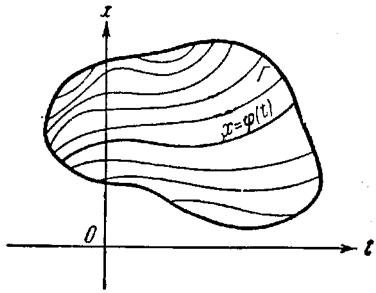


Рис. 1.

Теорема существования и единственности

Известно, какую большую роль в алгебре играют теоремы, отвечающие на вопрос о том, сколько решений имеет та или другая система алгебраических уравнений. Такова, например, основная теорема алгебры, утверждающая, что многочлен n-й степени всегда имеет ровно n корней (считая с их кратностями). Точно так же в теории дифференциальных уравнений важным теоретическим вопросом является вопрос о том, насколько много решений имеет дифференциальное уравнение. Оказывается, что каждое дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, и потому приходится ставить вопрос не о числе решений, а о том, как можно описать совокупность всех решений данного дифференциального уравнения. Ответ на этот вопрос дает теорема существования и единственности (теорема 1), которая в этом параграфе приводится без доказательства. Доказательство будет дано значительно позже (см. § 20).

Теорема 1. *Пусть*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3}$$

— дифференциальное уравнение. Будем предполагать, что функция $f(t, x)$ задана на некотором открытом множестве Γ плоскости P переменных t, x. Относительно функции f будем предполагать, что она сама и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ являются непрерывными функциями на всем открытом множестве Γ. Теорема утверждает, что:

1) для всякой точки (t_0, x_0) множества Γ найдется решение $x = \varphi(t)$ уравнения (3), *удовлетворяющее условию*

$$\varphi(t_0) = x_0; \tag{4}$$

2) если два решения $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$ уравнения (3) *совпадают хотя бы для одного значения $t = t_0$, т. е. если*

$$\varphi(t_0) = \chi(t_0),$$

то решения эти тождественно равны для всех тех значений переменного t, для которых они оба определены.

Числа t_0, x_0 называются *начальными значениями* для решения $x = \varphi(t)$, а соотношение (4) — *начальным условием* для этого решения. Говорят также, что решение $x = \varphi(t)$ *удовлетворяет начальному условию* (4) или же что оно *имеет начальные значения* t_0, x_0. Утверждение, что решение $x = \varphi(t)$ удовлетворяет начальному условию (4) (или имеет начальные значения t_0, x_0), предполагает, что интервал $r_1 < t < r_2$ определения решения $x = \varphi(t)$ содержит точку t_0.

Таким образом, теорема 1 утверждает, что координаты любой точки (t_0, x_0) множества Γ являются начальными значениями для некоторого решения уравнения (3) и что два решения с общими начальными значениями совпадают.

Геометрическое содержание теоремы 1 заключается в том, что *через каждую точку (t_0, x_0) множества Γ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения* (3) (см. рис. 1).

Говоря, что через каждую точку (t_0, x_0) множества Γ проходит «только одна» интегральная кривая, мы допускаем некоторую неточность. В самом деле, решением уравнения (3) называется функция $x = \varphi(t)$, заданная на вполне определенном интервале $r_1 < t < r_2$. Наряду с этой функцией может существовать функция $x = \psi(t)$, также удовлетворяющая уравнению (3) и имеющая те же начальные значения t_0, x_0, но заданная на другом интервале $s_1 < t < s_2$. Вторая часть теоремы 1 утверждает лишь, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ совпадают там, где они обе определены, но вовсе не утверждает, что интервалы их определения $r_1 < t < r_2$ и $s_1 < t < s_2$ одинаковы.

Если один из интервалов, например $s_1 < t < s_2$, полностью содержит другой, то мы будем говорить, что решение $x = \psi(t)$, заданное на интервале $s_1 < t < s_2$, является *продолжением* решения $x = \varphi(t)$. Естественно сосредоточить все внимание на тех решениях, которые нельзя продолжить ни вправо, ни влево. Такие решения мы будем называть *непродолжаемыми*. Нетрудно доказать (но это будет сделано позднее, см. § 22), что каждое решение может быть продолжено до непродолжаемого и притом единственным способом. Если теперь подразумевать под интегральной кривой график непродолжаемого решения, то утверждение о том, что через каждую точку (t_0, x_0) проходит единственная интегральная кривая, становится точным.

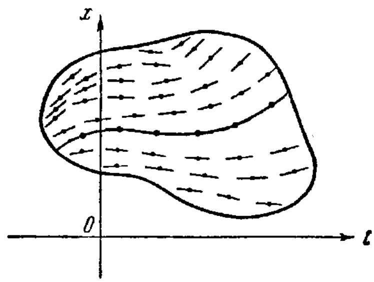


Рис. 2.

Каждое решение $x = \varphi(t)$ уравнения (3) мы интерпретировали геометрически в виде графика функции $\varphi(t)$. Дадим теперь геометрическую интерпретацию самого уравнения (3). Через каждую точку (t, x) множества Γ проведем прямую $l_{t,x}$ с угловым коэффициентом $f(t, x)$. Мы получаем *поле направлений*, соответствующее уравнению (3), что и дает геометрическую интерпретацию этого уравнения.

Связь между геометрической интерпретацией уравнения и геометрической интерпретацией его решений заключается в том (рис. 2), что *любая интегральная кривая* $x = \varphi(t)$ *в каждой своей точке* $(t, \varphi(t))$ *касается прямой* $l_{t,\varphi(t)}$.

Примеры

1. Для того чтобы проиллюстрировать значение теоремы 1 (в данном случае второй ее части), решим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \alpha x, \tag{5}$$

где α — действительное число. Здесь

$$f(t, x) = \alpha x,$$

так что функция f в действительности зависит лишь от переменного x. Множество точек, на котором определена функция f, в данном случае совпадает со всей плоскостью P. Как сама функция $f(t, x) = \alpha x$, так и ее производная $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \alpha$ являются непрерывными функциями переменных t и x во всей плоскости P. Таким образом, теорема 1 к уравнению (5) применима. Непосредственной подстановкой в уравнение (5) проверяется, что каждая функция

$$x = ce^{\alpha t}, \tag{6}$$

где c — произвольное действительное число, является решением уравнения (5). Решение это непродолжаемо, так как оно задано уже на всей прямой $-\infty < t < \infty$. Покажем, что, придавая всевозможные значения числу c, мы получим все решения уравнения (5). Пусть $x = \varphi(t)$ — произвольное решение этого уравнения. Покажем, что при надлежащем выборе числа c мы имеем $\varphi(t) = ce^{\alpha t}$. Пусть t_0 — некоторая точка интервала существования решения $\varphi(t)$ и $x_0 = \varphi(t_0)$. Положим $c = x_0 e^{-\alpha t_0}$. Тогда решения $x = \varphi(t)$ и $x = ce^{\alpha t} = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ уравнения (5) имеют одинаковые начальные значения (t_0, x_0) и потому в силу второй части теоремы 1 совпадают. Таким образом, формула (6) исчерпывает совокупность всех решений дифференциального уравнения (5).

2. Дадим математическое описание процесса распада радиоактивного вещества. Количество вещества, еще не распавшегося к моменту времени t, обозначим через $x(t)$. Из физических соображений следует, что (если нет условий для возникновения цепной реакции) скорость распада, т. е. производная $\dot{x}(t)$, пропорциональна имеющемуся количеству нераспавшегося радиоактивного вещества:

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t).$$

Здесь β — постоянный положительный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств радиоактивного вещества, а знак минус в правой части означает, что $x(t)$ убывает. Мы видим, что функция $x(t)$ удовлетворяет простейшему дифференциальному уравнению, рассмотренному в примере 1, так что

$$x(t) = ce^{-\beta t}.$$

Для определения константы c достаточно указать какие-либо начальные значения. Если, например, известно, что в момент времени $t = 0$ имелось количество вещества x_0, то $c = x_0$, и мы имеем:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}.$$

Скорость распада выражается здесь величиной β размерности $1/\textit{сек}$. Часто вместо величины β скорость распада характеризуют так называемым *периодом полураспада*, т. е. временем, за которое распадается половина имеющегося запаса вещества. Обозначим период полураспада через T и установим связь между величинами β и T. Мы имеем:

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-\beta T},$$

откуда

$$T = \frac{1}{\beta} \ln 2.$$

§ 2. Некоторые элементарные методы интегрирования

Главной задачей, возникающей перед нами, когда мы имеем дело с дифференциальным уравнением, является задача отыскания его решений. В теории дифференциальных уравнений, так же как в алгебре, вопрос о том, что значит найти решение уравнения, можно понимать по-разному. В алгебре первоначально стремились найти общую формулу с применением радикалов для решения уравнений каждой степени. Таковы были: формула для решения квадратного уравнения, формула Кардана для решения кубического уравнения и формула Феррари для решения уравнения четвертой степени. Позже было установлено, что для уравнений выше четвертой степени общей формулы решения в радикалах не существует. Осталась возможность приближенного решения уравнений с числовыми коэффициентами, а также возможность исследования зависимости корней уравнений от его коэффициентов. Примерно такова же была эволюция понятия решения в теории дифференциальных уравнений. Первоначально стремились решать, или, как говорят, «интегрировать дифференциальные уравнения в квадратурах», т. е. пытались записать решение при помощи элементарных функций и интегралов от них. Позже, когда выяснилось, что решение в этом смысле существует лишь для очень немногих типов уравнений, центр тяжести теории был перенесен на изучение общих закономерностей поведения решений.

В этом параграфе будут приведены методы интегрирования в квадратурах некоторых простейших уравнений первого порядка.

А) (Уравнение в полных дифференциалах). Решим уравнение

$$\dot{x} = \frac{g(t, x)}{h(t, x)}, \tag{1}$$

правая часть которого представлена в виде отношения функций $g(t, x)$ и $h(t, x)$. Предполагается, что функции $g(t, x)$ и $h(t, x)$ определены и непрерывны на некотором открытом множестве Γ плоскости P переменных t, x, причем знаменатель $h(t, x)$ не обращается в нуль ни в одной точке этого множества, а выражение $h(t, x)\,dx - g(t, x)\,dt$ представляет собой полный дифференциал на всем множестве Γ. Последнее означает, что существует функция $F(t, x)$, определенная на множестве Γ и удовлетворяющая на всем этом множестве условиям

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = h(t, x), \qquad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -g(t, x). \tag{2}$$

Уравнение (1) условимся символически записывать в виде уравнения

$$h(t, x)\,dx - g(t, x)\,dt = 0,$$

левая часть которого является полным дифференциалом. Оказывается, что для каждого решения $x=\varphi(t)$ уравнения (1) справедливо тождество

$$F(t,\ \varphi(t))=\text{const}.$$

Обратно, каждая функция $x=\varphi(t)$, заданная на некотором интервале и определяемая как неявная функция из уравнения

$$F(t, x)=c \tag{3}$$

(с произвольной константой c), является решением дифференциального уравнения (1).

Докажем предложение А). Пусть $x=\varphi(t)$ — решение дифференциального уравнения (1), определенное на интервале $r_1<t<r_2$. Тогда для всех точек этого интервала мы имеем:

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{g(t,\varphi(t))}{h(t,\varphi(t))},$$

откуда получаем:

$$h(t,\ \varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)-g(t,\ \varphi(t))=0.$$

Левая часть этого равенства, в силу (2), представляет собой полную производную по t функции $F(t,\ \varphi(t))$, так что

$$\frac{d}{dt}F(t,\ \varphi(t))=0$$

на всем интервале $r_1<t<r_2$. В силу известной теоремы анализа, функция $F(t, \varphi(t))$ есть константа на всем этом интервале.

Обратно, пусть $x=\varphi(t)$ есть решение уравнения (3), рассматриваемое на некотором интервале, так что

$$F(t,\ \varphi(t))=c.$$

Дифференцируя это тождество по t, мы в силу (2), получаем:

$$h(t,\ \varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)-g(t,\varphi(t))=0,$$

откуда видно, что $x=\varphi(t)$ есть решение дифференциального уравнения (1).

Итак, предложение А) доказано.

Результату, сформулированному в предложении А), можно дать следующее геометрическое истолкование. *Каждая интегральная кривая дифференциального уравнения* (1) *расположена целиком на некоторой линии уровня функции* $F(t, x)$, *т. е определяется уравнением* (3). *Обратно, каждая связная часть линии уровня* (*т. е. график решения уравнения* (3), *рассматриваемого на некотором интервале* $r_1<t<r_2$) *представляет собой интегральную кривую.*

Так как линия уровня функции $F(t, x)$ может состоять из нескольких отдельных кусков, то в этом случае целая линия уровня не является одной интегральной кривой, а распадается на несколько интегральных кривых. Иными словами, одна константа c может, в силу неявного уравнения (3), определять несколько (и даже бесконечно много, см. пример 3) различных непродолжаемых решений.

Б) (Линейные уравнения). Решим уравнение

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \tag{4}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ определены и непрерывны на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ (случаи $r_1 = -\infty$ и $r_2 = +\infty$ не исключаются). Таким образом, открытое множество Γ в плоскости P определяется условиями $r_1 < t < r_2$, налагаемыми на t при произвольном x. Это множество представляет собой полосу, если r_1 и r_2 конечны; полуплоскость, если конечна только одна из величин r_1, r_2, и плоскость, если бесконечны обе величины r_1, r_2. Правая часть уравнения (4) непрерывна вместе со своей частной производной по x на всем множестве Γ, так что для уравнения (4) выполнены условия теоремы 1. Пусть t_0 — некоторая точка интервала $r_1 < t < r_2$. Положим:

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Функция $A(t)$ определена на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Оказывается, что совокупность всех решений уравнения (4) записывается формулой

$$x = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} \cdot b(\tau)\, d\tau\right) e^{A(t)}, \tag{6}$$

где x_0 — произвольная константа. Каждое из этих решений определено на всем интервале $r_1 < t < r_2$ и потому непродолжаемо (так как за пределами этого интервала не определена правая часть уравнения (4)).

Для доказательства предложения Б) заметим прежде всего, что функция x, заданная соотношением (6), является решением уравнения (4). Это непосредственно проверяется путем подстановки.

Докажем, что формула (6) содержит все решения. Пусть $x = \varphi(t)$ — некоторое решение уравнения (4), определенное на интервале $s_1 < t < s_2$. Этот интервал должен содержаться в интервале $r_1 < t < r_2$, так как правая часть уравнения (4) определена только на этом последнем интервале. Пусть τ_0, ξ_0 — начальные значения решения $x = \varphi(t)$. Докажем, что можно так подобрать число x_0 в формуле (6), чтобы определяемое этой формулой решение имело своими начальными значениями τ_0, ξ_0, т. е. удовлетворяло условию

$$\left(x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)}\, b(\tau)\, d\tau\right) e^{A(\tau_0)} = \xi_0. \tag{7}$$

Этим будет доказано (см. теорему 1), что решение $x=\varphi(t)$ совпадает с решением (6) на всем интервале $s_1<t<s_2$.

Соотношение (7) является уравнением первой степени относительно неизвестной величины x_0, причем коэффициент $e^{A(\tau_0)}$ при x_0 отличен от нуля. Следовательно, уравнение (7) разрешимо относительно неизвестной величины x_0.

Итак, предложение Б) доказано.

Для сравнения приведем другой (принятый в большинстве учебников) вывод формулы (6), облегчающий ее запоминание. Прежде всего рассматривается однородное уравнение

$$\dot{y}=a(t)y. \tag{8}$$

Это — уравнение в полных дифференциалах (см. А)). В самом деле, символически его можно записать в виде

$$\frac{dy}{y}-a(t)\,dt=0.$$

Соответствующая функция $F(t, y)$ задается формулой

$$F(t, y)=\ln|y|-A(t),$$

и потому, в силу А), решения однородного уравнения (8) определяются как неявные функции из соотношения

$$\ln|y|-A(t)=c_1.$$

Отсюда получаем $|y|=e^{A(t)+c_1}$ или, иначе,

$$y=ce^{A(t)}, \tag{9}$$

где c может принимать любые действительные значения. (Этот вывод содержит неточность, поскольку функция $h(t, y)=y$ может обращаться в нуль, так что условие 1) предложения А) не выполнено; неточность легко может быть устранена, но мы этого делать не будем, так как формула (9) является частным случаем формулы (6), которая выше была полностью доказана.)

Для получения с помощью формулы (9) решения неоднородного уравнения (4) применяется так называемый *метод вариации постоянной*. Именно, решение уравнения (4) ищется в виде (9), где c уже не константа, а некоторая неизвестная функция переменного t. Подставляя это предполагаемое решение в уравнение (4), получаем:

$$\dot{c}e^{A(t)}+ca(t)e^{A(t)}=a(t)ce^{A(t)}+b(t)$$

или, что то же,

$$\dot{c}e^{A(t)}=b(t).$$

Отсюда находим:

$$c=\int e^{-A(t)}b(t)\,dt=x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-A(\tau)}b(\tau)\,d\tau,$$

где x_0 — константа интегрирования.

Примеры

1. Решим уравнение

$$\dot{x}=f(t)g(x),$$

называемое *уравнением с разделяющимися переменными.* Будем предполагать, что функция $f(t)$ определена и непрерывна на интервале $r_1<t<r_2$, а функция $g(x)$ определена, непрерывна и не обращается в нуль на интервале $q_1<x<q_2$. Рассматриваемое уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Именно, оно может быть записано символически в виде:

$$\frac{dx}{g(x)}-f(t)\,dt=0.$$

Соответствующая функция $F(t, x)$ задается формулой

$$F(t, x)=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{g(\xi)}-\int_{t_0}^{t}f(\tau)\,d\tau.$$

Здесь x_0 принадлежит интервалу $q_1<x<q_2$, а x изменяется на том же интервале; t_0 принадлежит интервалу $r_1<t<r_2$, а t изменяется на том же интервале. В силу предложения А), все решения нашего уравнения получаются как неявные функции из соотношения

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{g(\xi)}=\int_{t_0}^{t}f(\tau)\,d\tau+c.$$

2. Решим уравнение

$$\dot{x}=h\left(\frac{x}{t}\right),$$

в котором правая часть зависит лишь от отношения переменных x и t. Уравнение это называется *однородным*.

Будем предполагать, что функция $h(y)$ определена и непрерывна на интервале $a_1<y<a_2$ и что на этом интервале функция $h(y)-y$ не обращается в нуль. Наше уравнение решается путем замены переменных. Именно, вместо неизвестной функции x мы введем неизвестную функцию y, положив $x=yt$. Производя эту подстановку, мы

получаем для новой неизвестной функции y уравнение

$$\dot{y}t + y = h(y)$$

или, что то же,

$$\dot{y} = \frac{h(y) - y}{t}.$$

Полученное уравнение с разделяющимися переменными решается по способу, указанному в примере 1.

3. Решим уравнение

$$\dot{x} = x^2 \cos t \tag{10}$$

с разделяющимися переменными. Множеством Γ для него является вся плоскость (t, x). При $x > 0$ и при $x < 0$ уравнение это можно решать по способу, указанному в примере 1. Для каждой из этих полуплоскостей мы имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \cos t \, dt$$

или, иначе,

$$-\frac{1}{x} = \sin t - c.$$

Таким образом, получаем:

$$x = \frac{1}{c - \sin t}. \tag{11}$$

Кроме решений, описываемых этой формулой, мы имеем очевидное решение

$$x = 0. \tag{12}$$

Покажем, что формулы (11) и (12) охватывают совокупность всех решений уравнения (10). Пусть (t_0, x_0) — произвольные начальные значения. Если $x_0 = 0$, то решение (12) имеет эти начальные значения. Если же $x_0 \neq 0$, то указанные начальные значения имеет решение (11) при

$$c = \sin t_0 + \frac{1}{x_0}.$$

Решение (12) определено на интервале $(-\infty, +\infty)$ и потому непродолжаемо. Точно так же при $|c| > 1$ формула (11) определяет одно непродолжаемое решение, заданное на интервале $(-\infty, +\infty)$. При фиксированной константе c, удовлетворяющей неравенству $|c| \leqslant 1$, формула (11) задает не одно решение, а *бесконечное множество решений*. Каждое отдельное решение в этом случае определено на интервале $r_1 < t < r_2$, где r_1 и r_2 — два соседних нуля функции $\sin t - c$ (рис. 3).

4. Покажем, что если правая часть уравнения не имеет непрерывной производной, то вторая часть теоремы 1 (единственность)

может не иметь места. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}. \tag{13}$$

Правая часть уравнения (13) определена и непрерывна для всех значений x, но ее производная $2x^{-\frac{1}{3}}$ терпит разрыв при $x = 0$. Если

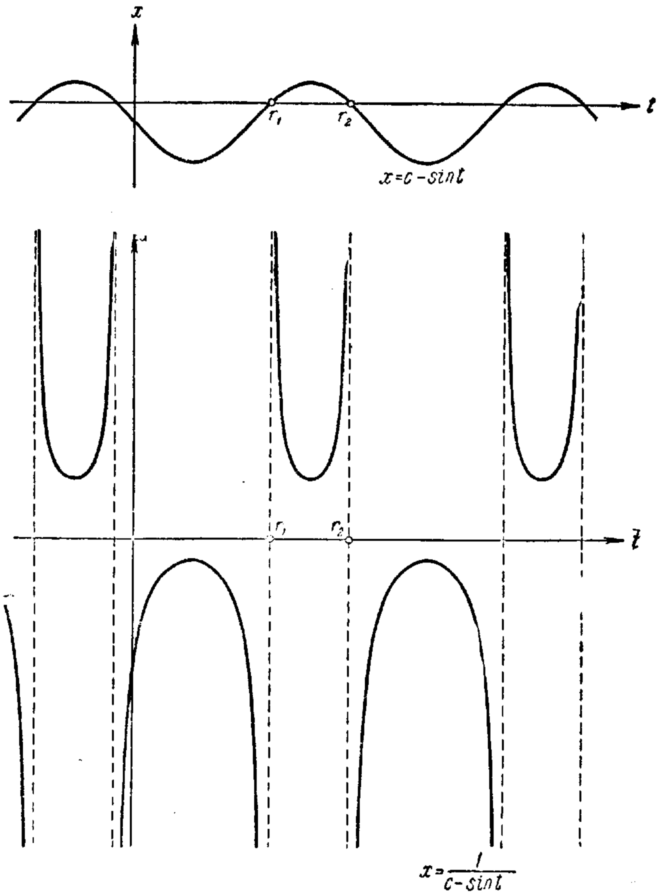


Рис. 3.

принять за Г множество всех точек плоскости P, удовлетворяющих неравенству $x \neq 0$, то к уравнению (13) применима теорема 1, и в каждой из полуплоскостей $x > 0$, $x < 0$ уравнение (13) можно решать по способу, указанному в примере 2. Решая уравнение (13) этим способом, мы получаем: $x^{\frac{1}{3}} = t - c$, или

$$x = (t - c)^3. \tag{14}$$

Часть графика функции (14) (при $t < c$) проходит в полуплоскости $x < 0$, часть же (при $t > c$) — в полуплоскости $x > 0$. Непосредственно проверяется, однако, что функция (14) является решением

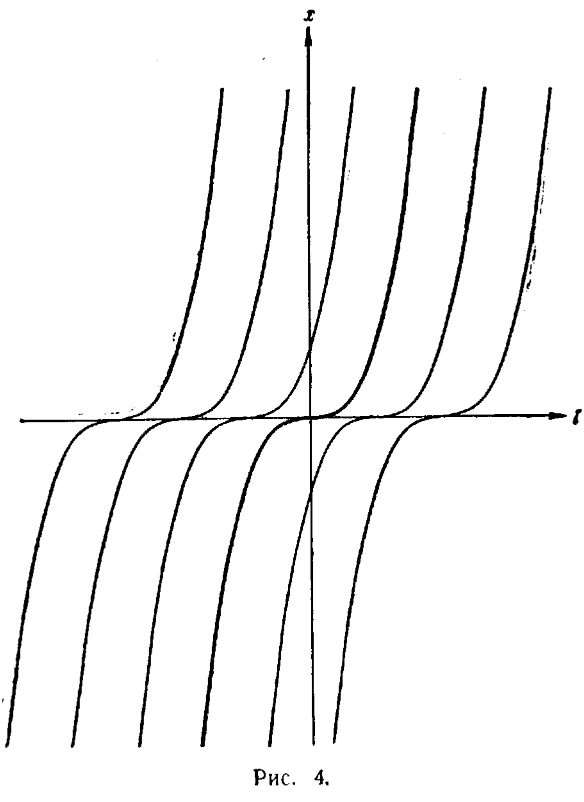


Рис. 4.

уравнения (13) при всех значениях t на интервале $-\infty < t < +\infty$. В то же время $x \equiv 0$ также является решением уравнения (13). Таким образом, через каждую точку $x = 0$, $t = c$ прямой $x = 0$ проходят уже два решения (рис. 4): решение (14) и решение $x = 0$. Мы видим, что вторая часть теоремы 1 (единственность) не имеет места для уравнения (13).

§ 3. Формулировка теоремы существования и единственности

В § 1 было рассмотрено одно дифференциальное уравнение первого порядка, причем была сформулирована теорема существования и единственности для этого уравнения. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений имеет дело и с более общими системами уравнений. Обычно система обыкновенных дифференциальных уравнений состоит из стольких уравнений, сколько в нее входит неизвестных функций; при этом все неизвестные функции являются функциями одного и того же независимого переменного. Во всех случаях теорема существования и единственности является основным теоретическим положением, дающим возможность подойти к изучению данной системы дифференциальных уравнений.

Теорема существования и единственности формулируется и доказывается применительно к системе уравнений, по внешнему виду имеющей несколько частный тип. В действительности же к этой системе уравнений сводятся системы сравнительно общего типа. Системы дифференциальных уравнений того частного типа, о котором здесь идет речь, мы будем называть в дальнейшем *нормальными*.

Система

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n); \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

обыкновенных дифференциальных уравнений называется *нормальной*. В этой системе t — независимое переменное, $x^1, \ldots, x^n$ — неизвестные функции этого переменного, а $f^1, \ldots, f^n$ — функции от $n+1$ переменных, заданные на некотором открытом множестве Γ пространства размерности $n+1$, в котором координатами точки являются числа t, $x^1, \ldots, x^n$. В дальнейшем всегда будет предполагаться, что функции

$$f^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

непрерывны на открытом множестве Γ; точно так же будет предполагаться, что и их частные производные

$$\frac{\partial f^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial x^j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

существуют и непрерывны на множестве Γ. Следует заметить, что частные производные (3), непрерывность которых предполагается, берутся только по переменным $x^1, \ldots, x^n$, а не по независимому переменному t.

Решением системы уравнений (1) называется система непрерывных функций

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

определенных на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ и удовлетворяющих системе (1). Интервал $r_1 < t < r_2$ называется *интервалом* *определения* решения (4) (случаи $r_1 = -\infty$, $r_2 = +\infty$ не исключаются). Считается, что система функций (4) удовлетворяет системе уравнений (1), если при подстановке в соотношение (1) вместо $x^1, \ldots, x^n$ функций (4) соотношения (1) превращаются в тождества по t на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Для возможности этой подстановки необходимо, чтобы функции (4) имели производные в каждой точке интервала $r_1 < t < r_2$ и чтобы правые части уравнений (1) были определены для всех подставляемых в них значений аргументов. Таким образом, точка с координатами

$$t, \ \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)$$

должна принадлежать множеству Γ для всех значений t на интервале $r_1 < t < r_2$.

Дадим теперь формулировку теоремы существования и единственности для нормальной системы (1). (Доказательство будет приведено в § 21.)

Теорема 2. *Пусть* (1) — *нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь правые части уравнений* (1) *определены на некотором открытом множестве* Γ, *а функции* (2) *и* (3) *непрерывны на этом множестве. Оказывается, что для каждой точки*

$$t_0, \ x_0^1, \ x_0^2, \ldots, \ x_0^n \tag{5}$$

множества Γ *существует решение*

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

системы (1), *определенное на некотором интервале, содержащем точку* t_0, *и удовлетворяющее условиям*:

$$\varphi^i(t_0) = x_0^i; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Далее, оказывается, что если имеются два каких-либо решения

$$\left.\begin{aligned} x^i &= \psi^i(t), & i &= 1, \ldots, n, \\ x^i &= \chi^i(t), & i &= 1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

системы (1), *удовлетворяющих условиям*

$$\psi^i(t_0) = \chi^i(t_0) = x_0^i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

причем каждое решение определено на своем собственном интервале значений переменного t, *содержащем точку* t_0, *то решения эти совпадают всюду, где они оба определены.*

Значения (5) называются *начальными* для решения (6), а соотношения (7) называются *начальными условиями* для этого решения. Мы будем говорить в дальнейшем, что решение (6) *имеет начальные значения* (5) или *удовлетворяет начальным условиям* (7).

Таким образом, теорему существования и единственности для нормальной системы кратко можно формулировать так:

Каковы бы ни были начальные значения (5), *всегда существует решение системы* (1) *с этими начальными значениями, определенное на некотором интервале, содержащем точку* t_0. *Далее, если имеются два решения с одинаковыми начальными значениями* (5), *каждое из которых определено на своем интервале, содержащем* t_0, *то эти решения совпадают на общей части этих интервалов.*

Совершенно так же, как в § 2, введем здесь понятие непродолжаемого решения.

А) Пусть

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

— решение системы уравнений (1), определенное на интервале $r_1 < t < r_2$, и

$$x^i = \psi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

— решение той же системы уравнений (1), определенное на интервале $s_1 < t < s_2$. Мы будем говорить, что решение (11) является *продолжением* решения (10), если интервал $s_1 < t < s_2$ содержит интервал $r_1 < t < r_2$ (т. е. $s_1 \leqslant r_1$, $r_2 \leqslant s_2$) и решение (10) совпадает с решением (11) на интервале $r_1 < t < r_2$. В частности, мы будем считать, что решение (11) является продолжением решения (10) и в том случае, когда оба решения полностью совпадают, т. е. $s_1 = r_1$, $r_2 = s_2$. Решение (10) будем называть *непродолжаемым*, если не существует никакого отличного от него решения, являющегося его продолжением.

Нетрудно доказать (но это будет сделано позднее, см. § 22, А)), что каждое решение может быть продолжено до непродолжаемого и притом единственным способом.

Формулируем теперь еще одну теорему существования, доказательство которой будет приведено в § 21.

Теорема 3. *Пусть*

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j(t)\, x^j + b^i(t); \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

—нормальная линейная система уравнений. Здесь коэффициенты $a^i_j(t)$ *и свободные члены* $b^i(t)$ *являются непрерывными функциями независимого переменного* t, *определенными на некотором интервале* $q_1 < t < q_2$. *Оказывается, что для любых начальных значений*

$$t_0,\ x^1_0,\ x^2_0, \ldots,\ x^n_0; \qquad q_1 < t_0 < q_2, \tag{13}$$

существует решение системы (12) *с этими начальными значениями, определенное на* *всем* *интервале* $q_1 < t < q_2$.

В частности, если коэффициенты и свободные члены системы (12) определены на всей прямой, т. е. если $q_1 = -\infty$, $q_2 = +\infty$, то для любых начальных значений существует решение системы (12), определенное на всем бесконечном интервале $-\infty < t < +\infty$.

Решения нормальной системы (1) интерпретируются геометрически в виде интегральных кривых в $(n+1)$-мерном пространстве с координатами $t, x^1, \ldots, x^n$ (ср. § 1). Уравнения интегральной кривой имеют вид:

$$x^i = \varphi^i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

где (14) есть решение системы.

Сама система (1) интерпретируется с помощью поля направлений в $(n+1)$-мерном пространстве (ср. § 1).

Примеры

1. Решим нормальную линейную систему уравнений

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x. \tag{15}$$

Множеством Г для нее является все трехмерное пространство с координатами t, x, y. Непосредственно проверяется, что система функций

$$x = c_1 \cos(\omega t + c_2), \quad y = c_1 \sin(\omega t + c_2), \tag{16}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, представляет собой решение системы (15). Для того чтобы показать, что, выбирая надлежащим образом постоянные c_1 и c_2, можно получить по формуле (16) произвольное решение, зададимся начальными значениями t_0, x_0, y_0 и покажем, что среди решений (16) имеется решение с этими начальными значениями. Мы получаем для постоянных c_1 и c_2 условия

$$c_1 \cos(\omega t_0 + c_2) = x_0, \quad c_1 \sin(\omega t_0 + c_2) = y_0. \tag{17}$$

Пусть ρ и φ — полярные координаты точки (x_0, y_0), так что

$$x_0 = \rho \cos \varphi, \quad y_0 = \rho \sin \varphi.$$

Тогда уравнения (17) переписываются в виде:

$$c_1 \cos(\omega t_0 + c_2) = \rho \cos \varphi, \quad c_1 \sin(\omega t_0 + c_2) = \rho \sin \varphi.$$

Полагая

$$c_1 = \rho, \quad c_2 = \varphi - \omega t_0,$$

мы, очевидно, выполним условия (17). Таким образом, через каждую точку (t_0, x_0, y_0) проходит решение, задаваемое формулой (16).

В силу теоремы 2 (единственность) формула (16) охватывает совокупность всех решений.

2. Покажем, что если правые части (2) системы уравнений (1) k раз непрерывно дифференцируемы, т. е. имеют непрерывные производные порядка k (включая смешанные) по всем переменным t, $x^1, \ldots, x^n$, то $(k+1)$-я производная решения (4) системы (1) существует и непрерывна.

В самом деле, для решения (4) имеет место тождество:

$$\dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Если правые части (2) имеют непрерывные первые производные, то правая часть тождества (18) имеет непрерывную производную по t, и потому функция $\ddot{\varphi}^i(t)$ существует и непрерывна. Дифференцируя написанное тождество (18) k раз, мы последовательно убедимся в существовании и непрерывности всех производных порядков $2, 3, \ldots, k+1$ функций $\varphi^i(t)$.

§ 4. Сведение общей системы дифференциальных уравнений к нормальной

В предыдущем параграфе была сформулирована теорема существования и единственности для нормальной системы дифференциальных уравнений. Здесь будет показано, каким образом весьма общие системы дифференциальных уравнений сводятся к нормальным системам дифференциальных уравнений, и тем самым будет установлена теорема существования и единственности для этих общих систем уравнений.

Дадим сначала понятие о системе дифференциальных уравнений в общем виде.

В случае одной неизвестной функции x независимого переменного t обычно рассматривается одно уравнение, которое можно записать в виде:

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Здесь t — независимое переменное, x — его неизвестная функция, а F — заданная функция $n+2$ переменных. Функция F может быть задана не для всех значений ее аргументов, поэтому говорят об области B задания функции F. Здесь имеется в виду открытое множество B координатного пространства размерности $n+2$, в котором координатами точки являются переменные $t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}$. Если максимальный порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, равен n, то говорят, что имеется *уравнение n-го порядка. Решением* уравнения (1) называется такая непрерывная функция $x = \varphi(t)$ независимого переменного t, определенная на некотором интервале $r_1 < t < r_2$, что при подстановке ее вместо x в уравнение (1) мы получаем тождество по t на интервале $r_1 < t < r_2$. Очевидно, что подстановка $x = \varphi(t)$ в соотношение (1) возможна лишь тогда, когда функция $\varphi(t)$ на всем интервале своего существования $r_1 < t < r_2$ имеет производные до порядка n включительно. Для того чтобы подстановка $x = \varphi(t)$ в соотношение (1) была возможна, необходимо также, чтобы точка, имеющая координаты $\{t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)\}$, принадлежала множеству B определения функции F при произвольном t из интервала $r_1 < t < r_2$.

Если имеются две неизвестные функции одного независимого переменного, то рассматриваются два дифференциальных уравнения, вместе образующих *систему уравнений*. Система эта может быть записана в виде:

$$\left.\begin{aligned} F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m)}, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \\ G(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m)}, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здесь t — независимое переменное, x и y — две его неизвестные функции, а F и G — две функции, каждая от $m + n + 3$ переменных, заданные в некотором открытом множестве B. Если максимальный порядок производной функции x, входящей в систему (2), равен m, а максимальный порядок производной функции y, входящей в систему (2), равен n, то число m называется *порядком* системы (2) *относительно* x, число n — *порядком* системы (2) *относительно* y, а число $m + n$ называется *порядком* системы (2). *Решением* системы (2) называется пара непрерывных функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, заданных на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ и обладающих тем свойством, что при подстановке их в соотношения (2) мы приходим к тождествам по t на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Как и в случае одного уравнения, предполагаются выполненными условия, дающие возможность делать подстановку $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ в систему (2).

Аналогично определяются системы дифференциальных уравнений с тремя и большим числом неизвестных функций от одного независимого переменного. Если неизвестными функциями системы дифференциальных уравнений являются функции $x^1, \ldots, x^n$, а наивысший порядок производной функции x^i, входящей в систему, равен q_i, $i = 1, \ldots, n$, то число q_i называется *порядком* системы *относительно* x^i, а число $q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ называется *порядком* системы. Таким образом, нормальная система (1) § 3 имеет порядок n.

Если соотношение (1) может быть разрешено относительно $x^{(n)}$, то уравнение (1) переписывается в виде:

$$x^n = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}). \qquad (3)$$

Точно так же, если система (2) может быть разрешена относительно величин $x^{(m)}$ и $y^{(n)}$, то эта система может быть переписана в виде:

$$\left.\begin{aligned} x^{(m)} &= f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}),\\ y^{(n)} &= g(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Уравнение (3) и система (4) называются *разрешенными относительно высших производных*. Аналогично определяются разрешенные относительно высших производных системы с произвольным числом неизвестных функций. В частности, нормальная система (1) § 3 является разрешенной относительно высших производных. В дальнейшем мы будем заниматься почти исключительно системами, разрешенными относительно высших производных.

Покажем теперь, что всякая имеющая порядок n система дифференциальных уравнений, разрешенная относительно высших производных, сводится к нормальной системе порядка n. Для начала покажем, как одно уравнение порядка n сводится к нормальной системе порядка n.

А) Пусть

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (5)$$

— одно дифференциальное уравнение порядка n, разрешенное относительно высшей производной. Здесь t — независимое переменное, y — неизвестная функция переменного t. Далее, $f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ есть заданная функция $n+1$ переменных $t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}$, определенная в некотором открытом множестве Γ координатного пространства размерности $n+1$. Относительно функции $f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ мы будем предполагать, что она непрерывна на множестве Γ и что ее частные производные

$$\frac{\partial f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(k)}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(где предполагается, что $y^{(0)} = y$) также непрерывны на множестве Γ. Для замены уравнения (5) нормальной системой уравнений вводятся новые неизвестные функции $x^1, x^2, \ldots, x^n$ независимого переменного t при помощи равенств

$$x^1 = y, \; x^2 = \dot{y}, \; \ldots, \; x^n = y^{(n-1)}. \qquad (6)$$

Оказывается, что уравнение (5) эквивалентно системе

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2,\\ \dot{x}^2 &= x^3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}^{n-1} &= x^n,\\ \dot{x}^n &= f(t, x^1, x^2, \ldots, x^n). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Из этого в силу теоремы 2 следует, что для каждой точки $t_0, y_0, \dot{y}_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ множества Γ существует решение $y = \varphi(t)$

уравнения (5), удовлетворяющее *начальным условиям*

$$\psi^{(k)}(t_0)=y_0^{(k)},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

или, как говорят, решение с *начальными значениями*

$$t_0,\ y_0,\ \dot{y}_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}. \tag{8}$$

Далее, любые два решения с начальными значениями (8) совпадают на общей части их интервалов определения. Если уравнение (5) линейно, т. е. функция f линейна относительно переменных y, $\dot{y}$, ..., $y^{(n-1)}$, а коэффициенты ее определены и непрерывны на интервале $q_1<t<q_2$, то для любых начальных значений t_0, y_0, $\dot{y}_0$, ..., $y_0^{(n-1)}$, где $q_1<t_0<q_2$, имеется решение $y=\psi(t)$, определенное на всем интервале $q_1<t<q_2$.

Докажем, что уравнение (5) эквивалентно системе (7). Допустим, что функция y удовлетворяет уравнению (5), и докажем, что функции x^1, ..., x^n, определенные соотношениями (6), удовлетворяют системе (7). Дифференцируя соотношения (6), вводящие новые неизвестные функции x^1, ..., x^n, получаем:

$$\dot{x}^k=y^{(k)};\qquad k=1,\ \ldots,\ n-1, \tag{9}$$

$$\dot{x}^n=y^{(n)}. \tag{10}$$

Заменяя правые части соотношений (9) на основе соотношений (6), а правую часть соотношения (10) на основании уравнения (5), которому функция y удовлетворяет, мы получаем систему (7). Допустим, что, наоборот, функции x^1, ..., x^n удовлетворяют системе (7); примем тогда x^1 за y и покажем, что функция y удовлетворяет уравнению (5). Полагая в первом из уравнений системы (7) $x^1=y$, получаем $x^2=\dot{y}$. Заменяя во втором из уравнений (7) x^2 через $\dot{y}$, получаем $x^3=\ddot{y}$. Продолжая это построение дальше, мы приходим к соотношениям (6). Наконец, заменяя в последнем из уравнений системы (7) каждую функцию x^1, ..., x^n в силу формул (6), получаем уравнение (5) для y.

Так как функция f определена на множестве Г, то правые части системы (7) также определены на множестве Г при условии замены координат по формулам (6). Для системы (7) выполнены условия теоремы 2 на множестве Г. Таким образом, можно произвольно выбрать начальные значения t_0, x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n в множестве Г. Эти начальные значения в силу замены (6) превращаются в начальные значения

$$t,\ y_0,\ \dot{y}_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$$

для уравнения (5).

Если уравнение (5) линейно, то система (7) также линейна. Из этого в силу теоремы 3 вытекает заключительная часть предложения А).

Таким образом, предложение А) доказано.

Прием, описанный в предложении А), дает возможность привести к нормальной системе произвольную систему дифференциальных уравнений, разрешенную относительно высших производных. Для того чтобы не загромождать изложения формулами, рассмотрим в нижеследующем предложении Б) систему четвертого порядка, состоящую из двух уравнений.

Б) Пусть

$$\left.\begin{aligned} \ddot{u} &= f(t,\ u,\ \dot{u},\ v,\ \dot{v}), \\ \ddot{v} &= g(t,\ u,\ \dot{u},\ v,\ \dot{v}) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

— система двух уравнений второго порядка. Здесь t — независимое переменное, а u и v — его неизвестные функции. Сведем систему (11) к нормальной системе, введя новые неизвестные функции x^1, x^2, x^3, x^4, по следующим формулам:

$$x^1 = u, \qquad x^2 = \dot{u}, \qquad x^3 = v, \qquad x^4 = \dot{v}.$$

При этой замене система (11) переходит в систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= f(t,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4), \\ \dot{x}^3 &= x^4, \\ \dot{x}^4 &= g(t,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Если предположить, что функции f и g, стоящие в правых частях уравнений (11), определены в некотором открытом множестве Γ пятимерного пространства, где координатами точки служат t, u, $\dot{u}$, v, $\dot{v}$, причем функции эти непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по переменным u, $\dot{u}$, v, $\dot{v}$, то система (12) нормальна и удовлетворяет условиям теоремы 2 на множестве Γ. Отсюда легко следует, что для произвольной точки t_0, u_0, $\dot{u}_0$, v_0, $\dot{v}_0$ множества Γ существует решение $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$ системы (11), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= u_0, & \dot{\varphi}(t_0) &= \dot{u}_0, \\ \psi(t_0) &= v_0, & \dot{\psi}(t_0) &= \dot{v}_0. \end{aligned}$$

Кроме того, всякие решения с одинаковыми начальными условиями совпадают на общей части их интервалов существования.

Доказательство предложения Б) проводится точно так же, как и доказательство предложения А).

Если одно уравнение n-го порядка задано в форме

$$F(t,\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0, \tag{13}$$

не разрешенной относительно высшей производной $y^{(n)}$ неизвестной функции, то прежде всего возникает вопрос о возможности разрешения его относительно $y^{(n)}$; этот вопрос можно считать не относящимся к области дифференциальных уравнений, он относится скорее к области теории функций. Здесь, однако, имеются некоторые вопросы, которые разбираются в теории дифференциальных уравнений. Они носят следующий характер. Допустим, что уравнение (13) является квадратным относительно переменного $y^{(n)}$. Тогда оно определяет *двузначную* функцию $y^{(n)}$ остальных переменных. Там, где два значения действительно различны, мы приходим в сущности к двум различным уравнениям вида (5), но там, где два значения переменного $y^{(n)}$, определяемые уравнением (13), сливаются, расщепление на два уравнения вида (5) невозможно и приходится рассматривать уравнение (13). Изучение таких уравнений приводит к понятию об *особых решениях* дифференциального уравнения и к рассмотрению уравнений на поверхностях. Эти вопросы, однако, в книге рассматриваться не будут.

Примеры

1. Решим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{14}$$

где ω — положительная константа.

Непосредственно проверяется, что функция

$$x = r\cos(\omega t + \alpha), \qquad r \geqslant 0, \tag{15}$$

где r и α — постоянные, удовлетворяет этому уравнению. Покажем, что формула (15) охватывает совокупность всех решений. Пусть $x = \varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (14). В силу теоремы 3 (см. конец предложения А)) можно считать, что решение $x = \varphi(t)$ определено для всех значений t. Положим $\varphi(0) = x_0$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{x}_0$. Непосредственно проверяется, что можно подобрать постоянные r и α таким образом, чтобы имели место равенства $r\cos\alpha = x_0$, $-r\omega\sin\alpha = \dot{x}_0$. Если эти равенства выполнены, то решения (15) и $\varphi(t)$ имеют одинаковые начальные значения 0, x_0, $\dot{x}_0$ и потому совпадают (см. предложение А)).

Функция (15) описывает *гармонический колебательный процесс*. Положительная константа r называется *амплитудой* колебания (15), а α — его *начальной фазой* или просто *фазой*. Уравнение (14) называется уравнением гармонических колебаний. Число ω называется *частотой* колебаний, хотя в действительности число колебаний в секунду определяется формулой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

2. Рассмотрим движение точки p массы m по горизонтальной прямой l под действием силы F, притягивающей ее к точке o на

той же прямой и пропорциональной расстоянию между точками p и o. Для составления уравнения движения точки p введем на прямой l координату, приняв за начало точку o. Переменную координату точки p обозначим через $x = x(t)$. Тогда в силу второго закона Ньютона уравнение движения точки p будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = F = -kx.$$

Это уравнение обычно записывается в виде:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{16}$$

Физически сила F может быть осуществлена какой-либо пружиной (рис. 5). Число k называется *коэффициентом упругости* этой пружины. Согласно формуле (15) решение уравнения (16) имеет вид:

$$x = r\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha\right), \qquad r \geqslant 0.$$

Таким образом, частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ точки p определяется ее массой m и упругостью пружины k; она не зависит от начальных условий. От начальных условий, т. е. от положения x_0 точки p и ее скорости $\dot{x}_0$ в момент $t = 0$, зависят амплитуда r колебания и его начальная фаза α.

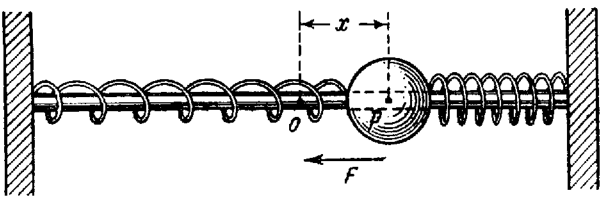


Рис. 5.

3. Составим и решим приближенно уравнение *математического маятника*. Математический маятник представляет собой точку p массы m, которая под действием силы тяжести движется по окружности K радиуса l, лежащей в вертикальной плоскости. Величина l называется *длиной* маятника. На окружности K введем угловую координату, приняв за начало координат самую нижнюю точку o окружности K (рис. 6). Переменную координату точки p обозначим через $\varphi = \varphi(t)$. Точка p находится под действием силы тяжести $P = mg$, направленной вертикально вниз. Составляющая этой силы, направленная по нормали к окружности, уравновешивается благодаря реакции связи (окружности или нити, заставляющей точку двигаться по окружности); составляющая, направленная по касательной к окружности в точке p, равна $-mg\sin\varphi$ (если за положительное

направление на касательной принять направление, соответствующее возрастанию угла φ). Таким образом, уравнение движения точки p имеет вид:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

или, иначе,

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0. \tag{17}$$

Уравнение это нелинейно, и его решение представляет большие трудности. Если предположить, что координата φ точки p в процессе движения мало отклоняется от нуля, то приближенно в уравнении (17) можно заменить $\sin\varphi$ через φ, и мы получим «приближенное» линейное уравнение маятника:

$$l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

Его решение имеет вид (см. (15)):

$$\varphi = r\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right).$$

Таким образом, частота «малых колебаний» маятника определяется формулой $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

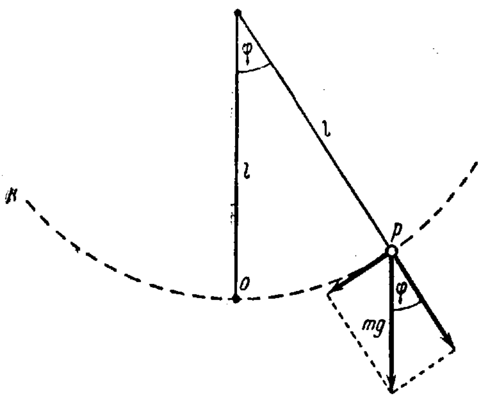


Рис. 6.

Число ν малых колебаний маятника в секунду определяется формулой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Например, длина *секундного маятника*, т. е. маятника, совершающего одно колебание в секунду ($\nu = 1/сек$), определяется формулой

$$l = \frac{g}{4\pi^2}\,сек^2 \approx 0{,}25 \text{ м}.$$

§ 5. Комплексные дифференциальные уравнения

До сих пор мы рассматривали лишь действительные уравнения и их действительные решения. В некоторых случаях, однако, например при решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами, бывает легче найти сначала комплексные решения действительного уравнения, а затем уже выделить из них действительные решения. Для изложения этого подхода мы должны ввести понятия комплексной функции действительного переменного и комплексной системы дифференциальных уравнений.

А) Говорят, что задана *комплексная функция* $\chi(t)$ действительного переменного t, если на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ каждому значению переменного t поставлено в соответствие комплексное число

$$\chi(t) = \varphi(t) + i\psi(t),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются действительными функциями действительного переменного t. Функция $\varphi(t)$ называется *действительной частью* комплексной функции $\chi(t)$, а функция $\psi(t)$ называется *мнимой частью* комплексной функции $\chi(t)$. Комплексная функция $\chi(t)$ называется *непрерывной*, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны. Точно так же комплексная функция $\chi(t)$ называется *дифференцируемой*, если дифференцируемы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$; производная $\dot{\chi}(t)$ комплексной функции $\chi(t)$ определяется формулой

$$\dot{\chi}(t) = \dot{\varphi}(t) + i\dot{\psi}(t).$$

Непосредственно проверяется, что имеют место обычные правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух комплексных функций действительного переменного.

Б) Пусть

$$\dot{z}^j = h^j(t, z^1, \ldots, z^n); \qquad j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

— нормальная система дифференциальных уравнений. Относительно функций $h^j(t, z^1, \ldots, z^n)$, стоящих в правых частях уравнений, мы предположим, что они определены для комплексных значений переменных $z^1, \ldots, z^n$. Мы можем ограничиться, например, случаем, когда функции эти являются многочленами относительно переменных $z^1, \ldots, z^n$ с коэффициентами, являющимися действительными или комплексными непрерывными функциями действительного переменного t, определенными и непрерывными на интервале $q_1 < t < q_2$. При этих условиях вполне законна постановка вопроса об отыскании к о м п л е к с н ы х р е ш е н и й системы (1). Систему

$$z^j = \chi^j(t); \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

комплексных функций действительного переменного t, заданных на некотором интервале $r_1 < t < r_2$, будем называть *решением* системы (1), если при замене переменных z^j функциями переменного t по формулам (2), мы получим систему тождеств по t на этом интервале. Так как по предположению, правые части уравнений (1) являются многочленами относительно $z^1, \ldots, z^n$, то они определены для всех значений этих переменных. Оказывается, что имеет место следующая теорема существования и единственности для системы (1). Пусть

$$t_0, z_0^1, z_0^2, \ldots, z_0^n$$

— произвольная система начальных значений. Здесь $z_0^1, \ldots, z_0^n$ — произвольные комплексные числа, а t_0 — произвольное действительное число, удовлетворяющее условию $q_1 < t_0 < q_2$. Тогда существует решение

$$z^j = \chi^j(t); \qquad j = 1, \ldots, n,$$

системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\chi^j(t_0) = z_0^j; \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Всякие два решения с одинаковыми начальными условиями совпадают на общей части их интервалов определения. Если система (1) линейна, т. е. многочлены h^j имеют степень 1, то для любых начальных значений существует решение уравнения (1), определенное на всем интервале $q_1 < t < q_2$.

Эта теорема существования и единственности для нормальной системы комплексных уравнений непосредственно вытекает из теоремы 2 после расщепления каждой комплексной неизвестной функции z^j на ее действительную и мнимую части. В самом деле, положим:

$$z^j = x^j + iy^j; \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

и заменим переменные z^j; $j = 1, \ldots, n$, в системе (1) по формулам (3); тогда будем иметь:

$$\dot{x}^j + i\dot{y}^j = f^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) + \\ + ig^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n), \tag{4}$$

где f^j и g^j — действительные функции действительных аргументов, удовлетворяющие соотношениям

$$f^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) + ig^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) = \\ = h^j(t, x^1 + iy^1, \ldots, x^n + iy^n).$$

Из (4) следует:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^j &= f^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n), \qquad j = 1, \ldots, n, \\ \dot{y}^j &= g^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n), \qquad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом, нормальная система (1) комплексных уравнений заменилась нормальной системой (5) действительных уравнений. Так как правые части уравнений (1) являются многочленами относительно $z^1, \ldots, z^n$, то правые части уравнений (5) являются многочленами относительно $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$. Так как коэффициенты многочленов h^j являются непрерывными функциями переменного t на интервале $q_1 < t < q_2$, то на том же интервале и коэффициенты многочленов f^j и g^j являются непрерывными функциями. Таким образом, правые части системы (5) определены и удовлетворяют условиям теоремы 2 в открытом множестве Γ, определяемом единственным условием $q_1 < t < q_2$, налагаемым на t, в то время как остальные переменные $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$ остаются произвольными. Полагая

$$z_0^j = x_0^j + iy_0^j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$
$$\chi^j(t) = \varphi^j(t) + i\psi^j(t), \quad j = 1, \ldots, n,$$

мы приходим к задаче отыскания решения системы (5) при начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} \varphi^j(t_0) &= x_0^j, \qquad j = 1, \ldots, n, \\ \psi^j(t_0) &= y_0^j, \qquad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\}$$

В силу теоремы 2 решение это существует; всякие два решения с одинаковыми начальными условиями совпадают на общей части их интервалов определения.

Если система (1) линейна, то система (5) также линейна, и потому заключительная часть предложения Б) вытекает из теоремы 3.

Следует отметить, что система (1), в правых частях которой стоят многочлены относительно переменных $z^1, \ldots, z^n$, может быть **действительной**, т. е. коэффициенты этих многочленов могут быть действительными функциями переменного t; тем не менее мы можем и в этом случае рассматривать систему (1) как комплексную, именно искать ее комплексные решения, считая, что функции $z^1, \ldots, z^n$ комплексны. Этот подход к действительным уравнениям применяется потому, что в некоторых случаях легче найти комплексные решения действительных уравнений, чем их действительные решения. В этом случае находят сначала комплексные решения действительной системы уравнений, затем из комплексных решений выделяют действительные решения, т. е. рассматривают только такие комплексные решения, мнимая часть которых обращается в нуль. Именно таким приемом будут в дальнейшем решаться линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Так же, как в действительном случае, и в комплексном случае к нормальной системе можно свести довольно общие системы дифференциальных уравнений. Таким образом, мы имеем в комплексном случае предложения, аналогичные предложениям А), Б) § 4. Здесь дадим только формулировку теоремы существования для одного уравнения n-го порядка.

В) Пусть

$$z^{(n)} = f(t, z, \dot{z}, \ldots, z^{(n-1)}) \tag{6}$$

— уравнение порядка n, в котором правая часть является многочленом относительно переменных $z, \dot{z}, \ldots, z^{(n-1)}$ с коэффициентами, являющимися непрерывными действительными или комплексными функциями переменного t, определенными на интервале $q_1 < t < q_2$. Если теперь $t_0, z_0, \dot{z}_0, \ldots, z_0^{(n-1)}$ — произвольные начальные значения, где $z_0, \dot{z}_0, \ldots, z_0^{(n-1)}$ — произвольные комплексные числа, а t_0 — действительное число, удовлетворяющее неравенствам $q_1 < t_0 < q_2$, то существует решение $z = \varphi(t)$ уравнения (6), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(t_0) = z_0, \qquad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{z}_0, \ \ldots, \ \varphi^{(n-1)}(t_0) = z_0^{(n-1)}.$$

Всякие два решения с одинаковыми начальными условиями совпадают на общей части их интервалов определения. Если уравнение (6) линейно, т. е. многочлен f имеет степень 1, то для любых начальных значений существует решение, определенное на всем интервале $q_1 < t < q_2$.

В § 7 и далее важную роль будет играть комплексная функция $e^{\lambda t}$ действительного переменного t, где λ — комплексное число. Дадим здесь определение этой функции и докажем некоторые ее свойства.

Г) Пусть $w = u + iv$ — произвольное комплексное число; положим:

$$e^w = e^u (\cos v + i \sin v). \tag{7}$$

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$\overline{e^w} = e^{\overline{w}}.$$

Ниже будет доказана формула

$$e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2}. \tag{8}$$

Из (7) непосредственно следуют известные формулы Эйлера:

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}, \qquad \sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}.$$

Пусть $\lambda = \mu + i\nu$ есть комплексное число. В силу формулы (7) мы имеем:

$$e^{\lambda t} = e^{\mu t} (\cos \nu t + i \sin \nu t).$$

Мы покажем, что для комплексных значений λ имеет место следующая формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}, \tag{9}$$

хорошо известная для действительных значений параметра λ.

Формула (7), принятая здесь за *определение* функции e^w комплексного переменного w, может быть *доказана*, если функцию e^w определить с помощью ряда

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \ldots + \frac{w^n}{n!} + \ldots$$

Мы, однако, будем считать, что функция e^w определяется формулой (7).

Докажем формулу (8). Пусть

$$w_1 = u_1 + iv_1, \qquad w_2 = u_2 + iv_2.$$

Тогда имеем:

$$e^{w_1} e^{w_2} = e^{u_1} (\cos v_1 + i \sin v_1) e^{u_2} (\cos v_2 + i \sin v_2) =$$
$$= e^{u_1 + u_2} (\cos (v_1 + v_2) + i \sin (v_1 + v_2)) = e^{w_1 + w_2}.$$

Докажем теперь формулу (9). Рассмотрим сначала случай чисто мнимого числа $\lambda = i\nu$. Мы имеем:

$$\frac{d}{dt} e^{i\nu t} = \frac{d}{dt} (\cos \nu t + i \sin \nu t) = -\nu \sin \nu t + i\nu \cos \nu t =$$
$$= i\nu (\cos \nu t + i \sin \nu t) = i\nu e^{i\nu t}.$$

Далее, для произвольного $\lambda = \mu + i\nu$ в силу формулы дифференцирования произведения имеем:

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \frac{d}{dt} (e^{\mu t} \cdot e^{i\nu t}) = \frac{d}{dt} (e^{\mu t}) e^{i\nu t} + e^{\mu t} \frac{d}{dt} (e^{i\nu t}) =$$
$$= \mu e^{\mu t} e^{i\nu t} + i\nu e^{\mu t} e^{i\nu t} = (\mu + i\nu) e^{\mu t + i\nu t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

Примеры

1. Рассмотрим комплексное уравнение

$$\dot{z} = \lambda z, \tag{10}$$

где $z = x + iy$ есть комплексная неизвестная функция действительного переменного t, а $\lambda = \mu + i\nu$ — комплексное число. Из (9) следует, что

$$z = ce^{\lambda t} \tag{11}$$

есть решение уравнения (10) при произвольной комплексной постоянной c. Покажем, что формула (11) охватывает совокупность всех решений. Для этого, как и в примере 1 § 1, можно было бы воспользоваться теоремой единственности, но мы используем здесь и теорему 3, для того чтобы показать, как при ее помощи можно несколько упростить вычисления. В данном случае эти упрощения очень незначительны, но в дальнейшем аналогичный прием может дать более существенные результаты. Итак, пусть $z = \chi(t)$ — произвольное решение уравнения (10). В силу теоремы 3 (см. заключительную часть предложения В)) можно считать, что решение это определено для всех значений t. Полагая $\chi(0) = z_0$, мы видим, что решение $z = \chi(t)$ имеет своими начальными значениями числа 0, z_0. Те же начальные значения имеет, очевидно, и решение

$$z = z_0 e^{\lambda t},$$

получаемое из (11) при $c = z_0$.

Если положить $c=re^{i\alpha}$, где $r\geqslant 0$ и α — действительные числа, то решение (11) записывается в форме

$$z=re^{\lambda t+i\alpha}. \tag{12}$$

Расщепим теперь уравнение (10) на действительную и мнимую части. Мы имеем:

$$\dot{x}+i\dot{y}=(\mu+i\nu)(x+iy)=(\mu x-\nu y)+i(\nu x+\mu y),$$

или

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\mu x-\nu y,\\ \dot{y}&=\nu x+\mu y.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Таким образом, система (13) двух действительных уравнений равносильна одному комплексному уравнению (10), и потому произвольное решение $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ системы (13) связано с произвольным решением (12) уравнения (10) соотношением

$$\varphi(t)+i\psi(t)=re^{\lambda t+i\alpha}=r(e^{\mu t}\cos(\nu t+\alpha)+i\sin(\nu t+\alpha)).$$

Отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t)=re^{\mu t}\cos(\nu t+\alpha),\\ y&=\psi(t)=re^{\mu t}\sin(\nu t+\alpha).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Итак, пользуясь комплексными функциями и уравнениями, мы нашли решение (14) системы (13) действительных уравнений.

2. Дадим еще один пример расщепления комплексного уравнения на два действительных. Пусть

$$\dot{z}=z^2+iz$$

— комплексное уравнение, где $z=x+iy$ есть комплексная неизвестная функция действительного переменного t. Мы имеем:

$$\dot{x}+i\dot{y}=(x+iy)^2+i(x+iy)=(x^2-y^2-y)+i(2xy+x)$$

и потому

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}&=x^2-y^2-y,\\ \dot{y}&=2xy+x.\end{aligned}\right.$$

§ 6. Некоторые сведения о линейных дифференциальных уравнениях

Система дифференциальных уравнений называется *линейной*, если все неизвестные функции и их производные, вместе взятые, входят в уравнения системы линейно. Таким образом, система линейных уравнений самого общего вида может быть записана в форме

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)} + b_i(t) = 0; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь $x^1, \ldots, x^n$ — неизвестные функции независимого переменного t, а коэффициенты $a_{ijk}(t)$ и свободные члены $b_i(t)$ уравнений являются функциями t. Если все свободные члены системы (1) тождественно равны нулю, то система называется *однородной*. Каждой линейной системе соответствует однородная линейная система, получающаяся из нее отбрасыванием свободных членов. Таким образом, линейной системе (1) соответствует линейная однородная система

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(y^j)^{(k)} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Отметим несколько непосредственно проверяемых свойств линейных систем. При их формулировке будет предполагаться, что все коэффициенты и свободные члены линейной системы определены и непрерывны на интервале $q_1 < t < q_2$; все рассматриваемые решения будут предполагаться заданными на всем интервале $q_1 < t < q_2$.

А) Если $y^i = \varphi^i(t)$ и $y^i = \psi^i(t)$; $i = 1, \ldots, n$ — два решения линейной однородной системы (2), а c_1 и c_2 — два произвольных числа, то система функций

$$y^i = c_1\varphi^i(t) + c_2\psi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

также представляет собой решение однородной системы (2). Аналогичное утверждение справедливо также для трех и большего числа решений однородной системы (2).

Б) Если $x^i = \psi^i(t)$ и $x^i = \chi^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — два решения линейной системы (1), то система функций

$$y^i = \chi^i(t) - \psi^i(t); \qquad i = 1, \ldots, n,$$

представляет собой решение системы однородных уравнений (2). Далее, если $y^i = \varphi^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, есть решение однородной системы уравнений (2), а $x^i = \psi^i(t)$; $i = 1, \ldots, n$, есть решение линейной системы (1), то система функций

$$x^i = \varphi^i(t) + \psi^i(t); \qquad i = 1, \ldots, n,$$

представляет собой решение линейной системы (1).

В) Допустим, что свободные члены системы линейных уравнений (1) представлены в виде сумм:

$$b_i(t) = \alpha c_i(t) + \beta d_i(t); \qquad i = 1, \ldots, n;$$

рассмотрим наряду с системой (1) две системы уравнений:

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)} + c_i(t) = 0; \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)} + d_i(t) = 0; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Если $x^i = \psi^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, есть решение системы (3), а $x^i = \chi^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, есть решение системы (4), то система функций

$$x^i = \alpha\psi^i(t) + \beta\chi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

представляет собой решение системы (1).

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами представляют собой большой и важный класс обыкновенных дифференциальных уравнений, решающихся до конца при помощи элементарных функций. Ввиду того, что решение этих уравнений принципиально не представляет больших трудностей, часто считают, что они не имеют сколько-нибудь значительного интереса для теории, и в учебниках им обычно отводят место простого примера к общей теории линейных уравнений. Между тем линейные уравнения с постоянными коэффициентами имеют многочисленные технические применения, так как работа весьма многих технических объектов достаточно адэкватным образом описывается этими уравнениями. Именно технические применения выдвигают ряд новых задач теоретического характера в теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Решению этих теоретических задач посвящено немало работ, имеющих прикладную направленность, и некоторые из них нашли отражение в настоящей главе. Так, в этой главе используются обычные для инженерной практики *операционные обозначения*, которые очень удобны для решения систем уравнений методом исключения. Рассматривается вопрос об *устойчивости решений* систем линейных уравнений, очень важный в теории автоматического управления. Далее, излагается так называемый *метод комплексной амплитуды*, представляющий собой удобный способ нахождения частных установившихся решений и широко применяемый в электротехнике.

Не ограничиваясь решением чисто математических задач, порожденных практикой, я привожу здесь в очень краткой догматической форме изложение теории электрических цепей. Расчет электрических цепей дает хорошую и важную с технической точки зрения иллюстрацию развитых в этой главе математических методов.

Кроме того, в настоящую главу включено исследование фазовой плоскости линейных систем второго порядка, которому предшествует самое начальное изучение фазовых пространств автономных (вообще говоря, нелинейных) систем. Фазовые пространства автономных систем также находят важные приложения в технике.

Благодаря всему сказанному глава о линейных уравнениях с постоянными коэффициентами занимает в этой книге значительно больше места, чем это обычно бывает в учебниках по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изложение всего материала настоящей главы очень элементарно, за исключением лишь § 14, где используется жорданова форма матриц. Все сделанное при помощи жордановой формы в дальнейшем не употребляется и может быть пропущено, как это подробно указано в § 14.

§ 7. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами (случай простых корней)

В этом и следующем параграфах будет решено линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами порядка n, т. е. уравнение

$$z^{(n)}+a_1 z^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\dot{z}+a_n z=0, \tag{1}$$

где z есть неизвестная функция независимого переменного t, а коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ суть постоянные числа (действительные или комплексные). Сначала будут найдены все комплексные решения этого уравнения, а затем (в случае, когда коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ действительны) из них будут выделены действительные решения. Уравнение (1) можно записать в виде:

$$z^{(n)}=-a_1 z^{(n-1)}-\ldots-a_{n-1}\dot{z}-a_n z, \tag{2}$$

так что к нему применима теорема существования и единственности (см. предложение В) § 5). В дальнейшем будет использована лишь единственность, так как решения уравнения (2) будут найдены явно и тем самым существование их будет установлено; единственность же будет использована для доказательства того, что найдены в с е решения.

В инженерных применениях обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами важную роль играет о п е р а ц и о н н о е и с ч и с л е н и е. Мы используем здесь *символические* (или, иначе, *операционные*) *обозначения*, лежащие в основе операционного исчисления. Суть этих обозначений заключается в том, что производная по времени t от произвольной функции $z=z(t)$ обозначается не через $\frac{d}{dt}z$, а через pz, так что буква p, стоящая слева от функции, является с и м в о л о м д и ф ф е р е н ц и р о в а н и я по t. Если позволить себе применить к символу дифференцирования p некоторые алгебраические действия, то мы приходим к обозначению

$$\frac{d^k}{dt^k} z = p^k z.$$

Пользуясь этим обозначением, мы можем написать

$$a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{z} + a_n z =$$
$$= a_0 p^n z + a_1 p^{n-1} z + \ldots + a_{n-1} p z + a_n z.$$

Если теперь в правой части последнего равенства позволить себе вынести за скобку функцию z, то мы получаем равенство

$$a_0 z^n + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{z} + a_n z =$$
$$= (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n) z.$$

Таким образом, мы приходим к формальному определению.

А) Пусть

$$L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$

— произвольный многочлен относительно символа p с постоянными коэффициентами (действительными или комплексными) и z — некоторая действительная или комплексная функция действительного переменного t. Положим:

$$L(p) z = a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{z} + a_n z. \tag{3}$$

Если $L(p)$ и $M(p)$ суть два произвольных многочлена относительно символа p (или, как говорят, *оператора дифференцирования* p), а z, z_1, z_2 — функции переменного t, то, как легко видеть, мы имеем тождества

$$L(p)(z_1 + z_2) = L(p) z_1 + L(p) z_2,$$
$$(L(p) + M(p)) z = L(p) z + M(p) z,$$
$$L(p)(M(p) z) = (L(p) M(p)) z.$$

В силу введенных обозначений уравнение (1) может быть записано в виде:

$$L(p) z = 0, \tag{4}$$

где

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n.$$

Б) Пусть $L(p)$ — произвольный многочлен относительно символа p. Тогда

$$L(p) e^{\lambda t} = L(\lambda) e^{\lambda t}. \tag{5}$$

Докажем формулу (5). Мы имеем

$$p e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

(см. формулу (9) § 5). Из этого следует, что $p^k e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}$. Отсюда формула (5) вытекает непосредственно (см. (3)).

Из формулы (5) следует, что функция $e^{\lambda t}$ тогда и только тогда является решением уравнения (4), когда число λ есть корень многочлена $L(p)$. Многочлен $L(p)$ называется *характеристическим многочленом* уравнения (4). В том случае, когда он не имеет кратных корней, совокупность всех решений уравнения (4) описывается следующей теоремой.

Теорема 4. *Предположим, что характеристический многочлен $L(p)$ уравнения*

$$L(p)z = 0 \tag{6}$$

(см. (1) и (4)) *не имеет кратных корней, и обозначим его корни через*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n.$$

Положим:

$$z_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad z_n = e^{\lambda_n t}. \tag{7}$$

Тогда при любых комплексных постоянных $c^1, c^2, \ldots, c^n$ функция

$$z = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \ldots + c^n z_n \tag{8}$$

является решением уравнения (6). *Решение это является общим в том смысле, что каждое решение уравнения* (6) *может быть получено по формуле* (8) *при надлежащем выборе констант $c^1, c^2, \ldots, c^n$. При этом константы $c^1, c^2, \ldots, c^n$ (называемые постоянными интегрирования) однозначно определяются для каждого данного решения z.*

Заметим, что функции (7) определены на всей числовой прямой $-\infty < t < +\infty$.

Доказательство. Из формулы (5) следует, что каждая функция системы (7) является решением уравнения (6), а из того, что уравнение (6) линейно и однородно, вытекает (см. § 6, А)), что при произвольных комплексных константах $c^1, c^2, \ldots, c^n$ формула (8) дает решение уравнения (6). Покажем, что если $z_* = z_*(t)$ есть произвольное решение уравнения (6), то оно может быть записано в виде (8). В силу предложения В) § 5 мы можем считать, что решение z_* определено на всей прямой $-\infty < t < \infty$. Положим:

$$z_*(0) = z_0, \quad \dot{z}_*(0) = \dot{z}_0, \quad \ldots, \quad z_*^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}.$$

Покажем теперь, что константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$ можно выбрать так, чтобы и решение $z(t)$, определяемое формулой (8), удовлетворяло тем же начальным условиям

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(0) = z_0^{n-1}. \tag{9}$$

Подставляя функцию z из формулы (8) в уравнения (9), получаем:

$$c^1 z_1^{(s)}(0) + \ldots + c^n z_n^{(s)}(0) = z_0^{(s)}; \qquad s = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Соотношения (10) представляют собой систему из n уравнений относительно неизвестных $c^1, c^2, \ldots, c^n$. Для того чтобы система (10) была разрешима, достаточно, чтобы детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) & \ldots & z_n(0) \\ \dot{z}_1(0) & \dot{z}_2(0) & \ldots & \dot{z}_n(0) \\ \ddot{z}_1(0) & \ddot{z}_2(0) & \ldots & \ddot{z}_n(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(n-2)}(0) & z_2^{(n-2)}(0) & \ldots & z_n^{(n-2)}(0) \\ z_1^{(n-1)}(0) & z_2^{(n-1)}(0) & \ldots & z_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} \tag{11}$$

не обращался в нуль.

Непосредственно видно, что матрица (11) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

и потому ее детерминант (детерминант Вандермонда) отличен от нуля, так как все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ попарно различны. Однако мы дадим другое (непосредственное) доказательство того, что детерминант матрицы (11) отличен от нуля. Доказательство это в дальнейшем будет обобщено и на случай кратных корней.

Если бы детерминант матрицы (11) обращался в нуль, то существовала бы линейная зависимость между ее строками. Допустим, что эта линейная зависимость имеет место. Это значит, что существуют такие числа $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0$, не обращающиеся одновременно в нуль, что, умножая на них строки матрицы (11) и складывая, получаем нулевую строку. Выписывая k-й член этой нулевой строки, получаем:

$$b_{n-1}z_k(0) + b_{n-2}\dot{z}_k(0) + \ldots + b_1 z_k^{(n-2)}(0) + b_0 z_k^{(n-1)}(0) = 0. \tag{12}$$

Если обозначить через $M(p)$ многочлен $b_0p^{n-1} + b_1p^{n-2} + \ldots + b_{n-2}p + b_{n-1}$, то соотношение (12) можно записать в виде:

$$M(p)z_k\,|_{t=0} = 0.$$

В силу формул (5) и (7), отсюда получаем:

$$M(\lambda_k) = 0,$$

а это невозможно, так как степень многочлена $M(p)$ не превосходит $n-1$, потому он не может иметь n различных корней

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_n$. Полученное противоречие показывает, что детерминант системы (10) отличен от нуля, и потому константы $c^1, \ldots, c^n$ можно (и притом однозначно) выбрать так, чтобы решения $z_*(t)$ и $z(t)$ удовлетворяли одинаковым начальным условиям. При таком (и только при таком) выборе этих констант решение (8) совпадает с заданным решением $z_*(t)$.

Итак, теорема 4 доказана.

Если коэффициенты многочлена $L(p)$, входящего в уравнение (6), действительны, то возникает вопрос о выделении действительных решений из совокупности (8) всех комплексных решений.

Решение этого вопроса опирается на предложение Г), при формулировке и доказательстве которого мы будем пользоваться векторными обозначениями. Напомним их здесь.

В) *Вектором* n-мерного пространства будем называть последовательность, состоящую из n чисел:

$$\mathbf{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^n).$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор, а $u^1, u^2, \ldots, u^n$ — числа, называемые его *координатами*. Векторы всегда будем обозначать жирными буквами. Если координаты вектора — действительные числа, то вектор считается *действительным*, если же координаты его *комплексны*, то и сам вектор считается комплексным. Вектор $\bar{\mathbf{u}}$, *комплексно сопряженный* с вектором $\mathbf{u}$, определяется равенством

$$\bar{\mathbf{u}} = (\overline{u^1}, \overline{u^2}, \ldots, \overline{u^n}).$$

Очевидно, что вектор $\mathbf{u}$ тогда и только тогда является действительным, когда

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}.$$

Произведение вектора $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$ на действительное или комплексное число α определяется формулой

$$\alpha\mathbf{u} = \mathbf{u}\alpha = (\alpha u^1, \alpha u^2, \ldots, \alpha u^n).$$

Сумма векторов

$$\mathbf{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^n) \text{ и } \mathbf{v} = (v^1, v^2, \ldots, v^n)$$

определяется формулой

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u^1 + v^1, u^2 + v^2, \ldots, u^n + v^n).$$

Нулевым вектором называется вектор $\mathbf{0}$, все координаты которого равны нулю.

Пусть

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$$

— конечная система векторов. Соотношение

$$\alpha^1\mathbf{u}_1 + \alpha^2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha^r\mathbf{u}_r = \mathbf{0},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — числа, среди которых имеются не равные нулю, называется *линейной зависимостью* между векторами $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Если между векторами не существует линейной зависимости, то они называются *линейно независимыми*. Пусть

$$u_j = (u_j^1, u_j^2, \ldots, u_j^n), \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Числа u_j^i образуют матрицу (u_j^i); $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$. Если считать, что верхний индекс i указывает номер строки, а нижний j — номер столбца, то матрица (u_j^i) имеет высоту n и ширину r. Таким образом, вектору u_j в матрице (u_j^i) соответствует j-й столбец (состоящий из координат этого вектора). Отсюда видно, что линейной зависимости векторов $u_1, u_2, \ldots, u_r$ соответствует линейная зависимость столбцов матрицы (u_j^i). В случае $r = n$ матрица (u_j^i) квадратна, и векторы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ тогда и только тогда линейно независимы, когда детерминант $|u_j^i|$ этой матрицы отличен от нуля.

Г) Пусть

$$z_1, z_2, \ldots, z_n \tag{13}$$

— система из n линейно независимых комплексных векторов в n-мерном пространстве. Допустим, что система (13) вместе с каждым вектором содержит сопряженный ему вектор. При этих предположениях вектор z, определяемый формулой

$$z = c^1 z_1 + \ldots + c^n z_n, \tag{14}$$

тогда и только тогда действителен, когда коэффициенты, стоящие при сопряженных векторах, сопряжены, а коэффициенты, стоящие при действительных векторах, действительны.

Докажем это. Будем предполагать для определенности, что выполнены соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\bar{z}_1 = z_2, \ \ldots, \ \overline{z_{2k-1}} = z_{2k}, \\ &\bar{z}_j = z_j;\ j = 2k+1, \ldots, n. \end{aligned}\right\}$$

Тогда вектор z согласно (14) имеет вид:

$$z = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \ldots + c^{2k-1} z_{2k-1} + c^{2k} z_{2k} + c^{2k+1} z_{2k+1} + \ldots + c^n z_n, \tag{15}$$

а вектор $\bar{z}$ — вид:

$$\bar{z} = \overline{c^2} z_1 + \overline{c^1} z_2 + \ldots + \overline{c^{2k}} z_{2k-1} + \overline{c^{2k-1}} z_{2k} + \overline{c^{2k+1}} z_{2k+1} + \ldots + \overline{c^n}\, z_n. \tag{16}$$

Если

$$c^1 = \overline{c^2}, \ \ldots, \ c^{2k-1} = \overline{c^{2k}}, \quad c^{2k+1} = \overline{c^{2k+1}}, \ \ldots, \ c^n = \overline{c^n}, \tag{17}$$

то из равенств (15) и (16) следует, что $\bar{z} = z$, т. е. что вектор z действителен. Если, наоборот, предположить, что вектор z действителен, т. е. что $\bar{z} = z$, то равенства (15) и (16) дают (в силу линейной независимости векторов (13)) систему соотношений (17).

Итак, предложение Г) доказано.

Нижеследующее предложение Д) дает способ выделения действительных решений из совокупности всех комплексных решений уравнения (6) в случае, когда коэффициенты многочлена $L(p)$ действительны.

Д) Допустим, что коэффициенты многочлена $L(p)$ действительны; тогда наряду с каждым комплексным корнем λ многочлен $L(p)$ имеет сопряженный с ним корень $\bar{\lambda}$. Решения $e^{\lambda t}$ и $e^{\bar{\lambda} t}$ уравнения (6) сопряжены между собой (см. § 5,Г)). Если же корень λ действителен, то решение $e^{\lambda t}$ действительно. Таким образом, наряду с каждым решением в системе решений (7) имеется также комплексно сопряженное с ним решение. Для того чтобы решение (8) уравнения (6) было действительным, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты, стоящие при комплексно сопряженных решениях, были сопряжены, а коэффициенты при действительных решениях действительны.

Для доказательства обозначим через z_k вектор с координатами $\{z_k(0), \dot{z}_k(0), \ldots, z_k^{(n-2)}(0), z_k^{(n-1)}(0)\}$ и через z — вектор с координатами $\{z_0, \dot{z}_0, \ldots, z_0^{(n-1)}\}$. Тогда соотношения (10) принимают вид:

$$c^1 z_1 + c^2 z_2 + \ldots + c^n z_n = z.$$

Векторы $z_1, z_2, \ldots, z_n$ линейно независимы, так как детерминант матрицы (11) отличен от нуля. Таким образом, необходимость приведенного в Д) условия следует непосредственно из Г). С другой стороны, если это условие выполнено, то решение (8) действительно. В самом деле, если λ_1 и λ_2 — два комплексно сопряженных корня, а c^1 и c^2 — две комплексно сопряженные константы, то функции $c^1 e^{\lambda_1 t}$ и $c^2 e^{\lambda_2 t}$ комплексно сопряжены, а следовательно, их сумма действительна.

Итак, предложение Д) доказано.

Примеры

1. Найдем все комплексные решения уравнения

$$\dddot{z} - 3\ddot{z} + 9\dot{z} + 13z = 0.$$

Его можно записать в виде (6), где

$$L(p) = p^3 - 3p^2 + 9p + 13.$$

Непосредственно проверяется, что $p = -1$ есть корень характеристического многочлена $L(p)$. Разделив $L(p)$ на $p + 1$, получаем:

$$L(p) = (p + 1)(p^2 - 4p + 13),$$

откуда находим еще два корня $2 \pm 3i$. Таким образом, корнями многочлена $L(p)$ являются числа

$$\lambda_1 = 2 + 3i, \quad \lambda_2 = 2 - 3i, \quad \lambda_3 = -1.$$

В силу теоремы 4 общее комплексное решение рассматриваемого уравнения имеет вид:

$$z = c^1 e^{(2+3i)t} + c^2 e^{(2-3i)t} + c^3 e^{-t}.$$

В нижеследующих примерах 2 и 3 даются два общих правила выделения действительных решений. Правила эти непосредственно вытекают из предложения Д).

2. Будем считать, что система решений (7) удовлетворяет условиям

$$\bar{z}_1 = z_2, \ \ldots, \bar{z}_{2k-1} = z_{2k}, \quad \overline{z_{2k+1}} = z_{2k+1}, \ \ldots, \bar{z}_n = z_n, \tag{18}$$

и положим:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \ \ldots, \ z_{2k-1} = x_k + iy_k,$$

где $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ — действительные функции. Будем, далее, считать, что числа $c^1, c^2, \ldots, c^n$ удовлетворяют условиям (17) и положим:

$$c^1 = \frac{1}{2}(a^1 - ib^1), \ \ldots, \ c^{2k-1} = \frac{1}{2}(a^k - ib^k),$$

где $a^1, \ldots, a^k, b^1, \ldots, b^k$ — действительные числа. При этих обозначениях общее действительное решение уравнения (6) записывается в виде:

$$z = a^1 x_1 + b^1 y_1 + \ldots + a^k x_k + b^k y_k + c^{2k+1} z_{2k+1} + \ldots + c^n z_n,$$

где

$$a^1, b^1, \ldots, a^k, b^k, c^{2k+1}, \ldots, c^n$$

суть произвольные действительные числа.

3. Опять будем считать, что решения (7) удовлетворяют условиям (18); положим:

$$\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1, \ \ldots, \ \lambda_{2k-1} = \mu_k + i\nu_k.$$

В предположении, что числа $c^1, c^2, \ldots, c^n$ удовлетворяют условиям (17), мы можем положить:

$$c^1 = \frac{1}{2}\rho_1 e^{i\alpha_1}, \ \ldots, \ c^{2k-1} = \frac{1}{2}\rho_k e^{i\alpha_k}.$$

В этих обозначениях каждое действительное решение z записывается в виде:

$$z = \rho_1 e^{\mu_1 t}\cos(\nu_1 t + \alpha_1) + \ldots + \rho_k e^{\mu_k t}\cos(\nu_k t + \alpha_k) + \\ + c^{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} + \ldots + c^n e^{\lambda_n t}.$$

Здесь $\rho_1, \ldots, \rho_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, c^{2k+1}, \ldots, c^n$ суть произвольные действительные константы. Из последней записи видно, что каждая мнимая часть $\nu_j \neq 0$ корня λ_j придает решению колебательный характер частоты ν_j, а каждая действительная часть μ_j корня λ_j дает ему либо рост (при $\mu_j > 0$), либо убывание (при $\mu_j < 0$).

4. Используя результаты примеров 2 и 3, мы можем записать все действительные решения уравнения, рассмотренного в примере 1, в двух следующих формах:

$$z = a^1 e^{2t} \cos 3t + b^1 e^{2t} \sin 3t + c^3 e^{-t},$$
$$z = \rho_1 e^{2t} \cos (3t + \alpha_1) + c^3 e^{-t}.$$

§ 8. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами (случай кратных корней)

Если характеристический многочлен

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$

уравнения

$$L(p) z = 0 \tag{1}$$

(см. § 7, A)) имеет кратные корни, то среди функций вида $e^{\lambda t}$ нельзя найти n различных решений уравнения (1). Для нахождения в этом случае решений другого вида можно воспользоваться следующим наводящим соображением. Пусть λ_1 и λ_2 — два различных действительных корня характеристического многочлена $L(p)$; тогда функция $\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ является решением уравнения (1). Если теперь предположить, что при изменении коэффициентов многочлена $L(p)$ число λ_2 стремится к λ_1, то это решение переходит (в пределе) в функцию $te^{\lambda_1 t}$, о которой естественно предположить, что она является решением уравнения (1) в случае, если λ_1 есть двукратный корень многочлена $L(p)$. Аналогично мы приходим к догадке, что если λ есть k-кратный корень характеристического многочлена $L(p)$, то решениями уравнения (1) являются все функции:

$$e^{\lambda t}, \; te^{\lambda t}, \; \ldots, \; t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

Распространяя эту догадку на случай комплексных кратных корней, мы приходим к предположению о справедливости нижеследующей теоремы (являющейся обобщением теоремы 4):

Теорема 5. *Пусть*

$$L(p) z = 0 \tag{2}$$

— линейное однородное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами. Пусть, далее, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — совокупность всех попарно различных корней характеристического многочлена $L(p)$ уравнения (2), причем корень λ_j имеет кратность k_j, так что

$k_1+k_2+\ldots+k_m=n$. *Положим:*

$$\left.\begin{array}{llll} z_1=e^{\lambda_1 t}, & z_2=te^{\lambda_1 t}, & \ldots, & z_{k_1}=t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t};\\ z_{k_1+1}=e^{\lambda_2 t}, & z_{k_1+2}=te^{\lambda_2 t}, & \ldots, & z_{k_1+k_2}=t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t};\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ & & \ldots & z_n=t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Тогда все функции (3) *являются решениями уравнения* (2), *так что при любых комплексных постоянных* $c^1, c^2, \ldots, c^n$ *функция*

$$z=c^1z_1+\ldots+c^nz_n \qquad (4)$$

также является решением этого уравнения. Решение это является общим в том смысле, что каждое решение уравнения (2) *может быть получено по формуле* (4) *при надлежащем выборе констант* $c^1, \ldots, c^n$. *При этом константы* $c^1, \ldots, c^n$ *однозначно определяются для каждого данного решения* z.

Заметим, что функции (3) определены на всей числовой прямой $-\infty<t<+\infty$.

Доказательству теоремы 5 предпошлем доказательство *формулы смещения*.

А) Пусть $L(p)$ — произвольный многочлен, λ — произвольное комплексное число и $f(t)$ — произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция. Тогда имеет место следующая важная формула:

$$L(p)(e^{\lambda t}f(t))=e^{\lambda t}\cdot L(p+\lambda)f(t). \qquad (5)$$

Докажем формулу (5). Проверим ее сначала для случая $L(p)\equiv p$. Мы имеем:

$$p(e^{\lambda t}f(t))=\lambda e^{\lambda t}f(t)+e^{\lambda t}\dot f(t)=e^{\lambda t}(p+\lambda)f(t).$$

Теперь формулу (5) легко проверить для произвольного многочлена первой степени $L(p)=ap+b$. Мы имеем:

$$(ap+b)(e^{\lambda t}f(t))=ap(e^{\lambda t}f(t))+be^{\lambda t}f(t)=$$
$$=ae^{\lambda t}(p+\lambda)f(t)+be^{\lambda t}f(t)=e^{\lambda t}[a(p+\lambda)+b]f(t).$$

Доказательство формулы (5) в общем случае проведем индуктивно по степени n многочлена $L(p)$. Для $n=1$ формула, как мы видели, верна. Допустим, что она справедлива для многочлена степени $n-1$ ($n\geqslant 2$), и докажем ее для многочлена $L(p)$ степени n. Для этого многочлен $L(p)$ степени n разложим на два множителя $L(p)=L_1(p)\cdot L_2(p)$, где $L_1(p)$ имеет степень 1, а $L_2(p)$ имеет степень $n-1$. Так как для каждого из многочленов $L_1(p)$ и $L_2(p)$ формула (5) справедлива, то мы имеем (см. § 7, А)):

$$L(p)(e^{\lambda t}f(t))=L_1(p)(L_2(p)(e^{\lambda t}f(t)))=L_1(p)(e^{\lambda t}L_2(p+\lambda)f(t))=$$
$$=e^{\lambda t}L_1(p+\lambda)L_2(p+\lambda)f(t)=e^{\lambda t}L(p+\lambda)f(t).$$

Таким образом, формула (5) доказана.

Докажем теперь предложение Б), в котором теорема 5 почти полностью содержится.

Б) Пусть $L(p)$ — произвольный многочлен относительно символа p и пусть функция $\omega_r(t)$ действительного переменного t определяется формулой

$$\omega_r(t) = L(p)\, t^r e^{\lambda t},$$

где λ — комплексное число. Оказывается, что если λ есть k-кратный корень многочлена $L(p)$, то функции $\omega_0(t), \ldots, \omega_{k-1}(t)$ тождественно равны нулю. С другой стороны, оказывается, что если функции $\omega_0(t)$, $\omega_1(t), \ldots, \omega_{k-1}(t)$ равны нулю хотя бы для одного значения $t = t_0$, т. е. имеют место равенства

$$\omega_0(t_0) = \omega_1(t_0) = \ldots = \omega_{k-1}(t_0) = 0, \tag{6}$$

то λ есть корень многочлена $L(p)$ и кратность этого корня не меньше k.

Докажем предложение Б).

В силу формулы смещения (см. (5)) имеем:

$$\omega_r(t) = e^{\lambda t} L(p+\lambda)\, t^r. \tag{7}$$

Допустим сначала, что λ есть k-кратный корень многочлена $L(p)$, т. е. что

$$L(p) = M(p)(p-\lambda)^k.$$

Заменив в этом тождестве p через $p+\lambda$, получим:

$$L(p+\lambda) = M(p+\lambda)\, p^k. \tag{8}$$

Из формул (7) и (8) получаем:

$$\omega_r(t) = e^{\lambda t} M(p+\lambda)(p^k t^r) = 0 \qquad \text{при} \qquad r = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,$$

так как $p^k t^r = 0$ при $r < k$. Таким образом, первая часть предложения Б) доказана.

Допустим теперь, что имеют место соотношения (6). Разлагая $L(p+\lambda)$ по степеням p, получаем:

$$L(p+\lambda) = b_0 + b_1 p + \ldots + b_{n-1} p^{n-1} + b_n p^n. \tag{9}$$

Из соотношений (7) и (9) получаем:

$$\omega_0(t_0) = e^{\lambda t_0} b_0,$$

а это в силу (6) дает

$$b_0 = 0.$$

Допустим теперь, что имеют место равенства

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_{r-1} = 0, \qquad r \leqslant k-1, \tag{10}$$

и докажем, что $b_r=0$. В силу (7), (9) и (10) имеем:

$$\omega_r(t_0)=e^{\lambda t_0}\cdot r!\, b_r.$$

В силу (6) из этого следует

$$b_r=0.$$

Таким образом, $b_0=b_1=\ldots=b_{k-1}=0$, и многочлен $L(p+\lambda)$ имеет вид:

$$L(p+\lambda)=b_kp^k+\ldots+b_np^n=(b_k+\ldots+b_np^{n-k})p^k=M_1(p)p^k.$$

Заменяя в этом тождестве p через $p-\lambda$, получаем:

$$L(p)=M_1(p-\lambda)\cdot(p-\lambda)^k,$$

а это показывает, что λ есть корень многочлена $L(p)$, причем кратность его не меньше k.

Таким образом, предложение Б) доказано.

Доказательство теоремы 5. Из первой части предложения Б) непосредственно следует, что функции (3), указанные в формулировке теоремы 5, являются решениями уравнения (2). Докажем, что, выбирая надлежащим образом константы $c^1, \ldots, c^n$, мы можем получить по формуле (4) произвольное решение z_* уравнения (2) (при этом, в отличие от того, что было сделано при доказательстве теоремы 4, мы здесь не будем пользоваться теоремой 3).

Пусть z_* — произвольное решение уравнения (2), определенное на некотором интервале $r_1<t<r_2$, и пусть t_0 — некоторое число из этого интервала. Положим:

$$z_*(t_0)=z_0,\quad \dot z_*(t_0)=\dot z_0,\quad \ldots,\quad z_*^{(n-1)}(t_0)=z_0^{(n-1)}.$$

Теперь будем искать такие константы $c^1, \ldots, c^n$, чтобы решение z уравнения (2), определяемое формулой (4), удовлетворяло тем же начальным условиям, что и заданное решение z_*. Тогда будем иметь $z=z_*$ (на интервале $r_1<t<r_2$) в силу теоремы единственности. Для определения констант $c^1, \ldots, c^n$ мы получаем систему уравнений

$$c^1z_1^{(s)}(t_0)+c^2z_2^{(s)}(t_0)+\ldots+c^nz_n^{(s)}(t_0)=z_0^{(s)},\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{11}$$

Для того чтобы система (11) была разрешима, достаточно, чтобы детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} z_1(t_0) & z_2(t_0) & \ldots & z_n(t_0) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_1^{(s)}(t_0) & z_2^{(s)}(t_0) & \ldots & z_n^{(s)}(t_0) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_1^{(n-1)}(t_0) & z_2^{(n-1)}(t_0) & \ldots & z_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \tag{12}$$

был отличен от нуля. Покажем, что этот детерминант не равен нулю. Для этого покажем, что строки матрицы (12) линейно независимы.

Допустим противоположное, и пусть $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0$ — те константы, не обращающиеся одновременно в нуль, на которые следует умножить первую, вторую и так далее строки матрицы, для того чтобы сумма их была равна нулю. Выписывая сумму элементов j-го столбца, получаем равенство

$$b_0 z_j^{(n-1)}(t_0) + b_1 z_j^{(n-2)}(t_0) + \ldots + b_{n-2} \dot{z}_j(t_0) + b_{n-1} z_j(t_0) = 0,$$

которое можно переписать в виде:

$$M(p) z_j \big|_{t=t_0} = 0, \tag{13}$$

где $M(p) = b_0 p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \ldots + b_{n-2} p + b_{n-1}$. Полученное равенство (13) для $j = 1, \ldots, k_1$ дает, что λ_1 есть по меньшей мере k_1-кратный корень многочлена $M(p)$ (см. предложение Б)). Точно так же для $j = k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2$ полученное равенство дает, что λ_2 есть по меньшей мере k_2-кратный корень многочлена $M(p)$. Совокупность всех равенств (13) приводит нас к выводу, что (с учетом кратностей) многочлен $M(p)$ имеет не менее n корней, а это невозможно, так как его степень не выше, чем $n - 1$. Итак, предположение о равенстве нулю детерминанта матрицы (12) привело нас к противоречию, а это значит, что система (11) разрешима (и притом однозначно) относительно неизвестных

$$c^1, \quad c^2, \quad \ldots, \quad c^n.$$

Таким образом, теорема 5 полностью доказана.

Отметим одно очевидное следствие теоремы 5.

В) Каждое решение $z(t)$ уравнения (2) может быть записано в виде:

$$z(t) = f_1(t) e^{\lambda_1 t} + f_2(t) e^{\lambda_2 t} + \ldots + f_m(t) e^{\lambda_m t},$$

где $f_j(t)$ есть многочлен степени, не превосходящей числа $k_j - 1$, $j = 1, \ldots, m$. При этом многочлены $f_1(t), \ldots, f_m(t)$ определены однозначно решением $z(t)$, так как их коэффициенты являются константами интегрирования $c^1, c^2, \ldots, c^n$, которые в силу теоремы 5 определены решением $z(t)$ однозначно.

Если коэффициенты уравнения (2) действительны, то перед нами стоит задача выделения из совокупности комплексных решений уравнения (2) его действительных решений.

Г) Будем считать, что коэффициенты характеристического многочлена $L(p)$ уравнения (2) действительны. Пусть λ — некоторый корень многочлена $L(p)$ кратности k; тогда при $r = 0, 1, \ldots, k-1$ функция $t^r e^{\lambda t}$ является решением уравнения (2). Если корень λ действительный, то функция $t^r e^{\lambda t}$ действительна, если же корень λ комплексный, то наряду с решением $t^r e^{\lambda t}$ имеется комплексно-сопряженное ему решение $t^r e^{\bar{\lambda} t}$, так как $\bar{\lambda}$ есть корень кратности k многочлена $L(p)$. Таким образом, в системе решений (3) наряду с каждым комплексным решением имеется сопряженное с ним решение. Для того чтобы решение (4) было действительным, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при действительных решениях были действительными, а коэффициенты у попарно сопряженных комплексных решений были попарно сопряжены.

Доказательство предложения Г) проводится точно так же, как и доказательство предложения Д) § 7 на основе предложения Г) § 7.

Примеры

1. Решим уравнение

$$z^{\mathrm{V}} + 3z^{\mathrm{IV}} + 3z''' + z'' = 0.$$

Уравнение это может быть записано в виде (2), где характеристический многочлен $L(p)$ имеет вид:

$$p^5 + 3p^4 + 3p^3 + p^2 = p^2(p+1)^3.$$

Корнями этого многочлена служат числа

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -1,$$

имеющие кратности $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Поэтому в силу теоремы 5 система решений (3) для рассматриваемого уравнения имеет вид:

$$z_1 = 1, \ z_2 = t, \ z_3 = e^{-t}, \ z_4 = te^{-t}, \ z_5 = t^2 e^{-t}.$$

Общее решение дается формулой

$$z = (c^1 + c^2 t) + (c^3 + c^4 t + c^5 t^2) e^{-t}.$$

2. Решим уравнение

$$z^{\mathrm{IV}} + 2z'' + z = 0.$$

Характеристический многочлен равен $L(p) = (p^2 + 1)^2$; его корнями (двукратными) являются числа $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Общее решение рассматриваемого уравнения записывается в виде:

$$z = (c^1 + c^2 t) e^{it} + (c^3 + c^4 t) e^{-it}.$$

Нижеследующие два примера дают общие правила выделения действительных решений, непосредственно вытекающие из предложения Г). Примеры 3 и 4 вполне аналогичны примерам 2 и 3 § 7.

3. В примере 2 § 7 не учитывался конкретный вид решений, а было лишь предположено, что система решений $z_1, \ldots, z_n$ состоит из попарно сопряженных решений и действительных решений. Поэтому те же рассуждения показывают, что и в случае кратных корней, мы имеем следующее общее правило. В системе (3) следует каждую пару комплексно-сопряженных решений заменить действительной и мнимой частями одного из этих решений. Полученная таким

образом система функций обладает тем свойством, что любое действительное решение является их линейной комбинацией с действительными коэффициентами.

4. Пусть

$$t^r e^{\lambda t}, \quad t^r e^{\bar{\lambda} t}$$

— два комплексно сопряженных решения из системы (3). В случае действительного решения z часть суммы (4), соответствующая этим решениям, может быть записана в виде:

$$\hat{z} = ct^r e^{(\mu+i\nu)t} + \bar{c}t^r e^{(\mu-i\nu)t}.$$

Положим:

$$c = \frac{1}{2}\rho e^{i\alpha}.$$

Тогда мы будем иметь:

$$\hat{z} = \rho t^r e^{\mu t}\cos(\nu t + \alpha). \tag{14}$$

Этим способом можно каждую пару комплексно-сопряженных решений, входящих в сумму (4), заменить действительной функцией вида (14), содержащей две произвольные действительные константы ρ и α. Здесь вновь, как и в примере 3 § 7, видно, что наличие мнимой части $\nu \neq 0$ корня λ придает решению колебательный характер, а наличие действительной части $\mu \neq 0$ корня λ вызывает либо возрастание решения (при $\mu > 0$), либо его убывание (при $\mu < 0$). Наконец, кратность корня λ вызывает появление множителя t^r, который также влечет возрастание решения, однако при $t \to \infty$ и при $\mu < 0$ возрастание решения, вызванное множителем t^r, гораздо меньше, чем убывание, вызванное множителем $e^{\mu t}$, так что при $\mu < 0$ (и любой кратности корня) решение стремится к нулю при возрастании t.

5. Используя результаты примеров 3 и 4, мы можем записать все действительные решения уравнения, рассмотренного в примере 2, в двух следующих формах:

$$z = (a^1 + a^2 t)\cos t + (b^1 + b^2 t)\sin t,$$
$$z = \rho_1 \cos(t + \alpha_1) + \rho_2 t\cos(t + \alpha_2).$$

§ 9. Устойчивые многочлены

Пусть

$$L(p)z = 0 \tag{1}$$

— линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Вопрос о том, как ведут себя решения этого уравнения при $t \to +\infty$ (стремятся ли они к нулю, остаются ограниченными или неограниченно возрастают), играет очень важную роль в целом ряде приложений теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В примерах 3 § 7 и 4 § 8 уже отмечалось, что этот вопрос о поведении решений уравнения (1) связан с тем, каковы действительные части корней многочлена $L(p)$. Формулируем теперь эту связь более точно:

А) Многочлен $L(p)$ называется *устойчивым*, если все его корни имеют отрицательные действительные части или, говоря геометрическим языком, лежат по левую сторону от мнимой оси плоскости комплексного переменного. Пусть

$$\lambda_j = \mu_j + i\nu_j, \quad j = 1, \ldots, m$$

— все корни многочлена $L(p)$. Если многочлен этот устойчив, то существует такое положительное число α, что

$$\mu_j < -\alpha, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Мы покажем, что для каждого решения $\varphi(t)$ уравнения (1) в этом случае найдется такое положительное число M, что

$$|\varphi(t)| < Me^{-\alpha t} \quad \text{при } t \geqslant 0. \tag{3}$$

Эта формула не только показывает, что каждое решение уравнения (1) стремится к нулю при $t \to +\infty$, но и оценивает, насколько быстро это стремление к нулю происходит.

Докажем формулу (3) сначала для произвольного решения z_s, $s = 1, \ldots, n$, уравнения (1), входящего в систему функций (3) § 8. Мы имеем:

$$z_s = t^r e^{\lambda_j t}, \text{ откуда } \left|\frac{z_s}{e^{-\alpha t}}\right| = t^r e^{(\mu_j + \alpha)t}.$$

Так как число $\mu_j + \alpha$ в силу (2) отрицательно, то функция $t^r e^{(\mu_j+\alpha)t}$ стремится к нулю при $t \to \infty$ и потому ограничена при $t \geqslant 0$. Таким образом, мы имеем:

$$\left|\frac{z_s}{e^{-\alpha t}}\right| < M_s \text{ при } t \geqslant 0,$$

или, что то же,

$$|z_s| < M_s e^{-\alpha t} \text{ при } t \geqslant 0.$$

Если теперь

$$\varphi(t) = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \ldots + c^n z_n$$

— произвольное решение уравнения (1), то при $t > 0$ имеем:

$$|\varphi(t)| \leqslant (|c^1| \cdot M_1 + |c^2| \cdot M_2 + \ldots + |c^n| \cdot M_n) e^{-\alpha t} = Me^{-\alpha t}.$$

Таким образом, неравенство (3) доказано. Следует отметить, что если хотя бы один из корней λ_j многочлена $L(p)$ имеет положительную действительную часть $\mu_j > 0$, то существует решение $e^{\lambda_j t}$ уравнения (1), неограниченно возрастающее при $t \to \infty$.

Нахождению различных, по возможности удобных для практического применения условий устойчивости многочленов до сих пор посвящаются многие исследования математиков. Для многочлена второй степени условие устойчивости непосредственно выводится из формулы решения квадратного уравнения (см. Б)). Вопрос об устойчивости многочлена произвольной степени n был решен в несколько различных формах математиками Раусом и Гурвицем. Условия Рауса — Гурвица, однако, мало удобны для вычислительной практики, и потому продолжают до сих пор отыскивать новые формулировки условий устойчивости. Здесь будет приведено доказательство критерия Рауса — Гурвица для $n=3$ и без доказательства будет дано условие устойчивости для произвольной степени n в форме Гурвица.

Б) Многочлен второй степени $L(p)=p^2+ap+b$ с действительными коэффициентами a и b тогда и только тогда устойчив, когда коэффициенты его положительны.

Это утверждение легко проверяется при помощи формулы решения квадратного уравнения.

В) Если многочлен $L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$ с действительными коэффициентами устойчив, то все его коэффициенты положительны.

Для доказательства разложим многочлен $L(p)$ на действительные множители первой и второй степени, т. е. на множители вида $p+c$ и p^2+ap+b. Так как многочлен $L(p)$ устойчив, то и каждый множитель указанного вида, входящий в его состав, также устойчив. Для устойчивости множителя $p+c$ необходимо, чтобы число c было положительно, а для устойчивости множителя p^2+ap+b необходимо, чтобы оба числа a, b были положительными. Из положительности коэффициентов множителей легко следует положительность коэффициентов произведения.

Нижеследующая теорема дает критерий устойчивости для многочленов 3-й степени.

Теорема 6. *Многочлен*

$$L(p)=a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3, \qquad a_0>0$$

с действительными коэффициентами тогда и только тогда устойчив, когда числа a_1, a_2, a_3 положительны и, сверх того, выполнено неравенство

$$a_1a_2>a_0a_3.$$

Доказательство. При доказательстве будем рассматривать многочлен

$$L(p)=p^3+ap^2+bp+c; \tag{4}$$

случай общего многочлена $L(p)$ легко сводится к этому. В силу предложения В) нам достаточно доказать, что многочлен (4) с положительными коэффициентами a, b, c тогда и только тогда устойчив, когда имеет место неравенство

$$ab > c. \tag{5}$$

При доказательстве мы воспользуемся тем, что корни многочлена являются непрерывными функциями его коэффициентов.

Выясним прежде всего, при каких условиях многочлен (4) имеет чисто мнимые корни, в частности, корень $p = 0$, который также следует считать чисто мнимым, так как он лежит на мнимой оси. Мы имеем:

$$L(p) = (p + a)(p^2 + b) - ab + c. \tag{6}$$

Если многочлен $L(p)$ имеет корень 0, то $c = 0$, а это по предположению исключено, так как $c > 0$. Допустим, что корнем многочлена $L(p)$ является число $i\omega$, где $\omega \neq 0$. Если предположить при этом, что число $-\omega^2 + b$ отлично от нуля, то число $(i\omega + a)(-\omega^2 + b)$ имеет отличную от нуля мнимую часть и не может взаимно уничтожаться с действительным числом $-ab + c$. Таким образом, число $i\omega$ лишь тогда может быть корнем многочлена $L(p)$, когда $-\omega^2 + b = 0$; в этом случае мы имеем равенство

$$L(i\omega) = -ab + c = 0.$$

Обратно, если $ab = c$, то в силу (6) многочлен $L(p)$ имеет чисто мнимые корни $p = \pm i\sqrt{b}$. Таким образом, многочлен $L(p)$ (с положительными коэффициентами) тогда и только тогда имеет чисто мнимые корни, когда $ab = c$. В частности, при непрерывном изменении положительных коэффициентов a, b, c корень многочлена $L(p)$ только тогда может пересечь мнимую ось, когда выполнено равенство $ab = c$.

Допустим, что неравенство (5) не выполняется. Тогда либо $ab = c$, либо $ab < c$. В первом случае многочлен $L(p)$ имеет чисто мнимые корни и, следовательно, неустойчив. Покажем, что во втором случае, т. е. при выполнении неравенства

$$ab < c, \tag{7}$$

многочлен $L(p)$ также неустойчив. Будем менять непрерывно коэффициенты a и b, оставляя их положительными, так, чтобы они стремились к нулю и чтобы при этом неравенство (7) не нарушалось. При этом изменении ни один корень не перейдет с одной стороны мнимой оси на другую, и, следовательно, свойство многочлена быть устойчивым или неустойчивым не изменится. При $a = b = 0$ получаем многочлен $p^3 + c$, который имеет корни $\sqrt[3]{c}\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}\right)$, лежащие по правую сторону мнимой оси. В силу непрерывности зависимости корней от коэффициентов, неустойчивость (наличие корней справа от мнимой оси) сохраняется и при достаточно малых положительных a и b.

Допустим теперь, что неравенство (5) выполнено, и покажем, что многочлен $L(p)$ устойчив. Для этого будем менять коэффициент c так, чтобы он стремился к нулю, оставаясь положительным, и чтобы неравенство (5) при этом не нарушалось. При $c=0$ мы получаем многочлен

$$L(p)=p(p^2+ap+b),$$

имеющий один нулевой корень и два корня с отрицательными действительными частями. При малом положительном c эти два корня мало изменятся, так что произведение их останется положительным, а нулевой корень перейдет в малый положительный или отрицательный. Так как произведение всех трех корней равно отрицательному числу $-c$, то корень, близкий к нулю, будет отрицателен.

Итак, теорема 6 доказана.

Для того чтобы формулировать необходимые и достаточные условия устойчивости любого многочлена с действительными коэффициентами, условимся сначала о терминологии. Пусть

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

— произвольная квадратная матрица порядка n. Будем называть ее *главным k-м минором* детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix};$$

минор этот мы будем обозначать через $\Delta_k(P)$. Таким образом, детерминант $\Delta_k(P)$ составлен из элементов матрицы P, входящих в первые k столбцов и строк.

Теорема 7. *Пусть*

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+\dots+a_n, \quad a_0>0 \tag{8}$$

— произвольный многочлен степени n с действительными коэффициентами. Для того чтобы выяснить вопрос о его устойчивости, составляют матрицу

$$Q=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

порядка n. Оказывается, что многочлен (8) *устойчив тогда и только тогда, когда все главные миноры* $\Delta_k(Q)$, $k=1, \ldots, n$ *матрицы Q положительны.*

Теорема 7 в этой книге доказана не будет. Доказательство ее можно найти, например, в книге: Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, Гостехиздат, М., 1955 (см. стр. 79—83).

Во избежание недоразумений опишем матрицу Q. Столбец номера k матрицы Q имеет вид:

$$\ldots a_{k+2}\; a_{k+1}\; a_k\, a_{k-1}\, a_{k-2} \ldots,$$

где элемент a_k стоит на главной диагонали; при этом элемент a_{k+j}, индекс $k+j$ которого отрицателен или больше n, считается равным нулю.

Примеры

1. Выведем из теоремы 7 теорему 6. В случае $n=3$ матрица Q имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Ее три главных минора имеют значения

$$\Delta_1(Q)=a_1, \qquad \Delta_2(Q)=a_1 a_2 - a_0 a_3, \qquad \Delta_3(Q)=a_3\cdot\Delta_2(Q).$$

Условие их положительности вместе с условием положительности коэффициента a_0 равносильны условиям:

$$a_0>0, \qquad a_1>0, \qquad a_3>0, \qquad a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Из совокупности этих условий вытекает, как легко видеть, положительность коэффициента a_2. Таким образом, в случае $n=3$ теорема 7 превращается в теорему 6.

2. В случае $n=4$ матрица Q имеет вид:

$$Q=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Ее главные миноры имеют следующие значения:

$$\Delta_1(Q)=a_1; \qquad \Delta_2(Q)=a_1 a_2 - a_0 a_3;$$
$$\Delta_3(Q)=a_3\Delta_2(Q) - a_1^2 a_4; \qquad \Delta_4(Q)=a_4\cdot\Delta_3(Q).$$

Условие положительности этих миноров вместе с условием $a_0>0$ эквивалентно, как легко видеть, условиям

$$a_0>0, \qquad a_1>0, \qquad a_2>0, \qquad a_3>0, \qquad a_4>0,$$
$$\Delta_3(Q)=a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0.$$

§ 10. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

Здесь будет дано решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами со свободным членом специального вида, являющимся так называемым **квазимногочленом**.

А) *Квазимногочленом* будем называть всякую функцию $F(t)$, которую можно записать в виде:

$$F(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + f_m(t)e^{\lambda_m t}, \qquad (1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ суть некоторые комплексные числа, а $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots, f_m(t)$ — многочлены от t. Из предложения В) § 8 следует, что каждое решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами является квазимногочленом. Можно доказать, что и обратно, каждый квазимногочлен является решением некоторого линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Если какие-нибудь два числа последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ совпадают между собой, например, если $\lambda_1 = \lambda_2$, то члены суммы (1), соответствующие этим числам, можно объединить и заменить членом $(f_1(t) + f_2(t))e^{\lambda_1 t}$. Таким образом, запись (1) всегда можно привести к такому виду, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, входящие в нее, попарно различны. Отметим, что сумма и произведение двух произвольных квазимногочленов также есть квазимногочлен; далее, если к произвольному квазимногочлену применить произвольный оператор $L(p)$, то мы вновь получим квазимногочлен.

Таким образом, в настоящем параграфе будет рассматриваться уравнение

$$L(p)z = F(t), \qquad (2)$$

где $F(t)$ есть некоторый квазимногочлен. Наряду с уравнением (2) рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$L(p)u = 0. \qquad (3)$$

Нижеследующее предложение непосредственно вытекает из замечания Б) § 6.

Б) Если $\hat{z}$ есть некоторое решение уравнения (2), то произвольное решение z того же уравнения может быть записано в виде:

$$z = \hat{z} + u,$$

где u есть некоторое решение уравнения (3).

Так как произвольное решение однородного уравнения мы отыскивать уже умеем, то дело сводится, таким образом, к отысканию одного решения или, как говорят, *частного решения* уравнения (2) в случае, когда $F(t)$ есть квазимногочлен. Так как, далее, каждый квазимногочлен записывается в виде (1), то в силу замечания В) § 6 дело сводится к отысканию частного решения уравнения (2) в случае, когда $F(t)=f(t)e^{\lambda t}$, где $f(t)$ — многочлен. Для этого случая решение отыскивается в нижеследующей теореме.

Во избежание недоразумений отметим, что в дальнейшем под многочленом степени r мы будем понимать функцию вида $a_0t^r+a_1t^{r-1}+\ldots+a_{r-1}t+a_r$, не предполагая непременно, что старший коэффициент a_0 отличен от нуля.

Теорема 8. *Рассмотрим неоднородное уравнение*

$$L(p)z=f(t)e^{\lambda t}, \tag{4}$$

в котором $f(t)$ есть многочлен степени r относительно t, а λ — комплексное число. Пусть $k=0$, если $L(\lambda)\neq 0$, и k — кратность корня λ, если $L(\lambda)=0$. Оказывается, что существует частное решение уравнения (4), *имеющее вид:*

$$z=t^k g(t)e^{\lambda t}, \tag{5}$$

где $g(t)$ есть многочлен степени r относительно t. Коэффициенты многочлена $g(t)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Доказательство. Положим:

$$f(t)=a_0t^r+f^*(t) \tag{6}$$

и будем искать многочлен $g(t)$ в виде:

$$g(t)=b_0t^r+g^*(t), \tag{7}$$

где многочлены $f^*(t)$ и $g^*(t)$ имеют степень $r-1$. Далее, в силу выбора числа k мы имеем:

$$L(p)=M(p)(p-\lambda)^k, \tag{8}$$

где $M(\lambda)\neq 0$. Для того чтобы функция (5) являлась решением уравнения (4), должно быть выполнено условие (см. § 8, А))

$$L(p)e^{\lambda t}t^k g(t)=e^{\lambda t}L(p+\lambda)t^k g(t)=e^{\lambda t}f(t),$$

т. е. многочлен $g(t)$ должен удовлетворять условию:

$$L(p+\lambda)t^k g(t)=f(t). \tag{9}$$

Многочлен $M(p+\lambda)$ имеет своим свободным членом число $M(\lambda)\neq 0$ и потому может быть записан в виде:

$$M(p+\lambda)=M(\lambda)+M^*(p)p, \qquad M(\lambda)\neq 0. \tag{10}$$

Принимая во внимание соотношения (6), (7), (8) и (10), мы можем теперь условие (9), налагаемое на многочлен $g(t)$, записать в виде:

$$b_0M(\lambda)p^k t^{k+r}+b_0M^*(p)p^{k+1}t^{k+r}+L(p+\lambda)t^k g^*(t)=a_0t^r+f^*(t). \tag{11}$$

Приравнивая члены, содержащие t^r в равенстве (11), получаем соотношение

$$b_0 M(\lambda) p^k t^{k+r} = a_0 t^r, \tag{12}$$

из которого коэффициент b_0 искомого многочлена $g(t)$ определяется (ибо $M(\lambda) \neq 0$) и притом однозначно. Будем считать теперь, что коэффициент b_0 уже выбран, так что соотношение (12) выполнено; тогда соотношение (11) принимает вид:

$$L(p+\lambda) t^k g^*(t) = f^*(t) - b_0 M^*(p) p^{k+1} t^{k+r}, \tag{13}$$

где в правой части равенства стоит известный многочлен степени $r-1$, а слева — неизвестный многочлен $g^*(t)$ степени $r-1$. Уравнение (13) отличается от уравнения (9) только степенью входящих в него многочленов, которая понизилась на единицу. Повторяя для уравнения (13) вычисления, проведенные ранее для уравнения (9), мы вычислим коэффициент b_1 при высшей, т. е. $(r-1)$-й степени t многочлена $g^*(t)$. Продолжая этот процесс дальше, мы вычислим все коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_r$ многочлена $g(t)$ таким образом, чтобы он удовлетворял условию (9), и тем самым найдем решение вида (5) уравнения (4).

Можно было бы подставить решение вида (5) прямо в уравнение (4) и, считая коэффициенты многочлена $g(t)$ неизвестными, получить для этих коэффициентов систему линейных уравнений путем приравнивания коэффициентов при одинаковых членах в правой и левой частях соотношения (4). Проведенные выше вычисления показывают, что система уравнений, получаемая для коэффициентов многочлена $g(t)$ разрешима.

Таким образом, теорема 8 доказана.

Замечание. Полученная система для определения коэффициентов многочлена $g(t)$ является системой линейных уравнений с треугольной матрицей: при приравнивании коэффициентов у членов $t^r e^{\lambda t}$ мы получаем уравнение, содержащее только b_0; при приравнивании коэффициентов у членов $t^{r-1}e^{\lambda t}$ мы получаем уравнение, содержащее только b_0 и b_1, и т. д.

Установим одно важное свойство квазимногочленов.

В) Если квазимногочлен

$$F(t) = f_1(t) e^{\lambda_1 t} + f_2(t) e^{\lambda_2 t} + \ldots + f_m(t) e^{\lambda_m t},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — попарно различные числа, тождественно равен нулю на некотором интервале $r_1 < t < r_2$, то все многочлены $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots, f_m(t)$ тождественно равны нулю, а следовательно, и все коэффициенты квазимногочлена $F(t)$ равны нулю. Из этого непосредственно следует, что если два квазимногочлена $F(t)$ и $F^*(t)$ тождественно равны между собой на некотором интервале $r_1 < t < r_2$, то их соответственные коэффициенты совпадают.

Предложение В) будем доказывать индуктивно по числу m, которое будем здесь называть *порядком* квазимногочлена $F(t)$. При $m=1$ оно справедливо, так как в этом случае равенства $F(t)= =f_1(t)e^{\lambda_1 t}=0$ и $f_1(t)=0$ эквивалентны. Проведем теперь индуктивный переход от $m-1$ к $m\ (m\geqslant 2)$. Если квазимногочлен $F(t)$ тождественно равен нулю на интервале $r_1<t<r_2$, то это же имеет место и для квазимногочлена

$$G(t)=p^{l+1}(F(t)e^{-\lambda_m t}),$$

где p — оператор дифференцирования, а l — степень многочлена $f_m(t)$. В силу предложения А) § 8 мы имеем:

$$G(t)=g_1(t)e^{(\lambda_1-\lambda_m)t}+g_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_m)t}+\ldots+g_{m-1}(t)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)t},$$

где

$$g_i(t)=(p+\lambda_i-\lambda_m)^{l+1}f_i(t),\qquad i=1,\ldots,m-1.$$

Квазимногочлен $G(t)$ имеет порядок $m-1$ и так как он тождественно равен нулю на интервале $r_1<t<r_2$, то в силу предположения индукции все многочлены $g_1(t),\ldots,g_{m-1}(t)$ тождественно равны нулю. Предположим, что какой-либо из многочленов $f_1(t),\ldots,f_{m-1}(t)$ не равен нулю, например $f_1(t)\neq 0$, и приведем это предположение к противоречию. Допустим, что многочлен $f_1(t)$ имеет степень k, т. е. $f_1(t)=a_0t^k+a_1t^{k-1}+\ldots+a_k$, причем $a_0\neq 0$. Непосредственно проверяется, что

$$g_1(t)=(p+\lambda_1-\lambda_m)^{l+1}f_1(t)=(\lambda_1-\lambda_m)^{l+1}a_0t^k+\ldots,$$

а так как многочлен $g_1(t)$ тождественно равен нулю на интервале $r_1<t<r_2$, то мы имеем:

$$(\lambda_1-\lambda_m)^{l+1}a_0=0.$$

Так как числа λ_1 и λ_m различны, то из этого следует, что $a_0=0$. Полученное противоречие доказывает, что все коэффициенты многочленов $f_1(t),\ldots,f_{m-1}(t)$ равны нулю, т. е. $F(t)=f_m(t)e^{\lambda_m t}$. Отсюда мы заключаем, что и все коэффициенты многочлена $f_m(t)$ также равны нулю.

Случай тождественного равенства двух квазимногочленов $F(t)$ и $F^*(t)$ на интервале $r_1<t<r_2$ сводится к рассмотренному путем образования квазимногочлена $F(t)-F^*(t)$.

Итак, предложение В) доказано.

Примеры

1. Найдем частное решение уравнения

$$\ddot{z}+z=t\cos t=\frac{1}{2}te^{it}+\frac{1}{2}te^{-it}. \tag{14}$$

Решим отдельно уравнения

$$\dot{z} + z = \frac{1}{2} t e^{it}, \tag{15}$$

$$\dot{\bar{z}} + \bar{z} = \frac{1}{2} t e^{-it}. \tag{16}$$

Очевидно, что если z есть решение уравнения (15), то $\bar{z}$ есть решение уравнения (16). Таким образом, достаточно решить лишь уравнение (15). Для него $r = 1$, $\lambda = i$, $k = 1$. Поэтому частное решение следует искать в виде:

$$t(c^1 + c^2 t) e^{it}.$$

Соотношение (9) принимает вид:

$$[(p+i)^2 + 1](c^1 t + c^2 t^2) = \frac{1}{2} t,$$

или

$$(p^2 + 2ip)(c^1 t + c^2 t^2) = \frac{1}{2} t.$$

Это дает:

$$2c^2 + 2ic^1 + 4ic^2 t = \frac{1}{2} t,$$

откуда $c^2 = -\frac{1}{8} i$, $c^1 = ic^2 = \frac{1}{8}$. Таким образом, частное решение уравнения (15) имеет вид:

$$z = \left(\frac{1}{8} t - \frac{i}{8} t^2\right) e^{it},$$

а решение уравнения (14) оказывается равным

$$z + \bar{z} = \frac{1}{8} t (e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{8i} t^2 (e^{it} - e^{-it}) = \frac{t}{4} \cos t + \frac{t^2}{4} \sin t.$$

2. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \cos 2t \cdot \cos 3t \cdot e^{4t}.$$

Так как каждый множитель $\cos 2t$, $\cos 3t$, e^{4t} представляет собой квазимногочлен, то и их произведение $f(t)$ также есть квазимногочлен. Приведем этот квазимногочлен к виду (1):

$$\cos 2t \cdot \cos 3t \cdot e^{4t} = \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} \cdot \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} e^{4t} =$$
$$= \frac{1}{4} e^{(4+5i)t} + \frac{1}{4} e^{(4+i)t} + \frac{1}{4} e^{(4-i)t} + \frac{1}{4} e^{(4-5i)t}.$$

Приведение квазимногочленов к виду (1) полезно при решении неоднородных уравнений на основе теоремы 8.

§ 11. Метод исключения

До сих пор мы занимались решением одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Оказывается, однако, что весьма общую систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами можно в некотором смысле свести к одному уравнению. Сведение это осуществляется методом исключения, аналогичным тому, который употребляется в теории линейных алгебраических (не дифференциальных) уравнений. Здесь будет дано изложение этого метода и сделаны некоторые выводы из него.

Мы будем рассматривать систему уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p)x^s = f^j(t), \qquad j=1, \ldots, n; \tag{1}$$

здесь $x^1, \ldots, x^n$ — неизвестные функции независимого переменного t, а $f^1(t), \ldots, f^n(t)$ — заданные функции времени t. Каждый символ $L_s^j(p)$ представляет собой многочлен с постоянными коэффициентами относительно оператора дифференцирования p, так что один член $L_s^j(p)x^s$ представляет собой линейную комбинацию с постоянными коэффициентами относительно функции x^s и ее производных. Число уравнений системы (1) равно числу неизвестных функций.

Порядок системы (1) относительно неизвестной функции x^s обозначим через q_s, так что общий порядок системы (1) определяется формулой $q=q_1+q_2+\ldots+q_n$. Ставя задачу решения системы (1), мы, естественно, должны предполагать, что каждая неизвестная функция x^s имеет все производные до порядка q_s включительно; предположение о существовании производных более высоких порядков не вытекает из постановки задачи.

Применяя к системе (1) метод исключения, мы будем предполагать, что каждая из неизвестных функций x^s имеет достаточное число производных, точно так же, как и каждая из функций $f^j(t)$. Делая эти допущения, мы, с одной стороны, сужаем класс рассматриваемых решений (предположение о достаточной дифференцируемости неизвестных функций), а, с другой стороны, сужаем класс рассматриваемых уравнений (предположение о достаточной дифференцируемости функций $f^j(t)$). Первое из этих ограничений можно снять, доказав, что если $x^1, \ldots, x^n$ есть решение системы (1) и если правые части $f^j(t)$ имеют достаточное число производных, то каждая из функций x^s имеет достаточное число производных (см. примеры 3 и 4).

Перейдем к изложению метода исключения.

А) Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} L_1^1(p) & \ldots & L_n^1(p) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_1^n(p) & \ldots & L_n^n(p) \end{pmatrix} \tag{2}$$

системы уравнений (1). Каждый элемент $L^j_s(p)$ матрицы (2) есть многочлен относительно p. Таким образом, можно вычислить детерминант $D(p)$ матрицы (2) и ее миноры. Алгебраическое дополнение элемента $L^j_s(p)$ матрицы (2) (т. е. минор этого элемента, взятый с надлежащим знаком) обозначим через $M^s_j(p)$. Из курса высшей алгебры известно, что имеет место тождество:

$$\sum_{j=1}^{n} M^i_j(p) L^j_s(p) = \delta^i_s D(p), \tag{3}$$

где δ^i_s есть так называемый *символ Кронекера:*

$$\delta^i_i = 1, \quad \delta^i_s = 0 \text{ при } i \neq s.$$

Умножая уравнение (1) на многочлен $M^i_j(p)$ (т. е. производя ряд дифференцирований, умножений на числа и сложений) и суммируя затем по j, мы получаем равенство

$$\sum_{j,s=1}^{n} M^i_j(p) L^j_s(p) x^s = \sum_j M^i_j(p) f^j(t). \tag{4}$$

(При переходе от равенств (1) к равенству (4) мы использовали существование достаточно большого числа производных у функций x^s и $f^j(t)$.) В силу (3) равенство (4) можно переписать в виде

$$D(p) x^i = \sum_j M^i_j(p) f^j(t). \tag{5}$$

Полученная нами система уравнений (5) ($i = 1, \ldots, n$) обладает тем свойством, что каждая неизвестная функция x^i входит лишь в одно уравнение (5). Мы доказали, таким образом, что если система функций $x^1, \ldots, x^n$ представляет собой решение системы (1), то каждая отдельная функция x^i является решением уравнения (5).

Не следует думать, однако, что если для каждого номера i выбрать произвольным образом решение x^i уравнения (5) и затем составить систему функций $x^1, \ldots, x^n$, то полученная система функций будет решением системы (1). Для того чтобы найти о б щ е е решение $x^1, \ldots, x^n$ системы (1), нужно найти общее решение x^i каждого уравнения (5), $i = 1, \ldots, n$, составить систему функций $x^1, \ldots, x^n$ и затем выяснить, при каких условиях (при каких соотношениях между постоянными интегрирования) эта система функций удовлетворяет системе уравнений (1).

Сделаем теперь некоторые выводы из метода исключения. Формулируем прежде всего результат, полученный в предложении А), для случая однородной системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} L^j_s(p) x^s = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Б) Если система функций $x^1, \ldots, x^n$ представляет собой решение системы (6), то каждая отдельная функция x^i, входящая в это решение, удовлетворяет уравнению

$$D(p)x^i = 0,$$

где $D(p)$ — детерминант матрицы $(L_s^j(p))$ системы (6). Из этого, в частности, следует, что если детерминант $D(p)$ есть устойчивый многочлен (см. § 9, А)), то каждое решение $x^1, \ldots, x^n$ системы (6) удовлетворяет неравенству

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 < R^2 e^{-2\alpha t} \quad \text{при } t \geqslant 0, \tag{7}$$

где α есть положительная константа, зависящая от системы (6), а R — константа, зависящая от решения $x^1, \ldots, x^n$.

Неравенство (7) непосредственно следует из неравенства (3) § 9.

Покажем теперь, как, пользуясь методом исключения, следует решать однородную систему уравнений (6).

Систему (6) перепишем в векторной форме

$$L(p)\boldsymbol{x} = 0, \tag{8}$$

где $L(p) = (L_s^j(p))$ — матрица системы (6), а $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$.

В) Допустим, что детерминант $D(p)$ системы (6) не обращается тождественно в нуль, и пусть λ — корень многочлена $D(p)$, имеющий кратность k. Будем искать решение уравнения (8), имеющее вид:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(t)e^{\lambda t}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{g}(t) = (g^1(t), \ldots, g^n(t))$ — вектор, компоненты

$$g^1(t), \ldots, g^n(t) \tag{10}$$

которого являются многочленами степени $k-1$ относительно t с неопределенными коэффициентами. Каждое решение вида (9) уравнения (8) мы будем называть *соответствующим* корню λ.

Подставляя предполагаемое решение (9) в уравнение (8), мы получим (см. § 8, А)):

$$0 = L(p)\boldsymbol{g}(t)e^{\lambda t} = e^{\lambda t} L(p+\lambda)\boldsymbol{g}(t).$$

После сокращения на $e^{\lambda t}$ это дает:

$$L(p+\lambda)\boldsymbol{g}(t) = 0. \tag{11}$$

Таким образом, вектор (9) тогда и только тогда является решением уравнения (8), когда многочлены (10) удовлетворяют условию (11). Переписывая векторное уравнение (11) в координатной форме, получим n соотношений:

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p+\lambda)g^s(t) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Левая часть каждого соотношения (12) представляет собой многочлен степени $k-1$ относительно t, коэффициенты которого являются линейными однородными функциями коэффициентов многочленов (10). Приравнивая нулю коэффициент при каждой степени t в каждом из соотношений (12), мы получим систему линейных однородных уравнений относительно коэффициентов многочленов (10). Эта система эквивалентна уравнению (11).

Таким образом, изложенный метод сводит задачу отыскания решений вида (9) к решению некоторой линейной однородной системы алгебраических уравнений. Из сказанного видно, что решения вида (9) определены на всем бесконечном интервале $-\infty<t<+\infty$.

Вопрос о том, как отыскивать все решения уравнения (8), решается нижеследующей теоремой:

Теорема 9. *Допустим, что детерминант* $D(p)$ системы (6) *не обращается тождественно в нуль, и пусть*

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_m$$

— совокупность всех различных корней многочлена $D(p)$. *Тогда произвольное решение* x *уравнения* (8) *может быть записано в виде:*

$$x=x_1+\ldots+x_m, \tag{13}$$

где x_i *— некоторое решение уравнения* (8), *соответствующее корню* λ_i (см. В)). *Отсюда, в частности, следует, что каждое решение уравнения* (8), *определено для всех значений* t.

Доказательство. Допустим, что $x=(x^1,\ldots,x^n)$ — некоторое решение уравнения (8) определенное на интервале $r_1<t<r_2$; покажем, что на этом интервале оно может быть записано в виде (13). В силу предложения Б), каждая функция x^s, $s=1,\ldots,n$, на интервале $r_1<t<r_2$ удовлетворяет уравнению

$$D(p)x^s=0,$$

и потому в силу предложения В) § 8 может быть записана на этом интервале в виде:

$$x^s=\sum_{i=1}^{m} g_i^s(t)e^{\lambda_i t}, \qquad s=1,\ldots,n. \tag{14}$$

Здесь $g_i^s(t)$ есть многочлен степени k_i-1, где k_i — кратность корня λ_i.

Таким образом, каждое решение x уравнения (8) на интервале своего определения $r_1<t<r_2$ записывается в виде:

$$x=g_1(t)e^{\lambda_1 t}+\ldots+g_m(t)e^{\lambda_m t}, \tag{15}$$

где $g_i(t)$ — вектор, компоненты которого являются многочленами степени k_i-1. Для доказательства теоремы 9 нам достаточно показать теперь, что каждое слагаемое $g_i(t)e^{\lambda_i t}$ в правой части равенства (15) есть решение уравнения (8). Для доказательства этого подставим решение (15) в уравнение (8). Мы получим:

$$0 = L(p)(g_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + g_m(t)e^{\lambda_m t}) =$$
$$= e^{\lambda_1 t} L(p+\lambda_1) g_1(t) + \ldots + e^{\lambda_m t} L(p+\lambda_m) g_m(t). \qquad (16)$$

Так как числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различны, то, в силу предложения В) § 10, из равенства (16) следует:

$$e^{\lambda_i t} L(p+\lambda_i) g_i(t) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

или, иначе,

$$L(p) g_i(t) e^{\lambda_i t} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Но это и значит, что $x_i = g_i(t) e^{\lambda_i t}$ есть решение уравнения (8).

Итак, теорема 9 доказана.

Примеры

1. Решим методом исключения систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^1 + x^1 + \dot{x}^2 &= 0, \\ \ddot{x}^1 - x^1 + \ddot{x}^2 + x^2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Перепишем ее в символической форме:

$$\left.\begin{aligned} (p+1)x^1 + px^2 &= 0, \\ (p^2-1)x^1 + (p^2+1)x^2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Детерминант системы, как легко видеть, равен $p^2 + 2p + 1$; он имеет двукратный корень $\lambda = -1$. Согласно теореме 9 решение системы следует искать в виде:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= (at+b)e^{-t}, \\ x^2 &= (ct+d)e^{-t}. \end{aligned}\right\}$$

Подстановка этих функций в первое уравнение дает (после сокращения на e^{-t}):

$$a + c - ct - d = 0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} c &= 0, \\ a &= d. \end{aligned}\right\}$$

Те же соотношения для коэффициентов получаются и при подстановке во второе уравнение системы. Таким образом, общее решение рассматриваемой системы записывается в виде:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= (at+b)e^{-t}, \\ x^2 &= ae^{-t}, \end{aligned}\right\}$$

где a и b — произвольные постоянные.

2. Применим метод исключения к нормальной системе линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x}^j = \sum_{s=1}^{n} a_s^j x^s, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{17}$$

(более полно такая система будет изучена в § 14). Перепишем систему (17), пользуясь символическими обозначениями

$$px^j = \sum_{s=1}^{n} a_s^j x^s, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

или, иначе

$$\sum_{s=1}^{n} (a_s^j - p\delta_s^j)\, x^s = 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

где δ_s^j — символ Кронекера. Система (18) является частным случаем общей системы (6), причем

$$L_s^j(p) = a_s^j - p\delta_s^j$$

и детерминант $D(p)$ в данном случае оказывается характеристическим детерминантом матрицы (a_s^j) системы (17). Решение системы (18) следует теперь искать методом неопределенных коэффициентов, изложенным в предложении В) и теореме 9.

Систему (17) можно записать в векторной форме:

$$\dot{x} = Ax, \tag{19}$$

где $A = (a_s^j)$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$. В частном случае, когда все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического многочлена $D(p)$ попарно различны и потому просты, решение уравнения (19), соответствующее собственному значению λ_i, имеет вид:

$$x_i = g_i e^{\lambda_i t}, \tag{20}$$

где компоненты вектора g_i являются многочленами нулевой степени, т. е. числами.

Подставляя решение (20) в уравнение (19), получаем:

$$\lambda_i g_i e^{\lambda_i t} = A g_i e^{\lambda_i t}.$$

После сокращения на $e^{\lambda_i t}$ находим:

$$Ag_i = \lambda_i g_i,$$

а это значит, что g_i есть собственный вектор матрицы A с собственным значением λ_i. Так как в случае различных собственных значений все собственные векторы с заданным собственным значением коллинеарны между собой, то, выбирая для собственного значения λ_i некоторый фиксированный собственный вектор h_i, мы получим $g_i = c^i h_i$, где c^i — произвольная константа. Таким образом, если все собственные значения матрицы A различны, то произвольное решение x уравнения (19) записывается в виде:

$$x = c^1 h_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c^n h_n e^{\lambda_n t}, \tag{21}$$

где $c^1, \ldots, c^n$ — произвольные константы.

3. Рассмотрим линейную систему

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p) x^s = f^j(t), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{22}$$

с постоянными коэффициентами (см. (1)), и пусть q_i — ее порядок относительно неизвестной функции x^i, а

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$$

— порядок системы (22). Пусть, далее,

$$\begin{pmatrix} L_1^1(p) & \ldots & L_n^1(p) \\ . & . & . \\ L_1^n(p) & \ldots & L_n^n(p) \end{pmatrix} \tag{23}$$

— матрица системы (22), а $D(p)$ — ее детерминант. Мы покажем, что степень многочлена $D(p)$ не превосходит числа q. Если эта степень равна q, то систему (22) мы будем называть *нормализуемой*. В этом случае ее можно разрешить относительно высших производных

$$(x^1)^{(q_1)}, \ldots, (x^n)^{(q_n)}, \tag{24}$$

и потому она может быть сведена к нормальной системе (см. § 4, Б)).

По предположению, степень многочлена $L_s^j(p)$ не превосходит числа q_s, так что мы можем написать

$$L_s^j(p) = a_s^j p^{q_s} + \ldots, \tag{25}$$

где многоточием обозначены члены меньшей, чем q_s, степени. Вычисляя детерминант $D(p)$ матрицы (23) с учетом формулы (25), легко убеждаемся, что

$$D(p) = \Delta \cdot p^q + \ldots,$$

где Δ есть детерминант матрицы (a_s^j). В этой формуле опущены члены меньшей, чем q, степени. Таким образом, установлено, что максимальная возможная степень многочлена $D(p)$ есть q, и если эта степень равна q, то $\Delta \neq 0$. Выделяя в системе (22) члены со старшими производными (24), мы приходим к системе

$$\sum_{s=1}^{n} a_s^j (x^s)^{(q_s)} + \ldots = f^j(t), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{26}$$

Таким образом, если система (22) нормализуема, то $\Delta \neq 0$, и система (26) разрешима относительно высших производных (24).

Так как нормализуемая система (22) сводится к нормальной, то согласно сказанному в примере 2 § 3 каждое решение нормализуемой системы (22) имеет любое наперед заданное число производных, если только правые части $f^j(t)$ системы (22) достаточное число раз дифференцируемы.

4. Рассмотрим теперь случай, когда детерминант $D(p)$ системы (22) не равен тождественно нулю, но степень многочлена $D(p)$ меньше порядка q системы (22). Мы покажем, что и в этом случае всякое решение системы (22) имеет любое заданное число производных, если только правые части $f^j(t)$ достаточное число раз дифференцируемы.

Согласно предположению степень многочлена $D(p)$ меньше q, и потому детерминант Δ равен нулю. Таким образом, между столбцами матрицы (a_s^j) имеется линейная зависимость; пусть $b^1, \ldots, b^n$ — коэффициенты, осуществляющие эту зависимость. Среди чисел $b^1, \ldots, b^n$ могут оказаться равные нулю. Мы изменим нумерацию функций $x^1, \ldots, x^n$ таким образом, чтобы имели место соотношения

$$b^1 \neq 0, \quad b^2 \neq 0, \ldots, b^m \neq 0, \quad b^{m+1} = \ldots = b^n = 0; \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \tag{27}$$
$$q_1 \geqslant q_2, \quad q_1 \geqslant q_3, \quad \ldots, \quad q_1 \geqslant q_m.$$

Так как в силу (27) имеем $b^1 \neq 0$, то мы можем считать, что $b^1 = 1$.

Введем теперь вместо неизвестных функций $x^1, \ldots, x^n$ новые неизвестные функции $y^1, \ldots, y^n$, положив:

$$\begin{gathered} x^1 = y^1; \quad x^i = y^i + b^i p^{q_1 - q_i} y^1, \qquad i = 2, \ldots, m; \\ x^i = y^i, \qquad i = m+1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{28}$$

Соотношения (28) могут быть разрешены относительно новых неизвестных функций $y^1, \ldots, y^n$; именно мы имеем:

$$\begin{gathered} y^1 = x^1; \quad y^i = x^i - b^i p^{q_1 - q_i} x^1, \qquad i = 2, \ldots, m; \\ y^i = x^i, \qquad i = m+1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{29}$$

Подставляя вместо неизвестных функций $x^1, \ldots, x^n$ новые неизвестные функции $y^1, \ldots, y^n$ в систему (22), мы получим новую систему уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{*}{L}{}^j_s(p) y^s = f^j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

Непосредственно видно, что порядок q_1^* системы (30) относительно функции y^1 меньше q_1, а порядки ее относительно остальных неизвестных $y^2, \ldots, y^n$ равны соответственно $q_2, \ldots, q_n$. Таким образом, порядок q^* системы (30) меньше порядка q системы (22).

Если рассматривать преобразования (28) и (29) как линейные преобразования переменных $y^1, \ldots, y^n$ в переменные $x^1, \ldots, x^n$ и обратно с коэффициентами, являющимися многочленами относительно p, то видно, что детерминант каждого из линейных преобразований (28) и (29) равен $+1$. Из этого следует, что детерминант $D^*(p)$ системы (30) равен детерминанту $D(p)$ системы (22). Таким образом, разность между порядком и степенью детерминанта в системе (30) меньше, чем в системе (22); применяя описанное преобразование конечное число раз, мы придем к нормализуемой системе.

Пусть теперь

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{31}$$

— некоторое решение системы (22). Так как порядок системы (22) относительно неизвестной функции x^i равен q_i, то функция $\varphi^i(t)$ предполагается q_i раз дифференцируемой. В силу преобразования (29) решению (31) системы (22) соответствует решение

$$y^i = \psi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{32}$$

системы (30). Из соотношения (32) видно, что функция $\psi^i(t)$ дифференцируема q_i раз. Из сказанного следует, что из каждого решения (31) системы (22) мы получаем некоторое решение (32) системы (30), так что при переходе от системы (22) к системе (30) ни одно решение не теряется. Так как в результате ряда преобразований мы приходим к нормализуемой системе, решения которой имеют любое заданное число производных, то из преобразования (28) видно, что и решение (31) системы (22) имеет любое заданное число производных.

§ 12. Метод комплексных амплитуд

В различных разделах техники и физики, в которых имеют дело с колебательными процессами, важную роль играют *гармонические колебания*. Математически гармоническое колебание задается функцией

$$r\cos(\omega t + \alpha), \qquad r \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь r — *амплитуда* колебания, α — его *начальная фаза*, а число ω определяет частоту колебания и обычно называется *частотой*. Мы уже видели (см. пример 1 § 4), что уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2}$$

имеет в качестве своего общего решения гармоническую функцию (1) частоты ω с произвольными амплитудой и фазой. Уравнение (2) называется *уравнением гармонического осциллятора.*

При изучении гармонических колебаний нередко приходится иметь дело с уравнением

$$L(p)\,x = r\cos(\omega t + \alpha), \tag{3}$$

где в правой части стоит гармоническая функция. Уравнение (3) легко решить, пользуясь способом, изложенным в теореме 8, так как гармоническая функция является квазимногочленом. В случае, когда коэффициенты многочлена $L(p)$ действительны, можно использовать теорему 8 несколько иным способом. Способ этот называется в электротехнике *методом комплексных амплитуд* и заключается в следующем.

А) Наряду с действительной гармонической функцией (1) рассмотрим *соответствующую* ей комплексную гармоническую функцию

$$\rho e^{i\omega t}, \tag{4}$$

где

$$\rho = re^{i\alpha}. \tag{5}$$

Функция (4) обладает тем свойством, что ее действительная часть совпадает с функцией (1):

$$\rho e^{i\omega t} = re^{i(\omega t+\alpha)} = r\cos(\omega t + \alpha) + ir\sin(\omega t + \alpha).$$

Комплексное число (5) называется *комплексной амплитудой* комплексной гармонической функции (4); оно объединяет в себе действительную амплитуду r и начальную фазу α. Отметим, что

$$r = |\rho|.$$

В случае, если коэффициенты многочлена $L(p)$ действительны, для решения уравнения (3) решают предварительно уравнение

$$L(p)\,z = \rho e^{i\omega t}. \tag{6}$$

Непосредственно видно, что если $z = x + iy$ есть решение уравнения (6), то x есть решение уравнения (3). Предполагая, что $i\omega$ не есть корень многочлена $L(p)$:

$$L(i\omega) \neq 0, \tag{7}$$

ищем (см. теорему 8) решение уравнения (6) в виде комплексной гармонической функции $z = \sigma e^{i\omega t}$ с комплексной амплитудой $\sigma = se^{i\beta}$.

Подставляя функцию $z = \sigma e^{i\omega t}$ в уравнение (6), получаем:

$$\sigma = \frac{\rho}{L(i\omega)} \tag{8}$$

(см. § 7, Б)). Таким образом, решение уравнения (3) находится в виде функции

$$x = s\cos(\omega t + \beta); \tag{9}$$

амплитуда s и начальная фаза β этого решения определяются из формулы

$$se^{i\beta} = \frac{re^{i\alpha}}{L(i\omega)}$$

(см. (8)). В частности, $s = |\sigma| = \frac{r}{|L(i\omega)|}$. Если многочлен $L(p)$ устойчив, то соотношение (7), очевидно, выполнено. В этом случае любое решение уравнения (3) имеет вид:

$$x = u + s\cos(\omega t + \beta), \tag{10}$$

где u есть решение однородного уравнения $L(p)u = 0$. Решение u этого однородного уравнения стремится к нулю при $t \to \infty$, и потому любое решение уравнения (3) стремится к решению (9). Решение (9) называется *установившимся*; оно соответствует *установившемуся* процессу, в то время как решение (10) описывает *переходный* процесс. Установившееся решение (9) является единственным периодическим решением среди всех решений (10).

При применении метода комплексных амплитуд обычно не рассматривают решений действительного уравнения (3), а сразу исходят из комплексного уравнения (6).

Изложим теперь метод комплексных амплитуд в применении к системе уравнений. Речь идет об отыскании частного решения системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p)\, x^s = r_j \cos(\omega t + \alpha^j), \qquad j = 1, \ldots, n \tag{11}$$

с действительными коэффициентами, в правых частях которой стоят гармонические колебания одной и той же частоты ω.

Б) Предположим, что детерминант $D(p)$ системы (11) (см. § 11, А)) не обращается в нуль при $p = i\omega$. Для отыскания решения системы (11) будем искать сначала решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^j(p)\, z^k = \rho^j e^{i\omega t}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

где

$$\rho^j = r^j e^{i\alpha^j}.$$

Так как коэффициенты всех многочленов $L^j_k(p)$ действительны, то из всякого решения $z^1, \ldots, z^n$ системы (12) мы получаем решение

$$x^k = \operatorname{Re} z^k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

системы (11). Решение системы (12) ищем в виде:

$$z^k = \sigma^k e^{i\omega t}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Подстановка функций (13) в систему (12) дает (после сокращения на $e^{i\omega t}$) систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} L^j_k(i\omega)\,\sigma^k = \rho^j$$

которая однозначно разрешима относительно неизвестных σ^k, так как детерминант ее $D(i\omega)$ по предположению отличен от нуля. Найдем решение этой системы и положим:

$$\sigma^k = s^k e^{i\beta^k};$$

тогда в силу (13) мы находим решение

$$x^k = s^k \cos(\omega t + \beta^k), \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

системы (11). Если детерминант $D(p)$ системы (11) есть устойчивый многочлен, то неравенство $D(i\omega) \neq 0$ выполнено, и, сверх того, каждое решение системы (11) отличается от решения (14) слагаемым, стремящимся к нулю при $t \to +\infty$ (см. § 11, Б)). Таким образом, в случае устойчивого многочлена $D(p)$ решение (14) системы (11) не только является одним из частных решений, но представляет собой *установившееся решение*.

Пример

Решим уравнение

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = r \cos(\omega t + \alpha) \tag{15}$$

гармонического осциллятора, находящегося под воздействием внешней гармонической силы. Вместо уравнения (15) рассмотрим соответствующее комплексное уравнение

$$\ddot{z} + \omega_1^2 z = r e^{i(\omega t + \alpha)}. \tag{16}$$

Если $\omega \neq \omega_1$, то уравнение (16) имеет решение вида $z = \sigma e^{i\omega t}$, причем в силу формулы (8)

$$\sigma = \frac{r e^{i\alpha}}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

Таким образом, уравнение (15) имеет решение

$$x = \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|} \cos(\omega t + \beta), \tag{17}$$

где $\beta = \alpha$ при $\omega_1 > \omega$ и $\beta = \alpha + \pi$ при $\omega_1 < \omega$. Формула (17) дает *вынужденные колебания* осциллятора под воздействием гармонической внешней силы. Здесь важно отметить явление *резонанса*, заключающееся в том, что амплитуда

$$\frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|}$$

вынужденного колебания в о з р а с т а е т с убыванием разности $|\omega_1 - \omega|$. Интересно также отметить, что фаза β колебания (17) совпадает с фазой α вынуждающей силы при $\omega_1 > \omega$ и противоположна ей при $\omega_1 < \omega$. Общее решение уравнения (15) записывается в виде:

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|} \cos(\omega t + \beta),$$

где $u = r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$ есть решение соответствующего однородного уравнения. Слагаемое u называется *собственным колебанием* осциллятора.

Если $\omega_1 = \omega$, то формула (17) теряет смысл. В этом случае решение уравнения (16) следует искать в виде:

$$z = \rho t e^{i\omega t},$$

где ρ — комплексное число (см. теорему 8). Согласно формуле (9) § 10 имеем:

$$[(p + i\omega)^2 + \omega^2] \rho t = re^{i\alpha},$$

откуда

$$\rho = \frac{re^{i\alpha}}{2i\omega}.$$

Таким образом, частное решение уравнения (16) имеет (при $\omega_1 = \omega$) вид:

$$z = \frac{rte^{i(\omega t + \alpha)}}{2i\omega} = \frac{rte^{i\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)}}{2\omega},$$

а решение уравнения (15) оказывается равным

$$x = \frac{rt}{2\omega} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{rt}{2\omega} \sin(\omega t + \alpha).$$

Таким образом, при $\omega = \omega_1$ явление резонанса заключается в том, что амплитуда $\frac{rt}{2\omega}$ становится переменной и неограниченно возрастает с течением времени. В реальных приборах это явление не наблюдается ввиду наличия «трения».

§ 13. Электрические цепи

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений находит свои применения в различных областях техники; она применяется в электротехнике и, в частности, радиотехнике. При некоторой идеализации работа радиоприбора может быть математически описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений, причем неизвестными функциями времени в этой системе являются величины токов, проходящих через различные детали прибора, или падения напряжения между отдельными узлами прибора. Радиоприборы дают очень богатый материал, иллюстрирующий применения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, гораздо более богатый, чем, например, задачи механики. Богатство это характеризуется, в частности, тем, что систему обыкновенных дифференциальных уравнений, возникшую из какой-нибудь технической задачи, часто удается *смоделировать* электрическим прибором, т. е. сконструировать такой электрический прибор, работа которого описывается т о й ж е системой уравнений, что и интересующий нас технический объект. Такой моделирующий электроприбор может до некоторой степени помочь в решении системы уравнений, так как, наблюдая за его работой, мы тем самым наблюдаем за поведением неизвестных функций, удовлетворяющих системе уравнений. Физические законы, управляющие работой электроприборов, формулируются настолько просто, что они легко могут быть сообщены даже человеку, почти незнакомому с физикой. Здесь в несколько догматической форме дается изложение простейших законов электротехники и приводится несколько примеров применения дифференциальных уравнений к изучению работы электроприборов

Элементы электрических цепей

К числу важнейших деталей, из которых конструируются электроприборы, принадлежат *сопротивление*, *индуктивность* (самоиндукция) и *емкость* (конденсатор). Каждая из этих деталей является *двухполюсником*, т. е. обладает двумя контактами, которые при монтировании электроприбора присоединяются к полюсам других деталей. Во время работы электроприбора через двухполюсник, вмонтированный в этот прибор, проходит электрический ток, и при этом электрическое состояние двухполюсника характеризуется в каждый момент времени t двумя величинами: *силой тока* $I_{ab}(t)$, идущего от полюса a к полюсу b двухполюсника ab, и *падением напряжения* $U_{ab}(t)$ от полюса a к полюсу b. Сила тока $I_{ab}(t)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения; если ток «течет» от полюса a к полюсу b (имеется в виду так называемое *техническое* направление тока), то число $I_{ab}(t)$ положительно; в противном случае оно отрицательно. Падение напряжения $U_{ab}(t)$ от полюса a к полюсу b представляет собой разность $V_a(t) - V_b(t)$ потенциалов в полюсе a и полюсе b. Таким образом, обе величины $I_{ab}(t)$ и $U_{ab}(t)$, характеризующие состояние двухполюсника ab в момент времени t, зависят от того, какой из полюсов поставлен на первом месте и какой на втором. При перемене порядка полюсов каждая из величин $I_{ab}(t)$, $U_{ab}(t)$, очевидно, меняет знак, так что мы имеем соотношения:

$$I_{ba}(t) = -I_{ab}(t), \tag{1}$$

$$U_{ba}(t) = -U_{ab}(t). \tag{2}$$

Для каждого двухполюсника ab функции $I_{ab}(t)$ и $U_{ab}(t)$ времени t не независимы, а связаны некоторым соотношением, представляющим собой физический закон, управляющий работой двухполюсника. Для сопротивления, самоиндукции и емкости физические законы, управляющие их работой, даются нижеследующим предложением.

А) Для двухполюсника ab, представляющего собой сопротивление, имеет место соотношение (закон Ома):

$$U_{ab}(t) = R_{ab} I_{ab}(t); \tag{3}$$

здесь R_{ab} — положительный коэффициент, называемый *сопротивлением* и могущий для различных двухполюсников принимать различные значения, но постоянный для каждого данного двухполюсника; при этом мы имеем всегда

$$R_{ba} = R_{ab}. \tag{4}$$

Для двухполюсника ab, представляющего собой индуктивность, имеет место соотношение:

$$U_{ab}(t) = L_{ab} \frac{d}{dt} I_{ab}(t); \tag{5}$$

здесь L_{ab} есть положительный коэффициент, называемый *индуктивностью* и могущий для различных двухполюсников принимать различные значения, но постоянный для каждого данного двухполюсника. При этом

$$L_{ba} = L_{ab}. \tag{6}$$

Для двухполюсника ab, являющегося емкостью (конденсатором), имеет место соотношение

$$I_{ab}(t) = C_{ab} \frac{d}{dt} U_{ab}(t), \tag{7}$$

где C_{ab} есть положительный коэффициент, называемый *емкостью* и могущий принимать различные значения для различных двухполюсников, но имеющий для данного двухполюсника вполне определенное значение; при этом мы имеем:

$$C_{ab} = C_{ba}. \tag{8}$$

Интегрируя соотношение (7), мы получаем:

$$U_{ab}(t) = U_{ab}(t_0) + \frac{1}{C_{ab}} \int_{t_0}^{t} I_{ab}(t)\, dt. \tag{9}$$

Функция

$$Q_{ab}(t) = C_{ab} U_{ab}(t)$$

представляет собой физическую величину, связанную с состоянием конденсатора в данный момент времени и называемую *зарядом* конденсатора ab. Соотношение (9) часто пишут в виде:

$$U_{ab}(t) = \frac{1}{C_{ab}} \int I_{ab}(t)\, dt,$$

где под $\int I_{ab}(t)\, dt$ подразумевают заряд конденсатора.

Соотношение (4) вытекает из (1), (2) и (3):

$$R_{ab} I_{ab}(t) = U_{ab}(t) = -U_{ba}(t) = -R_{ba} I_{ba}(t) = R_{ba}(-I_{ba}(t)) =$$
$$= R_{ba} I_{ab}(t).$$

Аналогично устанавливаются соотношения (6) и (8).

Важную роль в работе электрических приборов играет явление *взаимоиндукции* между двумя индуктивностями.

Б) Две индуктивности a_1b_1 и a_2b_2 с величинами $L_{a_1b_1} = L_1$ и $L_{a_2b_2} = L_2$ могут находиться в состоянии взаимоиндукции, характеризующемся *коэффициентом взаимоиндукции* $M = M_{a_1b_1,\, a_2b_2}$. В этом случае падение напряжения $U_{a_1b_1}(t) = U_1(t)$ на двухполюснике a_1b_1 связано не только с током $I_{a_1b_1}(t) = I_1(t)$, но также и с током $I_{a_2b_2}(t) = I_2(t)$. Точно так же напряжение $U_{a_2b_2}(t) = U_2(t)$ на двухполюснике a_2b_2 связано не только с током $I_2(t)$, но и с током $I_1(t)$. Соотношения, которые имеют здесь место, даются формулами

$$U_1(t) = L_1 \frac{d}{dt} I_1(t) + M \frac{d}{dt} I_2(t), \tag{10}$$

$$U_2(t) = L_2 \frac{d}{dt} I_2(t) + M \frac{d}{dt} I_1(t). \tag{11}$$

При этом для коэффициента $M_{a_1b_1,\, a_2b_2}$ взаимоиндукции выполнены равенства

$$M_{a_1b_1,\, a_2b_2} = M_{a_2b_2,\, a_1b_1} = -M_{a_1b_1,\, b_2a_2},$$

кроме того, для него имеет место неравенство

$$M^2 \leqslant L_1 L_2.$$

Чем больше «взаимодействие» двух индуктивностей, тем более коэффициент взаимоиндукции M приближается по величине к значению $\sqrt{L_1 L_2}$.

Описанные в предложении А) двухполюсники называются *пассивными*; сами они не могут вызвать появления в приборе электрических явлений. Непосредственной причиной появления в приборе электрических токов служат *активные* двухполюсники — *источники напряжения и источники тока.*

В) Для двухполюсника ab, представляющего собой источник напряжения, имеет место соотношение

$$U_{ab}(t) = U(t), \tag{12}$$

где $U(t)$ — заданная функция времени t, характеризующая источник напряжения. Соотношение (12) можно рассматривать как связывающее функции $U_{ab}(t)$ и $I_{ab}(t)$, только связь эта такова, что функция $I_{ab}(t)$ в нее не входит. Для источника тока ab аналогично имеет место соотношение

$$I_{ab}(t) = I(t),$$

где $I(t)$ — заданная функция от t, характеризующая источник тока. Наиболее часто рассматриваются источники напряжения и источники тока, для которых функции $U(t)$ и $I(t)$ являются либо константами, либо периодическими функциями вида

$$r\cos(\omega t + \alpha).$$

Таковы главнейшие и в то же время простейшие детали, из которых монтируются электроприборы. Сами приборы называются электрическими цепями, а детали, из которых они монтируются, — их элементами. Следует отметить, что существуют элементы, отличные от описанных выше, в частности существуют *многополюсные* элементы. Примером трехполюсного элемента служит электронная лампа (*триод*), работа которой будет разобрана в дальнейшем (см. § 29).

Законы Кирхгофа

Перейдем теперь к формулировке законов Кирхгофа, управляющих работой электрических цепей.

Г) *Электрической цепью* называется конечная совокупность элементов (в частности, двухполюсников вышеописанных видов), полюсы которых соединены в так называемые *узлы* цепи, так что в каждом узле соединяются два или большее число полюсов различных элементов цепи. Первый закон Кирхгофа утверждает, что *сумма всех токов, втекающих в каждый узел цепи из всех элементов, примыкающих к этому узлу, равна нулю.* Второй закон Кирхгофа вытекает из предположения, что в каждом узле a цепи имеется электрический потенциал $V_a(t)$, а падение напряжения $U_{ab}(t)$

от узла a к узлу b представляет собой разность потенциалов, имеющихся в узлах a и b, так что $U_{ab}(t) = V_a(t) - V_b(t)$. Из этого предположения вытекает, что *если $a, b, c, \ldots, h, k$ есть некоторая последовательность узлов электрической цепи, то имеет место соотношение*

$$U_{ab}(t) + U_{bc}(t) + \ldots + U_{hk}(t) + U_{ka}(t) = 0,$$

которое и представляет собой второй закон Кирхгофа. Его формулируют следующим образом: *сумма падений напряжения вдоль всякого замкнутого контура цепи равна нулю.* (В этих формулировках

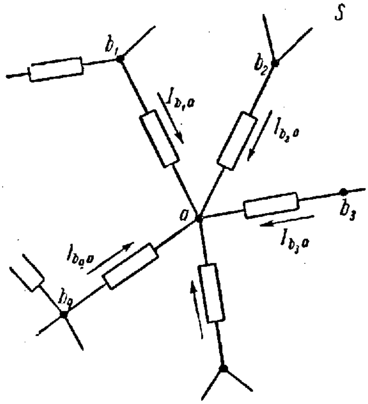


Рис. 7.

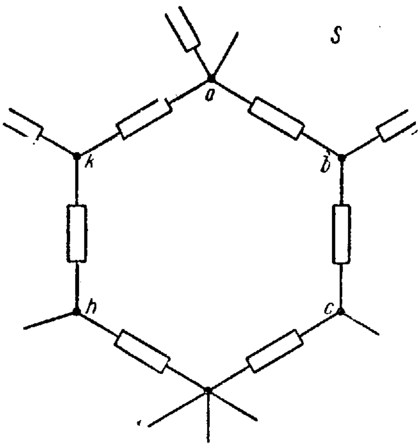


Рис. 8.

законов Кирхгофа не предполагается, что элементами цепи являются двухполюсники.) Дадим теперь более четкую формулировку законов Кирхгофа применительно к цепям, составленным из двухполюсников.

Д) Пусть S — некоторая электрическая цепь, составленная из двухполюсников. Первый закон Кирхгофа утверждает, что если a есть произвольный узел цепи S, а $b_1a, b_2a, \ldots, b_qa$ — совокупность всех двухполюсников, примыкающих к узлу a (рис. 7), то

$$I_{b_1a}(t) + I_{b_2a}(t) + \ldots + I_{b_qa}(t) = 0.$$

Второй закон Кирхгофа утверждает, что если $ab, bc, \ldots, hk, ka$ — некоторая последовательность двухполюсников, входящих в цепь S (каждый следующий двухполюсник начинается в том узле, в котором кончается предыдущий, рис. 8), то

$$U_{ab}(t) + U_{bc}(t) + \ldots + U_{hk}(t) + U_{ka}(t) = 0.$$

Рассчитать работу электрической цепи, составленной из двухполюсников, — это значит найти ток и напряжение, соответствующие каждому двухполюснику, входящему в цепь; таким образом, если цепь состоит из n двухполюсников, то перед нами стоит задача отыскания $2n$ функций времени. Закон, управляющий работой каждого отдельного двухполюсника, дает одно соотношение между искомыми функциями, так что для $2n$ искомых функций мы уже получаем n соотношений. Остальные n соотношений дают законы Кирхгофа. Тот факт, что законы Кирхгофа дают именно n независимых между собой соотношений, можно доказать, но здесь мы этого делать не будем. В результате использования всех соотношений мы получаем систему из $2n$ уравнений для $2n$ искомых функций. Уравнения эти частично дифференциальные, частично конечные (алгебраические). Законы Кирхгофа дают конечные уравнения и ими прежде всего нужно воспользоваться для исключения части неизвестных функций. При этом обычно пользуются одним из следующих двух путей. Можно за основные неизвестные функции принять токи и выразить через них напряжения. В этом случае нужно прежде всего воспользоваться первым законом Кирхгофа: выразить все токи через минимальное число независимых (в силу этого закона). Независимые токи называются *контурными*. После этого следует воспользоваться вторым законом Кирхгофа, заменяя в нем каждое напряжение его выражением через соответствующий ток. Этот способ называется методом контурных токов. Второй способ заключается в том, что за основные неизвестные функции принимают напряжения на двухполюсниках, а токи выражают через напряжения (при помощи законов, управляющих работой каждого двухполюсника). В этом случае нужно при помощи второго закона Кирхгофа выразить все напряжения через минимальное число независимых (в силу этого закона). Независимые напряжения называются *узловыми*. Затем нужно использовать первый закон Кирхгофа, заменяя в нем каждый ток его выражением через соответствующее напряжение. Этот способ называется методом узловых напряжений.

Операционное сопротивление двухполюсника

Прежде чем перейти к разбору примеров расчета электрических цепей, запишем соотношения (3), (5), (9), (10), (11), т. е. законы, управляющие работой двухполюсников, при помощи символических обозначений.

Е) Пусть ab — двухполюсник, представляющий собой сопротивление, индуктивность или емкость. Положим:

$$U_{ab}(t) = U(t), \quad I_{ab}(t) = I(t), \quad R_{ab} = R, \quad L_{ab} = L, \quad C_{ab} = C.$$

Если в дополнение к употреблявшимся ранее символическим обозначениям (см. стр. 42, § 7, А)) ввести естественное обозначение

$\frac{1}{p} f(t) = \int f(\tau)\,d\tau$, то соотношения (3), (5), (9) можно записать одной формулой

$$U(t) = Z(p) I(t) \tag{13}$$

(рис. 9), где, соответственно, $Z(p) = R$, $Z(p) = Lp$, $Z(p) = \frac{1}{Cp}$. Функция $Z(p)$ называется *операционным сопротивлением* двухполюсника ab. Для емкости она не является многочленом, а представляет собой рациональную функцию $\frac{1}{Cp}$:

$$U(t) = \frac{1}{Cp} I(t). \tag{14}$$

Соотношение (14) после умножения на Cp приобретает привычный вид $I(t) = CpU(t)$, где имеется лишь многочлен от p. Если положить

$$G(p) = \frac{1}{Z(p)},$$

то соотношение (13) приобретает вид

$$I(t) = G(p)\,U(t).$$

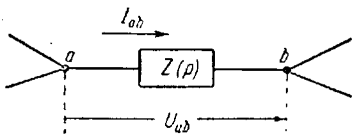


Рис. 9.

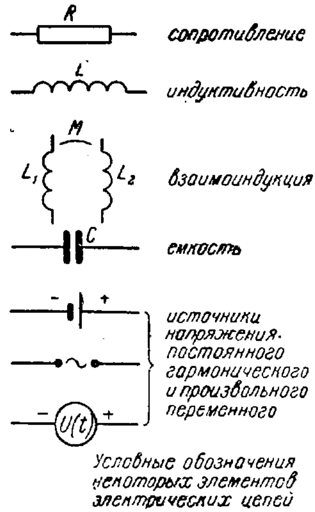


Рис. 10.

Функция $G(p)$ называется *операционной проводимостью* двухполюсника ab и имеет соответственно вид:

$$G(p) = \frac{1}{R}, \quad G(p) = \frac{1}{Lp}, \quad G(p) = Cp.$$

Соотношения (10), (11) в операционных обозначениях получают вид:

$$U_1(t) = L_1 p I_1(t) + M p I_2(t),$$
$$U_2(t) = L_2 p I_2(t) + M p I_1(t).$$

Перейдем к разбору примеров. Для наглядности электрические цепи изображают графически, ставя в соответствие каждому узлу точку, а каждому двухполюснику — отрезок или кривую, соединяющую соответствующие узлы; на каждом таком отрезке изображается условное обозначение соответствующего двухполюсника (рис. 10).

Примеры

1 (*Колебательный контур*). Пусть S — электрическая цепь с четырьмя узлами a, b, c, d, состоящая из четырех двухполюсников ab, bc, cd, da (рис. 11). Двухполюсник ab — индуктивность L, двухполюсник bc — сопротивление R, двухполюсник cd — емкость C; наконец, двухполюсник ad — источник напряжения $U_{ad}(t) = U(t)$. Для расчета используем метод контурных токов. Применяя первый закон Кирхгофа к узлу b, получаем $I_{ab}(t) + I_{cb}(t) = 0$, или, иначе, $I_{ab}(t) = I_{bc}(t)$. Так обстоит дело всегда, когда к одному узлу примыкают ровно два двухполюсника. Таким образом, мы имеем:

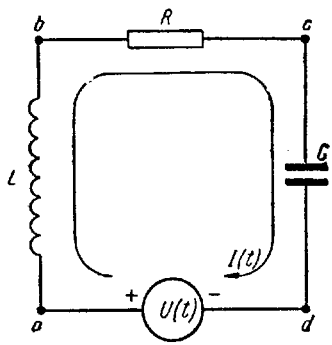


Рис. 11.

$$I_{ab}(t) = I_{bc}(t) = I_{cd}(t) = I_{da}(t) = I(t).$$

Здесь $I(t)$ есть контурный ток.

Далее, выписывая для каждого двухполюсника закон, управляющий его работой, получаем:

$$\left.\begin{aligned} U_{ab}(t) &= LpI(t), & U_{bc}(t) &= RI(t), \\ U_{cd}(t) &= \frac{1}{Cp} I(t), & U_{da}(t) &= -U(t). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Второй закон Кирхгофа дает:

$$U_{ab}(t) + U_{bc}(t) + U_{cd}(t) + U_{da}(t) = 0. \tag{16}$$

Из соотношений (15) и (16) получаем:

$$\left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right) I(t) = U(t). \tag{17}$$

Можно умножить обе части соотношения (17) на p (что означает почленное дифференцирование); тогда мы получим:

$$\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right) I(t) = pU(t). \tag{18}$$

Таково дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи.

Если изъять из цепи двухполюсник ad, то мы получим так называемую разомкнутую цепь, состоящую из трех пассивных двухполюсников ab, bc, cd. Эту цепь (всю целиком) можно рассматривать как двухполюсник с полюсами a и d (рис. 12). Для такого двухполюсника закон, управляющий его работой, дается соотношением (17), аналогичным соотношению (13). Здесь функция $Z(p)=Lp+R+\frac{1}{Cp}$ является операционным сопротивлением, а обратная ей величина $Q(p)=\frac{Cp}{LCp^2+RCp+1}$ является операционной проводимостью.

Если положить $U(t)=0$, то это будет равносильно предположению, что

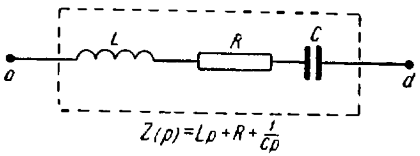


Рис. 12.

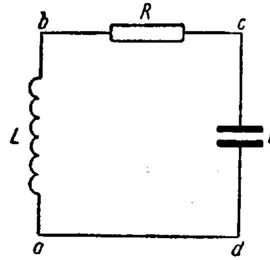


Рис. 13.

в нашей цепи отсутствует активный двухполюсник ad, и цепь состоит из трех пассивных двухполюсников ab, bc, cd, причем узлы a и d совпадают (рис. 13). Уравнение, описывающее работу этой пассивной электрической цепи S^*, имеет вид:

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)I(t)=0. \tag{19}$$

Как уже отмечалось раньше, в пассивной электрической цепи электрические явления сами по себе не возникают, и это отражается в том, что частным решением уравнения (19) является функция $I(t)\equiv 0$. Можно, однако, рассмотреть работу электрической цепи S^*, считая, что ток в ней уже имеется, и выяснить, как этот ток будет изменяться со временем. Пусть λ_1 и λ_2 — корни многочлена

$$Lp^2+Rp+\frac{1}{C}. \tag{20}$$

Так как числа L, R, C больше нуля (см. А)), то действительные части корней λ_1 и λ_2 отрицательны, и потому электрический процесс в цепи S^* затухает со временем (см. § 9,А)). Затухание это может проходить, однако, различными способами; если корни λ_1 и λ_2 комплексны, то всякое ненулевое решение уравнения (19) имеет колебательный характер (см. пример 3 § 7); если же корни λ_1 и λ_2 действительны, то затухание происходит апериодически, именно всякое решение уравнения (19) становится, начиная с некоторого момента времени, монотонным. Вопрос о том, будут ли корни λ_1 и λ_2 комплексны или действительны, решается тем, какой знак имеет число

$$\Delta=\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC};$$

если $\Delta < 0$, то решения уравнения (19) имеют колебательный характер, если же $\Delta > 0$, то они апериодичны.

Особый интерес представляет колебательный контур S^* в том случае, когда в нем вовсе отсутствует сопротивление R. В этом случае наша цепь состоит лишь из двух пассивных элементов ab и cd, причем $b = c$, $a = d$ (рис. 14). При этом предположении уравнение электрической цепи получает вид:

$$\left(p^2 + \frac{1}{LC}\right) I(t) = 0.$$

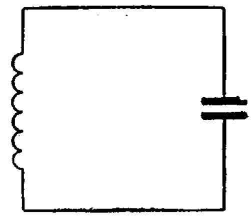


Рис. 14.

Общее решение этого уравнения записывается в виде:

$$I(t) = s \cos(\omega_1 t + \beta),$$

где $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Таким образом, при отсутствии сопротивления в пассивном колебательном контуре происходят незатухающие колебания частоты

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Величина $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ называется *собственной частотой* колебательного контура S в общем случае.

Вернемся теперь к рассмотрению колебательного контура S и рассмотрим случай гармонического источника напряжения $U(t)$.

Так как корни многочлена (20) имеют отрицательные действительные части, то можно рассматривать в цепи S установившийся процесс. Решение будем искать по способу комплексных амплитуд (см. § 12). Пусть $U(t) = re^{i\omega t}$ — комплексное гармоническое колебание с действительной амплитудой $r > 0$. Тогда правая часть уравнения (18) имеет вид:

$$pU(t) = p(re^{i\omega t}) = ir\omega e^{i\omega t}.$$

Мы имеем:

$$I_{\text{уст}}(t) = \sigma e^{i\omega t},$$

причем комплексная амплитуда σ тока $I_{\text{уст}}(t)$ определяется формулой

$$\sigma = \frac{ir\omega}{iR\omega + \left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)} = \frac{r}{R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

(см. § 12, А)). Отсюда для действительной амплитуды получаем:

$$s = |\sigma| = \frac{r}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Из этой формулы видно, что при заданной амплитуде r источника напряжения амплитуда s силы тока достигает своего максимума при собственной частоте $\omega=\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ контура S. При этой частоте амплитуды s и r связаны соотношением $s=\frac{r}{R}$, т. е. контур при этой частоте ведет себя так, как будто в нем имеется лишь сопротивление. Для остальных частот амплитуда s тока имеет меньшее значение, чем $\frac{r}{R}$. Это явление называется **резонансом** (ср. § 12, пример). Колебательный контур L, R, C **резонирует** на свою собственную частоту $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

2 (*Трансформатор*). Трансформатор состоит из двух обмоток, **первичной** и **вторичной**, помещенных на одной катушке. К первичной обмотке подключается источник переменного напряжения, ко вторичной — нагрузка, например внешнее сопротивление.

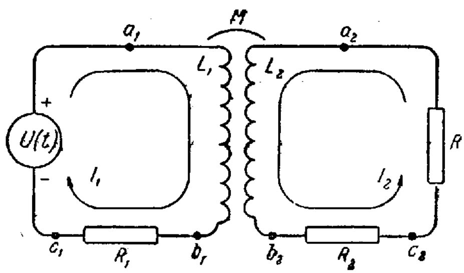


Рис. 15.

Каждая обмотка имеет индуктивность и сопротивление (внутреннее). Между обмотками имеется взаимоиндукция. Таким образом, трансформатор можно рассматривать как электрическую цепь, состоящую из двух раздельных контуров, связанных индуктивно. Первый контур состоит из трех двухполюсников: a_1b_1 — индуктивность L_1; b_1c_1 — внутреннее сопротивление R_1; a_1c_1 — источник напряжения $U_{a_1c_1}=U(t)$. Второй контур состоит также из трех двухполюсников: a_2b_2 — индуктивность L_2; b_2c_2 — внутреннее сопротивление R_2; c_2a_2 — сопротивление нагрузки R. Кроме того, имеется взаимоиндукция $M_{a_1b_1,a_2b_2}=M$ (рис. 15). В силу 1-го закона Кирхгофа имеем:

$$I_{a_1b_1}=I_{b_1c_1}=I_{c_1a_1}=I_1;\qquad I_{a_2b_2}=I_{b_2c_2}=I_{c_2a_2}=I_2.$$

Таким образом, мы имеем два контурных тока I_1, I_2. Применяя второй закон Кирхгофа, получаем:

$$\begin{aligned}L_1pI_1+MpI_2+R_1I_1-U(t)&=0,\\ L_2pI_2+MpI_1+R_2I_2+RI_2&=0,\end{aligned}$$

или иначе

$$(L_1p+R_1)I_1+MpI_2=U(t),$$
$$MpI_1+(L_2p+R_2+R)I_2=0.$$

Детерминант $D(p)$ этой системы имеет вид:

$$D(p)=(L_1L_2-M^2)p^2+(L_1R_2+L_1R+L_2R_1)p+R_1(R_2+R).$$

В силу предложения Б) § 9 этот многочлен устойчив (так как $L_1L_2-M^2>0$). Рассмотрим работу трансформатора в случае, когда напряжение $U(t)$ изменяется гармонически, и будем искать установившееся решение по способу § 12, Б). Положим:

$$U(t)=u_1e^{i\omega t},$$

где u_1 — действительное положительное число (амплитуда напряжения, поданного на первичную обмотку). Неизвестные функции I_1, I_2 будем искать в форме

$$I_1=\sigma_1e^{i\omega t},\qquad I_2=\sigma_2e^{i\omega t},$$

где σ_1, σ_2 — комплексные амплитуды токов.

Наибольший теоретический интерес представляет ***идеальный трансформатор***, т. е. такой трансформатор, в котором величины R_1, R_2 и $L_1L_2-M^2$ малы. Пренебрегая этими величинами в уравнениях для определения величин σ_1 и σ_2, получаем:

$$L_1\cdot i\omega\sigma_1+M\cdot i\omega\sigma_2=u_1,$$
$$M\cdot i\omega\sigma_1+(L_2\cdot i\omega+R)\sigma_2=0.$$

Так как $M\approx\sqrt{L_1L_2}$, то, вычитая из второго уравнения первое, умноженное на $\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$, мы получим:

$$R\sigma_2=-\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}u_1.$$

Таким образом, амплитуда $u_2=R|\sigma_2|$ падения напряжения на нагрузке R оказывается равной

$$u_2=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}u_1;$$

величина $\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$ называется *коэффициентом трансформации*. Таким образом, если $L_2>L_1$, то мы имеем трансформатор, повышающий напряжение

$$\frac{u_2}{u_1}>1;$$

при $L_2<L_1$ мы получаем трансформатор, понижающий напряжение

$$\frac{u_2}{u_1}<1.$$

3 (*Электрический фильтр*). Рассмотрим электрическую цепь с четырьмя узлами a, b, c, d и пятью двухполюсниками (рис. 16):

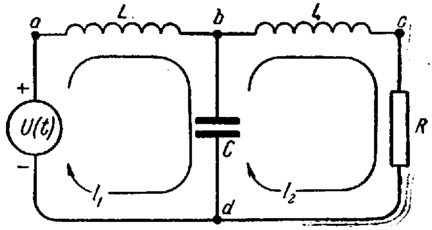


Рис. 16.

ab — индуктивность L,
bc — индуктивность той же величины L,
bd — емкость C,
ad — источник напряжения $U_{ad}(t) = U(t)$,
cb — сопротивление нагрузки R.

Положим:

$$I_{ab} = I_1, \qquad I_{bc} = I_2.$$

Тогда в силу 1-го закона Кирхгофа имеем:

$$I_{bd} = I_1 - I_2, \qquad I_{cd} = I_2.$$

На основании 2-го закона Кирхгофа получаем:

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} = 0,$$
$$U_{bc} + U_{cd} + U_{db} = 0,$$

или

$$LpI_1 + LpI_2 + RI_2 - U(t) = 0,$$
$$LpI_2 + RI_2 + \frac{1}{Cp}(I_2 - I_1) = 0.$$

Умножив второе уравнение на p, получим следующую систему:

$$LpI_1 + (Lp + R) I_2 = U(t),$$
$$-\frac{1}{C} I_1 + \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right) I_2 = 0.$$

Детерминант этой системы имеет вид:

$$D(p) = L^2p^3 + LRp^2 + \frac{2Lp}{C} + \frac{R}{C}.$$

Согласно теореме 6 многочлен $D(p)$ устойчив. Будем теперь считать, что $U = be^{i\omega t}$, где b — действительная амплитуда напряжения (см.

§ 12). Неизвестные функции I_1 и I_2 будем искать в форме

$$I_1 = a_1 e^{i\omega t}, \qquad I_2 = a_2 e^{i\omega t},$$

где a_1 и a_2 — комплексные амплитуды токов, т. е. ограничимся отысканием установившегося режима.

Поставим задачу об определении падения напряжения $U_{cd} = RI_2$ на нагрузке. Мы имеем:

$$a_2 = \frac{\frac{b}{C}}{\left(\frac{R}{C} - LR\omega^2\right) + i\omega\left(\frac{2L}{C} - L^2\omega^2\right)},$$

откуда находим амплитуду $a = |a_2| R$ напряжения U_{cd}:

$$a = |a_2| R = \frac{\frac{bR}{C}}{\sqrt{\left(\frac{R}{C} - LR\omega^2\right)^2 + \omega^2\left(\frac{2L}{C} - L^2\omega^2\right)^2}}.$$

При малых значениях частоты ω мы имеем: $\frac{a}{b} \approx 1$; иначе говоря, напряжения малой частоты легко передаются через фильтр, почти не меняя амплитуды. При больших значениях частоты мы имеем:

$$\frac{a}{b} \approx \frac{R}{CL^2\omega^3},$$

так что напряжения высокой частоты почти не проходят, «фильтруются».

§ 14. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами

В этом параграфе решается система уравнений

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j; \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами. Эта система может быть решена методом исключения (см. § 11 и, в частности, пример 2 в § 11). Здесь она решается путем приведения матрицы $A = (a^i_j)$ к жордановой форме. В случае, когда все собственные значения матрицы A различны, возможность приведения ее к жордановой, т. е. в данном случае диагональной, форме представляет собой весьма элементарный алгебраический факт. В общем случае возможность приведения матрицы A к жордановой форме относится к наиболее сложным результатам курса линейной алгебры. В дальнейшем в этой книге используются лишь те результаты настоящего параграфа, которые опираются на приведение матрицы A к диагональному виду в случае различных ее собственных значений. Результаты, использующие возможность приведения матрицы A к жордановой форме в общем случае (предложения В), Г), Ж)), в дальнейшем не применяются и при чтении могут быть пропущены.

Обычно приведение матрицы A к жордановой форме для решения системы (1) используется путем линейного преобразования неизвестных функций $x^1, \ldots, x^n$. Этот способ изложен в конце настоящего параграфа под заголовком «Преобразование переменных». Другой способ, по существу также опирающийся на приведение матрицы A к жордановой форме, изложен в первой части параграфа.

В этом параграфе мы не будем делать различия между матрицей A и соответствующим ей преобразованием A в пространстве векторов $x = (x^1, \ldots, x^n)$, так как базис меняться не будет. Исключение составляет лишь доказательство предложения Е).

Случай простых корней характеристического уравнения

А) Система дифференциальных уравнений (1) в векторной форме переписывается в виде:

$$\dot{x} = Ax. \tag{2}$$

Здесь $A = (a^i_j)$, а вместо системы $x^1, \ldots, x^n$ неизвестных функций введен неизвестный вектор

$$x = (x^1, \ldots, x^n);$$

под *производной* $\dot{x}$ вектора x понимается вектор $(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$. Если h есть собственный вектор матрицы A с собственным значением λ т. е. если

$$Ah = \lambda h$$

(см. § 34, Б)), то векторная функция x, определяемая соотношением

$$x = he^{\lambda t},$$

является решением уравнения (2).

Последнее утверждение проверяется путем подстановки $x = he^{\lambda t}$ в соотношение (2).

Теорема 10. *Пусть*

$$\dot{x} = Ax \tag{3}$$

— *такая система дифференциальных уравнений* (см. А)), *что собственные значения* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *матрицы* A *попарно различны, и пусть*

$$h_1, \ldots, h_n$$

— соответствующие собственные векторы этой матрицы. Положим:

$$x_i = h_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Тогда векторная функция

$$x = c^1 x_1 + \ldots + c^n x_n, \tag{5}$$

где $c^1, \ldots, c^n$ *— константы, является решением уравнения* (3), *и всякое решение уравнения* (3) *задается этой формулой.*

Доказательство. В силу предложения А) каждая функция x_i представляет собой решение уравнения (3), и потому в силу предложения А) § 6 формула (5) всегда дает решение уравнения (3). Докажем теперь, что всякое решение уравнения (3) может быть записано в виде (5). Пусть $\varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (3). В силу теоремы 3 решение $\varphi(t)$ можно считать заданным на всей бесконечной прямой $-\infty < t < \infty$. Таким образом, решение это определено и при $t=0$. Положим $\varphi(0) = x_0$. Пусть

$$x_0 = c^1 h_1 + \ldots + c^n h_n$$

— разложение вектора x_0 по векторам базиса $h_1, \ldots, h_n$ (векторы $h_1, \ldots, h_n$ образуют базис в силу предложения В) § 34). Тогда решение x, определяемое формулой (5), очевидно, удовлетворяет начальным условиям

$$x(0) = x_0.$$

Тем же начальным условиям $\varphi(0) = x_0$ удовлетворяет и решение $\varphi(t)$; таким образом, в силу теоремы единственности (см. теорему 2), $x = \varphi(t)$.

Итак, теорема 10 доказана.

В случае, если матрица (a_j^i), задающая уравнение (3), действительна, перед нами встает задача выделения из всех решений (5) действительных решений.

Б) Будем считать, что матрица (a_j^i), задающая уравнение (3), действительна, и выберем векторы $h_1, \ldots, h_n$ таким образом, чтобы действительным собственным значениям соответствовали действительные векторы, а комплексно сопряженным — комплексно сопряженные. Тогда в системе решений (4) каждому действительному собственному значению будет соответствовать действительное решение, а каждым двум комплексно сопряженным собственным значениям будут соответствовать комплексно сопряженные решения. Оказывается, что решение (5) тогда и только тогда действительно, когда константы, стоящие при действительных решениях, действительны, а константы, стоящие при комплексно сопряженных решениях, сопряжены.

Правильность предложения Б) непосредственно вытекает из предложения Г) § 7.

Общий случай

Перейдем теперь к решению системы (1) в общем случае (матрица (a_j^i) может иметь кратные собственные значения). Разбор этого случая опирается на весьма нетривиальную и сложно доказываемую алгебраическую теорему о приведении матрицы к жордановой форме (см. § 36).

В) Запишем систему (1) в векторной форме

$$\dot{x} = Ax \tag{6}$$

и пусть

$$\boldsymbol{h}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{h}_k$$

— некоторая серия с собственным значением λ (см. § 36, А)) относительно матрицы A, так что выполнены соотношения

$$A\boldsymbol{h}_1 = \lambda\boldsymbol{h}_1, \quad A\boldsymbol{h}_2 = \lambda\boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_1, \ \ldots, \ A\boldsymbol{h}_k = \lambda\boldsymbol{h}_k + \boldsymbol{h}_{k-1}.$$

Введем последовательность векторных функций, положив:

$$\boldsymbol{\omega}_r(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\boldsymbol{h}_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + \boldsymbol{h}_r, \qquad r = 1, \ \ldots, \ k. \tag{7}$$

Оказывается тогда, что векторные функции

$$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{\omega}_r(t)e^{\lambda t}, \qquad r = 1, \ \ldots, \ k, \tag{8}$$

являются решениями уравнения (6), причем

$$\boldsymbol{x}_r(0) = \boldsymbol{h}_r. \tag{9}$$

Таким образом, каждой серии из k векторов соответствует система из k решений.

Для доказательства того, что векторные функции (8) являются решениями уравнения (6), укажем два тождества относительно векторных функций (7). Тождества эти следующие:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_r(t) = \boldsymbol{\omega}_{r-1}(t), \qquad r = 1, \ \ldots, \ k,$$

$$A\boldsymbol{\omega}_r(t) = \lambda\boldsymbol{\omega}_r(t) + \boldsymbol{\omega}_{r-1}(t), \qquad r = 1, \ \ldots, \ k.$$

В этих соотношениях принято $\boldsymbol{\omega}_0(t) = 0$. Оба они проверяются непосредственно путем проведения элементарных вычислений. При помощи этих тождеств непосредственно проверяется, что функции (8) являются решениями уравнения (6). Действительно, мы имеем:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_r(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_r(t)e^{\lambda t} + \lambda\boldsymbol{\omega}_r(t)e^{\lambda t} = (\boldsymbol{\omega}_{r-1}(t) + \lambda\boldsymbol{\omega}_r(t))e^{\lambda t} =$$
$$= A\boldsymbol{\omega}_r(t)e^{\lambda t} = A\boldsymbol{x}_r(t).$$

Перейдем теперь к формулировке и доказательству теоремы, дающей решение системы (1) в общем случае.

Теорема 11. *Пусть*

$$\dot{x} = Ax \tag{10}$$

— векторная запись системы (1). *В силу теоремы* 30 (см. § 36) *существует базис*

$$h_1, \ldots, h_n,$$

состоящий из серий относительно матрицы A. *Для определенности будем считать, что* $h_1, \ldots, h_{k_1}$ *есть серия с собственным значением* λ_1; $h_{k_1+1}, \ldots, h_{k_1+k_2}$ *есть серия с собственным значением* λ_2, *и т. д. В силу предложения* В) *каждой из серий соответствует система решений, так что мы можем выписать следующие решения уравнения* (10):

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = h_1 e^{\lambda_1 t}, \ \ldots, \ x_{k_1} = \left(\frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} h_1 + \ldots + h_{k_1}\right) e^{\lambda_1 t}, \\ &x_{k_1+1} = h_{k_1+1} e^{\lambda_2 t}, \ \ldots, \ x_{k_1+k_2} = \\ &\qquad = \left(\frac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!} h_{k_1+1} + \ldots + h_{k_1+k_2}\right) e^{\lambda_2 t}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Оказывается, что формула

$$x = c^1 x_1 + \ldots + c^n x_n, \tag{12}$$

где $c^1, \ldots, c^n$ *— константы, всегда дает решение уравнения* (10) *и что каждое решение уравнения* (10) *описывается формулой* (12).

Доказательство. Так как функции $x_1, \ldots, x_n$ являются решениями уравнения (10) (см. В)), то в силу предложения А) § 6 формула (12) всегда дает решение уравнения (10). Покажем, что всякое решение уравнения (10) при надлежащем подборе констант $c^1, \ldots, c^n$ записывается в виде (12). Пусть $\varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (10). В силу теоремы 3 решение $\varphi(t)$ можно считать заданным на всей прямой $-\infty < t < \infty$, и потому вектор $\varphi(0) = x_0$ определен. Разложим этот вектор по базису $h_1, \ldots, h_n$:

$$x_0 = c^1 h_1 + \ldots + c^n h_n.$$

Если теперь подставить найденные константы $c^1, \ldots, c^n$ в соотношение (12), то мы получим решение $x(t)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = c^1 x_1(0) + \ldots + c^n x_n(0) = c^1 h_1 + \ldots + c^n h_n = x_0$$

(см. (9)). Таким образом, решения $\varphi(t)$ и $x(t)$ имеют общие начальные значения и потому совпадают.

Итак, теорема 11 доказана. ■

Теперь нам осталось выделить из решений, заданных формулой (12), действительные решения в случае, когда матрица (a^i_j) действительна. Делается это совершенно так же, как и в случае простых корней характеристического уравнения.

Г) Предположим, что матрица (a_j^i), определяющая уравнение (10), действительна. Выберем в этом случае базис $h_1, \ldots, h_n$ по способу, предусмотренному в теореме 30 (см. § 36) для случая, когда матрица (a_j^i) действительна. При таком выборе базиса среди решений (11), построенных в теореме 11, будут, с одной стороны, действительные, с другой же стороны, — попарно комплексно сопряженные. Оказывается, что решение (12) тогда и только тогда действительно, когда константы, стоящие при действительных решениях, действительны, а константы, стоящие при комплексно сопряженных решениях, комплексно сопряжены.

Предложение Г) непосредственно вытекает из предложения Г) § 7.

В заключение следует отметить, что изложенные выше результаты настоящего параграфа тесно связаны с результатами § 7, 8. В параграфах 7, 8 было рассмотрено одно однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. По методу § 4 это уравнение может быть записано в виде нормальной системы из n уравнений. Таким образом, результаты § 7, 8 можно было бы вывести из результатов настоящего параграфа. При этом оказывается, что характеристический многочлен полученной нормальной системы совпадает с характеристическим многочленом исходного уравнения.

Преобразование переменных

Д) В системе уравнений (1), определяемой постоянной матрицей $A=(a_j^i)$, вместо неизвестных функций

$$x^1, \ldots, x^n \tag{13}$$

введем новые неизвестные функции

$$y^1, \ldots, y^n, \tag{14}$$

положив

$$y^j = \sum_{i=1}^{n} s_i^j x^i, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

где s_i^j — постоянные коэффициенты, образующие невырожденную матрицу $S=(s_i^j)$. В новых неизвестных наша система запишется в виде:

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i y^j; \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

где матрица $B=(b^i_j)$ получается из матрицы A по формуле

$$B=SAS^{-1}. \tag{17}$$

~~Докажем это. Дифференцируя соотношение (15) по t, получаем~~

$$\dot{y}^j=\sum_{i=1}^{n} s^j_i \dot{x}^i, \qquad j=1, \ldots, n. \tag{18}$$

~~Таким образом, компоненты вектора $\dot{x}=(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$ преобразуются так же, как компоненты вектора $x=(x^1, \ldots, x^n)$. Из этого уже следует формула (17) (см. § 34, А)). Проведем, однако, доказательство, данное там, заново. В матричной форме соотношения (15) и (18) переписываются в виде:~~

$$y=Sx, \qquad \dot{y}=S\dot{x};$$

~~и мы имеем таким образом~~

$$\dot{y}=S\dot{x}=SAx=SA\cdot S^{-1}y.$$

~~Этим формула (17) доказана.~~

Подбирая должным образом матрицу S, мы можем добиться того, чтобы матрица B получила наиболее простой вид. Так как преобразование (17) матрицы A в матрицу B есть трансформация матрицей S, то мы можем достичь того, чтобы матрица B имела жорданову форму (см. § 36, Б)).

Е) Если собственные значения

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$$

матрицы A системы (1) все различны между собой, то линейное преобразование (15) можно выбрать так, что система (16) получает вид:

$$\dot{y}^k=\lambda_k y^k, \qquad k=1, \ldots, n. \tag{19}$$

Если, сверх того, матрица A действительна, так что в последовательности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, наряду с каждым комплексным собственным значением λ_k, имеется комплексно сопряженное ему значение $\lambda_l=\bar{\lambda}_k$, а переменные (13) действительны, то преобразование (15) можно выбрать так, чтобы каждому действительному собственному значению λ_j, соответствовало действительное переменное y^j, а паре комплексно сопряженных собственных значений λ_k и λ_l — комплексно сопряженные переменные y^k и $y^l=\overline{y^k}$. Таким образом, сопряженным собственным значениям соответствуют сопряженные уравнения

$$\dot{y}^k=\lambda_k y^k \qquad \dot{\overline{y^k}}=\overline{\lambda_k}\,\overline{y^k}. \tag{20}$$

Пусть

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k, \qquad y^k = \xi^k + i\eta^k, \tag{21}$$

где μ_k, ν_k, ξ^k, η^k — действительные величины. Тогда пару сопряженных между собой уравнений (20) можно заменить парой действительных уравнений

$$\dot{\xi}^k = \mu_k \xi^k - \nu_k \eta^k, \qquad \dot{\eta}_k = \nu_k \xi^k + \mu_k \eta^k. \tag{22}$$

Производя такую замену для каждой пары комплексно-сопряженных собственных значений, мы сможем заменить систему действительных переменных (13) новой системой действительных переменных, причем уравнения для них частично имеют вид (19) (для действительных значений λ_j), а частично — вид (22) (для пар комплексно-сопряженных собственных значений).

Для доказательства предложения Е) в пространстве R векторов $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ поставим матрице A в соответствие линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ (см. § 34) и обозначим через $\boldsymbol{h}_k$ собственный вектор преобразования $\boldsymbol{A}$ с собственным значением λ_k. Примем теперь за базис в R векторы

$$\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_n, \tag{23}$$

и соответствующие этому базису координаты вектора $\boldsymbol{x}$ обозначим через $y^1, \ldots, y^n$. Мы получим таким образом линейное преобразование (15). В новой системе координат преобразованию $\boldsymbol{A}$ соответствует матрица B, имеющая, как легко видеть, диагональный вид, причем на диагонали стоят числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, система (16) получает вид (19).

Если теперь матрица A действительна, то каждому действительному собственному значению λ_j поставим в соответствие действительный вектор $\boldsymbol{h}_j$, а паре комплексно сопряженных собственных значений λ_k и $\lambda_l = \bar{\lambda}_k$ — пару комплексно сопряженных собственных векторов $\boldsymbol{h}_k$ и $\boldsymbol{h}_l = \bar{\boldsymbol{h}}_k$. Произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ в новых координатах записывается в виде:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} y^j \boldsymbol{h}_j, \tag{24}$$

и если он действителен, то коэффициенты при действительных векторах должны быть действительны, а коэффициенты при комплексно сопряженных векторах должны быть комплексно сопряжены (см. § 7, Г)). Таким образом, каждому действительному собственному значению λ_j соответствует действительное переменное y^j, а паре комплексно сопряженных собственных значений λ_k и $\lambda_l = \bar{\lambda}_k$ соответствуют комплексно сопряженные величины y^k и $y^l = \bar{y}^k$.

Для перехода от пары комплексно-сопряженных уравнений (20) к паре действительных уравнений (22) запишем уравнение (20), подставив в него значения λ_k и y^k из (21); мы получим тогда

$$\dot{\xi}^k + i\dot{\eta}^k = (\mu_k + i\nu_k)(\xi^k + i\eta^k) = \mu_k\xi^k - \nu_k\eta^k + i(\nu_k\xi^k + \mu_k\eta^k).$$

Приравнивая отдельно действительные и мнимые части этого соотношения, получаем систему уравнений (22).

Итак, предложение Е) доказано.

Система уравнений (19) имеет очевидное решение

$$y^k = c_k e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

но для того, чтобы получить решение исходной системы (3), нужно произвести переход от неизвестных (14) к неизвестным (13), а для этого нужно знать собственные векторы (23) матрицы A (см. (24)). Таким образом, предложение Е) равносильно теореме 10.

~~Для решения системы (1) в общем случае можно использовать приведение матрицы A к жордановой форме; получаемое здесь предложение Ж) равносильно теореме 11.~~

~~Ж) Пусть матрица A системы (1) произвольная. Выберем преобразование (15) таким образом, чтобы матрица B имела жорданову форму (см. § 36). Пусть λ — одно из собственных значений матрицы A и k — размер одной из жордановых клеток матрицы B с собственным значением λ. Будем считать, что эта клетка занимает первые k строк. Соответствующая этой клетке система уравнений имеет вид:~~

$$\dot{y}^1 = \lambda y^1 + y^2, \quad \dot{y}^2 = \lambda y^2 + y^3, \quad \ldots, \quad \dot{y}^{k-1} = \lambda y^{k-1} + y^k, \quad \dot{y}^k = \lambda y^k.$$

~~Каждой другой жордановой клетке матрицы B соответствует аналогичная система уравнений, которую легко решить.~~

Примеры

1. Применение метода, изложенного в этом параграфе, к решению системы (1) требует отыскания базиса

$$h_1, \ldots, h_n$$

векторного пространства, составленного из серий (см. теорему 11). Это отыскание само по себе представляет некоторую алгебраическую задачу. Покажем, как, пользуясь результатами этого параграфа, можно решить систему (1) методом неопределенных коэффициентов, не отыскивая базиса, составленного из серий. Пусть λ — некоторое собственное значение матрицы (a_j^i). Этому собственному значению вообще говоря, соответствует несколько серий, входящих в базис $h_1, \ldots, h_n$; пусть k будет наибольшая из длин серий, соответствующих собственному значению λ. В силу теоремы 11 каждое из решений, соответствующих собственному значению λ, может быть записано в виде:

$$x^i = f^i(t) e^{\lambda t}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{25}$$

где $f^i(t)$ есть многочлен степени $\leqslant k-1$. Таким образом, подставляя в систему (1) решение в виде (25) и считая, что коэффициенты многочленов $f^i(t)$, $i=1, \ldots, n$, суть неизвестные константы, мы, пользуясь методом неопределенных коэффициентов, найдем все решения системы (1), соответствующие собственному значению λ. При таком способе решения системы (1) не нужно знать серий, соответствующих собственному значению λ, а нужно знать лишь длины этих серий. Отыскание длин представляет собой более простую алгебраическую задачу, чем приведение к жордановой форме; задача эта решается *теорией элементарных делителей матриц*, относящейся к линейной алгебре. Теория элементарных делителей нигде в этой книге не используется.

2. Покажем теперь, как решить систему (1) методом исключения, изложенным в § 11. Для применения метода исключения запишем систему (1) в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} L^i_j(p) x^j = 0,$$

где

$$L^i_j(p) = a^i_j - p\delta^i_j.$$

Детерминант $D(p)$ матрицы $(L^i_j(p))$ в данном случае представляет собой характеристический многочлен матрицы (a^i_j). Пусть λ — некоторый корень многочлена $D(p)$, или, что то же, собственное значение матрицы (a^i_j). Кратность корня λ обозначим здесь через l. В силу предложения B) § 11 всякое решение системы (1), соответствующее корню λ, следует искать в виде:

$$x^i = g^i(t) e^{\lambda t}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где степень многочлена $g^i(t)$ не превосходит числа $l-1$. Если сравнить метод, излагаемый в этом примере, с методом, данным в примере 1, то мы видим, что вся разница заключается в определении максимальной степени многочленов. Метод примера 1 дает более точное определение степени многочленов, так как число k, вообще говоря, меньше числа l. В самом деле, сумма *всех* длин серий, соответствующих собственному значению λ, равна l. Таким образом, равенство $k=l$ может иметь место лишь в случае, когда есть только одна серия, соответствующая собственному значению λ.

§ 15. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства

Здесь будет дана геометрическая интерпретация *автономной* системы уравнений в виде *фазового пространства* этой системы. Эта интерпретация существенно отличается от геометрической интерпретации системы уравнений, указанной в §§ 1, 3 и правильнее должна называться не геометрической, а кинематической, так как в этой интерпретации каждому решению системы уравнений ставится в соответствие не кривая в пространстве, а движение точки по кривой. Кинематическая интерпретация (фазовое пространство) в некоторых отношениях более выразительна, чем геометрическая (система интегральных кривых).

Автономные системы

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется *автономной*, если в нее явно не входит независимое переменное (или, как мы будем говорить, время) t. Это значит, что закон изменения неизвестных функций, описываемый системой уравнений не меняется с течением времени, как это обычно и бывает с физическими законами. Очень легко доказывается, что если

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

есть решение некоторой автономной системы уравнений, то

$$x^i = \varphi^i_*(t) = \varphi^i(t + c), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где c — константа, также есть решение той же автономной системы уравнений. Проведем доказательство этого факта на примере нормальной автономной системы уравнений.

А) Пусть

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

— автономная нормальная система уравнений порядка n и

$$\dot{x} = f(x)$$

— векторная ее запись. Автономность системы (1) заключается в том, что функции $f^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, n$, являются функциями переменных $x^1, \ldots, x^n$ и не зависят от времени t. Относительно функций $f^i(x^1, \ldots, x^n)$ мы будем предполагать, что они определены на некотором открытом множестве Δ пространства размерности n, где координатами точки являются переменные $x^1, \ldots, x^n$. Мы будем предполагать, что функции $f^i(x^1, \ldots, x^n)$ и их частные производные первого порядка непрерывны на множестве Δ. Оказывается, что если

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

— решение уравнения (1), то

$$x^i = \varphi^i_*(t) = \varphi^i(t+c), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

также есть решение системы (1).

Из правила дифференцирования сложной функции вытекает соотношение

$$\dot\varphi^i_*(t) = \dot\varphi^i(t+c), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Действительно,

$$\dot\varphi^i_*(t) = \frac{d}{dt}\varphi^i_*(t) = \frac{d}{dt}\varphi^i(t+c) = \frac{d}{d(t+c)}\varphi^i(t+c)\cdot\frac{d(t+c)}{dt} =$$
$$= \dot\varphi^i(t+c)\cdot 1 = \dot\varphi^i(t+c).$$

Докажем теперь, что (3) есть решение системы (1). Так как (2) есть решение, то мы имеем тождества

$$\dot\varphi^i(t) = f^i(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Заменяя в этих тождествах t через $t+c$, мы получаем:

$$\dot\varphi^i(t+c) = f^i(\varphi^1(t+c), \ldots, \varphi^n(t+c)), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Из этого в силу (4) и (3) вытекает

$$\dot\varphi^i_*(t) = \dot\varphi^i(t+c) = f^i(\varphi^1(t+c), \ldots, \varphi^n(t+c)) = f^i(\varphi^1_*(t), \ldots, \varphi^n_*(t)).$$

Перейдем теперь к кинематической интерпретации решений системы (1). Формально речь будет идти об интерпретации в n-мерном пространстве, но для наглядности разумно представлять себе случай плоскости ($n = 2$).

Б) Каждому решению

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

автономной системы (1) поставим в соответствие движение точки в n-мерном пространстве, задаваемое уравнениями (5), где $x^1, \ldots, x^n$ — координаты точки в пространстве, а t — время. В процессе своего движения точка описывает некоторую кривую — *траекторию* движения. Если сопоставить решению (5) не процесс движения, а траекторию движения точки, то мы получим менее полное представление о решении, поэтому желательно на траектории указать хотя бы направление движения. Оказывается, что если наряду с решением (5) имеется другое решение

$$x^i = \psi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

то траектории, соответствующие этим решениям, либо не пересекаются в пространстве, либо совпадают. Именно, если траектории имеют хотя бы одну общую точку, т. е.

$$\varphi^i(t_1) = \psi^i(t_2), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

то

$$\psi^i(t)=\varphi^i(t+c), \text{ где } c=t_1-t_2. \tag{8}$$

Последние равенства показывают, что траектории, описываемые первым и вторым решениями, совпадают между собой, но первое решение описывает ту же самую траекторию, что и второе, с «запозданием» на время c. Если точка, соответствующая первому решению, достигла некоторого положения на траектории в момент времени $t+c$, то точка, соответствующая второму решению, уже побывала в этом положении в момент времени t.

Для того чтобы вывести из равенства (7) тождество (8), рассмотрим наряду с решением (5) решение

$$\varphi_*^i(t)=\varphi^i(t+c) \tag{9}$$

(см. А)). Из равенства (7) при $c=t_1-t_2$ следует равенство

$$\varphi_*^i(t_2)=\varphi^i(t_2+c)=\varphi^i(t_1)=\psi^i(t_2), \qquad i=1, \ldots, n.$$

Таким образом, решения (6) и (9) системы (1) имеют общие начальные условия (а именно, значения в момент времени t_2) и потому в силу теоремы единственности совпадают, так что мы имеем:

$$\psi^i(t)=\varphi_*^i(t)=\varphi^i(t+c), \qquad i=1, \ldots, n.$$

Положения равновесия и замкнутые траектории

Поставим вопрос о том, может ли траектория, изображающая решение системы, пересекать себя.

B) Пусть

$$x^i=\varphi^i(t), \qquad i=1, \ldots, n \tag{10}$$

— некоторое решение системы (1). Допустим, что имеет место равенство

$$\varphi^i(t_1)=\varphi^i(t_2), \qquad i=1, \ldots, n, \qquad t_1\neq t_2, \tag{11}$$

где числа t_1 и t_2, конечно, принадлежат интервалу $r_1<t<r_2$ определения решения (10). Оказывается, что при этом условии решение (10) может быть продолжено на весь бесконечный интервал $-\infty<t<+\infty$. Поэтому мы сразу будем считать, что само решение (10) определено на этом интервале $-\infty<t<+\infty$. Оказывается далее, что возможны два следующих взаимно исключающих случая.

1) Для всех значений t имеет место равенство

$$\varphi^i(t)=a^i, \qquad i=1, \ldots, n,$$

где $(a^1, \ldots, a^n)$ есть точка множества Δ, не зависящая от t. Таким образом, в этом случае точка $(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$ в действительности не движется при изменении t, а стоит на месте. Само решение (10) и точка $(a^1, \ldots, a^n)$ в этом случае называются *положением равновесия* системы (1).

2) Существует такое положительное число T, что при произвольном t имеют место равенства

$$\varphi^i(t+T)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \ldots, n,$$

но при $|\tau_1-\tau_2|<T$ хотя бы для одного $i=1, \ldots, n$ имеет место неравенство

$$\varphi^i(\tau_1)\neq\varphi^i(\tau_2).$$

В этом случае решение (10) называется *периодическим* с периодом T, а траектория, описываемая решением (10), называется *замкнутой траекторией*, или *циклом*.

Докажем предложение В). Как было отмечено в предложении Б), из равенства (11) следуют тождества

$$\varphi^i(t+c)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \ldots, n, \qquad c=t_1-t_2. \tag{12}$$

При этом функции $\varphi^1(t+c), \ldots, \varphi^n(t+c)$ также представляют решение системы (1) (см. А)). Это решение и первоначальное решение (10) совпадают там, где они оба определены (теорема 2). Если объединить эти два решения, мы получим новое решение с бо́льшим интервалом существования, чем исходное, а именно, с интервалом $r_1-c<t<r_2$ при $c>0$ и $r_1<t<r_2-c$ при $c<0$. Так как t_1 и t_2 равноправны, то знак величины c можно изменить, так что решение можно продолжить на интервал $r_1-|c|<t<r_2+|c|$. Так как, кроме того, для продолженного решения равенство (11) по-прежнему выполнено, то к нему опять можно применить указанный способ расширения интервала существования, и потому мы можем продолжить решение (10) на всю бесконечную прямую с сохранением для него тождества (12).

Каждое число c, для которого выполнено тождество (12), будем называть *периодом* решения (10); множество всех периодов решения (10) обозначим через F. Множество F есть некоторое множество чисел. Установим некоторые его свойства. Заменяя в соотношении (12) t через $t-c$, получаем $\varphi^i(t)=\varphi^i(t-c)$. Таким образом, если c есть период, то $-c$ также есть период. Допустим, что c_1 и c_2 — периоды, т. е.

$$\varphi^i(t+c_1)=\varphi^i(t), \quad \varphi^i(t+c_2)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\varphi^i((t+c_2)+c_1)=\varphi^i(t+c_2)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \ldots, n.$$

Таким образом, если c_1 и c_2 суть периоды, то c_1+c_2 также есть период. Допустим, что $c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots$ есть последовательность периодов, сходящаяся к некоторому числу c_0; тогда мы имеем

$$\varphi^i(t+c_m)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \ldots, n, \quad m=1, 2, \ldots$$

Так как функции $\varphi^i(t)$ непрерывны, то при $m\to\infty$ мы получаем:

$$\varphi^i(t+c_0)=\varphi^i(t),$$

т. е. мы видим, что c_0 также есть период, так что множество F замкнуто.

Так как число c в равенстве (12) отлично от нуля ($t_1\neq t_2$), то множество F содержит числа, отличные от нуля. Из установленных свойств множества F легко выводится, что для него есть только две возможности: 1) множество F совпадает с множеством всех действительных чисел; 2) в множестве F имеется минимальное положительное число T, и тогда F состоит из всех целочисленных кратных числа T. Докажем, что действительно имеются только эти две возможности. Так как множество F вместе с каждым числом c содержит число $-c$ и так как в F имеются числа, отличные от нуля, то в F имеются положительные числа.

Допустим, что в множестве F нет наименьшего положительного числа, т. е. что для произвольного положительного числа ε имеется положительный период $c<\varepsilon$. Из доказанных свойств множества F следует (так как c есть период), что все числа mc, где m — целое, также являются периодами. Так как $c<\varepsilon$, то для произвольного действительного числа c_0 можно подобрать такое целое m, что $|c_0-mc|<\varepsilon$. Таким образом, произвольное число c_0 является предельным для множества F, и потому, ввиду замкнутости множества F, это множество совпадает с множеством всех действительных чисел.

Допустим теперь, что F не есть множество всех действительных чисел. В силу доказанного, в F имеется тогда наименьшее положительное число T. Пусть c — произвольный период. Можно тогда выбрать такое целое число m, что $|c-mT|<T$. Допустим, что $c\neq mT$; тогда $|c-mT|$ есть отличный от нуля период, а это невозможно, так как $|c-mT|<T$, что противоречит минимальности числа T. Итак, доказано, что каждое число c из F может быть записано в виде $c=mT$, где m — целое число.

Теперь уже легко проверить, что если F есть множество всех действительных чисел, то имеет место случай 1), а если F не есть множество действительных чисел, то имеет место случай 2). Таким образом, предложение В) доказано.

Кратко предложение В) можно сформулировать, сказав, что имеется три сорта траекторий: 1) положение равновесия; 2) периодические траектории (циклы); 3) траектории без самопересечений. Естественно считать, что последний случай является «наиболее общим».

Из теоремы 2 следует, что через каждую точку области Δ задания системы (1) проходит траектория, изображающая решение системы.

Таким образом, вся область Δ заполнена траекториями, причем, согласно Б), траектории эти попарно не пересекаются. Среди всех траекторий особо выделяются самопересекающиеся, которые являются либо положениями равновесия, либо циклами. Эти два сорта траекторий имеют весьма важное значение.

Такова кинематическая интерпретация решений автономной системы уравнений. Сама система уравнений также допускает геометрическую интерпретацию.

Фазовые пространства

Г) Поскольку автономная система уравнений (1) определена на открытом множестве Δ, каждой точке $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ множества Δ поставлена в соответствие последовательность из n чисел, именно последовательность:

$$f^1(x_0^1, \ldots, x_0^n), \ldots, f^n(x_0^1, \ldots, x_0^n).$$

Эти числа можно рассматривать как компоненты вектора $\boldsymbol{f}(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, проведенного в n-мерном пространстве и выходящего из точки $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Таким образом, автономной системе ставится в соответствие геометрический образ — *векторное поле*, заданное на открытом множестве Δ. В каждой точке $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ множества Δ определен вектор $\boldsymbol{f}(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, выходящий из этой точки. Связь между геометрической интерпретацией решений и геометрической интерпретацией самой системы уравнений заключается в следующем: Пусть $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ — произвольная точка множества Δ. В силу геометрической интерпретации системы уравнений этой точке поставлен в соответствие выходящий из нее вектор $\boldsymbol{f}(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Далее, в силу теоремы 2 существует решение $x^i = \varphi^i(t)$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi^i(t_0) = x_0^i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

В силу кинематической интерпретации решению $x^i = \varphi^i(t)$ соответствует в пространстве движение точки, описывающее траекторию, причем в момент времени $t = t_0$ движущаяся точка проходит через положение $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ в пространстве. Оказывается, что векторная скорость точки, описывающей решение $x^i = \varphi^i(t)$, в момент ее прохождения через положение $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ совпадает с вектором $\boldsymbol{f}(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Именно это совпадение и выражается системой уравнений (1) при

$$x^i = x_0^i, \qquad i = 1, \ldots, n; \ t = t_0.$$

Пространство размерности n, в котором интерпретируются решения автономной системы (1) в виде траекторий и сама автономная система (1) в виде векторного поля, называется *фазовым прост-*

ранством системы (1). Траектории называются *фазовыми траекториями*, векторы $f(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ называются *фазовыми скоростями*. Связь между обеими интерпретациями заключается в том, что скорость движения точки по траектории в каждый момент времени совпадает с фазовой скоростью, заданной в том месте пространства, где в этот момент находится движущаяся точка.

Рассмотрим теперь положения равновесия с точки зрения фазовых скоростей.

Д) Для того чтобы точка $(a^1, \ldots, a^n)$ множества Δ была положением равновесия системы (1), т. е. чтобы имелось решение $x^i = \varphi^i(t)$ системы, для которого

$$\varphi^i(t) \equiv a^i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

необходимо и достаточно, чтобы фазовая скорость $f(a^1, \ldots, a^n)$ в точке $(a^1, \ldots, a^n)$ была равна нулю. Таким образом, для отыскания всех положений равновесия системы (1) нужно решить систему уравнений

$$f^i(a^1, \ldots, a^n) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Эта система представляет собой не систему дифференциальных уравнений, а, как говорят, систему к о н е ч н ы х уравнений (производные в нее не входят).

Для доказательства утверждения Д) допустим, что $(a^1, \ldots, a^n)$ есть положение равновесия, т. е. что имеется решение $x^i = \varphi^i(t)$, для которого выполнены соотношения (13), и подставим в систему (1) это решение. Так как производная постоянной равна нулю, то подстановка дает

$$f^i(a^1, \ldots, a^n) = \frac{d}{dt}\varphi^i(t) = \frac{d}{dt}a^i = 0.$$

Таким образом, вектор $f(a^1, \ldots, a^n)$ фазовой скорости действительно обращается в нуль в точке $a^1, \ldots, a^n$. Допустим, что, обратно, вектор $f(a^1, \ldots, a^n)$ фазовой скорости обращается в нуль в точке $(a^1, \ldots, a^n)$, т. е. что $f^i(a^1, \ldots, a^n) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, и покажем, что в этом случае равенства (13) определяют решение системы (1). Подстановка дает

$$\dot{\varphi}^i(t) = f^i(a^1, \ldots, a^n), \qquad i = 1, \ldots, n;$$

равенства эти выполнены, так как слева стоит производная константы, а справа — нуль.

Е) Геометрическая интерпретация решения (2) системы уравнений (1), указанная в § 3, ставит в соответствие этому решению кривую K в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $t, x^1, \ldots, x^n$, определяемую системой уравнений (2). Здесь t является одной из координат в пространстве R. Переход к интерпретации в n-мерном фазовом пространстве S переменных $x^1, \ldots, x^n$ заключается в том, что мы перестаем считать величину t координатой точки, а считаем ее параметром. Таким образом, фазовая траектория L получается из кривой K в результате проектирования пространства R на пространство S в направлении оси t.

Геометрическую наглядность это проектирование приобретает при $n=2$. В этом случае пространство R трехмерно, а пространство S представляет собой плоскость (см. пример 4).

Примеры

1. Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=f(x) \tag{14}$$

первого порядка, правая часть которого непрерывна и имеет непрерывную производную на всей прямой P изменения переменного x. Предположим дополнительно, что нули функции $f(x)$ или, что то же самое, положения равновесия уравнения (14), не имеют предельных точек. В этом предположении положения равновесия разбивают прямую P на систему Σ интервалов. Каждый интервал (a, b) системы Σ обладает тем свойством, что на нем функция $f(x)$ не обращается в нуль, а каждый конец a или b его является либо нулем функции $f(x)$, либо равен $\pm\infty$. Таким образом, система Σ состоит из конечного или счетного числа конечных интервалов и не более чем двух

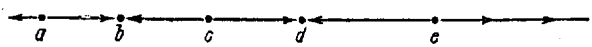


Рис. 17.

полубесконечных интервалов или же содержит только один бесконечный в обе стороны интервал $(-\infty, +\infty)$. Пусть (a, b) — некоторый интервал системы Σ, x_0 — точка этого интервала и $x=\varphi(t)$, $r_1<t<r_2$, — непродолжаемое решение уравнения (14) с начальными значениями $0, x_0$. Допустим для определенности, что $f(x_0)>0$; тогда оказывается, что

$$a<\varphi(t)<b \text{ при } r_1<t<r_2, \tag{15}$$

$$\lim_{t\to r_1}\varphi(t)=a, \qquad \lim_{t\to r_2}\varphi(t)=b. \tag{16}$$

Далее, если число a, или соответственно b, конечно, то число r_1 или соответственно r_2, бесконечно. Таким образом (рис. 17), каждый интервал (a, b) представляет собой одну-единственную фазовую траекторию уравнения (14).

Докажем соотношения (15), (16). Из предположения $f(x_0)>0$ следует, что на интервале (a, b) функция $f(x)$ положительна и потому каждая точка этого интервала, описывая фазовую траекторию, движется слева направо. Таким образом, при возрастающем t точка $\varphi(t)$ может покинуть интервал (a, b), лишь перейдя его правый конец b. Допустим, что это происходит при некотором $t=t_1$; тогда при $t=t_1$ имеем $\varphi(t_1)=b$, а это значит, что две различные траектории $x=\varphi(t)$ и $x=b$ пересекаются, что невозможно. Точно так же доказывается, что точка $\varphi(t)$ не может покинуть интервал (a, b) при убывающем t. Таким образом, соотношение (15) доказано.

Допустим теперь, что $\lim\limits_{t \to r_2} \varphi(t)=c<b$, и пусть $\psi(t)$ — решение уравнения (14) с начальными значениями 0, c. Так как $f(c)>0$, то при некотором отрицательном значении t_2 имеем $\psi(t_2)<c$, а это значит, что две различные траектории $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ пересекаются, что невозможно. Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{t \to r_2} \varphi(t)=b$. Точно так же доказывается и соотношение

$$\lim_{t \to r_1} \varphi(t)=a.$$

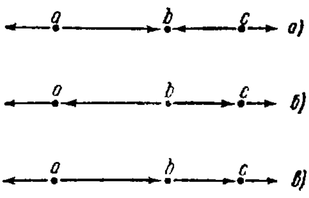


Рис. 18.

Допустим, наконец, что $b<\infty$, и покажем, что тогда $r_2=+\infty$. Допустим противоположное, именно, что $r_2<\infty$. Определим тогда функцию $\chi(t)$, положив $\chi(t)=\varphi(t)$ при $r_1<t<r_2$ и $\chi(t)=b$ при $t \geqslant r_2$. Очевидно, что функция $\chi(t)$ непрерывна и удовлетворяет уравнению (14), а это невозможно, так как тогда пересекаются две различные траектории $x=\chi(t)$ и $x=b$. Полученное противоречие показывает, что $r_2=+\infty$. Точно так же доказывается, что при $a>-\infty$ имеем $r_1=-\infty$.

Пусть b — произвольное положение равновесия уравнения (14), а (a, b) и (b, c) — два интервала системы Σ, примыкающие к нему (соответственно слева и справа). Каждый из интервалов (a, b), (b, c) представляет собой одну траекторию. Если обе точки, описывающие траектории (a, b) и (b, c), приближаются (при возрастании t) к положению равновесия b, то положение равновесия b называется *устойчивым* (рис. 18, *а*). Если обе точки, описывающие траектории (a, b) и (b, c), удаляются от точки b, то положение равновесия b называется *неустойчивым* (рис 18, *б*). Если по одной из траекторий точка приближается, а по другой удаляется, то положение равновесия b называется *полуустойчивым* (рис. 18, *в*). Для того чтобы положение равновесия b было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была положительна на интервале (a, b) и отрицательна на интервале (b, c). Для того чтобы положение равновесия b было неустойчивым, необходимо и достаточно, чтобы функция

$f(x)$ была отрицательна на интервале (a, b) и положительна на интервале (b, c). Для того чтобы положение равновесия b было полуустойчиво, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела один и тот же знак на обоих интервалах (a, b) и (b, c).

Допустим, что $\dot{f}(b) \neq 0$; тогда знак функции $f(x)$ вблизи точки b совпадает со знаком величины $\dot{f}(b)(x-b)$. Отсюда следует, что при $\dot{f}(b) < 0$ положение равновесия b уравнения (14) устойчиво, а при $\dot{f}(b) > 0$ оно неустойчиво.

2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(x), \tag{17}$$

где $f(x)$ есть периодическая функция с непрерывной первой производной. Для определенности будем считать, что период ее равен 2π. Все сказанное в примере 1 относительно уравнения (14)

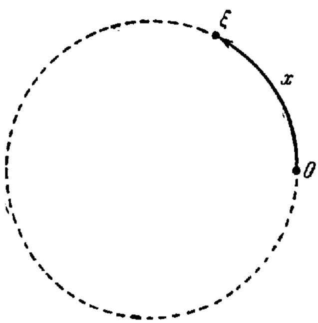


Рис. 19.

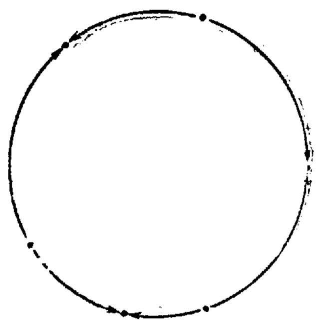


Рис. 20.

остается правильным и для уравнения (17), так как уравнение (17) является частным случаем уравнения (14). Однако, для того чтобы учесть специфику уравнения (17) (периодичность функции $f(x)$) разумно считать, что фазовым пространством уравнения (17) является не прямая, а о к р у ж н о с т ь K радиуса единица, на которой выбрано некоторое начало отсчета 0 и направление обхода (например, против часовой стрелки). Каждому числу x поставим в соответствие точку ξ окружности K, отложив от начала отсчета против часовой стрелки дугу длины x (рис. 19). При этом всем числам $x + 2k\pi$ (k — целое число) будет соответствовать на окружности одна и та же точка ξ. Так как $f(x+2k\pi) = f(x)$, то можно положить $f(\xi) = f(x)$, и функция f оказывается заданной на окружности K. Уравнение (17) задает теперь движение точки ξ по окружности K. Если $x(t)$ есть некоторое решение уравнения (17), то соответствующая числу $x(t)$ точка $\xi(t)$ движется по окружности K. Если α — такая точка на окружности K, что $f(\alpha) = 0$, то существует такое решение $x(t)$ уравнения (17), что $\xi(t) = \alpha$, и x

есть положение равновесия уравнения (17). Допустим для простоты, что положения равновесия уравнения (17) на окружности K не имеют предельных точек; тогда их имеется лишь конечное число или нет вовсе (рис. 20). Положения равновесия разбивают окружность на конечную систему Σ интервалов. Если положений равновесия вовсе нет, то система Σ содержит лишь один «интервал» (окружность). Если имеется лишь одно положение равновесия α, то система Σ также содержит лишь один интервал, состоящий из всех точек окружности K за исключением точки α. В первом случае интервал вовсе не имеет концов, во втором оба его конца совпадают. Пусть I — некоторый интервал системы Σ и $x(t)$ — некоторое решение уравнения (17) с начальными значениями $0, x_0$, где ξ_0 есть точка интервала I. Решение $x(t)$ всегда определено для всех значений t, и точка $\xi(t)$ принадлежит интервалу I. Если интервал I имеет концы (один или два), то точка пробегает интервал I в определенном направлении, причем каждая точка интервала I проходится решением $\xi(t)$ один раз. Если интервал I совпадает со всей окружностью, то, отправившись из положения ξ_0, точка через некоторое время T вернется в нее, так что $\xi(0)=\xi(T)$. В этом случае $\xi(t)$ периодически зависит от числа t с периодом T. Соответствующее движению $\xi(t)$ числовое решение $x(t)$ уравнения (17) удовлетворяет условию

$$x(t+T)=x(t)\pm 2\pi.$$

Из этого примера видно, что фазовым пространством системы уравнений не всегда целесообразно считать эвклидово координатное пространство, а иногда приходится считать более сложное геометрическое образование. Ниже, в примере 3, мы столкнемся с этим обстоятельством в более сложной обстановке, чем в этом примере.

3. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}^i=f^i(x^1, x^2), \qquad i=1, 2, \tag{18}$$

где функции $f^i(x^1, x^2)$ являются периодическими относительно обоих аргументов с периодами 2π:

$$f^i(x^1+2k\pi, x^2+2l\pi)=f^i(x^1, x^2), \qquad i=1, 2.$$

Как всегда, будем предполагать, что функции $f^i(x^1, x^2)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Ввиду периодичности функций $f^i(x^1, x^2)$ разумно считать, что фазовым пространством системы (18) является не плоскость, а более сложное геометрическое образование, именно, *поверхность тора* или, как говорят, *тор* (рис. 21). Опишем эту поверхность.

В трехмерном эвклидовом пространстве с декартовыми координатами x, y, z выберем в плоскости x, z окружность K радиуса единица с центром в точке $(2, 0, 0)$. Примем на этой окружности за начало отсчета точку с координатами (3, 0, 0). Тогда каждому числу x^1 будет поставлена в соответствие точка ξ^1 окружности K (см. пример 2). Будем теперь вращать плоскость (x, z) в пространстве (x, y, z) вокруг оси z. Описываемая при этом вращении окружностью K поверхность P представляет собой тор. Пусть ξ^1 — некоторая точка

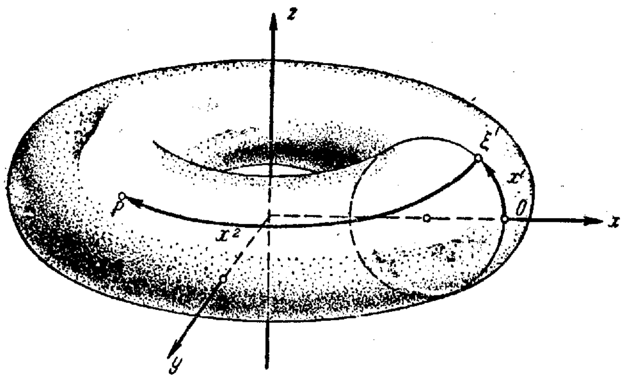


Рис. 21.

окружности K. В результате поворота плоскости (x, z) на угол x^2, исчисляемый в радианах, точка ξ^1 перейдет в некоторую точку p тора P (рис. 21). Если сделать поворот не на угол x^2, а на угол $x^2 + 2k\pi$, то мы придем к той же точке p тора P. Таким образом, точка p тора P однозначно определяется двумя *циклическими координатами* ξ^1, ξ^2, и каждой паре циклических координат ξ^1, ξ^2 соответствует на торе одна вполне определенная точка. Мы видим, таким образом, что функции $f^i(x^1, x^2)$ можно считать заданными не на плоскости, а на поверхности тора P:

$$f^i(\xi^1, \xi^2) = f^i(x^1, x^2).$$

Пусть теперь $x^1(t)$, $x^2(t)$ — некоторое решение системы (18). Ставя в соответствие каждому из чисел $x^1(t)$ и $x^2(t)$ циклические координаты $\xi^1(t)$ и $\xi^2(t)$, мы получаем точку $\xi^1(t)$, $\xi^2(t)$ тора P. Таким образом, каждое решение $x^1(t)$, $x^2(t)$ системы (18) может быть изображено движением точки по тору, причем закон движения в каждый момент времени определяется той точкой $\xi^1(t)$, $\xi^2(t)$ тора, через которую траектория в этот момент проходит. Это объясняется тем, что функции $f^i(\xi^1, \xi^2)$ заданы на торе. Таким образом, весь тор P оказывается покрытым траекториями, каждые две из которых либо не пересекаются, либо совпадают. В частности, если траектория пересекает самое себя, то она либо замкнута, либо является положением равновесия.

Изображение фазовых траекторий системы (18) не на плоскости, а на поверхности тора отражает специфическое свойство системы (18) (периодичность функций f^i) и удобно при ее изучении.

4. Каждое решение автономной системы уравнений

$$\dot{x} = -\omega y, \qquad \dot{y} = \omega x$$

записывается в виде:

$$x = r\cos(\omega t + \alpha), \qquad y = r\sin(\omega t + \alpha), \tag{19}$$

где r и α — константы. Система уравнений (19) определяет в трехмерном пространстве R переменных t, x, y винтовую спираль при $r \neq 0$ и прямую линию (именно, ось t) при $r = 0$.

В фазовой плоскости S переменных x и y та же система уравнений (19) определяет окружность при $r \neq 0$ и точку (положение равновесия) при $r = 0$. Переход от кривых в пространстве R к кривым на плоскости S осуществляется проектированием в направлении оси t на координатную плоскость xy.

5. Каждое решение неавтономной системы уравнений

$$\dot{x} = 1, \qquad \dot{y} = t$$

записывается в виде:

$$x = t + a, \qquad y = \frac{1}{2}t^2 + b, \tag{20}$$

где a и b — константы. Из общей теории известно (единственность решения), что в трехмерном пространстве R переменных t, x, y две кривые, определяемые системой уравнений (20), либо не пересекаются, либо совпадают. Для того, чтобы получить проекцию кривой, определяемой системой (20), на плоскость S переменных x, y, следует из системы (20) исключить t. Производя это исключение, получаем:

$$y = \frac{1}{2}(x - a)^2 + b.$$

Это уравнение определяет на плоскости xy параболу с осью, направленной вдоль положительной полуоси x и вершиной в точке (a, b). Две такие параболы: одна с вершиной в точке (a_1, b_1), а другая с вершиной в точке (a_2, b_2) — не пересекаются лишь в случае, если $a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2$. Если же $a_1 \neq a_2$, то соответствующие параболы пересекаются (в одной точке). Пересечение траекторий происходит потому, что исходная система дифференциальных уравнений неавтономна. Поэтому изображение решений на плоскости xy в случае неавтономной системы нецелесообразно.

§ 16. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

Здесь будут построены фазовые траектории на фазовой плоскости системы

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^1 &= a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2, \\ \dot{x}^2 &= a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

или в векторной форме

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

с постоянными действительными коэффициентами a^i_j. При этом нам придется разобрать несколько различных случаев, так как фазовая картина траекторий системы существенно зависит от значений коэффициентов.

Следует заметить, что начало координат (точка (0, 0)) всегда является положением равновесия системы (1). Это положение равновесия тогда и только тогда является единственным, когда детерминант матрицы (a^i_j) отличен от нуля, или, что то же, оба собственных значения этой матрицы отличны от нуля.

Допустим, что собственные значения матрицы A действительны, различны и отличны от нуля. Тогда, как это следует из результатов § 14 (теорема 10) произвольное действительное решение уравнения (2) можно записать в виде:

$$\boldsymbol{x} = c^1 \boldsymbol{h}_1 e^{\lambda_1 t} + c^2 \boldsymbol{h}_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ — действительные линейно независимые собственные векторы матрицы A; λ_1 и λ_2 — его действительные собственные значения, а c^1 и c^2 — действительные константы. Решение (3) разложим по базису $(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2)$, положив

$$\boldsymbol{x} = \xi^1 \boldsymbol{h}_1 + \xi^2 \boldsymbol{h}_2; \tag{4}$$

тогда мы будем иметь:

$$\xi^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \qquad \xi^2 = c^2 e^{\lambda_2 t}. \tag{5}$$

Координаты ξ^1, ξ^2 на фазовой плоскости P системы (1), вообще говоря, не являются прямоугольными, поэтому отобразим аффинно фазовую плоскость P на вспомогательную плоскость P^* таким образом, чтобы при этом векторы $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ перешли во взаимно ортогональные единичные векторы плоскости P^*, направленные соответственно по оси абсцисс и оси ординат (рис. 22). Точка $\boldsymbol{x} = \xi^1 \boldsymbol{h}_1 + \xi^2 \boldsymbol{h}_2$ плоскости P перейдет при этом отображении в точку с декартовыми прямоугольными координатами ξ^1, ξ^2 в плоскости P^*. Таким образом, траектория, заданная параметрическими уравнениями (5) в плоскости P перейдет в траекторию (которую мы также назовем *фазовой*), заданную теми же уравнениями в прямоугольных координатах плоскости P^*. Мы начертим сперва траектории, заданные уравнениями (5) в плоскости P^*, и затем отобразим их обратно в плоскость P.

Наряду с фазовой траекторией (5) в плоскости P^* имеется траектория, задаваемая уравнениями

$$\xi^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^2 = -c^2 e^{\lambda_2 t}, \tag{6}$$

а также траектория, задаваемая уравнениями

$$\xi^1 = -c^1 e^{\lambda_1 t}, \qquad \xi^2 = c^2 e^{\lambda_2 t}. \tag{7}$$

Траектория (6) получается из траектории (5) зеркальным отражением относительно оси абсцисс, а траектория (7) — относительно оси ординат. Таким образом, указанные два зеркальных отображения оставляют

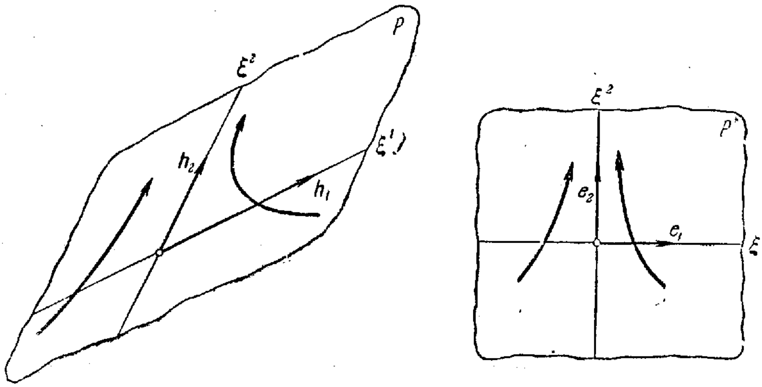


Рис. 22.

картину траекторий на плоскости P^* инвариантной. Из этого видно, что если вычертить траектории в первом квадранте, то уже легко представить себе всю фазовую картину в плоскости P^*.

Заметим, что при $c^1 = c^2 = 0$ мы получаем движение точки, описывающее положение равновесия (0, 0). При $c^2 = 0$, $c^1 > 0$ получаем движение, описывающее положительную полуось абсцисс, при $c^1 = 0$, $c^2 > 0$ получаем движение, описывающее положительную полуось ординат. Если $\lambda_1 < 0$, то движение, описывающее положительную полуось абсцисс, протекает в направлении к н а ч а л у к о о р д и н а т, если же $\lambda_1 > 0$, то движение это имеет противоположное направление — о т н а ч а л а к о о р д и н а т. В первом случае точка движется, неограниченно приближаясь к началу координат, во втором — неограниченно удаляясь в бесконечность. То же справедливо и относительно движения, описывающего положительную полуось ординат. Если c^1 и c^2 положительны, то движение точки протекает в первой четверти, не выходя на ее границу.

Дальнейшее, более детальное описание фазовой плоскости проведем отдельно для нескольких случаев — в зависимости от знаков чисел λ_1, λ_2.

А) У з е л. Допустим, что оба числа λ_1 и λ_2 отличны от нуля и имеют один знак, причем

$$|\lambda_1| < |\lambda_2|. \tag{8}$$

Разберем сперва случай, когда

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

При этих предположениях движение по положительной полуоси абсцисс направлено к началу координат, точно так же, как движение по положительной полуоси ординат. Далее, движение по произвольной траектории внутри первого квадранта состоит в асимптотическом приближении точки к началу координат, причем траектория при этом касается оси абсцисс в начале координат. При t, стремящемся к $-\infty$, точка движется так, что абсцисса и ордината ее

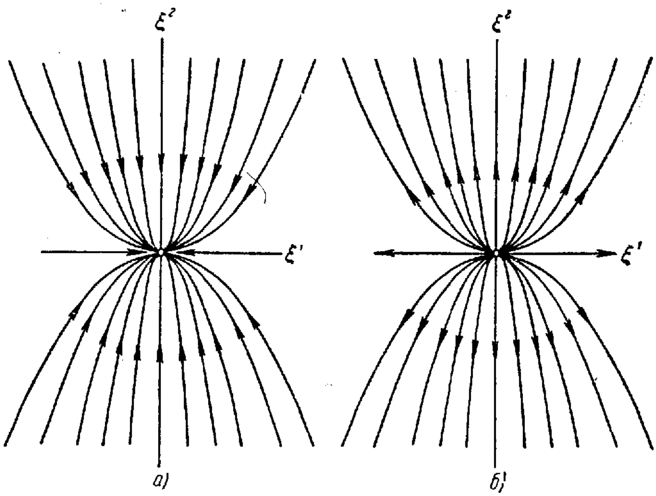


Рис. 23.

бесконечно возрастают, но возрастание ординаты сильнее, чем возрастание абсциссы, т. е. движение идет в направлении оси ординат. Эта фазовая картина называется *устойчивым узлом* (рис. 23, *а*). Если наряду с неравенством (8) выполнены неравенства

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0,$$

то траектории остаются прежними, но движение по ним направлено в противоположном направлении. Мы имеем *неустойчивый узел* (рис. 23, *б*).

Б) Седло. Допустим, что числа λ_1 и λ_2 имеют противоположные знаки. Для определенности предположим, что

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

В этом случае движение по положительной полуоси абсцисс идет к началу координат, а движение по положительной полуоси ординат —

от начала координат. Траектории, лежащие внутри первого квадранта, напоминают по своему виду гиперболы, а движения по ним происходят в направлении к началу вдоль оси абсцисс, и в направлении от начала вдоль оси ординат. Эта фазовая картина называется *седлом* (рис. 24).

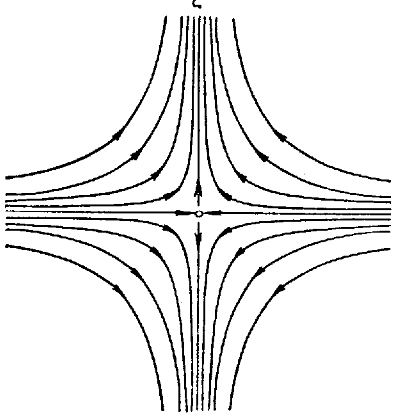


Рис. 24.

Рисунки 23, *а*, *б* и 24 дают картину траекторий на вспомогательной фазовой плоскости P^*. Расположение траекторий на фазовой плоскости P получается из этого с помощью аффинного преобразования и зависят от положения собственных векторов (см., например, рис. 25 и 26).

Рассмотрим теперь случай, когда собственные значения матрицы A комплексны. В этом случае они комплексно сопряжены и могут быть обозначены через $\lambda = \mu + i\nu$ и $\bar{\lambda} = \mu - i\nu$, причем $\nu \neq 0$. Собственные векторы матрицы A могут быть выбраны сопряженными, так что их можно обозначить через $\boldsymbol{h}$ и $\bar{\boldsymbol{h}}$. Положим:

$$\boldsymbol{h} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{h}_1 - i\boldsymbol{h}_2),$$

где $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ — действительные векторы. Векторы $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ линейно независимы, так как в случае линейной зависимости между ними мы имели бы линейную зависимость между $\boldsymbol{h}$ и $\bar{\boldsymbol{h}}$. Итак, векторы $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ можно принять за базис фазовой плоскости P уравнения (2).

Произвольное действительное решение уравнения (2) можно записать в виде:

$$\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{h}e^{\lambda t} + \bar{c}\bar{\boldsymbol{h}}e^{\bar{\lambda} t}, \tag{9}$$

где c — комплексная константа. Пусть

$$\zeta = \xi^1 + i\xi^2 = ce^{\lambda t};$$

тогда мы имеем:

$$\boldsymbol{x} = \xi^1\boldsymbol{h}_1 + \xi^2\boldsymbol{h}_2.$$

Отобразим аффинно фазовую плоскость P на вспомогательную плоскость P^* комплексного переменного ζ так, чтобы вектор $\boldsymbol{h}_1$

перешел в единицу, а вектор $\boldsymbol{h}_2$ — в i; тогда вектору $\xi^1 \boldsymbol{h}_1 + \xi^2 \boldsymbol{h}_2$ будет соответствовать комплексное число $\zeta = \xi^1 + i\xi^2$. В силу этого

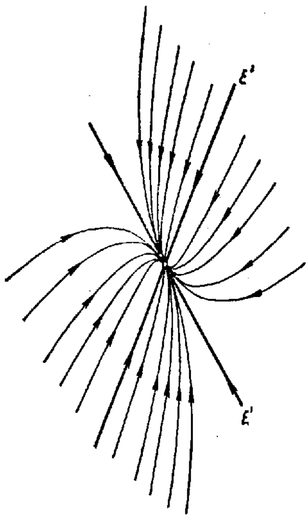


Рис. 25.

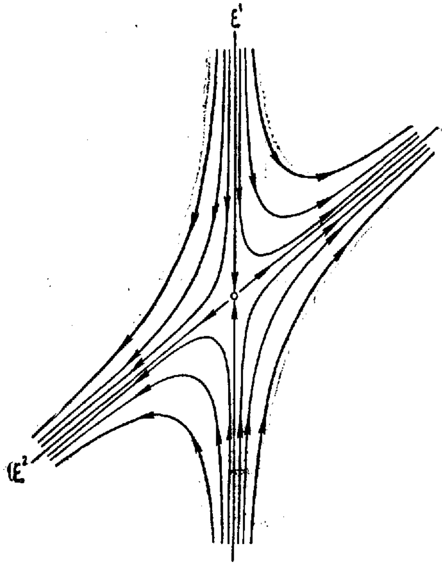


Рис. 26.

отображения фазовая траектория (9) перейдет в фазовую траекторию на плоскости P^*, описываемую уравнением

$$\zeta = ce^{\lambda t}. \tag{10}$$

В) Ф о к у с и ц е н т р. Перепишем уравнение (10) в полярных координатах, положив

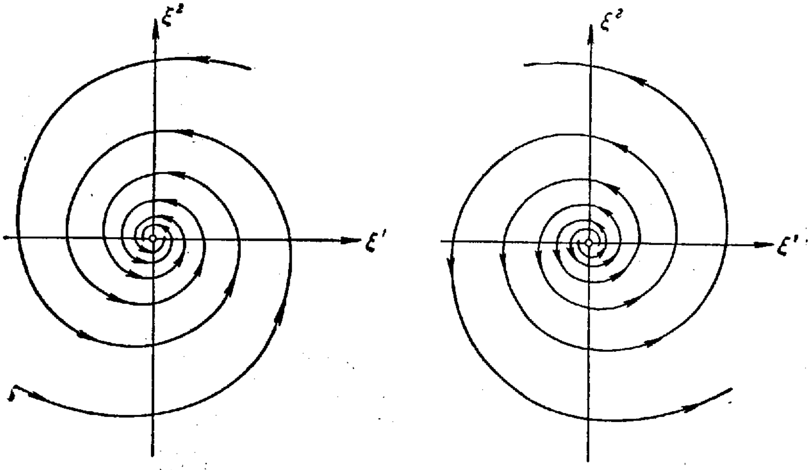
$$\zeta = \rho e^{i\varphi}, \quad c = Re^{i\alpha}.$$

Таким образом получаем:

$$\rho = Re^{\mu t}, \quad \varphi = \nu t + \alpha;$$

это есть уравнение движения точки в плоскости P^*. При $\mu \neq 0$ каждая траектория оказывается л о г а р и ф м и ч е с к о й с п и р а л ь ю. Соответствующая картина на плоскости P называется *фокусом*. Если $\mu < 0$, то точка при возрастании t асимптотически приближается к началу координат, описывая логарифмическую спираль. Это — *устойчивый фокус* (рис. 27, *а*). Если $\mu > 0$, то точка уходит от начала координат в бесконечность, и мы имеем *неустойчивый фокус* (рис. 27, *б*). Если число μ равно нулю, то каждая фазовая траектория, кроме положения равновесия (0, 0), замкнута, и мы имеем так называемый *центр* (рис. 28).

Рисунки 27 и 28 дают картину во вспомогательной фазовой плоскости; в плоскости P картина аффинно искажается (см., например, рис. 29 и 30).



а) б)

Рис. 27.

Выше мы рассматривали так называемые *невырожденные случаи*: корни λ_1 и λ_2 различны и отличны от нуля. Малое

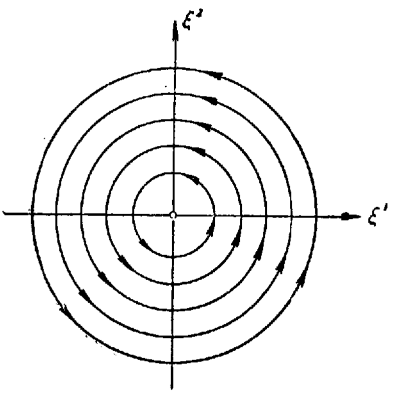


Рис. 28.

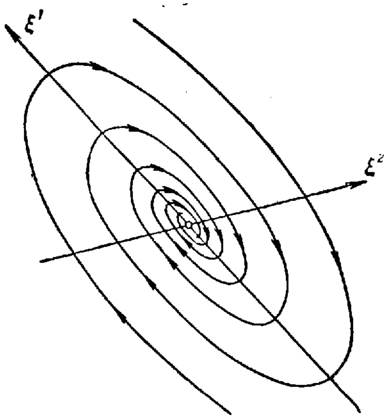


Рис. 29.

изменение элементов матрицы (a^i_j) не меняет в этих предположениях общего характера поведения фазовых траекторий. Исключение составляет случай центра: при малом изменении элементов матрицы (a^i_j)

равенство $\mu = 0$ может нарушиться, и центр перейдет в устойчивый или неустойчивый фокус. Включение этого вырожденного случая (центра) в основной текст параграфа объясняется его важностью. Остальные вырожденные случаи будут рассмотрены в примерах 1 и 3.

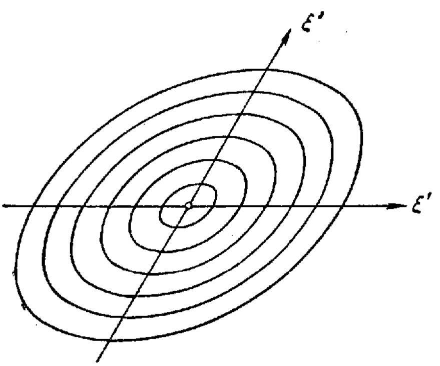


Рис. 30.

Примеры

1. (*Вырожденный узел*). Если матрица A системы (1) имеет лишь одно собственное значение λ, то возможны два существенно различных случая, при описании которых мы будем обозначать через A преобразование, соответствующее матрице A.

Случай I. Существует в плоскости P базис $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, состоящий из двух собственных векторов преобразования A:

$$A\boldsymbol{h}_1 = \lambda\boldsymbol{h}_1, \qquad A\boldsymbol{h}_2 = \lambda\boldsymbol{h}_2. \tag{11}$$

Случай II. Существует в плоскости P такой базис $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, что

$$A\boldsymbol{h}_1 = \lambda\boldsymbol{h}_1, \qquad A\boldsymbol{h}_2 = \lambda\boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_1. \tag{12}$$

Существование базиса одного из видов (11), (12) непосредственно вытекает из теоремы 30, но здесь мы докажем этот факт непосредственно. Пусть $\boldsymbol{h}_1$ — собственный вектор преобразования A и $\boldsymbol{h}_2$ — произвольный вектор, не коллинеарный вектору $\boldsymbol{h}_1$. Тогда мы имеем:

$$A\boldsymbol{h}_1 = \lambda\boldsymbol{h}_1, \qquad A\boldsymbol{h}_2 = \alpha\boldsymbol{h}_1 + \mu\boldsymbol{h}_2.$$

Из этого видно, что преобразование A имеет в базисе $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

так что его собственными значениями являются λ и μ, и потому $\mu = \lambda$. Если $\alpha = 0$, то для базиса $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ выполнены соотношения (11). Если же $\alpha \neq 0$, то, заменив вектор $\boldsymbol{h}_1$ коллинеарным ему вектором $\alpha\boldsymbol{h}_1$, мы получим базис, удовлетворяющий условию (12).

Непосредственно проверяется, что в случае I общее решение уравнения (2) записывается в виде:

$$\boldsymbol{x} = c^1\boldsymbol{h}_1e^{\lambda t} + c^2\boldsymbol{h}_2e^{\lambda t} = \boldsymbol{x}_0e^{\lambda t}. \tag{13}$$

Написанное решение имеет начальное значение $(0, x_0)$. При $\lambda \neq 0$ каждое решение описывает полупрямую, выходящую из начала координат. При $\lambda < 0$ движение происходит в направлении к началу координат (рис. 31, *а*), при $\lambda > 0$ — от начала координат (рис. 31, *б*); относительно случая $\lambda = 0$ см. пример 3.

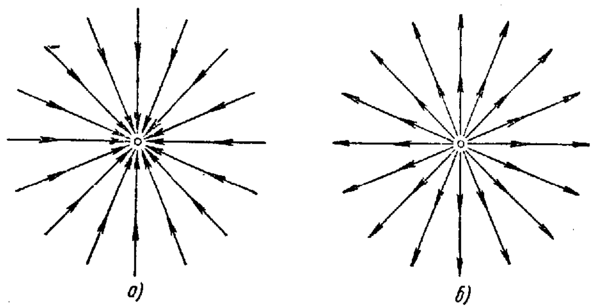


Рис. 31.

Непосредственно проверяется также, что в случае II произвольное решение уравнения (2) имеет вид:

$$\boldsymbol{x} = c^1\boldsymbol{h}_1 e^{\lambda t} + c^2(\boldsymbol{h}_1 t + \boldsymbol{h}_2) e^{\lambda t}.$$

Разлагая это решение по базису $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ в виде $\boldsymbol{x} = \xi^1\boldsymbol{h}_1 + \xi^2\boldsymbol{h}_2$, получаем уравнение траекторий в плоскости P относительно базиса $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$:

$$\xi^1 = (c^1 + c^2 t) e^{\lambda t}, \qquad \xi^2 = c^2 e^{\lambda t}. \tag{14}$$

Аффинное отображение фазовой плоскости P, переводящее векторы $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ в единичные ортогональные векторы, направленные по осям координат плоскости P^*, переводит траектории плоскости P в траектории плоскости P^*, в которой уравнения (14) дают траектории уже в прямоугольных координатах.

Разберем случай $\lambda \neq 0$ (случай $\lambda = 0$ см. в примере 3). Пусть сначала $\lambda < 0$. Рассмотрим траектории, заполняющие плоскость P^*, в этом случае. Прежде всего из уравнений (14) видно, что, меняя одновременно знаки у c^1 и c^2, мы получим симметрию плоскости P^* относительно начала координат, при которой траектории переходят в траектории. Таким образом, достаточно рассмотреть заполнение траекториями верхней полуплоскости. При $c^2 = 0$, $c^1 \neq 0$ получаем две траектории: одну при $c_1 > 0$, другую — при $c_1 < 0$. Первая совпадает с положительной полуосью абсцисс, вторая — с отрицательной полуосью абсцисс; движение по обеим направлено к началу координат. Рассмотрим, далее, траекторию $c_1 = 0$, $c_2 > 0$. Мы имеем:

$$\xi^1 = c^2 t e^{\lambda t}, \qquad \xi^2 = c^2 e^{\lambda t}. \tag{15}$$

При $t=0$ получаем точку $(0, c^2)$ на оси ординат. При t, возрастающем от нуля, точка сначала движется направо, затем налево, все время опускаясь вниз к началу координат, к которому она подходит по траектории, касающейся положительного направления оси

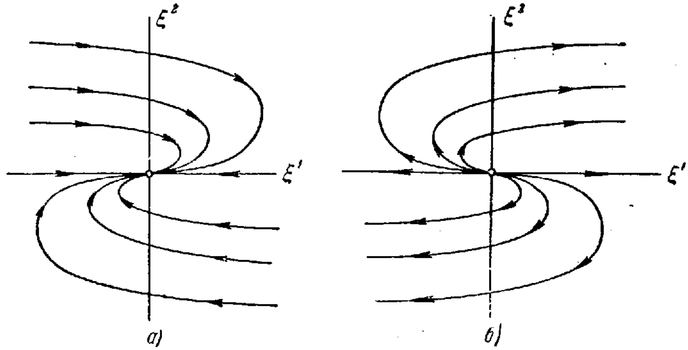


Рис. 32.

абсцисс. При t, убывающем от нуля до $-\infty$, точка движется налево, одновременно поднимаясь вверх, однако налево быстрее, чем вверх, так что общая тенденция ее движения — в отрицательном направлении вдоль оси абсцисс. Если в уравнениях (15) придавать константе c^2

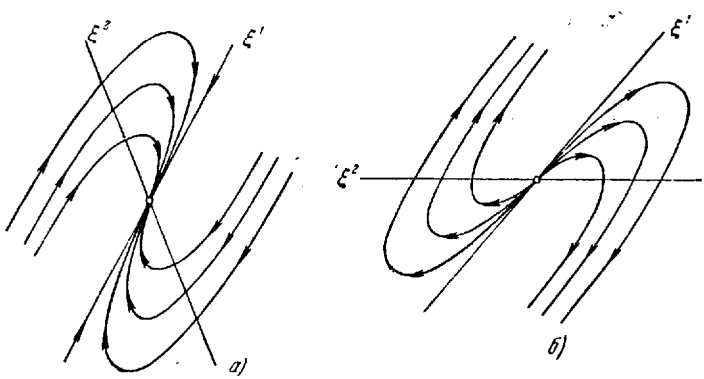


Рис. 33.

все положительные значения, то описанные таким образом траектории заполняют всю верхнюю полуплоскость (рис. 32, *а*). Мы имеем здесь *устойчивый вырожденный узел*. Если $\lambda > 0$, то траектории получаются из описанных путем зеркального отражения плоскости относительно оси ординат (рис. 32, *б*), а движение по ним идет в противоположном направлении, т. е. от начала координат. Это — *неустойчивый* *вырожденный узел.* На рис. 33, *а, б* показаны фазовые траектории в плоскости P.

2. Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0. \tag{16}$$

Заменяя это уравнение нормальной системой по способу, изложенному в § 4, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -bx - ay. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Фазовую плоскость системы (17) считают фазовой плоскостью уравнения (16). Непосредственно проверяется, что характеристический многочлен системы (17) совпадает с характеристическим многочленом уравнения (16), т. е. равен

$$p^2 + ap + b. \tag{18}$$

Таким образом, если корни многочлена (18) комплексны, то фазовая плоскость уравнения (16) представляет собой фокус или центр. Рассмотрим фазовую плоскость в случае действительных различных и отличных от нуля корней многочлена (18).

Пусть λ — корень многочлена (18) и $h = (h^1, h^2)$ — соответствующий ему собственный вектор. Мы имеем тогда (учитывая вид системы (17))

$$h^2 = \lambda h^1.$$

Таким образом, собственное направление, соответствующее собственному значению λ, определяется прямой линией, имеющей уравнение

$$y = \lambda x;$$

мы будем называть ее *собственной прямой.*

Если корни λ_1 и λ_2 отрицательны, то мы имеем *устойчивый узел* (см. А)). В этом случае обе собственные прямые проходят во второй и четвертой четвертях; траектории вблизи начала координат касаются той из них, которая расположена ближе к оси абсцисс (рис. 34).

Если корни λ_1 и λ_2 положительны, то мы имеем *неустойчивый узел* (см. А)). Обе собственные прямые проходят в первой и третьей четвертях; вблизи начала координат траектории касаются той из них, которая расположена ближе к оси абсцисс (рис. 35).

Если корни λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, то мы имеем седло; одна собственная прямая проходит во второй и четвертой четвертях, а другая — в первой и третьей. В направлении первой из этих прямых траектории приближаются к началу координат, а в направлении второй — отходят от него (рис. 36).

3. Рассмотрим, наконец, случай, когда хотя бы одно из собственных значений матрицы A обращается в нуль.

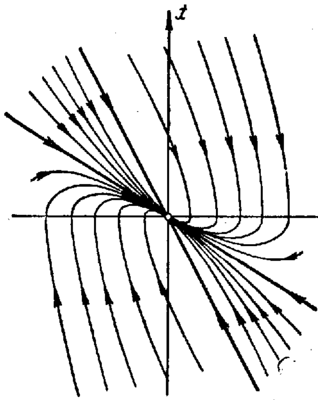


Рис. 34.

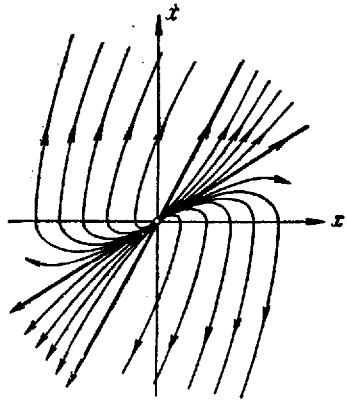


Рис. 35.

Случай I. В нуль обращается лишь одно собственное значение:

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0.$$

В этом случае решение можно записать в виде (4), где ξ^1 и ξ^2 даются формулами (5). Так как $\lambda_2 = 0$, то $\xi^2 = \text{const}$, и движение про-

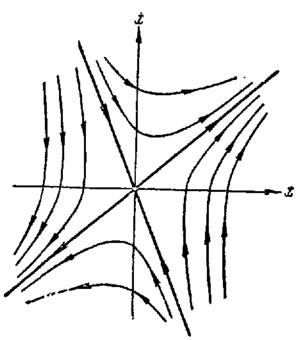


Рис. 36.

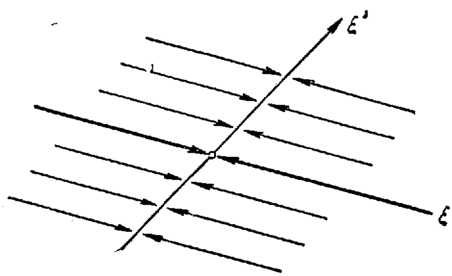


Рис. 37.

исходит по прямым $\xi^2 = \text{const}$ в направлении к прямой $\xi^1 = 0$ или от нее в зависимости от знака числа λ_1. Все точки прямой $\xi^1 = 0$ являются положениями равновесия (рис. 37).

Если же имеется единственное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то могут представиться два случая, рассмотренные в примере 1.

Случай I (см. (11), $\lambda = 0$). Общее решение записывается в виде (см. (13)):

$$x = x_0.$$

Этот случай имеет место, если все коэффициенты системы (1) обращаются в нуль; каждая точка плоскости P является положением равновесия.

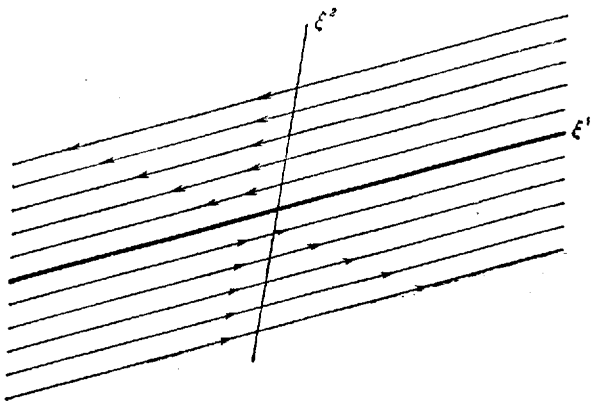


Рис. 38.

Случай II (см. (12), $\lambda = 0$). Общее решение записывается в виде (см. (14)):

$$\xi^1 = c^1 + c^2 t, \qquad \xi^2 = c^2.$$

Движение происходит равномерно по каждой из прямых $\xi^2 = \text{const}$. Все точки прямой $\xi^2 = 0$ являются положениями равновесия (рис. 38).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ
ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этой главе излагается теория линейных уравнений, сперва для нормальной системы n-го порядка, а затем для одного уравнения n-го порядка, причем почти все результаты, относящиеся к одному уравнению, выводятся из соответствующих результатов о нормальной системе. Третий параграф главы посвящен нормальным линейным однородным системам с периодическими коэффициентами. Главным результатом здесь является теорема Ляпунова о возможности линейным периодическим преобразованием переменных перевести нормальную систему с периодическими коэффициентами в нормальную систему с постоянными коэффициентами. В дальнейшем этот результат находит важное применение в теории устойчивости. Доказательство его очень просто, но опирается на сравнительно неэлементарную теорию функций от матриц. Эта теория, не являющаяся частью теории обыкновенных дифференциальных уравнений, излагается для удобства читателей в добавлении II. Таким образом, третий параграф этой главы (§ 19) является неэлементарным благодаря используемому в нем матричному исчислению.

§ 17. Нормальная система линейных уравнений

Здесь будет рассмотрена нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)\, x^j + b^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Напомним, что если $q_1 < t < q_2$ есть интервал существования и непрерывности коэффициентов $a_j^i(t)$ и свободных членов $b^i(t)$ системы (1), то, в силу теоремы 3, каждое решение может быть продолжено на весь интервал $q_1 < t < q_2$. В дальнейшем мы будем считать, что каждое рассматриваемое решение задано на этом интервале и каждое рассматриваемое значение t принадлежит ему.

Фундаментальная система решений

В первую очередь будет рассматриваться однородная система уравнений

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j(t)\, x^j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

или, в векторной записи,

$$\dot{x} = A(t)\, x. \tag{3}$$

А) Установим простейшие свойства уравнения (3).

а) Если $x = \varphi(t)$ есть решение уравнения (3), обращающееся в нуль при некотором значении t_0:

$$\varphi(t_0) = 0, \tag{4}$$

то решение это тождественно равно нулю

$$\varphi(t) \equiv 0, \qquad q_1 < t < q_2.$$

б) Если

$$\varphi_1(t), \qquad \varphi_2(t), \ \ldots, \ \varphi_r(t)$$

— решения уравнения (3), то векторная функция

$$\varphi(t) = c^1\varphi_1(t) + \ldots + c^r\varphi_r(t),$$

где $c^1, \ldots, c^r$ — константы, также является решением уравнения (3).

Свойство б) проверяется непосредственно. Свойство а) вытекает из того, что вектор $x = 0$, тождественно равный нулю, очевидно, является решением уравнения (3), а потому решение $\varphi(t)$, предусмотренное в а), как имеющее с этим решением общее начальное условие (4), должно с ним совпадать.

Б) Пусть

$$\varphi_1(t), \ \varphi_2(t), \ \ldots, \ \varphi_r(t) \tag{5}$$

— система решений уравнения (3). Она называется *линейно зависимой*, если существуют такие константы $c^1, c^2, \ldots, c^r$, не все равные нулю, что

$$c^1\varphi_1(t) + c^2\varphi_2(t) + \ldots + c^r\varphi_r(t) \equiv 0.$$

В противном случае система (5) решений уравнения (3) называется *линейно независимой*. Оказывается, что если хотя бы для одного значения $t = t_0$ векторы

$$\varphi_1(t_0), \qquad \varphi_2(t_0), \ \ldots, \ \varphi_r(t_0) \tag{6}$$

РИС. 7.13. Перколяционный кластер и его остов (черный цвет) по результатам моделирования на квадратной решетке размером 147 × 147 при $p_c = 0{,}593$ [168].

перерезать одну *обособленную связь*. Вытесняющая жидкость (вода) не может проникнуть в обособленные ветви, потому что запертому там маслу просто некуда деться.

Остов включает все узлы, лежащие на всех возможных траекториях несамопересекающегося случайного блуждания, начинающихся в узле (узлах) впрыскивания и заканчивающихся на границе области. Несамопересекающееся случайное блуждание не может привести в обособленную ветвь, потому что иначе для возвращения на остов пришлось бы дважды побывать в том единственном узле, связывающем с ним эту ветвь.

Конкретная реализация перколяционного кластера и его остова показана на рис. 7.13 для перколяции по узлам квадратной решетки на пороге протекания. Остов связывает узел, находящийся в центре квадратной решетки размером 147 × 147, с узлами на ее границе. Перколирующий кластер содержит 6261 узел, в то время как в остове всего 3341 узел.

Мы изготовили лабораторную модель перколяционного кластера, показанного на рис. 7.13 [168]. Модель сделана из эпоксидной смолы и имеет цилиндрические поры диаметром 1,1 мм и высотой 0,7 мм. Поры связаны каналами шириной 0,7 мм. Модель заполнялась вязким подкрашенным глицерином. Обычный эксперимент по вытеснению состоял в том, что в центре объема впрыскивался воздух, который вытеснял векторного пространства, то они составляют его базис, и потому вектор $\varphi(t_0)$ может быть записан в виде:

$$\varphi(t_0) = c^1\varphi_1(t_0) + \ldots + c^n\varphi_n(t_0), \tag{9}$$

где $c^1, \ldots, c^n$ — надлежащим образом выбранные числа. Решения $\varphi(t)$ и $c^1\varphi_1(t) + \ldots + c^n\varphi_n(t)$ имеют общее начальное условие (см. (9)) и потому совпадают, так что имеет место равенство (8).

Перейдем теперь к координатному описанию полученных фактов и к установлению некоторых других результатов.

Г) Пусть

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t) \tag{10}$$

— некоторая система решений уравнения (3). Решение $\varphi_k(t)$ в координатной форме запишем, положив

$$\varphi_k(t) = (\overset{1}{\varphi}_k(t), \overset{2}{\varphi}_k(t), \ldots, \overset{n}{\varphi}_k(t)).$$

Составим теперь матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \ldots & \varphi_k^1(t) & \ldots & \varphi_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) & \ldots & \varphi_k^2(t) & \ldots & \varphi_n^2(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^n(t) & \ldots & \varphi_k^n(t) & \ldots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

k-м столбцом которой служит решение $\varphi_k(t)$ системы (2) или, точнее, его координаты. Детерминант этой матрицы обозначим через $W(t)$; он называется *детерминантом Вронского* системы решений (10). Очевидно, что если решения (10) линейно независимы, то детерминант Вронского $W(t)$ не обращается в нуль ни при одном значении t; в этом случае система (10) является фундаментальной системой решений. Далее, если система (10) линейно зависима, то детерминант Вронского тождественно равен нулю. В случае, когда система (10) является фундаментальной, мы будем называть матрицу (11) *фундаментальной*.

Докажем теперь, что произвольно заданная квадратная матрица порядка n, составленная из функций переменного t и удовлетворяющая некоторым естественным условиям, является фундаментальной для некоторой системы уравнений вида (2).

Д) Будем считать, что матрица (11) есть произвольно заданная матрица функций переменного t, непрерывно дифференцируемых на интервале $q_1 < t < q_2$, с детерминантом, нигде не обращающимся в нуль на этом интервале. Оказывается, что эта матрица (11) является фундаментальной для некоторой (одной-единственной) системы (2), определенной на интервале $q_1 < t < q_2$.

Для доказательства этого запишем в формулах предположение, что векторная функция $\varphi_k(t)$, координаты которой составляют

k-й столбец матрицы (11), является решением уравнения (3). Мы имеем

$$\dot{\varphi}_k^i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)\,\varphi_k^j(t), \qquad i, k = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Если в этом соотношении зафиксировать индекс i, а считать меняющимся только индекс k, то систему полученных соотношений можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_1^i(t), \ldots, a_n^i(t)$. Система эта однозначно разрешима, так как матрица ее получается из матрицы (11) транспонированием и потому детерминант ее отличен от нуля. Таким образом, функции $a_j^i(t)$ при каждом фиксированном i однозначно находятся из соотношений (12), и притом оказываются непрерывными функциями, так как функции $\dot{\varphi}_k^i(t)$ и $\varphi_k^j(t)$ непрерывны.

Формула Лиувилля

При доказательстве предложения Ж) нам понадобится правило дифференцирования детерминанта. Дадим его здесь.

Е) Пусть $(\varphi_j^i(t))$ — квадратная матрица порядка n, элементы которой являются дифференцируемыми функциями переменного t, и пусть $W(t)$ — детерминант этой матрицы. Производную $\dot{W}(t)$ этого детерминанта можно вычислять по следующей формуле:

$$\dot{W}(t) = W_1(t) + \ldots + W_n(t). \tag{13}$$

Слагаемое $W_i(t)$, стоящее на i-м месте в правой части равенства, определяется следующим образом. В матрице $(\varphi_j^i(t))$ дифференцируют по t все члены i-й строки, а остальные строки оставляют без изменения; детерминант полученной матрицы и есть $W_i(t)$. Очевидно, что роли строк и столбцов можно поменять.

Для доказательства формулы (13) рассмотрим сперва детерминант U квадратной матрицы (u_j^i) порядка n, как функцию всех элементов u_j^i $(i, j = 1, \ldots)$ n, этой матрицы, считая, что элементы эти являются независимыми переменными. Вычислим частную производную

$$\frac{\partial U}{\partial u_s^r}$$

функции U по переменному u_s^r; здесь r и s фиксированы. Алгебраическое дополнение элемента u_j^i в матрице (u_j^i) обозначим через V_i^j, так что

$$U = \sum_{j=1}^{n} u_j^r V_r^j. \tag{14}$$

Формула эта дает разложение детерминанта U по элементам r-й строки. Алгебраическое дополнение V_r^l не зависит от переменного u_s^r и потому, дифференцируя равенство (14) по u_s^r, получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial u_s^r} = V_r^s. \tag{15}$$

Если положить $u_j^i = \varphi_j^i(t)$, то мы имеем $U = W(t)$. Дифференцируя $W(t)$ как сложную функцию, мы получаем в силу формулы (15):

$$\dot{W}(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial U}{\partial u_j^i} \cdot \dot{\varphi}_j^i(t) = \sum_{i,j} \dot{\varphi}_j^i(t) V_i^j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \dot{\varphi}_j^i(t) V_i^j \right).$$

Так как, очевидно,

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{\varphi}_j^i(t) V_i^j = W_i(t),$$

то формула (13) доказана.

Перейдем теперь к доказательству так называемой ***формулы Лиувилля.***

Ж) Пусть $W(t)$ — детерминант Вронского фундаментальной системы решений уравнений (2), тогда имеет место формула

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau}, \tag{16}$$

где $S(t)$ — след (т. е. сумма диагональных членов) матрицы $A(t)$

$$S(t) = a_1^1(t) + a_2^2(t) + \ldots + a_n^n(t).$$

Для доказательства формулы (16) введем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет детерминант Вронского.

Вычислим производную $\dot{W}(t)$ этого детерминанта, пользуясь формулой (13). Для того чтобы провести вычисления более обозримым образом, будем считать строки матрицы (11) векторами, именно положим:

$$\chi^i(t) = (\varphi_1^i(t), \ldots, \varphi_n^i(t)), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Соотношение (12) можно теперь записать в виде:

$$\dot{\chi}^i(t) = a_1^i(t)\chi^1(t) + \ldots + a_n^i(t)\chi^n(t). \tag{17}$$

Соотношение это показывает, что производная i-й строки матрицы (11) является линейной комбинацией строк той же матрицы. Таким образом, при вычислении детерминанта $W_i(t)$ мы должны i-ю строку детерминанта $W(t)$ заменить линейной комбинацией (17) строк того же детерминанта. Так как от прибавления кратных других строк к данной строке детерминант не меняется, то детерминант $W_i(t)$

получается из детерминанта $W(t)$ умножением его i-й строки на $a_i^i(t)$, и потому мы имеем:

$$W_i(t) = a_i^i(t)\, W(t).$$

Таким образом, в силу формулы (13) получаем:

$$\dot{W}(t) = S(t)\, W(t).$$

Единственным решением этого уравнения с начальным условием

$$W(t)\,|_{t=t_0} = W(t_0)$$

является (16). Таким образом, формула Лиувилля доказана.

Метод вариации постоянных

Перейдем теперь к изучению неоднородных систем. Пусть

$$\dot{y} = A(t)y + b(t) \tag{18}$$

— векторная запись неоднородной системы (1) и пусть $y = \psi(t)$ — некоторое решение этого уравнения. Наряду с уравнением (18) рассмотрим соответствующее однородное уравнение (3). Из замечаний § 6 непосредственно следует, что произвольное решение уравнения (18) может быть записано в виде:

$$y = \varphi(t) + \psi(t),$$

где $\varphi(t)$ есть произвольное решение уравнения (3).

Таким образом, решение неоднородного уравнения (18) сводится к решению однородного и к отысканию частного решения неоднородного уравнения. Покажем, каким образом, зная фундаментальную систему решений однородного уравнения (3), можно (при помощи квадратур) найти частное решение неоднородного уравнения.

З) (*Метод вариации постоянных.*) Пусть

$$\varphi_1(t), \ \ldots, \ \varphi_n(t)$$

— фундаментальная система решений однородного уравнения (3). Будем искать решение уравнения (18) в виде:

$$y = c^1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c^n(t)\varphi_n(t), \tag{19}$$

где коэффициентами являются неизвестные функции от t. Подставляя это значение y в уравнение (18), получаем:

$$\dot{c}^1(t)\varphi_1(t) + \ldots + \dot{c}^n(t)\varphi_n(t) + c^1(t)\dot{\varphi}_1(t) + \ldots + c^n(t)\dot{\varphi}_n(t) =$$
$$= A(t)\left(c^1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c^n(t)\varphi_n(t)\right) + b(t),$$

откуда, принимая во внимание, что $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — решения уравнения (3), получаем:

$$\dot{c}^1(t)\varphi_1(t)+\ldots+\dot{c}^n(t)\varphi_n(t)=b(t). \qquad (20)$$

Так как $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — линейно независимые векторы в каждой точке t, то из соотношения (20) величины $\dot{c}^1(t), \ldots, \dot{c}^n(t)$ определяются однозначно, и потому величины $c^1(t), \ldots, c^n(t)$ можно найти при помощи квадратур. Уравнение (20) относительно $\dot{c}^1(t), \ldots, \dot{c}^n(t)$, записанное в координатной форме, имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i(t)\dot{c}^j(t)=b^i(t), \qquad i=1, \ldots, n. \qquad (21)$$

И) Пусть $\Phi(t)=(\varphi_j^i(t))$ — фундаментальная матрица уравнения (3), обращающаяся при $t=t_0$ в единичную матрицу. Тогда решение неоднородного уравнения (18) с начальными значениями t_0, y_0 записывается в виде:

$$y=\Phi(t)\left(y_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t)b(t)\,dt\right), \qquad (22)$$

где $\Phi^{-1}(t)$ — матрица, обратная матрице $\Phi(t)$.

Непосредственно проверяется, что при $t=t_0$ формула (22) дает $y=y_0$. Точно так же можно было бы непосредственной подстановкой в уравнение (18) проверить, что формула (22) дает решение уравнения (18). Можно также вывести формулу (22) методом вариации постоянных. В самом деле, формула (21) в векторной форме переписывается следующим образом:

$$\Phi(t)\,\dot{c}\,(t)=b(t).$$

Отсюда находим:

$$\dot{c}(t)=\Phi^{-1}(t)b(t), \text{ или } c(t)=\int\Phi^{-1}(t)b(t)\,dt. \qquad (23)$$

Далее, формула (19) может быть переписана в виде:

$$y^i(t)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^i(t)c^j(t), \qquad i=1, \ldots, n,$$

или в векторной форме

$$y=\Phi(t)\,c(t).$$

Подставляя в эту формулу значение $c(t)$ из соотношения (23), получаем:

$$y=\Phi(t)\int\Phi^{-1}(t)\,b(t)dt. \qquad (24)$$

Таким образом, формула (24) (а потому и формула (22), являющаяся ее частным случаем) дает решение уравнения (18).

Матричная запись систем линейных уравнений.

В ряде случаев удобно бывает записывать уравнение (3) в *матричной форме*, при которой неизвестной величиной является фундаментальная матрица уравнения (3). Дадим здесь эту запись.

К) Пусть (7) — фундаментальная система решений уравнения (3); тогда

$$\dot{\varphi}_j^i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha^i(t)\,\varphi_j^\alpha(t).$$

В матричной форме это соотношение принимает вид:

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\,\Phi(t), \tag{25}$$

где $\dot{\Phi}(t)$ — производная фундаментальной матрицы $\Phi(t) = (\varphi_j^i(t))$ по времени t, т. е. $\dot{\Phi}(t) = (\dot{\varphi}_j^i(t))$. Таким образом, фундаментальная матрица $\Phi(t)$ уравнения (3) удовлетворяет матричному уравнению (25); более того, каждое решение матричного уравнения

$$\dot{X} = A(t)\,X, \tag{26}$$

где X — неизвестная матрица, является фундаментальной матрицей уравнения (3), если только детерминант матрицы X отличен от нуля. В дальнейшем под *решением* уравнения (26) будем подразумевать лишь такую матрицу X, удовлетворяющую уравнению (26), детерминант которой отличен от нуля. Очевидно, что отыскание одного решения матричного уравнения (26) равносильно отысканию всех решений уравнения (3). Отметим, что если $X = \Phi(t)$ и $X = \hat{\Phi}(t)$ — два решения матричного уравнения (26), то существует такая постоянная матрица P, что

$$\hat{\Phi}(t) = \Phi(t)\,P. \tag{27}$$

Докажем последнее соотношение. Пусть

$$\Phi(t) = (\varphi_j^i(t)), \quad \hat{\Phi}(t) = (\hat{\varphi}_j^i(t)),$$

$$\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \ldots, \varphi_j^n(t)), \quad \hat{\varphi}_j(t) = (\hat{\varphi}_j^1(t), \ldots, \hat{\varphi}_j^n(t));$$

тогда

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t) \tag{28}$$

есть фундаментальная система решений уравнения (3), а так как $\hat{\varphi}_j(t)$ также есть решение уравнения (3), то оно может быть выражено через фундаментальную систему (28), так что мы имеем:

$$\hat{\varphi}_j(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} p_j^\alpha \varphi_\alpha(t).$$

Переписывая это соотношение в скалярной форме, получаем:

$$\dot{\varphi}_j^i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha^i(t)\, p_j^\alpha. \tag{29}$$

Соотношение (27) представляет собой матричную запись соотношения (29) при $P = (p_j^i)$.

Л) В уравнении (3) введем новое векторное неизвестное y при помощи преобразования

$$y = S(t)\, x, \tag{30}$$

где $S(t) = (s_j^i(t))$ — невырожденная матрица, зависящая от t. Уравнение для новой неизвестной векторной функции y имеет вид:

$$\dot{y} = (\dot{S}(t) + S(t)\, A(t))\, S^{-1}(t)\, y, \tag{31}$$

т. е. вновь является уравнением типа (3). Преобразованию (30) векторного переменного соответствует преобразование

$$Y = S(t)\, X \tag{32}$$

матричного переменного (см. К)).

Выведем сначала уравнение (31) для неизвестного y. Мы имеем:

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}(S(t)\, x) = \dot{S}(t)\, x + S(t)\, \dot{x} =$$
$$= (\dot{S}(t) + S(t)\, A(t))\, x = (\dot{S}(t) + S(t)\, A(t))\, S^{-1}(t)\, y.$$

Для того чтобы установить, что преобразованию (30) векторного неизвестного соответствует преобразование (32) матричного неизвестного, перепишем преобразование (30) в скалярной форме

$$y^i = \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha^i(t)\, x^\alpha.$$

Вектору $\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \ldots, \varphi_j^n(t))$ фундаментальной системы уравнения (3) преобразование (30) ставит в соответствие вектор $\psi_j(t) = (\psi_j^1(t), \ldots, \psi_j^n(t))$ по формуле

$$\psi_j^i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha^i(t)\, \varphi_j^\alpha(t).$$

Таким образом, фундаментальной матрице $\Phi(t)$ уравнения (3) соответствует фундаментальная матрица $\Psi(t)$ уравнения (31) по формуле

$$\Psi(t) = S(t)\, \Phi(t),$$

а это и значит, что матричное неизвестное преобразуется по формуле (32).

Пример

Из предложения В) видно, что для нахождения всех решений уравнения (3) достаточно найти его фундаментальную систему решений, т. е. n линейно независимых решений. Покажем, что, зная одно нетривиальное решение системы (2), можно на единицу снизить порядок системы (2), т. е. свести ее к решению линейной системы порядка $n-1$.

Пусть

$$\varphi(t)=(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$$

— решение уравнения (3) или, что то же, системы (2). Будем искать решение уравнения (3) в виде:

$$x=u\varphi(t)+y, \tag{33}$$

где u — неизвестная функция, а y — неизвестный вектор, о котором мы будем предполагать, что первая его компонента равна нулю:

$$y=(0, y^2, \ldots, y^n).$$

Подстановка вектора x из формулы (33) в уравнение (3) дает

$$\dot{u}\varphi(t)+u\dot{\varphi}(t)+\dot{y}=A(t)(u\varphi(t)+y).$$

Учитывая тот факт, что $\varphi(t)$ есть решение уравнения (3), получаем отсюда

$$\dot{u}\varphi(t)+\dot{y}=A(t)y.$$

Выпишем это уравнение в координатной форме, выделив при этом первое из получаемых уравнений:

$$\dot{u}\varphi^1(t)=\sum_{j=2}^{n} a_j^1(t)y^j, \tag{34}$$

$$\dot{y}^i=\sum_{j=2}^{n} a_j^i(t)y^j-\dot{u}\varphi^i(t), \quad i=2, \ldots, n. \tag{35}$$

Определяя $\dot{u}$ из уравнения (34) и подставляя полученное значение в соотношения (35), получаем:

$$\dot{y}^i=\sum_{j=2}^{n} b_j^i(t)y^j, \qquad i=2, \ldots, n, \tag{36}$$

где

$$b_j^i(t)=a_j^i(t)-\frac{\varphi^i(t)}{\varphi^1(t)}a_j^1(t).$$

Следует помнить, что подстановка значения $\dot{u}$ из (34) в (35) возможна лишь на том интервале, где функция $\varphi_1(t)$ не обращается в нуль. Если теперь $\psi(t)=\{\psi^2(t), \ldots, \psi^n(t)\}$ — какое-либо решение системы

(36), то, определяя функцию u из соотношения

$$\dot{u}\varphi^1(t) = \sum_{j=2}^{n} a_j^1(t)\psi^j(t)$$

при помощи квадратуры, получаем решение исходной системы (2) в виде:

$$x = u\varphi(t) + \psi(t).$$

§ 18. Линейное уравнение n-го порядка

Здесь будет рассмотрено линейное уравнение порядка n:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = b(t), \qquad (1)$$

коэффициенты $a_i(t)$ и свободный член $b(t)$ которого мы будем предполагать определенными и непрерывными на интервале $q_1 < t < q_2$. Исследование уравнения (1) будет производиться здесь путем его сведения к нормальной системе линейных уравнений по методу, указанному в § 4.

Фундаментальная система решений

А) Для сведения уравнения (1) к нормальной линейной системе введем новые неизвестные функции

$$x^1 = y, \qquad x^2 = \dot{y}, \ \ldots, \ x^n = y^{(n-1)}.$$

Эти новые неизвестные функции $x^1, \ldots, x^n$ удовлетворяют линейной системе (см. § 4, А)):

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}^1 = x^2, \\ &\dot{x}^2 = x^3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\dot{x}^{n-1} = x^n, \\ &\dot{x}^n = -a_n(t)x^1 - a_{n-1}(t)x^2 - \ldots - a_1(t)x^n + b(t). \end{aligned}\right\}$$

Полученную систему в векторной форме запишем в виде:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad (2)$$

где матрица $A(t)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

а вектор $b(t)$ определяется формулой

$$b(t) = (0,\ 0, \ldots, b(t)).$$

Уравнения (1) и (2) эквивалентны между собой; именно, каждому решению $y = \psi(t)$ уравнения (1) соответствует решение

$$x = \varphi(t) = (\psi(t),\ \dot{\psi}(t),\ \ldots,\ \psi^{(n-1)}(t))$$

уравнения (2), и наоборот, каждому решению

$$x = \varphi(t) = (\varphi^1(t),\ \varphi^2(t),\ \ldots,\ \varphi^n(t))$$

уравнения (2) соответствует решение

$$y = \varphi^1(t)$$

уравнения (1), причем соответствие это взаимно однозначно. Если решения $\psi(t)$ уравнения (1) и $\varphi(t)$ уравнения (2) соответствуют в указанном смысле друг другу, то мы будем писать

$$\psi(t) \rightleftarrows \varphi(t).$$

Из эквивалентности уравнений (1) и (2), в частности, следует, что любое решение уравнения (1) может быть продолжено на весь интервал $q_1 < t < q_2$ (см. теорему 3), так что в дальнейшем мы будем считать, что каждое рассматриваемое решение уравнения (1) задано на этом интервале и каждое рассматриваемое значение t принадлежит ему.

В первую очередь изучим однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0. \qquad (4)$$

Пусть

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (5)$$

— соответствующая ему система уравнений, данная в векторной записи, где матрица $A(t)$ определяется формулой (3).

Б) Пусть

$$\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \ldots,\ \psi_r(t) \qquad (6)$$

— некоторая система решений уравнения (4). Непосредственно проверяется, что функция

$$\psi(t) = c^1\psi_1(t) + \ldots + c^r\psi_r(t),$$

где $c^1, \ldots, c^r$ — константы, является решением уравнения (4). Система решений (6) называется *линейно зависимой*, если существуют такие константы $c^1, \ldots, c^r$, не обращающиеся одновременно в нуль, что

$$c^1\psi_1(t) + \ldots + c^r\psi_r(t) \equiv 0. \qquad (7)$$

Оказывается, что если

$$\varphi_1(t), \ \ldots, \ \varphi_r(t) \tag{8}$$

— решения уравнения (5), соответствующие решениям (6):

$$\psi_i(t) \rightleftarrows \varphi_i(t), \qquad i = 1, \ \ldots, \ r$$

(см. А)), то решения (8) линейно зависимы (см. § 17, Б)) тогда и только тогда, когда линейно зависимы решения (6).

Докажем это. Допустим, что решения (6) линейно зависимы, т. е. имеет место соотношение (7). Выписывая соотношение (7) и те соотношения, которые получаются из него путем дифференцирования, получаем:

$$\left.\begin{aligned} c^1\psi_1(t) + \ldots + c^r\psi_r(t) &= 0, \\ c^1\dot{\psi}_1(t) + \ldots + c^r\dot{\psi}_r(t) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ c^1\psi_1^{(n-1)}(t) + \ldots + c^r\psi_r^{(n-1)}(t) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Принимая во внимание, что

$$\varphi_i(t) = (\psi_i(t), \ \dot{\psi}_i(t), \ \ldots, \ \psi_i^{(n-1)}(t)),$$

мы видим, что соотношения (9) в векторной записи имеют вид:

$$c^1\varphi_1(t) + \ldots + c^r\varphi_r(t) = 0, \tag{10}$$

так что имеет место линейная зависимость и между решениями (8) Допустим, наоборот, что решения (8) линейно зависимы, т. е. что имеют место соотношения (10). Ставя в соотношение (10) вместо каждого вектора $\varphi_i(t)$ его первую компоненту, получаем соотношение (7), так что решения (6) линейно зависимы.

В) Система решений

$$\psi_1(t), \ \ldots, \ \psi_n(t) \tag{11}$$

уравнения (4) называется *фундаментальной*, если она линейно независима (обозначениями предусмотрено, что число решений системы (11) равно порядку уравнения (4)). Оказывается, что фундаментальные системы решений уравнения (4) существуют и что если система (11) является фундаментальной, то каждое решение уравнения (4) может быть записано в виде:

$$\psi(t) = c^1\psi_1(t) + \ldots + c^n\psi_n(t),$$

где $c^1, \ \ldots, \ c^n$ — константы. Из сказанного видно, что для нахождения всех решений уравнения (4) достаточно найти его фундаментальную систему решений. (Для линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами фундаментальная система решений была построена в § 7, 8.)

Покажем прежде всего, что фундаментальная система решений уравнения (4) существует. Для этого воспользуемся фактом существования фундаментальной системы решений уравнения (5) (см. § 17, В)). Пусть

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t) \tag{12}$$

— фундаментальная система решений уравнения (5) и пусть

$$\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t) \tag{13}$$

— соответствующие решениям (12) решения уравнения (4):

$$\psi_i(t) \rightleftarrows \varphi_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n$$

(см. А)). Так как решения (12) линейно независимы, то в силу Б) линейно независимы и решения (13), и потому они составляют фундаментальную систему. Допустим теперь, что система (11) является фундаментальной для уравнения (4) и пусть решения (12) соответствуют решениям (11). Пусть, далее, $\psi(t)$ — произвольное решение уравнения (4) и $\varphi(t)$ — соответствующее ему решение уравнения (5). Так как система (11) по предположению фундаментальна, т. е. линейно независима, то соответствующая ей система (12) также линейно независима, т. е. фундаментальна. Таким образом, в силу предложения В) § 17, получаем:

$$\varphi(t) = c^1\varphi_1(t) + \ldots + c^n\varphi_n(t).$$

Заменяя в этом соотношении каждый вектор его первой компонентой, получаем:

$$\psi(t) = c^1\psi_1(t) + \ldots + c^n\psi_n(t).$$

Таким образом, предложение В) доказано.

Г) *Детерминантом Вронского* системы решений (11) уравнения (4) называется детерминант:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \psi_1(t) & \ldots & \psi_n(t) \\ \dot\psi_1(t) & \ldots & \dot\psi_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Если решения (12) уравнения (5) соответствуют решениям (11) (см. А)), то детерминант Вронского (см. § 17, Г)) системы решений (12) уравнения (5) совпадает с детерминантом (14); это видно непосредственно. Таким образом, то, что верно для детерминанта Вронского системы (12), верно и для детерминанта (14). Отсюда в силу предложения Г) § 17 заключаем, что детерминант (14) или не обращается в нуль ни в одной точке, или равен нулю тождественно; для того чтобы система решений (11) была линейно независимой, т. е. фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы детерминант (14) не обращался в нуль. Из предложения Ж) § 17 следует формула Лиувилля для детерминанта (14):

$$W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\, d\tau}. \tag{15}$$

Она получается из формулы (16) § 17, если учесть, что след, т. е. сумма диагональных членов матрицы (3), равен $-a_1(t)$. Ниже, в примере 2, будет дано более простое непосредственное доказательство формулы (15).

Д) Пусть

$$z^{(n)} + a_1(t)\, z^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, z = b(t) \tag{16}$$

— неоднородное уравнение и пусть

$$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, y = 0 \tag{17}$$

— соответствующее ему однородное уравнение. Из предложений § 6 непосредственно следует, что если $\chi_0(t)$ есть частное решение уравнения (16), то произвольное решение уравнения (16) имеет вид:

$$z = \psi(t) + \chi_0(t),$$

где $\psi(t)$ — решение уравнения (17).

Метод вариации постоянных

Е) Пусть

$$\psi_1(t), \ \ldots, \ \psi_n(t) \tag{18}$$

— какая-либо фундаментальная система решений уравнения (17). Тогда решение уравнения (16) может быть получено в виде:

$$z = c^1(t)\, \psi_1(t) + \ldots + c^n(t)\, \psi_n(t), \tag{19}$$

где функции

$$\dot{c}^1(t), \ \ldots, \ \dot{c}^n(t) \tag{20}$$

получаются как решения системы алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1(t)\, \dot{c}^1(t) + \ldots + \psi_n(t)\, \dot{c}^n(t) = 0,\\
&\dot{\psi}_1(t)\, \dot{c}^1(t) + \ldots + \dot{\psi}_n(t)\, \dot{c}^n(t) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\psi_1^{(n-2)}(t)\, \dot{c}^1(t) + \ldots + \psi_n^{(n-2)}(t)\, \dot{c}^n(t) = 0,\\
&\psi_1^{(n-1)}(t)\, \dot{c}^1(t) + \ldots + \psi_n^{(n-1)}(t)\, \dot{c}^n(t) = b(t).
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Так как детерминант системы уравнений (21) относительно неизвестных величин (20) есть детерминант Вронского системы решений (18), то в силу предложения Г) он не обращается в нуль ни при одном значении t, и потому из системы уравнений (21) можно определить величины (20), а по ним определяются квадратурами и нужные нам функции

$$c^1(t),\ \dots,\ c^n(t).$$

Доказательство предложения Е) вытекает из предложения З) § 17. Можно также провести его и непосредственно. Сделаем это. Предполагая, что на величины (20) наложены условия (21), мы получаем из формулы (19) путем дифференцирования следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
z &= c^1(t)\psi_1(t)+\dots+c^n(t)\psi_n(t),\\
\dot z &= c^1(t)\dot\psi_1(t)+\dots+c^n(t)\dot\psi_n(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
z^{(n-1)} &= c^1(t)\psi_1^{(n-1)}(t)+\dots+c^n(t)\psi_n^{(n-1)}(t),\\
z^{(n)} &= c^1(t)\psi_1^{(n)}(t)+\dots+c^n(t)\psi_n^{(n)}(t)+\\
&\quad+\dot c^1(t)\psi_1^{(n-1)}(t)+\dots+\dot c^n(t)\psi_n^{(n-1)}(t)=\\
&= c^1(t)\psi_1^{(n)}(t)+\dots+c^n(t)\psi_n^{(n)}(t)+b(t).
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (16), получаем тождество. Таким образом, если функции $c^1(t),\ \dots,\ c^n(t)$ удовлетворяют соотношениям (21), то функция (19) является решением уравнения (16).

Примеры

1. Если известно нетривиальное (не равное тождественно нулю) решение $\psi(t)$ уравнения (4), то порядок этого уравнения можно снизить на единицу, т. е. свести его решение к решению линейного уравнения порядка $n-1$. Для этого произведем замену

$$y=\psi(t)v, \tag{22}$$

где v — новая неизвестная функция. Мы покажем сейчас, что результат подстановки (22) в левую часть уравнения (4) приводит нас к уравнению

$$b_0(t)v^{(n)}+b_1(t)v^{(n-1)}+\dots+b_{n-1}(t)\dot v+b_n(t)v=0 \tag{23}$$

для v, причем

$$b_0(t)=\psi(t),\qquad b_n(t)\equiv 0. \tag{24}$$

Так как все наше исследование справедливо для уравнения n-го порядка, коэффициент при n-й производной у которого равен единице, то соотношение (23) приходится делить на $b_0(t)=\psi(t)$, и потому сведение уравнения (4) к уравнению (23) имеет место лишь на таком интервале, где $\psi(t)$ не обращается в нуль. Полагая

$$\frac{b_i(t)}{\psi(t)} = l_i(t)$$

и заменяя неизвестную функцию v новой неизвестной функцией

$$w = \dot{v},$$

мы приходим к уравнению

$$w^{(n-1)} + l_1(t)\, w^{(n-2)} + \ldots + l_{n-1}(t)\, w = 0$$

порядка $n-1$. Если имеется решение $\chi(t)$ этого уравнения, то решение v уравнения (23) получаем квадратурой:

$$v = \int \chi(t)\, dt,$$

а решение y уравнения (4) получается подстановкой найденной функции v в (22).

Докажем, что подстановка (22) приводит уравнение (4) к виду (23), причем выполнены соотношения (24). Дифференцируя соотношения (22), получаем:

$$y^{(k)} = \psi(t)\, v^{(k)} + \ldots,$$

где не выписаны члены, содержащие производные от v порядков, меньших чем k. Из этого следует, что уравнение (4) принимает вид (23), причем $b_0(t) = \psi(t)$. Так как $\psi(t)$ есть решение уравнения (4), то $v = 1$ есть решение уравнения (23). Подставляя решение $v = 1$ в (23), получаем $b_n(t) = 0$. Таким образом, соотношения (24) доказаны.

2. Приведем доказательство формулы Лиувилля (15) для одного уравнения n-го порядка, не опирающееся на формулу Лиувилля для системы (см. формулу (16) § 17). При этом мы будем пользоваться правилом дифференцирования детерминанта, данным в § 17 (см. § 17, Е)). В силу этого правила дифференцирования мы получаем из (14):

$$\dot{W}(t) = W_1(t) + \ldots + W_i(t) + \ldots + W_n(t),$$

где $W_i(t)$ есть определитель Вронского $W(t)$, в котором продифференцирована i-я строка. Если $i < n$, то в результате дифференцирования i-й строки мы получаем строку, совпадающую с $(i+1)$-й строкой определителя $W(t)$, и потому мы имеем:

$$W_1(t) = W_2(t) = \ldots = W_{n-1}(t) = 0.$$

При дифференцировании n-й строки мы получаем строку

$$\psi_1^{(n)}(t), \ldots, \psi_n^{(n)}(t),$$

которая в силу уравнения (4) является линейной комбинацией строк определителя $W(t)$, причем n-я строка берется с коэффициентом

$-a_1(t)$. В силу наличия в определителе $W_n(t)$ строк определителя Вронского с номерами $1, \ldots, n-1$, эти строки в линейной комбинации можно отбросить, и остается лишь n-я строка с коэффициентом $-a_1(t)$. Таким образом, для определителя Вронского получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{W}(t) = -a_1(t)\, W(t).$$

Решая его, получаем формулу Лиувилля (15).

§ 19. Нормальная линейная однородная система с периодическими коэффициентами

Среди линейных уравнений с переменными коэффициентами особенно важную роль играют уравнения с *периодическими* коэффициентами. Настоящий параграф посвящается изложению некоторых свойств нормальных линейных однородных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Из приводимых здесь свойств этих систем центральным является теорема Ляпунова. Приведенное здесь доказательство теоремы Ляпунова менее элементарно, чем все предыдущее изложение книги. Оно опирается на *матричное исчисление*, необходимые сведения из которого излагаются в добавлении II.

Пусть

$$\dot{X} = A(t)\, X \tag{1}$$

— нормальная линейная однородная система уравнений, записанная в матричной форме (см. § 17, К)). Мы будем предполагать, что коэффициенты этой системы являются периодическими функциями времени t с периодом τ, т. е. матрица $A(t)$ удовлетворяет условию

$$A(t+\tau) = A(t).$$

А) Для всякого (матричного) решения

$$X = \Phi(t) \tag{2}$$

уравнения (1) (см. § 17, К)) найдется такая постоянная (невырожденная) матрица C, что

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)\, C.$$

Матрицу C мы будем называть *основной* для решения (2). Если $X = \hat{\Phi}(t)$ — какое-либо другое решение уравнения (1), а $\hat{C}$ — его основная матрица, то мы имеем:

$$\hat{C} = P^{-1} C P, \tag{3}$$

где P — некоторая невырожденная постоянная матрица.

Для доказательства существования матрицы C заметим, что, наряду с решением (2), решением уравнения (1) является и матрица $\Phi(t+\tau)$. В самом деле,

$$\dot{\Phi}(t+\tau)=A(t+\tau)\Phi(t+\tau)=A(t)\Phi(t+\tau).$$

Таким образом, в силу формулы (27) § 17 имеем:

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C,$$

где C — постоянная матрица.

Для доказательства формулы (3) также воспользуемся формулой (27) § 17. Так как $\hat{\Phi}(t)$ есть решение уравнения (1), то в силу упомянутой формулы имеем:

$$\hat{\Phi}(t)=\Phi(t)P.$$

Отсюда

$$\hat{\Phi}(t+\tau)=\Phi(t+\tau)P=\Phi(t)CP=\hat{\Phi}(t)P^{-1}CP,$$

что и дает соотношение (3).

Б) Уравнение (1) и уравнение

$$\dot{Y}=B(t)Y \tag{4}$$

с периодической матрицей $B(t)$ того же периода τ, что и матрица $A(t)$, называются *эквивалентными*, если существует линейное преобразование

$$Y=S(t)X$$

(см. § 17, Л)) с периодической матрицей $S(t)$ периода τ, переводящее уравнение (1) в уравнение (4). Оказывается, что уравнения (1) и (4) тогда и только тогда эквивалентны, когда существуют решения $X=\Phi(t)$ и $Y=\Psi(t)$ этих уравнений с одной и той же основной матрицей.

Докажем это утверждение. Допустим сначала, что уравнения (1) и (4) эквивалентны. Пусть $X=\Phi(t)$ — произвольное решение уравнения (1) с основной матрицей C; тогда $Y=\Psi(t)=S(t)\Phi(t)$ есть решение уравнения (4), и мы имеем:

$$\Psi(t+\tau)=S(t+\tau)\Phi(t+\tau)=S(t)\Phi(t+\tau)=S(t)\Phi(t)C=\Psi(t)C.$$

Таким образом, основная матрица C решения $\Phi(t)$ является основной и для решения $\Psi(t)$.

Допустим теперь, что существуют решения $X=\Phi(t)$ и $Y=\Psi(t)$ уравнений (1) и (4) с одной и той же основной матрицей C; тогда мы имеем:

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C, \qquad \Psi(t+\tau)=\Psi(t)C.$$

Деля второе из этих соотношений справа на первое, получаем:

$$\Psi(t+\tau)\Phi^{-1}(t+\tau)=\Psi(t)\Phi^{-1}(t).$$

Таким образом, матрица

$$S(t)=\Psi(t)\Phi^{-1}(t)$$

является периодической с периодом τ, и мы имеем:

$$\Psi(t)=S(t)\Phi(t). \qquad (5)$$

Так как каждое из решений $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ однозначно определяет свое уравнение (см. § 17, Д)), то из (5) следует, что уравнение (4) получается из уравнения (1) путем преобразования с матрицей $S(t)$.

Как видно из предложений А) и Б), каждому уравнению вида (1), рассматриваемому с точностью до эквивалентности (см. Б)), соответствует матрица C, определенная с точностью до трансформации (см. (3)). Более того, совокупность всех инвариантов матрицы C относительно преобразований вида (3) составляет **полную систему инвариантов** уравнения (1), определенного с точностью до эквивалентности.

Следует заметить, что все сказанное в предложениях А) и Б) верно как в случае, когда рассматриваются только действительные матрицы, так и в случае, когда рассматриваются комплексные матрицы. В нижеследующей важной теореме Ляпунова (теорема 12) мы будем различать действительный и комплексный случаи.

Теорема 12. *Всякое уравнение* (1) *эквивалентно* (*см.* Б)) *уравнению*

$$\dot{Y}=BY,$$

где B — постоянная матрица. (Матрица B, вообще говоря, комплексна.) Если в уравнении (1) *матрица $A(t)$ периода τ действительна, то это уравнение, рассматриваемое как периодическое, с периодом 2τ, эквивалентно уравнению*

$$\dot{Y}=B_1Y,$$

где матрица B_1 постоянна и действительна, причем матрица перехода $S(t)$ от уравнения (1) *к уравнению $\dot{Y}=B_1Y$ также действительна.*

Доказательству теоремы 12 предпошлем следующее предложение.

В) Пусть

$$\dot{Y}=BY \qquad (6)$$

— система линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами, записанная в матричной форме. Матрица B здесь постоянна. Оказывается, что матрица

$$Y=e^{tB} \qquad (7)$$

(см. § 35, Г)) является решением уравнения (6).

Для доказательства того, что (7) есть решение уравнения (6), выпишем функцию e^{tB} в явном виде. Мы имеем:

$$e^{tB} = E + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 + \frac{t^3}{3!}B^3 + \ldots$$

Отсюда для производной $\frac{d}{dt}e^{tB}$ получаем:

$$\frac{d}{dt}e^{tB} = B\left(E + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 + \ldots\right) = Be^{tB}.$$

Доказательство теоремы 12. Пусть C — основная матрица некоторого решения $X = \Phi(t)$ уравнения (1). В силу предложения Г) § 35 существует матрица B, удовлетворяющая условию

$$e^{\tau B} = C.$$

Докажем, что уравнения (1) и

$$\dot{Y} = BY \tag{8}$$

эквивалентны. Действительно, в силу предложения В) матрица $Y = e^{tB}$ является решением уравнения (8). Таким образом, если уравнение (8) рассматривать как уравнение с периодическими коэффициентами с периодом τ, то основная матрица решения $Y = e^{tB}$ есть C, именно (см. формулу (20) § 35):

$$e^{(t+\tau)B} = e^{tB}e^{\tau B} = e^{tB}C.$$

Так как основные матрицы рассматриваемых решений уравнения (1) и уравнения (8) совпадают, то эти уравнения эквивалентны (см. Б)). Таким образом, первая часть теоремы 12 доказана.

Будем считать теперь, что $A(t)$ — действительная матрица, $\Phi(t)$ — некоторое действительное решение уравнения (1) и C — основная матрица этого решения, так что

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C. \tag{9}$$

Так как $\Phi(t)$ — действительная матрица, то C — также действительная матрица. Из (9) следует, что

$$\Phi(t+2\tau) = \Phi(t+\tau)C = \Phi(t)C^2. \tag{10}$$

В силу предложения Г) § 35 существует действительная матрица B_1, удовлетворяющая условию

$$e^{2\tau B_1} = C^2.$$

Докажем, что уравнение (1) и уравнение

$$\dot{Y} = B_1 Y, \tag{11}$$

рассматриваемые как уравнения с периодом 2τ, эквивалентны. Действительно, матрица e^{tB_1} является решением уравнения (11). Таким образом, если уравнение (11) рассматривать как уравнение с периодическими коэффициентами периода 2τ, то основная матрица решения $Y=e^{tB_1}$ есть C^2. Так как основные матрицы рассматриваемых решений уравнений (1) и (11) (см. (10)) совпадают, то эти уравнения эквивалентны.

Итак, теорема 12 доказана.

Г) Пусть C — произвольная квадратная матрица порядка n, модули всех собственных значений которой меньше некоторого положительного числа ρ. Элементы матрицы C^m, где m — натуральное число, обозначим через ${}^mc_j^i$, так что $C^m=({}^mc_j^i)$. Тогда существует такое положительное число r, не зависящее от i, j, m, что

$$|{}^mc_j^i|<r\rho^m. \qquad (12)$$

Отсюда, в частности, следует, что для произвольного вектора x имеет место неравенство

$$|C^mx|\leqslant n^2r\rho^m|x|. \qquad (13)$$

Для доказательства оценки (12) рассмотрим ряд

$$f(z)=1+\frac{z}{\rho}+\frac{z^2}{\rho^2}+\ldots+\frac{z^m}{\rho^m}+\ldots,$$

радиус сходимости которого, очевидно, равен ρ. Из теоремы 29 (см. § 35) следует, что матричный ряд

$$f(C)=E+\frac{C}{\rho}+\frac{C_2}{\rho^2}+\ldots+\frac{C^m}{\rho^m}+\ldots;$$

сходится и, в частности, сходится числовой ряд

$$\delta_j^i+\frac{{}^1c_j^i}{\rho}+\frac{{}^2c_j^i}{\rho^2}+\ldots+\frac{{}^mc_j^i}{\rho^m}+\ldots$$

Так как ряд этот сходится, то все его члены не превосходят некоторого числа r, причем число r можно выбрать общим для всех пар чисел (i, j). Таким образом, оценка (12) имеет место.

Д) Пусть

$$\dot{x}=A(t)x \qquad (14)$$

— векторная запись матричного уравнения (1) и C — основная матрица некоторого решения $\Phi(t)$ уравнения (1). Собственное значение λ кратности k матрицы C называется *характеристическим числом* кратности k уравнения (1) и уравнения (14). Так как с точностью до трансформации матрица C не зависит от случайности выбора решения $\Phi(t)$ уравнения (1) (см. А)), то характеристические числа уравнения (14) и их кратности определены здесь инвариантно. Если λ есть характеристическое число кратности k уравнения (14), то число $\frac{1}{\tau}\ln\lambda$ называется *характеристическим показателем* кратности k уравнения (14). Допустим, что все действительные части характеристических показателей уравнения (14) меньше некоторого числа γ; тогда существует такое положительное число R, что для всякого решения $\varphi(t)$ уравнения (14) имеет место оценка

$$|\varphi(t)| \leqslant R\,|\varphi(0)|\,e^{\gamma t} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0. \tag{15}$$

Докажем неравенство (15). Пусть $\Phi(t)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $\Phi(0)=E$; тогда любое решение $\varphi(t)$ уравнения (14) записывается в виде:

$$\varphi(t)=\Phi(t)\,\varphi(0). \tag{16}$$

Это проверяется подстановкой вектора (16) в уравнение (14). Далее мы имеем:

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)\,C,\ \Phi(t+2\tau)=\Phi(t)\,C^2,\ \ldots,\ \Phi(t+m\tau)= \\ =\Phi(t)\,C^m,\ \ldots \tag{17}$$

Так как на отрезке $0\leqslant t_1\leqslant\tau$ элементы матрицы $\Phi(t_1)$ ограничены, то существует такое положительное число σ, что

$$|\Phi(t_1)\,x| \leqslant \sigma\,|x| \quad \text{при} \quad 0\leqslant t_1\leqslant\tau. \tag{18}$$

Так как, далее, все собственные значения матрицы C по модулю меньше числа $e^{\tau\gamma}$, то в силу (13) для произвольного вектора x имеет место оценка

$$|C^m x| \leqslant n^2 r e^{\tau m\gamma}\,|x|. \tag{19}$$

Пусть теперь t — произвольное положительное число; найдем тогда такое целое неотрицательное число m, что

$$t=m\tau+t_1, \qquad 0\leqslant t_1<\tau.$$

В силу (16) и (17) мы имеем:

$$\varphi(t)=\Phi(m\tau+t_1)\,\varphi(0)=\Phi(t_1)\,C^m\,\varphi(0).$$

Отсюда согласно (18) и (19) получаем:

$$|\varphi(t)| \leqslant \sigma n^2 r e^{\tau m\gamma}\,|\varphi(0)|.$$

Так как число $e^{t_1\gamma}$ при $0\leqslant t_1\leqslant\tau$ не меньше некоторой константы $c>0$, то последнее неравенство можно записать в виде:

$$|\varphi(t)| \leqslant \frac{\sigma n^2 r}{c}\,e^{\gamma t}\,|\varphi(0)|.$$

Таким образом, оценка (15) доказана.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ
ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Здесь в первую очередь доказываются уже формулированные ранее теоремы 1, 2, 3 существования и единственности. Далее, рассматривается вопрос о зависимости решения от начальных значений и параметров, если последние входят в уравнения. В первую очередь разбирается зависимость решения с фиксированными начальными значениями от параметров, а затем весьма простым приемом начальные значения превращаются в параметры, и, таким образом, дело сводится к вопросу о зависимости решения от параметров. Как в случае начальных значений, так и в случае параметров доказываются непрерывная зависимость решения от этих переменных и дифференцируемость решения по ним.

В том и другом случае здесь приводятся только так называемые интегральные теоремы, а нередко упоминаемые в учебниках «локальные» теоремы вообще не приведены. Объясняется это тем, что как в самой теории, так и в ее приложениях важны именно интегральные теоремы; локальные же теоремы в лучшем случае служат средством доказательства интегральных и не заслуживают специального внимания. Слово «интегральные», употребленное здесь, никакого отношения к операции интегрирования не имеет. Оно означает лишь, что решения рассматриваются не на малых интервалах времени, а «интегрально», «в целом», т. е. рассматриваются непродолжаемые решения (см. § 3, А)). В связи с этим изучению непродолжаемых решений посвящен здесь специальный параграф (§ 22).

Кроме этого материала, в настоящую главу включен параграф о первых интегралах системы обыкновенных дифференциальных уравнений и примыкающее к понятию первого интеграла исследование линейного уравнения в частных производных. Результаты этого параграфа в дальнейшем изложении нигде не используются.

§ 20. Доказательство теоремы существования и единственности для одного уравнения

В этом параграфе будет дано доказательство сформулированной в § 1 теоремы 1 существования и единственности для одного уравнения первого порядка

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

правая часть которого определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$ на некотором открытом множестве Г плоскости P переменных t, x. Доказательство теоремы 2, приводимое в следующем параграфе, представляет собой усложнение доказательства теоремы 1 и содержит его как частный случай. Приводя доказательство сначала для случая одного уравнения, я имею целью выявить основные *идеи* этого доказательства, которые в общем случае загромождаются второстепенными деталями. Доказательство теорем 1 и 2 проводится в этой книге *методом последовательных приближений*, принадлежащим Пикару и применяемым в анализе при доказательстве многих теорем существования. Этот метод является одновременно методом приближенного вычисления решения и потому имеет большую практическую ценность. В некоторых случаях метод последовательных приближений может быть истолкован как *метод сжатых отображений*. Здесь я провожу доказательство таким образом, чтобы показать близость этих двух методов. Различие же этих методов выявится при доказательстве теоремы 3.

Основные идеи доказательства

Первым шагом при доказательстве теоремы 1 методом последовательных приближений является переход от дифференциального уравнения к *интегральному*, который мы формулируем в виде отдельного предложения.

А) Пусть $x = \varphi(t)$ — некоторое решение уравнения (1), определенное на интервале $r_1 < t < r_2$, так что выполнено тождество

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \tag{2}$$

и пусть

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{3}$$

— некоторое начальное условие, которому это решение удовлетворяет. Оказывается, что тогда для функции $\varphi(t)$ на всем интервале $r_1 < t < r_2$ выполнено интегральное тождество

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau. \tag{4}$$

Обратно, если для некоторой непрерывной функции $\varphi(t)$ на интервале $r_1 < t < r_2$ выполнено тождество (4), то функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема, является решением уравнения (1) и удовлетворяет начальному условию (3). Кратко говоря, интегральное уравнение (4) эквивалентно дифференциальному уравнению (2) вместе с начальным условием (3).

Докажем это. Допустим сначала, что выполнено соотношение (4). Заменяя в нем переменное t его значением t_0, получаем: $\varphi(t_0)=x_0$. Таким образом, из (4) вытекает (3). Далее, правая часть тождества (4) очевидно дифференцируема по t, а потому дифференцируема по t и левая его часть. В результате дифференцирования тождества (4), получаем тождество (2).

Допустим теперь, что выполнены соотношения (2) и (3). Интегрируя соотношение (2) в пределах от t_0 до t, получаем:

$$\varphi(t)-\varphi(t_0)=\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau.$$

В силу соотношения (3) из последнего равенства получаем (4).

Таким образом, предложение А) доказано.

Введем теперь некоторые обозначения, используемые ниже при доказательстве теоремы 1.

Б) Пусть $x=\varphi(t)$ — такая непрерывная функция, определенная на некотором отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, что ее график целиком расположен в открытом множестве Γ, и t_0 — некоторая точка отрезка $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Тогда, пользуясь правой частью тождества (4), можно функции $\varphi(t)$ поставить в соответствие функцию $\varphi^*(t)$, определенную также на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, при помощи равенства

$$\varphi^*(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \tag{5}$$

(график функции $\varphi^*(t)$, конечно, уже может не проходить в множестве Γ). Таким образом, правую часть тождества (4) можно рассматривать как о п е р а т о р, ставящий в соответствие функции φ функцию φ^*. Обозначая этот оператор одной буквой A, мы запишем соотношение (5) в виде формулы

$$\varphi^*=A\varphi. \tag{6}$$

Пользуясь оператором A, интегральное уравнение (4) можно записать в виде:

$$\varphi=A\varphi. \tag{7}$$

В) Пусть $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная функция, определенная на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. *Нормой* $\|\varphi\|$ этой функции называется максимум ее модуля

$$\|\varphi\|=\max_{r_1 \leqslant t \leqslant r_2} |\varphi(t)|.$$

Если $\psi(t)$ и $\chi(t)$ — две непрерывные функции, заданные на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, то норма $\|\psi-\chi\|$ их разности $\psi(t)-\chi(t)$ является не-отрицательным числом, оценивающим, насколько сильно отличаются эти функции друг от друга. Если число $\|\psi - \chi\|$ мало, то функции ψ и χ «близки» друг к другу. Равенство $\|\psi - \chi\| = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда функции ψ и χ тождественно совпадают. Пользуясь понятием нормы, легко можно формулировать известное из курса анализа условие равномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Пусть

$$\varphi_0(t),\ \varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_i(t),\ \ldots \tag{8}$$

— последовательность непрерывных функций, заданных на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Последовательность (8) равномерно сходится к функции φ, определенной на том же отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, если

$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi - \varphi_i\| = 0.$$

Для того, чтобы последовательность (8) равномерно сходилась, достаточно, чтобы имели место неравенства

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant a_i,$$

где числа $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots$ образуют сходящийся ряд.

Прежде чем перейти к детальному проведению доказательства теоремы 1, изложим кратко суть метода последовательных приближений, применяемого для решения уравнения (7). Строится последовательность

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_i,\ \ldots \tag{9}$$

непрерывных функций, определенных на некотором отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, который содержит внутри себя точку t_0. Каждая функция последовательности (9) определяется через предыдущую при помощи равенства

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{10}$$

Если график функции φ_i проходит в множестве Γ, то функция φ_{i+1} равенством (10) определяется, но для того, чтобы могла быть определена следующая функция φ_{i+2}, нужно, чтобы и график функции φ_{i+1} проходил в множестве Γ. Этого, как мы покажем, удается достичь, выбрав отрезок $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ достаточно коротким. Далее, также за счет уменьшения длины отрезка $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, можно достичь того, чтобы для последовательности (9) выполнялись неравенства

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant k \|\varphi_i - \varphi_{i-1}\|, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{11}$$

где $0 < k < 1$. Из неравенств (11) следуют неравенства

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_0\| \cdot k^i, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,$$

и, таким образом, последовательность (9) равномерно сходится (см. В)).

Далее уже легко устанавливается, что предел φ последовательности (9) удовлетворяет уравнению (7).

Ту же конструкцию можно описать несколько иным способом — в форме метода сжатых отображений. Выберем некоторое семейство Ω функций, заданных на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ (причем $r_1 < t_0 < r_2$), так, чтобы графики этих функций проходили в множестве Γ. Допустим еще, что в отношении оператора A семейство Ω удовлетворяет следующим двум условиям: 1) применяя оператор A к любой функции семейства Ω, мы вновь получаем функцию семейства Ω; 2) существует такое число k, $0 < k < 1$, что для двух произвольных функций ψ и χ семейства Ω выполнено неравенство

$$\|A\psi - A\chi\| \leqslant k\|\psi - \chi\|.$$

В этом смысле отображение A является сжатым (правильнее было бы сказать «сжимающим»).

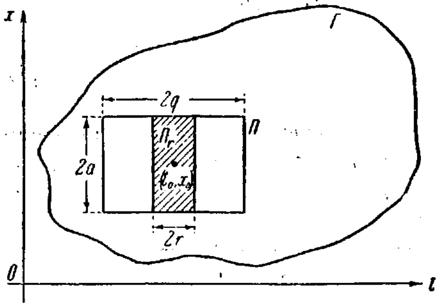


Рис. 39.

Легко видеть, что если для семейства Ω выполнены сформулированные условия, то, исходя из произвольной его функции φ_0, мы по индуктивной формуле (10) получим бесконечную последовательность (9), удовлетворяющую условию (11), и, как было отмечено выше, равномерно сходящуюся к решению φ уравнения (7).

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1 на основе изложенных соображений.

Доказательство теоремы 1

Начальные значения t_0 и x_0 искомого решения уравнения (1) являются координатами точки (t_0, x_0), лежащей в множестве Γ. Выберем прежде всего какой-либо прямоугольник Π с центром в точке (t_0, x_0) со сторонами, параллельными осям, целиком вместе со своей границей содержащийся в множестве Γ (рис. 39). Длину горизонтальной (параллельной оси t) стороны прямоугольника Π обозначим через $2q$, а длину вертикальной стороны — через $2a$. Таким образом, точка (t, x) тогда и только тогда принадлежит прямоугольнику Π, когда выполнены неравенства:

$$|t - t_0| \leqslant q, \qquad |x - x_0| \leqslant a. \tag{12}$$

Так как прямоугольник Π есть **замкнутое** множество, содержащееся в Γ, то непрерывные на нем функции $f(t, x)$ и $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ ограничены, и потому существуют такие положительные числа M и K, что для t и x, удовлетворяющих условиям (12), выполнены неравенства

$$|f(t, x)| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant K. \tag{13}$$

Наряду с прямоугольником П будем рассматривать более «узкий» прямоугольник Π_r, определяемый неравенствами

$$|t - t_0| \leqslant r, \qquad |x - x_0| \leqslant a,$$

где

$$r \leqslant q \tag{14}$$

(см. рис. 39). Более точно число r определим далее. Обозначим через Ω_r семейство всех непрерывных функций, заданных на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$, графики которых проходят в прямоугольнике Π_r. Таким образом, функция φ, определенная на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$, тогда и только тогда принадлежит семейству Ω_r, когда для любого t, принадлежащего этому отрезку, выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - x_0| \leqslant a. \tag{15}$$

Постараемся теперь выбрать число r таким образом, чтобы были выполнены следующие два условия:

а) Если функция φ принадлежит семейству Ω_r, то функция $\varphi^* = A\varphi$ (см. (5), (6)) также принадлежит семейству Ω_r.

б) Существует такое число k, $0 < k < 1$, что для любых двух функций ψ и χ семейства Ω_r имеет место неравенство

$$\| A\psi - A\chi \| \leqslant k \| \psi - \chi \|. \tag{16}$$

Рассмотрим условие а). Для того чтобы функция $\varphi^* = A\varphi$ принадлежала семейству Ω_r, необходимо и достаточно, чтобы при $|t - t_0| \leqslant r$ было выполнено неравенство

$$|\varphi^*(t) - x_0| \leqslant a.$$

В силу (5) и (13) мы имеем:

$$|\varphi^*(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau\right| \leqslant Mr.$$

Из этого видно, что при

$$r \leqslant \frac{a}{M} \tag{17}$$

условие а) выполнено.

Рассмотрим теперь условие б). Мы имеем:

$$\psi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi(\tau))\, d\tau,$$

$$\chi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \chi(\tau))\, d\tau.$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем:

$$|\psi^*(t) - \chi^*(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau)))\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau))|\, d\tau \right|. \tag{18}$$

Оценим теперь последнее подынтегральное выражение, пользуясь формулой Лагранжа и вторым из неравенств (13):

$$|f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau))| = \left| \frac{\partial f(\tau, \theta)}{\partial x} (\psi(\tau) - \chi(\tau)) \right| \leqslant K \cdot |\psi(\tau) - \chi(\tau)|; \tag{19}$$

здесь θ — число, заключенное между $\psi(\tau)$ и $\chi(\tau)$ и, следовательно, удовлетворяющее неравенству $|\theta - x_0| \leqslant a$. Из (18) и (19) следует:

$$\|A\psi - A\chi\| = \|\psi^* - \chi^*\| \leqslant Kr\|\psi - \chi\|.$$

Таким образом, условие б) выполнено, если число $k = Kr$ меньше единицы, т. е. если

$$r < \frac{1}{K}. \tag{20}$$

Итак, если число r удовлетворяет неравенствам (14), (17) и (20), то для семейства Ω_r выполнены условия а) и б). В дальнейшем будем считать число r выбранным таким образом, что неравенства (14), (17) и (20) для него выполнены.

Построим теперь последовательность

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \ldots, \quad \varphi_i, \quad \ldots \tag{21}$$

функций, определенных на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$, положив:

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \tag{22}$$

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{23}$$

Так как функция (22) принадлежит семейству Ω_r, то и все функции последовательности (21) принадлежат этому же семейству (см.

условие а)). Далее, мы имеем (см. (15)):

$$\| \varphi_1 - \varphi_0 \| = \max_{|t-t_0| \leqslant r} |\varphi_1 - x_0| \leqslant a.$$

В силу (16) получаем:

$$\| \varphi_{i+1} - \varphi_i \| = \| A\varphi_i - A\varphi_{i-1} \| \leqslant k \| \varphi_i - \varphi_{i-1} \|,$$

откуда

$$\| \varphi_{i+1} - \varphi_i \| \leqslant ak^i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Таким образом, в силу В), последовательность (21) равномерно сходится на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$ к некоторой непрерывной функции φ. Так как все функции последовательности (21) принадлежат семейству Ω_r, то и функция φ принадлежит ему (см. (15)). Покажем, что функция φ удовлетворяет уравнению (7). Для этого заметим, что последовательность

$$A\varphi_0, \quad A\varphi_1, \ldots, A\varphi_i, \ldots$$

равномерно сходится к функции $A\varphi$; действительно, мы имеем:

$$\| A\varphi - A\varphi_i \| \leqslant k \| \varphi - \varphi_i \|.$$

Переходя в соотношении (23) к пределу при $i \to \infty$, получаем:

$$\varphi = A\varphi.$$

Итак, *существование решения* $x = \varphi(t)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющего начальному условию* (3), *доказано; при этом установлено, что решение* $x = \varphi(t)$ *определено на интервале* $|t - t_0| < r$, *где* r — *произвольное число, удовлетворяющее неравенствам* (14), (17) *и* (20).

Перейдем теперь к доказательству единственности. Пусть $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$ — два решения уравнения (1) с общими начальными значениями t_0, x_0 и $r_1 < t < r_2$ — интервал, являющийся пересечением интервалов существования решений ψ и χ; очевидно, что $r_1 < t_0 < r_2$. Покажем, что если решения $\psi(t)$ и $\chi(t)$ совпадают в некоторой точке t_1 интервала $r_1 < t < r_2$, то они совпадают и на некотором интервале $|t - t_1| < r$, где r — достаточно малое положительное число. Положим $x_1 = \psi(t_1) = \chi(t_1)$; тогда величины t_1, x_1 могут быть приняты за начальные значения обоих решений $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$. В этом смысле точка (t_1, x_1) ничем не отличается от точки (t_0, x_0), и поэтому мы сохраним за точкой (t_1, x_1) обозначение (t_0, x_0): это позволит нам сохранить и другие прежние обозначения. Переходя от дифференциального уравнения (1) к интегральному уравнению (4), мы получаем для обеих функций $\psi(t)$ и $\chi(t)$ интегральные равенства, которые в операторной форме могут быть записаны в виде:

$$\psi = A\psi, \quad \chi = A\chi. \tag{24}$$

Выберем теперь, как и прежде, в открытом множестве Γ прямоугольник Π с центром в точке (t_0, x_0), а затем прямоугольник Π_r таким образом, чтобы число r кроме неравенств (14), (17), (20) удовлетворяло еще тому условию, что при $|t-t_0| \leqslant r$ функции ψ и χ определены и удовлетворяют неравенствам

$$|\psi(t)-x_0| \leqslant a, \qquad |\chi(t)-x_0| \leqslant a.$$

Это возможно, так как функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ непрерывны. Тогда функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$, рассматриваемые на отрезке $|t-t_0| \leqslant r$, входят в семейство Ω_r, и, следовательно, в силу неравенства (16) и соотношений (24) получаем:

$$\|\psi-\chi\| = \|A\psi - A\chi\| \leqslant k\,\|\psi-\chi\|,$$

а это возможно только тогда, когда $\|\psi-\chi\|=0$, т. е. когда функции ψ и χ совпадают на отрезке $|t-t_0| \leqslant r$.

Докажем теперь, что функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ совпадают на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Допустим противоположное, именно, что существует точка t^* интервала $r_1 < t < r_2$, для которой $\psi(t^*) \neq \chi(t^*)$. Ясно, что $t^* \neq t_0$. Для определенности будем считать, что $t^* > t_0$.

Обозначим через N множество всех тех точек t отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$, для которых $\psi(t)=\chi(t)$, и докажем, что множество N замкнуто. В самом деле, пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — последовательность точек множества N, сходящаяся к некоторой точке τ. Тогда $\psi(\tau_i)=\chi(\tau_i)$, и потому, в силу непрерывности функций ψ и χ,

$$\psi(\tau) = \lim_{i\to\infty} \psi(\tau_i) = \lim_{i\to\infty} \chi(\tau_i) = \chi(\tau),$$

т. е. точка τ также принадлежит множеству N.

Обозначим через t_1 точную верхнюю грань множества N. Так как N замкнуто, то t_1 принадлежит этому множеству, т. е. $\psi(t_1)=\chi(t_1)$; следовательно, $t_1 < t^*$. Но тогда, в силу ранее доказанного, функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ должны совпадать на некотором интервале $|t-t_1| < r$, и точка t_1 не может быть точной верхней гранью множества N. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Итак, теорема 1 доказана.

Пример

Для весьма простого уравнения

$$\dot{x} = x$$

найдем решение методом последовательных приближений. Решение будем искать с начальными значениями

$$t_0 = 0, \qquad x_0 = 1.$$

Соответствующее интегральное уравнение запишется в виде:

$$\varphi(t)=1+\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau.$$

Будем строить теперь последовательность

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_i,\ \ldots$$

Мы имеем:

$$\varphi_0(t)\equiv 1,$$

$$\varphi_1(t)=1+\int_0^t d\tau=1+t,$$

$$\varphi_2(t)=1+\int_0^t (1+\tau)\,d\tau=1+t+\frac{1}{2!}t^2,$$

$$\varphi_3(t)=1+\int_0^t \left(1+\tau+\frac{1}{2!}\tau^2\right)d\tau=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3,$$

. . . .

$$\varphi_n(t)=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\ldots+\frac{1}{n!}t^n,$$

. . . .

Пределом этой последовательности (равномерно сходящейся на любом отрезке числовой оси) является функция $\varphi(t)=e^t$.

§ 21. Доказательство теоремы существования и единственности для нормальной системы уравнений

Здесь будет доказана сформулированная в § 3 теорема 2 существования и единственности для нормальной системы уравнений

$$\dot{x}^i=f^i(t,\ x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n),\qquad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

правые части $f^i(t,\ x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)$ которой вместе с их частными производными $\dfrac{\partial f^i(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n)}{\partial x^j}$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, определены и непрерывны на некотором открытом множестве Γ пространства переменных $t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n$. Полагая

$$\boldsymbol{x}=(x^1,\ \ldots,\ x^n), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x})=(f^1(t,\ \boldsymbol{x}),\ f^2(t,\ \boldsymbol{x}),\ \ldots,\ f^n(t,\ \boldsymbol{x})),$$

мы перепишем систему (1) в векторной форме (ср. § 14, А)):

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x}). \tag{3}$$

Доказательство будет проводиться в векторной форме методом последовательных приближений и будет представлять собой почти буквальное повторение доказательства теоремы 1, данного в предыдущем параграфе. Кроме доказательства теоремы 2 здесь будет дано доказательство теоремы 3, также методом последовательных приближений, но несколько видоизмененным по сравнению с доказательством теоремы 2.

Вспомогательные предложения

Для того чтобы непринужденно пользоваться векторными обозначениями, установим прежде всего некоторые естественные определения и простые неравенства для векторов и векторных функций.

Длина или *модуль* $|\boldsymbol{x}|$ вектора (2), как известно, определяется формулой

$$|\boldsymbol{x}| = +\sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}.$$

Известно и без труда доказывается, что если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ суть два вектора, то имеет место неравенство

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|.$$

Из этого неравенства следует аналогичное неравенство и для произвольного числа векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_l$, именно:

$$|\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{x}_l| \leqslant |\boldsymbol{x}_1| + \ldots + |\boldsymbol{x}_l|. \tag{4}$$

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$ — непрерывная векторная функция действительного переменного t, т. е. вектор, координаты которого являются непрерывными функциями переменного t. Если функция $\boldsymbol{\varphi}(t)$ определена на интервале $r_1 < t < r_2$, то при $r_1 < t_0 < r_2$ на том же интервале можно определить векторную функцию

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\varphi}(\tau)\, d\tau,$$

задав компоненты $\psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)$ вектора $\boldsymbol{\psi}(t)$ формулами

$$\psi^i(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi^i(\tau)\, d\tau;$$

при этом имеет место неравенство

$$\left|\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\varphi}(\tau)\, d\tau\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{\varphi}(\tau)|\, d\tau\right|. \tag{5}$$

Для доказательства этого неравенства разобьем отрезок интегрирования на m равных частей, положив:

$$\Delta = \frac{t - t_0}{m}; \quad t_k = t_0 + k\Delta, \qquad k = 1, \ldots, m$$

(число Δ будет положительным при $t > t_0$ и отрицательным при $t < t_0$). Тогда согласно определению интеграла от векторной функции и в силу (4), мы имеем:

$$\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau\right| = \left|\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \varphi(t_k)\Delta\right| \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |\varphi(t_k)|\cdot|\Delta| = \left|\int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)|\, d\tau\right|.$$

Установим еще одно неравенство для *векторной функции*

$$g(x) = (g^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n(x^1, \ldots, x^n))$$

векторного переменного x, заданной на выпуклом множестве Δ пространства переменных $x^1, \ldots, x^n$. Предположим, что имеют место неравенства:

$$\left|\frac{\partial g^i(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^j}\right| \leqslant K,$$

где K — положительное число. Оказывается тогда, что для двух любых точек x и y множества Δ выполнены неравенства

$$|g(x) - g(y)| \leqslant n^2 K |x - y|. \tag{6}$$

Для доказательства неравенства (6) введем в рассмотрение *отрезок*, соединяющий точки x и y, именно положим:

$$z(s) = y + s(x - y).$$

Когда s пробегает значения $0 \leqslant s \leqslant 1$, точка $z(s)$ пробегает отрезок, соединяющий точки x и y, и, ввиду выпуклости множества Δ, все время остается в нем. Мы получаем (применяя формулу Лагранжа):

$$g^i(x) - g^i(y) = g^i(z(1)) - g^i(z(0)) = \left.\frac{dg^i(z(s))}{ds}\right|_{s=\theta}.$$

Вычисляя производную $\frac{dg^i(z(s))}{ds}$ по формуле производной от сложной функции, получаем:

$$\frac{dg^i(z(s))}{ds} = \frac{dg^i(z^1(s), \ldots, z^n(s))}{ds} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g^i(z^1(s), \ldots, z^n(s))}{\partial x^k} \cdot \frac{dz^k(s)}{ds} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g^i(z^1(s), \ldots, z^n(s))}{\partial x^k}(x^k - y^k).$$

Таким образом,

$$|g^i(x)-g^i(y)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} K|x^k-y^k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} K|x-y| \leqslant nK|x-y|.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат, суммируя его по i, и извлекая корень, получаем:

$$|g(x)-g(y)| \leqslant n^{\frac{3}{2}}K|x-y| \leqslant n^2K|x-y|.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 1, от дифференциального уравнения (3) перейдем к интегральному.

А) Пусть $x=\varphi(t)$ — некоторое решение дифференциального уравнения (3), так что выполнено тождество

$$\dot{\varphi}(t)=f(t, \varphi(t)), \tag{7}$$

и пусть

$$\varphi(t_0)=x_0 \tag{8}$$

— начальное условие, которому это решение удовлетворяет. Оказывается, что совокупность соотношений (7) и (8) эквивалентна одному соотношению

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau. \tag{9}$$

Докажем это. Допустим, что выполнено интегральное тождество (9). Подставляя в него $t=t_0$, получаем равенство (8), а дифференцируя его по t, получаем тождество (7). Допустим теперь, что выполнены соотношения (7) и (8). Интегрируя соотношение (7) в пределах от t_0 до t и принимая во внимание соотношение (8), мы получаем соотношение (9).

Б) Пользуясь правой частью тождества (9), каждой векторной функции $\varphi(t)$, график которой проходит в множестве Γ, поставим в соответствие функцию $\varphi^*(t)$, положив:

$$\varphi^*(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau. \tag{10}$$

Кратко, в операторной форме то же соотношение запишем в виде:

$$\varphi^*=A\varphi. \tag{11}$$

Уравнение (9) теперь может быть записано в виде:

$$\varphi=A\varphi. \tag{12}$$

В) Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная векторная функция, заданная на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Определим *норму* $\|\varphi\|$ этой функции, положив:

$$\|\varphi\|=\max_{r_1 \leqslant t \leqslant r_2} |\varphi(t)|.$$

Пользуясь понятием нормы, можно формулировать определение равномерной сходимости последовательности

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_i,\ \ldots \tag{13}$$

непрерывных векторных функций, заданных на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Последовательность (13) векторных функций равномерно сходится к непрерывной функции φ, заданной на том же отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, если

$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi - \varphi_i\| = 0.$$

Для того чтобы последовательность (13) равномерно сходилась, достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant a_i,$$

где числа $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots$ образуют сходящийся ряд.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2

Так как точка $(t_0,\ \boldsymbol{x}_0) = (t_0,\ x_0^1,\ x_0^2,\ \ldots,\ x_0^n)$ принадлежит открытому множеству Γ, то существуют такие положительные числа q и a, что все точки $(t,\ \boldsymbol{x})$, удовлетворяющие условиям

$$|t - t_0| \leqslant q,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant a, \tag{14}$$

лежат в множестве Γ. Так как множество Π, состоящее из всех точек $(t,\ x)$, удовлетворяющих условиям (14), замкнуто и ограничено (рис. 40), то непрерывные функции

$$|\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x})| \ \text{ и } \left|\frac{\partial f^i(t,\ x)}{\partial x^j}\right|, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

ограничены на нем, т. е. существуют такие положительные числа M и K, что

$$|\boldsymbol{f}(t,\ x)| \leqslant M,\ \left|\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}\right| \leqslant K, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

на множестве Π.

Наряду с множеством Π рассмотрим содержащееся в нем множество Π_r, определяемое неравенствами

$$|t - t_0| \leqslant r,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant a,$$

где

$$r \leqslant q \tag{16}$$

17

(рис. 40). Обозначим через Ω_r семейство всех непрерывных векторных функций, заданных на отрезке $|t-t_0|\leqslant r$, графики которых проходят в Π_r. Таким образом, функция φ, определенная на отрезке $|t-t_0|\leqslant r$, тогда и только тогда принадлежит семейству Ω_r, когда

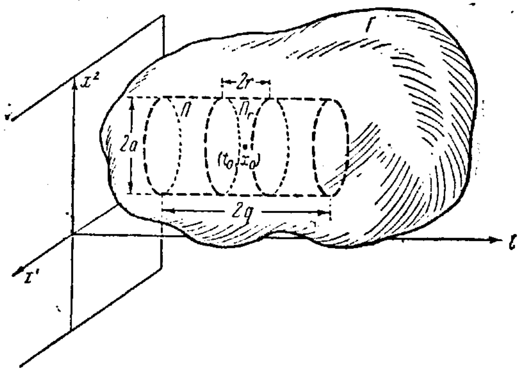


Рис. 40.

для любого t, принадлежащего этому отрезку, выполнено неравенство

$$|\varphi(t)-x_0|\leqslant a. \tag{17}$$

Постараемся выбрать теперь число r таким образом, чтобы были выполнены следующие два условия:

а) Если функция φ принадлежит семейству Ω_r, то функция $\varphi^* = A\varphi$ (см. (10), (11)) также принадлежит семейству Ω_r.

б) Существует такое число k, $0<k<1$, что для любых двух функций ψ и χ семейства Ω_r имеет место неравенство

$$\|A\psi - A\chi\|\leqslant k\|\psi-\chi\|. \tag{18}$$

Рассмотрим условие а). Для того чтобы функция $\varphi^*=A\varphi$ принадлежала семейству Ω_r, необходимо и достаточно, чтобы при $|t-t_0|\leqslant r$ было выполнено неравенство:

$$|\varphi^*(t)-x_0|\leqslant a.$$

В силу (10), (5) и (15) мы имеем:

$$|\varphi^*(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau\right|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(\tau,\varphi(\tau))|\,d\tau\right|\leqslant Mr.$$

Из этого видно, что при

$$r\leqslant\frac{a}{M} \tag{19}$$

условие а) выполнено.

Рассмотрим теперь условие б). Мы имеем:

$$|\psi^*(t)-\chi^*(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}(f(\tau,\psi(\tau))-f(\tau,\chi(\tau)))\,d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(\tau,\psi(\tau))-f(\tau,\chi(\tau))|\,d\tau\right|. \qquad (20)$$

Оценим теперь последнее подынтегральное выражение, пользуясь неравенствами (6) и (15):

$$|f(\tau,\psi(\tau))-f(\tau,\chi(\tau))|\leqslant n^2K\,|\psi(\tau)-\chi(\tau)|. \qquad (21)$$

Из (20) и (21) следует

$$\|A\psi-A\chi\|=\|\psi^*-\chi^*\|\leqslant n^2Kr\,\|\psi-\chi\|.$$

Таким образом, условие б) выполнено, если

$$r\leqslant\frac{k}{n^2K}, \qquad (22)$$

где $k<1$.

Итак, если число r удовлетворяет неравенствам (16), (19), (22) (которые мы в дальнейшем будем считать выполненными), то для семейства Ω_r выполнены условия а) и б).

Построим теперь последовательность векторных функций

$$\varphi_0(t)\equiv x_0,\quad \varphi_1(t),\ \ldots,\quad \varphi_i(t),\ \ldots, \qquad (23)$$

определенных на отрезке $|t-t_0|\leqslant r$, положив

$$\varphi_{i+1}=A\varphi_i,\quad i=0,\ 1,\ \ldots \qquad (24)$$

Так как функция φ_0 принадлежит семейству Ω_r, то и все функции последовательности (23) принадлежат этому же семейству (см. условие а)). Далее, мы имеем (см. (17)):

$$\|\varphi_1-\varphi_0\|=\max_{|t-t_0|\leqslant r}|\varphi_1(t)-x_0|\leqslant a.$$

В силу (18) получаем:

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|=\|A\varphi_i-A\varphi_{i-1}\|\leqslant k\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|,$$

откуда

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqslant ak^i. \qquad (25)$$

Таким образом, в силу В) последовательность (23) равномерно сходится к некоторой непрерывной функции φ, принадлежащей семейству Ω_r. Покажем, что функция φ удовлетворяет уравнению (12). Для этого заметим, что последовательность

$$A\varphi_0,\ A\varphi_1,\ \ldots,\ A\varphi_i,\ \ldots$$

равномерно сходится к функции $A\varphi$; действительно, мы имеем (см. (18)):

$$\|A\varphi - A\varphi_i\| \leqslant k\|\varphi - \varphi_i\|.$$

Переходя в соотношении (24) к пределу при $i \to \infty$, получаем:

$$\varphi = A\varphi.$$

Итак, *существование решения* $x = \varphi(t)$ *уравнения* (3), *удовлетворяющего начальному условию* (8), *доказано; при этом установлено, что решение* $x = \varphi(t)$ *определено на интервале* $|t - t_0| < r$, *где* r — *произвольное число, удовлетворяющее неравенствам* (16), (19), (22).

Перейдем теперь к доказательству единственности. Пусть $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$ — два решения уравнения (3) с общими начальными значениями t_0, x_0 и $r_1 < t < r_2$ — интервал, являющийся пересечением интервалов существования решений ψ и χ; очевидно, что $r_1 < t_0 < r_2$. Покажем, что если решения $\psi(t)$ и $\chi(t)$ совпадают в некоторой точке t_1 интервала $r_1 < t < r_2$, то они совпадают и на некотором интервале $|t - t_1| < r$, где r — достаточно малое положительное число. Положим $x_1 = \psi(t_1) = \chi(t_1)$; тогда величины t_1, x_1 могут быть приняты за начальные значения обоих решений $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$. В этом смысле точка (t_1, x_1) ничем не отличается от точки (t_0, x_0) и потому мы сохраним за точкой (t_1, x_1) обозначение (t_0, x_0); это позволит нам сохранить и другие прежние обозначения. Переходя от дифференциального уравнения (3) к интегральному уравнению (9), мы получаем для обеих функций $\psi(t)$ и $\chi(t)$ интегральные равенства, которые в операторной форме могут быть записаны в виде:

$$\psi = A\psi, \quad \chi = A\chi. \tag{26}$$

Выберем теперь, как и прежде, в множестве Γ множество Π с центром в точке (t_0, x_0) (см. неравенства (14)), содержащееся в Γ, а затем множество Π_r таким образом, чтобы число r, кроме неравенств (16), (19), (22), удовлетворяло еще тому условию, что при $|t - t_0| \leqslant r$ функции ψ и χ определены и удовлетворяют неравенствам:

$$|\psi(t) - x_0| \leqslant a, \quad |\chi(t) - x_0| \leqslant a.$$

Это возможно, так как функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ непрерывны. Тогда функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$, рассматриваемые на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$, входят в семейство Ω_r и, следовательно, в силу неравенства (18) и соотношений (26), получаем:

$$\|\psi - \chi\| = \|A\psi - A\chi\| \leqslant k\|\psi - \chi\|,$$

а это возможно только тогда, когда $\|\psi - \chi\| = 0$, т. е. когда функции ψ и χ совпадают на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$.

Докажем теперь, что функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ совпадают на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Допустим противоположное, именно, что существует точка t^* интервала $r_1 < t < r_2$, для которой $\psi(t^*) \neq \chi(t^*)$. Ясно, что $t^* \neq t_0$. Для определенности будем считать, что $t^* > t_0$. Обозначим через N множество всех тех точек t отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$, для которых $\psi(t) = \chi(t)$, и докажем, что множество N замкнуто. В самом деле, пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — последовательность точек множества N, сходящаяся к некоторой точке τ. Тогда $\psi(\tau_i) = \chi(\tau_i)$, и потому, в силу непрерывности функций ψ и χ,

$$\psi(\tau) = \lim_{i \to \infty} \psi(\tau_i) = \lim_{i \to \infty} \chi(\tau_i) = \chi(\tau),$$

т. е. точка τ также принадлежит множеству N.

Обозначим через t_1 точную верхнюю грань множества N. Так как N замкнуто, то t_1 принадлежит этому множеству, т. е. $\psi(t_1) = \chi(t_1)$; следовательно, $t_1 < t^*$. Но тогда, в силу ранее доказанного, функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ должны совпадать на некотором интервале $|t - t_1| < r$, и точка t_1 не может быть точной верхней гранью множества N. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Итак, теорема 2 доказана.

Выделим теперь в виде отдельного предложения некоторые факты, установленные при доказательстве теоремы 2 и нужные в дальнейшем:

Г) Предположим, что правые части системы (1) (или, в векторной форме, уравнения (3)) определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ на открытом множестве Г. Пусть (t_0, x_0) — некоторая точка множества Г, а q и a — такие положительные числа, что множество П, состоящее из всех точек, удовлетворяющих неравенствам (14), содержится в Г. Пусть, далее, M и K — такие положительные числа, что для всех точек (t, x), удовлетворяющих неравенствам (14), выполнены неравенства (15). Пусть, наконец, r — какое-либо положительное число, удовлетворяющее неравенствам (16), (19), (22). Тогда решение уравнения (3) с начальными значениями (t_0, x_0) определено на интервале $|t - t_0| < r$. Более того, оно на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$ получается как предел последовательности функций (23), индуктивно заданных соотношением (24), причем для этих функций выполнено неравенство (25).

Доказательство теоремы 3

Перейдем к доказательству теоремы 3, утверждающей, что для нормальной линейной системы

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j(t) x^j + b^i(t) = f^i(t, x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{27}$$

коэффициенты $a_j^i(t)$ и свободные члены $b^i(t)$ которой определены и непрерывны на интервале $q_1 < t < q_2$, существует решение с произвольными начальными значениями

$$t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n, \quad q_1 < t_0 < q_2, \tag{28}$$

определенное на всем интервале $q_1 < t < q_2$. Мы покажем, что тот же самый оператор A (см. (10), (11)), применявшийся при доказательстве теоремы 2, но построенный теперь при помощи правых частей системы (27), порождает последовательность векторных функций

$$\varphi_0(t), \quad \varphi_1(t), \quad \ldots, \quad \varphi_i(t), \ldots, \tag{29}$$

сходящуюся на всем интервале $q_1 < t < q_2$, причем равномерно на любом отрезке, содержащемся в этом интервале. При этом за $\varphi_0(t)$ можно принять произвольную непрерывную векторную функцию, заданную на интервале $q_1 < t < q_2$. Для проведения метода последовательных приближений нам здесь потребуется более точно оценить числа $\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\|$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ При этом будет видно, что в рассматриваемом случае метод последовательных приближений не укладывается в рамки метода сжатых отображений.

Пусть A — оператор, определенный соотношениями (10) и (11), исходя из системы (27) дифференциальных уравнений и начальных значений (28). Оператор A применим, очевидно, к любой непрерывной функции $\varphi(t)$, определенной на интервале $q_1 < t < q_2$. Из предложения А) следует, что система (27) с начальными условиями (28) равносильна операторному уравнению

$$\varphi = A\varphi, \tag{30}$$

для которого мы и найдем решение, определенное на всем интервале $q_1 < t < q_2$. Функции последовательности (29), заданной индуктивным соотношением

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

определены на интервале $q_1 < t < q_2$.

Пусть $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ — произвольный отрезок, содержащий внутри себя точку t_0 и содержащийся в интервале $q_1 < t < q_2$, так что

$$q_1 < r_1 < t_0 < r_2 < q_2.$$

Покажем, что последовательность (29) равномерно сходится на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ к решению уравнения (30). Для правых частей уравнений (27) мы имеем:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = a_j^i(t),$$

и потому при $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right| \leqslant K, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

где K — некоторое положительное число. Так как функции $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ ограничены на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, то на этом отрезке имеет место неравенство

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leqslant C,$$

где C — некоторая константа. Далее, на том же отрезке мы получаем последовательно (см. (5) и (6)):

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_1(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_0(\tau)))\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_1(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_0(\tau))|\, d\tau\right| \leqslant n^2KC|t - t_0|;$$

$$|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_2(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_1(\tau)))\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_2(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_1(\tau))|\, d\tau\right| \leqslant \frac{(n^2K)^2C}{2!}|t - t_0|^2;$$

. . . .

$$|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_i(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_{i-1}(\tau)))\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_i(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_{i-1}(\tau))|\, d\tau\right| \leqslant \frac{(n^2K)^i C}{i!}|t - t_0|^i.$$

Отсюда получаем:

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant C\frac{(n^2K(r_2 - r_1))^i}{i}.$$

Так как числа $C\frac{(n^2K(r_2 - r_1))^i}{i!}$ образуют сходящийся ряд, то последовательность (29) равномерно сходится на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ к некоторой непрерывной функции $\varphi(t)$. Для этой функции мы имеем:

$$\|A\varphi_i - A\varphi\| \leqslant \max_{r_1 \leqslant t \leqslant r_2}\left|\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_i(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi(\tau))|\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant n^2K(r_2 - r_1)\|\varphi_i - \varphi\|$$

так что последовательность функций

$$A\varphi_0, \quad A\varphi_1, \quad \ldots, \quad A\varphi_i, \quad \ldots$$

равномерно сходится к функции $A\varphi$ на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Переходя к пределу в соотношении (31), мы получаем:

$$\varphi = A\varphi.$$

Так как $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ есть произвольный отрезок, содержащий точку t_0 и содержащийся в интервале $q_1 < t < q_2$, то последовательность (29) сходится в каждой точке интервала $q_1 < t < q_2$, и потому функция $\varphi(t)$ определена на всем интервале $q_1 < t < q_2$ и на всем этом интервале является решением уравнения (30).

Итак, теорема 3 доказана.

Пользуясь методом доказательства теоремы 3, установим нижеследующее важное для дальнейшего предложение:

Д) Допустим, что заданная на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ непрерывная (скалярная) функция $u(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$u(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} (\alpha u(\tau) + \beta)\, d\tau, \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0; \tag{32}$$

оказывается тогда, что она удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha(t-t_0)} - 1\right). \tag{33}$$

Для доказательства предложения Д) рассмотрим наряду с интегральным неравенством (32) интегральное уравнение

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} (\alpha v(\tau) + \beta)\, d\tau \tag{34}$$

и покажем, что имеет место неравенство $u(t) \leqslant v(t)$. Для этого будем решать интегральное уравнение (34) методом последовательных приближений. Так как подынтегральное выражение в (34) линейно относительно функции $v(t)$, то последовательность приближений равномерно сходится на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (см. доказательство теоремы 3). За исходную функцию при построении последовательных приближений примем функцию $v_0(t) = u(t)$. Далее положим:

$$v_{i+1}(t) = \int_{t_0}^{t} (\alpha v_i(\tau) + \beta)\, d\tau. \tag{35}$$

Мы докажем индукцией по i, что каждая функция $v_i(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$v_i(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} (\alpha v_i(\tau) + \beta)\, d\tau. \tag{36}$$

При $i=0$ это неравенство верно, так как $v_0(t)=u(t)$ (см. (32)). Допустим, что оно справедливо для функции $v_i(t)$, и докажем его для функции $v_{i+1}(t)$. В силу предположения индукции, мы имеем:

$$v_{i+1}(t)=\int_{t_0}^{t}(\alpha v_i(\tau)+\beta)\,d\tau \geqslant v_i(t).$$

Таким образом,

$$v_{i+1}(t)\geqslant v_i(t). \tag{37}$$

Поэтому, ввиду положительности числа α, мы получаем из (35):

$$v_{i+1}(t)\leqslant\int_{t_0}^{t}(\alpha v_{i+1}(\tau)+\beta)\,d\tau.$$

Проведенная индукция доказывает неравенство (36); одновременно установлено неравенство (37). Из этого следует, что предел $v(t)$ последовательности $v_0(t)=u(t), v_1(t), \ldots, v_i(t), \ldots$ не меньше каждой из функций $v_i(t)$, и в частности $v(t)\geqslant u(t)$.

Теперь для завершения доказательства предложения Д) достаточно показать, что решение $v(t)$ интегрального уравнения (34) совпадает с правой частью неравенства (33). В силу предложения А) § 20 решение $v(t)$ уравнения (34) совпадает с решением дифференциального уравнения

$$\dot{v}(t)=\alpha v(t)+\beta$$

при начальном условии $v(t_0)=0$, т. е. с правой частью неравенства (33). Таким образом, предложение Д) доказано.

§ 22. Непродолжаемые решения

В § 3 было введено понятие непродолжаемого решения (см. § 3, А)). Здесь при помощи совершенно элементарных соображений из теоремы 2 будет выведено, что каждое решение может быть продолжено до решения, далее непродолжаемого (см. А)). В этом смысле непродолжаемые решения исчерпывают совокупность всех решений. Далее, в предложениях Б) и В) будет установлено одно важное свойство непродолжаемых решений, которое найдет свои применения в следующих параграфах этой главы.

Пусть

$$\dot{x}=f(t, x) \tag{1}$$

— векторная запись нормальной системы уравнений (см. § 21, (1), (3)), правые части которой определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}$ на некотором открытом множестве Γ пространства R переменных $t, x^1, \ldots, x^n$.

А) 1) Существует непродолжаемое решение уравнения (1) с произвольными начальными значениями из Г.

2) Если некоторое непродолжаемое решение уравнения (1) совпадает с некоторым другим решением уравнения (1) хотя бы при одном значении t, то оно является продолжением этого решения.

3) Если два непродолжаемых решения уравнения (1) совпадают между собой хотя бы для одного значения t, то они полностью совпадают, т. е. имеют один и тот же интервал определения и равны на нем.

Докажем предложение А).

Пусть (t_0, x_0) — произвольная точка из Г. Построим такое решение $x = \tilde{\varphi}(t)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0, что оно является продолжением любого решения уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0.

Каждому решению уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0 соответствует свой интервал определения. Множество всех правых концов этих интервалов обозначим через R_2, а множество всех их левых концов — через R_1. Точную верхнюю грань множества R_2 обозначим через m_2 (в частности, может оказаться, что $m_2 = \infty$), а точную нижнюю грань множества R_1 обозначим через m_1 (в частности, может оказаться, что $m_1 = -\infty$). Построим решение $x = \tilde{\varphi}(t)$ с начальными значениями t_0, x_0, определенное на интервале $m_1 < t < m_2$. Пусть t^* — произвольная точка этого интервала. Допустим для определенности, что $t_0 \leqslant t^*$. Так как m_2 есть точная верхняя грань множества R_2, то существует решение $x = \psi(t)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0, интервал определения которого содержит точку t^*, и мы положим $\tilde{\varphi}(t^*) = \psi(t^*)$. Полученное значение функции $\tilde{\varphi}$ в точке t^* не зависит от случайно выбранного решения $x = \psi(t)$. Действительно, если бы вместо решения $x = \psi(t)$ мы взяли решение $x = \chi(t)$ с начальными значениями t_0, x_0 и интервалом определения, также содержащим точку t^*, то, в силу единственности (см. теорему 2), мы имели бы $\psi(t^*) = \chi(t^*)$. Таким образом, функция $\tilde{\varphi}(t)$ однозначно определена на всем интервале $m_1 < t < m_2$. В то же время она является решением уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0, так как вблизи каждой точки t^* интервала $m_1 < t < m_2$ функция $\tilde{\varphi}(t)$ совпадает, по построению, с некоторым решением уравнения (1).

Пусть теперь $x = \varphi(t)$ — некоторое решение уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0, определенное на интервале $r_1 < t < r_2$. Тогда r_1 — элемент множества R_1, а r_2 — элемент множества R_2, и потому $m_1 \leqslant r_1$, $r_2 \leqslant m_2$, т. е. интервал $r_1 < t < r_2$ содержится в интервале $m_1 < t < m_2$. Так как решения $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ имеют одни и те же начальные значения, то, в силу теоремы 2, они совпадают всюду, где они оба определены, т. е. на интервале $r_1 < t < r_2$, а это и значит, что решение $\tilde{\varphi}(t)$ является продолжением решения $\varphi(t)$.

Построенное решение $\tilde{\varphi}(t)$, очевидно, непродолжаемо. В самом деле, пусть решение $\psi(t)$ является продолжением решения $\tilde{\varphi}(t)$. Тогда t_0, x_0 можно принять за начальные значения решения $\psi(t)$ и, в силу доказанного выше, решение $\tilde{\varphi}(t)$ есть продолжение решения $\psi(t)$, а это значит, что решения $\tilde{\varphi}(t)$ и $\psi(t)$ полностью совпадают. Из таких же соображений следует, что $\tilde{\varphi}(t)$ есть единственное непродолжаемое решение с начальными значениями t_0, x_0.

Допустим теперь, что непродолжаемое решение $\tilde{\varphi}(t)$ совпадает с некоторым другим решением $\varphi(t)$ хотя бы при одном значении t. Обозначим это значение t через t_0 и положим $\tilde{\varphi}(t_0) = x_0$. Тогда t_0, x_0 являются начальными значениями для непродолжаемого решения $\tilde{\varphi}(t)$ и для решения $\varphi(t)$. В силу доказанного выше, решение $\tilde{\varphi}(t)$ есть продолжение решения $\varphi(t)$. Если решение $\varphi(t)$ непродолжаемо, то, в силу тех же соображений, оно является продолжением решения $\tilde{\varphi}(t)$, и потому решения $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ полностью совпадают.

Итак, предложение А) доказано.

Б) Пусть E — замкнутое ограниченное множество пространства R, содержащееся в открытом множестве Γ, и $x = \tilde{\varphi}(t)$ — некоторое непродолжаемое решение (см. А)) уравнения (1), определенное на интервале $m_1 < t < m_2$. Тогда существуют такие числа r_1 и r_2, $m_1 < r_1 < r_2 < m_2$, что точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$ пространства R находится вне множества E, когда t не принадлежит отрезку $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$.

Мы докажем лишь существование такого числа $r_2 < m_2$, что при $r_2 < t < m_2$ точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$ не принадлежит множеству E. Существование числа r_1 доказывается аналогично. Если $m_2 = \infty$, то существование числа r_2 очевидно, так как при t, возрастающем до бесконечности, точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$, первая координата которой равна t, обязательно должна покинуть ограниченное множество E.

Будем считать поэтому, что $m_2 < \infty$, и докажем существование числа r_2. При этом мы используем оценку числа r, данную в предложении Г) § 21. В пространстве R введем евклидову метрику. Так как множество E замкнуто и ограничено, а дополнение к открытому множеству Γ замкнуто, то расстояние ρ между множеством E и дополнением к множеству Γ (см. § 32, пример 3) положительно. Пусть E^* — множество всех точек пространства R, расстояние которых до множества E не превосходит числа $\frac{1}{2}\rho$. Тогда E^* — замкнутое ограниченное множество, содержащееся в Γ, так что правые части системы (1) и их производные по x^i, $i = 1, \ldots, n$, определены на множестве E^* и ограничены на нем. Таким образом, для любой точки (t, x) из

E^* выполнены неравенства

$$|f(t, x)| \leqslant M, \left|\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}\right| \leqslant K, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где M и K — некоторые положительные числа. Выберем два таких положительных числа q и a, что $q^2 + a^2 < \frac{\rho^2}{4}$. Если (t_0, x_0) — некоторая точка множества E и Π — множество всех точек (t, x), удовлетворяющих неравенствам $|t - t_0| \leqslant q$, $|x - x_0| \leqslant a$, то, очевидно, множество Π содержится в E^*, и потому для всех точек (t, x) множества Π выполнены неравенства (2). Таким образом, если число r удовлетворяет неравенствам (16), (19), (22) § 21, то существует решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0, определенное на интервале $|t - t_0| < r$. Здесь важно лишь то, что найденное число r является **одним и тем же** для всех точек (t_0, x_0) множества E. Покажем, что за r_2 можно принять число $m_2 - r$. Допустим противное, т. е. что при некотором $t_0 > m_2 - r$ точка $(t_0, \tilde{\varphi}(t_0))$ лежит в множестве E. Тогда мы можем принять величины t_0 и $\tilde{\varphi}(t_0)$ за начальные значения решения $x = \tilde{\varphi}(t)$ и, в силу сказанного выше, интервал $|t - t_0| < r$ должен содержаться в интервале $m_1 < t < m_2$. Но это противоречит неравенству $t_0 > m_2 - r$. Таким образом, предложение Б) доказано.

Для автономной системы имеет место предложение В), аналогичное предложению Б) и непосредственно из него вытекающее. Пусть

$$\dot{x} = f(x) \tag{3}$$

— векторная запись автономной системы уравнений, правые части которых непрерывны вместе с их частными производными по $x^1, \ldots, x^n$ в некотором открытом множестве Δ пространства S переменных $x^1, \ldots, x^n$.

В) Пусть F — замкнутое ограниченное множество пространства S, целиком расположенное в Δ, и $x = \tilde{\varphi}(t)$ — некоторое непродолжаемое решение уравнения (3) с интервалом определения $m_1 < t < m_2$. Если $m_2 < \infty$, то существует такое число r_2, $m_1 < r_2 < m_2$, что при t, принадлежащем интервалу $r_2 < t < m_2$, точка $\tilde{\varphi}(t)$ находится вне множества F. Точно так же, если $m_1 > -\infty$, то существует такое число r_1, $m_1 < r_1 < m_2$, что при t, принадлежащем интервалу $m_1 < t < r_1$, точка $\tilde{\varphi}(t)$ находится вне множества F.

При доказательстве предложения В) будем рассматривать лишь случай $m_2 \neq \infty$ и установим существование числа r_2. В пространстве R всех точек (t, x), где x — точка из S, определим открытое множество Γ, состоящее из всех точек (t, x), где t — произвольное число, а x — точка множества Δ. Далее, пусть m — некоторое число, удовлетворяющее условию $m_1 < m < m_2$. Обозначим через E множество, состоящее из всех точек (t, x), где $m \leqslant t \leqslant m_2$, а x — точка множества F. Очевидно, множество E замкнуто, ограничено и содержится в Г. В силу предложения Б), существует такое число r_2, что при t, принадлежащем интервалу $r_2 < t < m_2$, точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$ не принадлежит множеству E. Очевидно, мы можем выбрать число r_2 так, чтобы это условие выполнялось и чтобы, кроме того, было $m < r_2$. Тогда при $r_2 < t < m_2$ выполнены неравенства $m \leqslant t \leqslant m_2$ и, следовательно, точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$, у которой $r_2 < t < m_2$, может не принадлежать множеству E лишь благодаря тому, что точка $\tilde{\varphi}(t)$ не принадлежит множеству F. Таким образом, предложение В) доказано.

Примеры

1. Для иллюстрации результатов этого параграфа рассмотрим автономное уравнение первого порядка:

$$\dot{x} = \frac{1}{f(x)}, \tag{4}$$

где $f(x)$ — многочлен, все корни которого действительные и простые. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — их запись в возрастающем порядке. Фазовым пространством уравнения (4) является прямая P, а открытым множеством Δ для него служит совокупность всех точек прямой P, за исключением $a_1, a_2, \ldots, a_n$, так как в них правая часть уравнения (4) обращается в бесконечность. Положим:

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi.$$

Тогда совокупность всех решений уравнения (4) описывается соотношением

$$F(x) = t + c.$$

Так как в автономном уравнении сдвиг времени на константу не меняет траектории, то совокупность всех траекторий уравнения (4) вместе с описанием движения по ним точки $x(t)$ дается соотношением

$$F(x) = t.$$

Рассмотрим движение точки $x(t)$ по интервалу $a_1 < x < a_2$. Так как $f(x)$ сохраняет знак на интервале $a_1 < x < a_2$, то $F(a_1) \neq F(a_2)$. Для определенности будем считать, что

$$m_1 = F(a_1) < m_2 = F(a_2).$$

Легко видеть, что в то время, когда t пробегает интервал $m_1 < t < m_2$, точка $x(t)$ пробегает интервал $a_1 < x < a_2$. Отсюда видно, что $x(t)$ есть непродолжаемое решение с интервалом определения $m_1 < t < m_2$. Здесь оба конца этого интервала конечны; это объясняется тем, что при подходе к концам интервала времени $m_1 < t < m_2$ точка $x(t)$ подходит к граничным точкам области Δ.

2. Предложение Б) в некотором смысле отвечает на вопрос, почему интервал определения непродолжаемого решения может оказаться ограниченным справа или слева. Последим за поведением непродолжаемого решения $x = \tilde{\varphi}(t)$, ограничиваясь для простоты случаем, когда множество Г ограничено. Границу множества Г обозначим через G.

Пусть $m_1 < t < m_2$ — интервал определения непродолжаемого решения $x = \tilde{\varphi}(t)$. Так как множество Г ограничено, то оба числа m_1 и m_2 отличны от $\pm\infty$. Покажем, что при $t \to m_2$ расстояние точки $(t, \tilde{\varphi}(t))$ от множества G стремится к нулю. Пусть ε — произвольное положительное число и E_ε — совокупность всех точек множества Г, расстояние которых до множества G больше или равно ε. Легко доказывается, что множество E_ε замкнуто в R и ограничено. В силу предложения Б) существует такое число $r_2 < m_2$, что при $r_2 < t < m_2$ точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$ не принадлежит множеству E_ε и, следовательно, ее расстояние до множества G меньше ε. Таким образом, при $t \to m_2$ расстояние точки $(t, \tilde{\varphi}(t))$ до множества G стремится к нулю. Приближение точки $(t, \tilde{\varphi}(t))$ при $t \to m_2$ к границе G множества Г и является причиной того, что решение $x = \tilde{\varphi}(t)$ не может быть продолжено за правый конец m_2 интервала его определения.

§ 23. Непрерывная зависимость решения от начальных значений и параметров

Учитывая зависимость решения заданной системы уравнений от начальных значений этого решения, мы приходим к решению как функции от независимого переменного и начальных значений. Различные свойства этой функции многих переменных имеют важное значение. Здесь будет доказана непрерывность этой функции по совокупности переменных. Доказательство непрерывной зависимости решения от начальных значений будет сведено к теореме о непрерывной зависимости решения при фиксированных начальных значениях от параметров, непрерывно входящих в правые части системы. Эта теорема будет доказана в первую очередь.

Непрерывная зависимость решения от параметров

Мы будем рассматривать нормальную систему уравнений:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^l), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

правые части которых зависят от параметров $\mu^1, \ldots, \mu^l$ и определены в некотором открытом множестве $\tilde{\Gamma}$ пространства $\tilde{R}$ переменных

$t, x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^l$. Будет предполагаться, что правые части системы (1) и их частные производные

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

по переменным $x^1, \ldots, x^n$ являются в $\tilde{\Gamma}$ непрерывными функциями совокупности всех переменных. Полагая

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n); \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu^1, \ldots, \mu^l),$$

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) = (f^1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \ldots, f^n(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})),$$

мы запишем систему (1) в векторной форме:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}). \tag{3}$$

А) Точку пространства $\tilde{R}$ будем обозначать через $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$. Зафиксируем начальные значения $t_0, \boldsymbol{x}_0$ и обозначим через M совокупность всех таких $\boldsymbol{\mu}$, что точка $(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu})$ принадлежит множеству $\tilde{\Gamma}$. Очевидно, что M является открытым множеством в пространстве переменных $\mu^1, \ldots, \mu^l$. Каждой точке $\boldsymbol{\mu}$ множества M соответствует непродолжаемое решение $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ с начальными значениями $t_0, \boldsymbol{x}_0$ уравнения (3), определенное на интервале $m_1(\boldsymbol{\mu}) < t < m_2(\boldsymbol{\mu})$ (см. § 22, А)), который, очевидно, может зависеть от $\boldsymbol{\mu}$, что и выражено в обозначениях. Множество T всех пар $t, \boldsymbol{\mu}$, для которых функция $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ определена, описывается, очевидно, условиями: точка $\boldsymbol{\mu}$ принадлежит множеству M, а число t удовлетворяет при этом неравенствам $m_1(\boldsymbol{\mu}) < t < m_2(\boldsymbol{\mu})$.

Теорема 13. *Множество T всех пар $t, \boldsymbol{\mu}$, на которых определена функция $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$, являющаяся при каждом фиксированном $\boldsymbol{\mu}$ непродолжаемым решением уравнения* (3) *с начальными значениями $t_0, \boldsymbol{x}_0$, представляет собой открытое множество пространства переменных $t, \mu^1, \ldots, \mu^l$. Далее оказывается, что функция $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ есть непрерывная функция пары переменных $t, \boldsymbol{\mu}$ на множестве T.*

Следует обратить внимание на нетривиальность и важность того факта, что множество T является открытым.

Доказательство. Пусть $t^*, \boldsymbol{\mu}^*$ — произвольная точка множества T. Докажем, что точка $t, \boldsymbol{\mu}$, достаточно близкая к точке $t^*, \boldsymbol{\mu}^*$, принадлежит множеству T и что разность $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\varphi}(t^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ мала. Этим теорема будет доказана.

Сначала мы будем считать, что $t^* \geqslant t_0$. Так как решение $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)$ определено при $t = t^*$, то $t^* < m_2(\boldsymbol{\mu}^*)$, и потому существует такое число r_2, что $t^* < r_2 < m_2(\boldsymbol{\mu}^*)$, так что решение $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)$ определено в частности на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant r_2$. Когда число t пробегает отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant r_2$, точка $(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*)$ описывает в пространстве

$\tilde{R}$ некоторую кривую Q. Пусть a и b — два положительных числа. Обозначим через $\tilde{\Pi}$ совокупность всех точек (t, x, μ) пространства $\tilde{R}$, удовлетворяющих условиям:

$$t_0 \leqslant t \leqslant r_2, \quad |x - \varphi(t, \mu^*)| \leqslant a, \quad |\mu - \mu^*| \leqslant b. \tag{4}$$

Из того, что Q представляет собой замкнутое ограниченное множество, содержащееся в открытом множестве $\tilde{\Gamma}$, следует существование таких положительных чисел a и b, что множество $\tilde{\Pi}$ также содержится в $\tilde{\Gamma}$. В дальнейшем мы будем считать, что числа a и b удовлетворяют этому условию. Так как производные (2) непрерывны и потому ограничены по модулю некоторым числом K на множестве $\tilde{\Pi}$, то, в силу неравенства (6) § 21, для точек (t, x_1, μ), (t, x_2, μ) множества $\tilde{\Pi}$ выполнено соотношение

$$|f(t, x_2, \mu) - f(t, x_1, \mu)| \leqslant n^2K|x_2 - x_1|. \tag{5}$$

Далее, из равномерной непрерывности (см. § 32, И)) функции $f(t, x, \mu)$ на множестве $\tilde{\Pi}$ следует существование такой монотонной положительной функции $\beta_2(\varepsilon)$ положительного переменного ε, стремящейся к нулю вместе с ε, что для точек (t, x, μ^*), (t, x, μ) множества $\tilde{\Pi}$ выполнено соотношение

$$|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu^*)| < \beta_2(|\mu - \mu^*|). \tag{6}$$

Пусть теперь $x = \varphi(t, \mu)$, $|\mu - \mu^*| \leqslant b$ — решение уравнения (3) с начальными значениями (t_0, x_0). В силу предложения Б) § 22 точка $(t, \varphi(t, \mu), \mu)$ должна покинуть замкнутое множество $\tilde{\Pi}$ при $t \to m_2(\mu)$. Через t_2 мы обозначим то значение t, при котором точка $(t, \varphi(t, \mu), \mu)$ впервые достигает границы множества $\tilde{\Pi}$. Очевидно, что $t_0 < t_2 \leqslant r_2$. Дадим оценку разности $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)|$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$. Для этого запишем уравнение (3) в интегральной форме (см. § 21, А)) для значений параметра μ и μ^* и вычтем второе интегральное соотношение из первого; мы получим:

$$\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*) = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu^*), \mu^*))\,d\tau$$
$$(t_0 \leqslant t \leqslant t_2).$$

Оценим разность, стоящую справа под знаком интеграла. Мы имеем:

$$|f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu^*), \mu^*)| \leqslant |f(\tau, \varphi(t, \mu), \mu) -$$
$$- f(\tau, \varphi(t, \mu^*), \mu)| + |f(\tau, \varphi(\tau, \mu^*), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu^*), \mu^*)|.$$

Первое из слагаемых, стоящих в правой части, оценивается в силу неравенства (5), второе — в силу неравенства (6); объединяя эти оценки, получаем:

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| \leqslant \int_{t_0}^{t} [n^2K|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu^*)| + \beta_2(|\mu - \mu^*|)]\, d\tau.$$

Полагая $u(t) = |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)|$, мы, в силу предложения Д) § 21, получаем при $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$:

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| \leqslant \frac{\beta_2(|\mu - \mu^*|)}{n^2K}\left(e^{n^2K(t-t_0)} - 1\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\beta_2(|\mu - \mu^*|)}{n^2K}\left(e^{n^2K(r_2-t_0)} - 1\right) = c_2\beta_2(|\mu - \mu^*|). \quad (7)$$

Пусть ρ_2 — положительное число, удовлетворяющее неравенствам:

$$\rho_2 \leqslant b, \quad (8)$$
$$c_2\beta_2(\rho_2) < a. \quad (9)$$

В дальнейшем будем считать, что μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu - \mu^*| < \rho_2, \quad (10)$$

и покажем, что $t_2 = r_2$, так что решение $\varphi(t, \mu)$ определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant r_2$.

Так как точка $(t_2, \varphi(t_2, \mu), \mu)$, по предположению, лежит на границе множества Π, то для этой точки одно из неравенств (4) должно переходить в точное равенство. В силу неравенств (8), (10), имеем $|\mu - \mu^*| < b$. Далее, в силу неравенств (10), (9) и (7), имеем $|\varphi(t_2, \mu) - \varphi(t_2, \mu^*)| < a$. Так как, наконец, $t_2 > t_0$, то из всех неравенств (4) в равенство может переходить лишь неравенство $t_2 \leqslant r_2$, и потому мы имеем $t_2 = r_2$.

Таким образом, доказано, что при $t^* \geqslant t_0$ существуют такое число $r_2 > t^*$ и такое положительное число ρ_2, что при $t_0 \leqslant t \leqslant r_2$ и $|\mu - \mu^*| < \rho_2$ точка (t, μ) принадлежит множеству T и выполнено неравенство (7).

Аналогично доказывается, что при $t^* \leqslant t_0$ существуют такое число $r_1 < t^*$ и такое положительное число ρ_1, что при $r_1 \leqslant t \leqslant t_0$ и $|\mu - \mu^*| < \rho_1$ точка (t, μ) принадлежит множеству T и выполнено неравенство

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| < c_1\beta_1(|\mu - \mu^*|), \quad (11)$$

аналогичное неравенству (7).

Из сказанного следует, что если точка (t^*, μ^*) принадлежит множеству T, то, каково бы ни было расположение точки t^* относительно t_0, всегда существуют такие положительные числа r и ρ, что при

$$|t - t^*| < r, \qquad |\mu - \mu^*| < \rho, \quad (12)$$

точка (t, μ) принадлежит множеству T и имеет место неравенство

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| < c\beta(|\mu - \mu^*|). \quad (13)$$

Так как совокупность всех точек (t, μ), удовлетворяющих условию (12), составляет окрестность точки (t^*, μ^*), то T есть открытое множество.

Докажем теперь, что функция $\varphi(t, \mu)$ непрерывна в точке (t^*, μ^*). Для этого оценим разность $\varphi(t, \mu) - \varphi(t^*, \mu^*)$. Мы имеем:

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t^*, \mu^*)| \leqslant |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| + \\ + |\varphi(t, \mu^*) - \varphi(t^*, \mu^*)|.$$

Первое из слагаемых, стоящих в правой части, мало, когда мало число $|\mu - \mu^*|$ (см. (13)). Вторoе из слагаемых мало, когда малым является число $|t - t^*|$, в силу непрерывности функции $\varphi(t, \mu^*)$ переменного t. Таким образом, $\varphi(t, \mu)$ есть непрерывная функция пары переменных t, μ.

Итак, теорема 13 доказана.

Непрерывная зависимость решения от начальных значений

Теперь мы будем рассматривать нормальную систему уравнений:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

правые части которых определены и непрерывны вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

на некотором открытом множестве Γ пространства R переменных $t, x^1, \ldots, x^n$. Пусть

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{16}$$

— векторная запись системы (14).

Б) Каждой точке (τ, ξ) множества Γ соответствует непродолжаемое решение $\varphi(t, \tau, \xi)$ уравнения (16) с начальными значениями $t_0 = \tau$, $x_0 = \xi$, определенное на интервале $m_1(\tau, \xi) < t < m_2(\tau, \xi)$ (см. § 22, А)), который зависит от начальных значений τ, ξ. Множество S всех точек (t, τ, ξ) пространства переменных $t, \tau, \xi^1, \ldots, \xi^n$, для которых функция $\varphi(t, \tau, \xi)$ определена, описывается, очевидно, условиями: точка τ, ξ принадлежит множеству Γ, а число t удовлетворяет при этом неравенствам $m_1(\tau, \xi) < t < m_2(\tau, \xi)$.

Теорема 14. *Множество S всех точек (t, τ, ξ), на которых определена функция $\varphi(t, \tau, \xi)$, являющаяся непродолжаемым решением уравнения* (16) *с начальными значениями τ, ξ, есть открытое множество в пространстве переменных $t, \tau, \xi^1, \ldots, \xi^n$. Далее оказывается, что функция $\varphi(t, \tau, \xi)$ непрерывна по совокупности всех своих аргументов на множестве S.*

Конструкция, излагаемая в нижеследующем предложении В), делает эту теорему непосредственным следствием теоремы 13.

В) Пусть (τ, ξ) — произвольная точка множества Г. Вместо независимого переменного t, имеющегося в уравнении (16), введем новое независимое переменное s по формуле

$$t = \tau + s. \tag{17}$$

Вместо неизвестной векторной функции x, имеющейся в уравнении (16), введем новую неизвестную векторную функцию y по формуле

$$x = \xi + y. \tag{18}$$

В новых переменных уравнение (16) запишется следующим образом:

$$\frac{dy}{ds} = f(\tau + s, \xi + y). \tag{19}$$

Так как функция $f(t, x)$ переменных t, x определена на открытом множестве Г, то функция

$$g(s, y, \tau, \xi) = f(\tau + s, \xi + y) \tag{20}$$

переменных s, y, τ, ξ определена при условии, что точка $(\tau + s, \xi + y)$ принадлежит множеству Г. Это условие, как легко видеть, выделяет в пространстве $\tilde{R}$ переменных s, y, τ, ξ некоторое открытое множество $\tilde{\Gamma}$, и на этом множестве векторная функция (20) непрерывна, а ее компоненты имеют непрерывные частные производные по переменным $y^1, \ldots, y^n$. Будем считать, что величины τ, ξ являются параметрами в уравнении (19), и пусть

$$y = \psi(s, \tau, \xi) \tag{21}$$

— непродолжаемое решение уравнения (19) (см. § 22, А)) с фиксированными начальными значениями $s = 0$, $y = 0$, т. е. решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0, \tau, \xi) = 0. \tag{22}$$

Переходя к старым переменным по формулам (17) и (18), мы получим функцию

$$x = \varphi(t, \tau, \xi) = \xi + \psi(t - \tau, \tau, \xi), \tag{23}$$

являющуюся, как показывает непосредственная проверка, решением уравнения (16), удовлетворяющим начальному условию

$$\varphi(\tau, \tau, \xi) = \xi.$$

Из того, что решение (21) непродолжаемо, следует, что решение (23) также непродолжаемо, так как если бы решение (23) можно было продолжить, то можно было бы продолжить и решение (21).

Доказательство теоремы 14. Предложение В) сводит изучение зависимости решения от начальных значений к изучению зависимости решения (при *фиксированных* начальных значениях) от параметров, входящих в правую часть уравнения. Это изучение было осуществлено в теореме 13. В силу этой теоремы, непродолжаемое решение $y=\psi(s, \tau, \xi)$ уравнения (19), содержащего в правой части параметры τ, ξ, взятое при фиксированных начальных значениях $s_0=0, y_0=0$, определено на некотором открытом множестве T в пространстве переменных s, τ, ξ и непрерывно на этом множестве по совокупности всех своих аргументов. Непродолжаемое решение $x=\varphi(t, \tau, \xi)$ уравнения (16) с начальными значениями τ, ξ выражается через решение $y=\psi(s, \tau, \xi)$ по формуле (23). Переход от аргументов s, τ, ξ функции ψ к аргументам t, τ, ξ функции φ осуществляется формулами

$$t=s+\tau, \qquad \tau=\tau, \qquad \xi=\xi. \tag{24}$$

Это преобразование пространства переменных s, τ, ξ в пространство переменных t, τ, ξ является аффинным и потому переводит открытое множество T, на котором определена функция ψ, в некоторое открытое множество S, на котором определена функция φ (см. § 32, пример 1). Таким образом, множество S всех точек (t, τ, ξ), на котором определена функция φ, является открытым в пространстве переменных t, τ, ξ. Непрерывность функции φ следует из непрерывности функции ψ, в силу формулы перехода (23). Таким образом, теорема 14 доказана.

Теоремы 13 и 14 могут быть объединены в одну:

Теорема 15. *Пусть $x=\varphi(t, \tau, \xi, \mu)$ — непродолжаемое решение уравнения* (3) *с начальными значениями τ, ξ. Тогда функция $\varphi(t, \tau, \xi, \mu)$ определена на некотором открытом множестве пространства переменных t, τ, ξ, μ и непрерывна на нем.*

Эта теорема доказывается так же, как теорема 14, — путем замены переменных (17), (18) и последующей ссылки на теорему 13.

Следствия теорем 13 и 14

Теоремы 13 и 14 представляют собой несколько необычно сформулированные *интегральные теоремы непрерывности*. Приведенные здесь формулировки интегральных теорем непрерывности (теоремы 13 и 14) являются новыми; они существенно отличаются от формулировок, имевшихся до сих пор в математической литературе. Нижеследующие предложения Г) и Д) являются прямыми следствиями теорем 13 и 14. Эти предложения по своим формулировкам ближе к обычным формулировкам интегральных теорем непрерывности. Следует, однако, отметить, что формулировки теорем 13 и 14 наиболее полно охватывают факты, относящиеся к непрерывной зависимости решений от параметров и начальных значений. Предложение Г) по существу было установлено в процессе доказательства теоремы 13, но здесь оно выводится из самой теоремы 13, чтобы подчеркнуть полноту ее содержания.

Г) Если решение $\varphi(t, \mu)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0 при $\mu = \mu^*$ определено на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, содержащем t_0 (это означает, что отрезок $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ содержится в интервале определения решения $\varphi(t, \mu^*)$), то существует такое положительное число ρ, что при $|\mu - \mu^*| \leqslant \rho$ непродолжаемое решение $\varphi(t, \mu)$ с начальными условиями t_0, x_0 также определено на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Далее, для всякого положительного ε найдется такое положительное $\delta < \rho$, что при $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, $|\mu - \mu^*| < \delta$ имеем $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| < \varepsilon$.

При доказательстве этого предложения используем теорему 13. Так как множество T всех пар t, μ, на котором определена функция $\varphi(t, \mu)$, открыто, а точки (r_1, μ^*) и (r_2, μ^*) принадлежат ему, то существует настолько малое положительное число ρ, что при $|\mu - \mu^*| \leqslant \rho$ точки (r_1, μ) и (r_2, μ) принадлежат множеству T. Это значит, что интервал определения непродолжаемого решения $\varphi(t, \mu)$ содержит весь отрезок $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, т. е. решение $\varphi(t, \mu)$ определено на этом отрезке. Множество P всех точек (t, μ), для которых $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, $|\mu - \mu^*| \leqslant \rho$, замкнуто, ограничено и расположено в T. Так как P содержится в T, а функция $\varphi(t, \mu)$ непрерывна на T, то она равномерно непрерывна на P. Отсюда непосредственно вытекает правильность второй части предложения Г).

Д) Если решение $\varphi(t, \xi) = \varphi(t, t_0, \xi)$ уравнения (16) с начальными значениями t_0, ξ при $\xi = x_0$ определено на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, содержащем t_0, то существует такое положительное число ρ, что при $|\xi - x_0| \leqslant \rho$ непродолжаемое решение $\varphi(t, \xi)$ также определено на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Далее, для всякого положительного ε найдется такое положительное $\delta < \rho$, что при $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ $|\xi - x_0| < \delta$ имеем:

$$|\varphi(t, \xi) - \varphi(t, x_0)| < \varepsilon.$$

Предложение Д) выводится из теоремы 14 точно так же, как предложение Г) из теоремы 13.

§ 24. Дифференцируемость решения по начальным значениям и параметрам

В предыдущем параграфе была доказана непрерывность решения по начальным значениям и параметрам. Здесь будет установлено, что в некоторых предположениях решение дифференцируемо по начальным значениям и параметрам.

Так же как в предыдущем параграфе, сначала мы рассмотрим дифференцируемость решения по параметрам, а затем на основе полученных результатов при помощи конструкции, данной в предложении В) § 23, докажем дифференцируемость решения по начальным значениям.

Дифференцируемость по параметрам

Мы будем рассматривать такую же систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^l), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

как и в § 23; правые части ее определены и непрерывны вместе с их частными производными $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ в некотором открытом множестве $\tilde{\Gamma}$ пространства $\tilde{R}$ переменных $t, x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^l$. Пусть

$$\dot{x} = f(t, x, \mu) \tag{2}$$

— векторная запись системы (1).

Доказательство дифференцируемости решений по параметрам $\mu^1, \ldots, \mu^l$ будет проведено в предположении, что правые части системы (1) непрерывно дифференцируемы по этим параметрам в открытом множестве $\tilde{\Gamma}$.

Доказательству дифференцируемости мы предпошлем предложение А), называемое обычно *леммой Адамара*.

А) Пусть $g(t^1, \ldots, t^p, u^1, \ldots, u^q)$ — функция $p+q$ переменных, определенная в области Δ пространства этих переменных, выпуклой относительно переменных $u^1, \ldots, u^q$. Полагая

$$t = (t^1, \ldots, t^p), \qquad u = (u^1, \ldots, u^q),$$

мы сможем записать ее как функцию $g(t, u)$ двух векторов. Будем предполагать, что во всей области своего определения функция $g(t, u)$ и ее частные производные $\frac{\partial g(t, u)}{\partial u^j}$, $j = 1, \ldots, q$, непрерывны. Оказывается тогда, что для любой пары точек (t, u_1), (t, u_2) с одинаковой координатой t из области Δ имеет место соотношение

$$g(t, u_2) - g(t, u_1) = \sum_{j=1}^{q} h_j(t, u_1, u_2)(u_2^j - u_1^j), \tag{3}$$

где функции $h_j(t, u_1, u_2)$, $j = 1, \ldots, q$ определены и непрерывны для всех указанных значений аргументов t, u_1, u_2 (в частности, и при совпадении $u_1 = u_2$), причем $h_j(t, u, u) = \frac{\partial}{\partial u^j} g(t, u)$.

Для доказательства предложения А) положим:

$$w(s) = u_1 + s(u_2 - u_1), \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{4}$$

Мы имеем тогда

$$g(t, u_2) - g(t, u_1) = g(t, w(1)) - g(t, w(0)) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} g(t, w(s))\, ds.$$

Вычислим теперь производную $\frac{\partial}{\partial s} g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}(s))$; мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial s} g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}(s)) = \frac{\partial}{\partial s} g(\boldsymbol{t}, w^1(s), \ldots, w^q(s)) = \\ = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}(s))}{\partial w^j} \frac{\partial w^j(s)}{\partial s}.$$

Так как, в силу (4), очевидно, имеем:

$$\frac{\partial w^j(s)}{\partial s} = u_2^j - u_1^j, \qquad j = 1, \ldots, q,$$

то, полагая еще

$$h_j(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \int_0^1 \frac{\partial g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}(s))}{\partial w^j} ds,$$

мы получаем формулу (3). Так как, по предположению, функции $\frac{\partial g(t,u)}{\partial u^j}$ непрерывны, то функции $h_j(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ также непрерывны.

Таким образом, предложение А) доказано.

Теорема 16. *В силу теоремы* 13 *непродолжаемое решение* $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}) = (\varphi^1(t, \boldsymbol{\mu}), \ldots, \varphi^n(t, \boldsymbol{\mu}))$ *уравнения* (2) *при фиксированных начальных значениях* $t_0, \boldsymbol{x}_0$ *определено на некотором открытом множестве* T *пространства переменных* $t, \mu^1, \ldots, \mu^l$ *и является непрерывной функцией всех своих аргументов. Оказывается, что если частные производные правых частей системы* (1) *по аргументам* $\mu^1, \ldots, \mu^l$ *определены и непрерывны в открытом множестве* $\tilde{\Gamma}$, *то частные производные*

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu^k}, \quad i = 1, \ldots, n; \; k = 1, \ldots, l,$$

определены и непрерывны на всем открытом множестве T. *Кроме того, смешанные частные производные*

$$\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial \mu^k} \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}), \quad i = 1, \ldots, n; \; k = 1, \ldots, l,$$

определены, непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования на всем множестве T.

Доказательство. Для нахождения производной $\frac{\partial \varphi^i}{\partial \mu^k}$ мы вычислим разность $\varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_2) - \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1)$. Так как функция $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ удовлетворяет уравнению (2), то вычисление этой разности естественно связано с вычислением разности

$$f^i(t, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\mu}_2) - f^i(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\mu}_1).$$

Последнюю разность мы вычислим с помощью леммы Адамара, считая при этом, что

$$t=t,\ u=(x,\ \mu),\qquad g(t,\ u)=f^i(t,\ x,\ \mu).$$

Для того чтобы применить лемму Адамара к этому случаю, прежде всего подходящим образом выделим открытое множество Δ в пространстве переменных $(t,\ u)=(t,\ x,\ \mu)$, выпуклое по паре переменных x, μ. При этом мы будем иметь своей целью доказательство существования и непрерывности производных в окрестности произвольной точки $(t^*,\ \mu^*)$ множества T. Перейдем к построению открытого множества Δ.

Так как решение $\varphi(t,\ \mu^*)$ определено при $t=t^*$, то существует такой отрезок $r_1\leqslant t\leqslant r_2$, содержащий числа t_0 и t^* внутри себя (т. е. $r_1<t_0<r_2$, $r_1<t^*<r_2$), что решение $\varphi(t,\ \mu^*)$ определено на этом отрезке. Когда t пробегает отрезок $r_1\leqslant t\leqslant r_2$, точка $(t,\ \varphi(t,\ \mu^*),\mu^*)$ описывает в открытом множестве $\tilde{\Gamma}$ непрерывную кривую. Пусть a и b — два таких положительных числа, что множество всех точек $(t,\ x,\ \mu)$, удовлетворяющих условиям

$$r_1\leqslant t\leqslant r_2,\qquad |x-\varphi(t,\ \mu^*)|\leqslant a,\qquad |\mu-\mu^*|\leqslant b,\tag{5}$$

целиком содержится в открытом множестве $\tilde{\Gamma}$. В силу предложения Г) § 23 существует такое положительное число ρ, что $2\rho<b$ и при $|\mu-\mu^*|<2\rho$ решение $\varphi(t,\ \mu)$ определено на всем отрезке $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ и на том же отрезке выполнено неравенство $|\varphi(t,\mu)-$ $-\varphi(t,\mu^*)|<a$. Открытое множество Δ определим теперь как совокупность всех точек $(t,\ x,\ \mu)$, удовлетворяющих условиям

$$r_1<t<r_2,\qquad |x-\varphi(t,\mu^*)|<a,\qquad |\mu-\mu^*|<2\rho.$$

Очевидно, что открытое множество Δ выпукло по паре переменных $(x,\ \mu)$.

Для вычисления производной $\frac{\partial\varphi^i}{\partial\mu^k}$ обозначим через e_k единичный вектор l-мерного пространства, направленный по k-й оси. Пусть μ_1 — некоторый вектор, удовлетворяющий условию $|\mu_1-\mu^*|<\rho$, и τ — число, удовлетворяющее условию $|\tau|<\rho$. Положим $\mu_2=\mu_1+\tau e_k$. Тогда оба вектора μ_1 и μ_2 удовлетворяют условию

$$|\mu_1-\mu^*|<2\rho,\qquad |\mu_2-\mu^*|<2\rho.$$

Поэтому на всем отрезке $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ имеют место неравенства

$$|\varphi(t,\ \mu_1)-\varphi(t,\ \mu^*)|<a,\qquad |\varphi(t,\ \mu_2)-\varphi(t,\ \mu^*)|<a.$$

Таким образом, когда t пробегает интервал $r_1<t<r_2$, точки $(t,\ \varphi(t,\ \mu_1),\ \mu_1)$ и $(t,\ \varphi(t,\ \mu_2),\ \mu_2)$ описывают кривые, целиком расположенные в открытом множестве Δ. Применяя лемму Адамара к разности

$$f^i(t,\ \varphi(t,\ \mu_2),\ \mu_2)-f^i(t,\ \varphi(t,\ \mu_1),\ \mu_1),$$

мы получим:

$$f^i(t,\ \varphi(t,\ \mu_2),\ \mu_2)-f^i(t,\ \varphi(t,\ \mu_1),\ \mu_1)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n} h_j^i(t,\ \mu_1,\ \tau)\ (\varphi^j(t,\ \mu_2)-\varphi^j(t,\ \mu_1))+$$
$$+\sum_{k=1}^{l} h_{n+k}^i(t,\ \mu_1,\ \tau)\ (\mu_2^k-\mu_1^k). \qquad (6)$$

Здесь функции h_j^i, $j=1,\ \ldots,\ n+l$, непрерывно зависят в силу леммы Адамара от величин t, $\varphi(t,\ \mu_1)$, μ_1, $\varphi(t,\ \mu_2)$, μ_2 и, следовательно, в конечном итоге, от величин t, μ_1, τ (так как $\mu_2=\mu_1+\tau e_k$, а величины $\varphi(t,\ \mu_1)$ и $\varphi(t,\ \mu_2)$ непрерывно зависят от t, μ_1 и t, μ_2; см. теорему 13).

Для вычисления производной $\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial\mu^k}$ нужно, очевидно, составить предварительное частное

$$\psi^i(t,\ \mu_1,\ \tau)=\frac{\varphi^i(t,\mu_2)-\varphi^i(t,\mu_1)}{\tau},\qquad \tau\neq 0,$$

и перейти в нем к пределу при $\tau\to 0$.

Подставляя в систему (1) ее решения $x=\varphi(t,\ \mu_1)$ и $x=\varphi(t,\ \mu_2)$ и вычитая первое соотношение из второго, мы получаем, в силу (6):

$$\frac{\partial\psi^i(t,\ \mu_1,\ \tau)}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n} h_j^i\ (t,\ \mu_1,\ \tau)\,\psi^j(t,\ \mu_1,\ \tau)+$$
$$+h_{n+k}^i(t,\ \mu_1,\ \tau),\quad i=1,\ \ldots,\ n. \qquad (7)$$

Эти соотношения верны при

$$r_1<t<r_2,\quad |\mu_1-\mu^*|<\rho,\quad |\tau|<\rho,\quad \tau\neq 0.$$

Таким образом, функции

$$\psi^1(t,\ \mu_1,\ \tau),\ \ldots,\ \psi^n(t,\ \mu_1,\ \tau) \qquad (8)$$

при $\tau\neq 0$ удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений

$$\dot y^i=\sum_{j=1}^{n} h_j^i(t,\ \mu_1,\ \tau)y^j+h_{n+k}^i(t,\ \mu_1,\ \tau) \qquad (9)$$

с начальными условиями

$$\psi^i(t_0,\ \mu_1,\ \tau)=\frac{\varphi^i(t_0,\ \mu_2)-\varphi^i(t_0,\ \mu_1)}{\tau}=\frac{x_0^i-x_0^i}{\tau}=0.$$

В то время как функции $\psi^i(t,\ \mu_1,\ \tau)$, $i=1,\ \ldots,\ n$, определены лишь при $\tau\neq 0$, сама система уравнений (9) определена и при $\tau=0$, причем правые части ее заданы и непрерывны на открытом множестве, которое описывается неравенствами

$$r_1 < t < r_2, \quad |\mu_1 - \mu^*| < \rho, \quad |\tau| < \rho. \tag{10}$$

Так как система (9) линейна, то в силу теорем 3 и 13 эта система имеет решение

$$y^1 = \chi^1(t, \mu_1, \tau), \ \ldots, \quad y^n = \chi^n(t, \mu_1, \tau) \tag{11}$$

с начальными значениями t_0, 0, определенное и непрерывное на всем открытом множестве (10). Согласно теореме единственности (теорема 2), на всем открытом множестве (10) при $\tau \neq 0$ справедливы равенства

$$\psi^i(t, \mu_1, \tau) = \chi^i(t, \mu_1, \tau), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Но правые части равенств (11) определены и непрерывны на всем открытом множестве (10), включая и значения $\tau = 0$. Поэтому, переходя в равенствах (11) к пределу при $\tau \to 0$, мы получаем:

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \mu_1)}{\partial \mu_1^k} = \lim_{\tau \to 0} \psi^i(t, \mu_1, \tau) = \lim_{\tau \to 0} \chi^i(t, \mu_1, \tau) = \chi^i(t, \mu_1, 0). \tag{12}$$

Так как правая часть этого равенства определена и непрерывна на открытом множестве

$$r_1 < t < r_2, \quad |\mu_1 - \mu^*| < \rho, \tag{13}$$

то на всем этом открытом множестве частная производная $\dfrac{\partial \varphi^i(t, \mu_1)}{\partial \mu_1^k}$ определена и непрерывна. В частности, она определена и непрерывна в некоторой окрестности точки (t^*, μ^*).

Так как, далее, функции $y^i = \chi^i(t, \mu_1, 0)$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (9) при $\tau = 0$, то этой же системе уравнений удовлетворяют и функции

$$y^i = \frac{\partial \varphi^i(t, \mu_1)}{\partial \mu_1^k}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, все эти функции на открытом множестве (13) обладают непрерывными частными производными по t. Иначе говоря, на открытом множестве (13) существует и непрерывна смешанная производная

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial \mu_1^k} \varphi^i(t, \mu_1)\right]. \tag{14}$$

Подставляя в систему (1) ее решение $x^i = \varphi^i(t, \mu_1)$, $i = 1, \ldots, n$, заведомо определенное на открытом множестве (13), мы получаем:

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \mu_1)}{\partial t} = f^i(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Так как функции $\varphi^j(t, \mu_1)$, $j=1, \ldots, n$, в силу доказанного имеют непрерывные частные производные по μ_1^k на всем открытом множестве (13), а правые части системы (1) имеют непрерывные производные по переменным $x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^l$, то правые части соотношений (15) имеют непрерывные частные производные по μ_1^k на всем открытом множестве (13). Таким образом, и левые части соотношений (15) имеют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1^k}\left(\frac{\partial \varphi^i(t, \mu_1)}{\partial t}\right) \tag{16}$$

на открытом множестве (13).

Итак, обе частные производные (14) и (16) непрерывны на открытом множестве (13), а потому в силу известной теоремы анализа они совпадают между собой на этом множестве.

Так как точка (t^*, μ^*) принадлежит открытому множеству (13), то доказательство теоремы 16 этим полностью завершено.

Дифференцируемость по начальным значениям

Мы будем рассматривать ту же самую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

что и в § 23 (см. § 23, формула (14)), правые части которой определены и непрерывны вместе с их частными производными $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ на некотором открытом множестве Γ пространства R переменных $t, x^1, \ldots, x^n$. Пусть

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{18}$$

— векторная запись системы (17).

В отличие от § 23, мы будем считать переменным лишь начальное значение ξ неизвестной функции x, а начальное значение τ переменного t зафиксируем, положив $\tau = t_0$. Дифференцируемость решения по τ в дальнейшем не используется, а для того, чтобы она имела место, система (17) должна удовлетворять дополнительным условиям (непрерывная дифференцируемость правых частей по t).

Теорема 17. *Пусть*

$$\varphi(t, t_0, \xi) = \varphi(t, \xi) = (\varphi^1(t, \xi), \ldots, \varphi^n(t, \xi))$$

— непродолжаемое решение уравнения (18) *с начальными значениями* t_0, ξ. *Из теоремы* 14 *непосредственно следует, что функция* $\varphi(t, \xi)$ *определена и непрерывна на некотором открытом множестве* S' *в пространстве переменных* $t, \xi^1, \ldots, \xi^n$.

Оказывается, что на всем множестве S' существуют и непрерывны частные производные

$$\frac{\partial\varphi^i(t, \xi)}{\partial\xi^j}; \qquad i, j = 1, \ldots, n;$$

кроме того, на этом множестве непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования смешанные частные производные

$$\frac{\partial^2\varphi^i(t, \xi)}{\partial t\,\partial\xi^j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Конструкция, данная в предложении В) § 23, сводит доказательство к теореме 16. Так как правая часть уравнения (19) § 23 имеет непрерывные частные производные по всем переменным $y^1, \ldots, y^n, \xi^1, \ldots, \xi^n$, то, в силу теоремы 16, частные производные

$$\frac{\partial\psi^i(t, t_0, \xi)}{\partial\xi^j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

функций ψ^i (см. § 23, В)) определены и непрерывны на всем открытом множестве S' и на нем же непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования смешанные частные производные

$$\frac{\partial^2\psi^i(t, t_0, \xi)}{\partial t\,\partial\xi^j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Далее, так как решение $\varphi(t, \xi) = \varphi(t, t_0, \xi)$ определяется через решение $\psi(t, t_0, \xi)$ по формуле (23) § 23 при $\tau = t_0$, то из найденных свойств функции $\psi^i(t, t_0, \xi)$ вытекают соответствующие свойства функций $\varphi^i(t, \xi)$, указанные в формулировке теоремы 17.

Теоремы 16 и 17 могут быть объединены в одну:

Теорема 18. *Предположим, что правые части системы* (1) *на всем открытом множестве $\tilde{\Gamma}$ имеют непрерывные производные по параметрам $\mu^1, \ldots, \mu^l$. Пусть*

$$\varphi(t, \xi, \mu) = (\varphi^1(t, \xi, \mu), \ldots, \varphi^n(t, \xi, \mu))$$

— непродолжаемое решение уравнения (2) *с начальными значениями t_0, ξ. Тогда функция $\varphi(t, \xi, \mu)$ определена на некотором открытом множестве $\tilde{\Gamma}$ пространства переменных t, ξ, μ и непрерывна на нем* (см. теорему 15). *Оказывается, что частные производные*

$$\frac{\partial\varphi^i(t, \xi, \mu)}{\partial\xi^j}, \qquad \frac{\partial\varphi^i(t, \xi, \mu)}{\partial\mu^k} \qquad i, j = 1, \ldots, n; \; k = 1, \ldots, l,$$

определены и непрерывны на всем открытом множестве $\tilde{\Gamma}$. Кроме того, смешанные частные производные

$$\frac{\partial^2\varphi^i(t, \xi, \mu)}{\partial t\,\partial\xi^j}, \qquad \frac{\partial^2\varphi^i(t, \xi, \mu)}{\partial t\,\partial\mu^k}$$

определены, непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования на всем множестве $\tilde{\Gamma}$.

Эта теорема доказывается так же, как теорема 17, — путем замены переменных (17), (18) § 23 (при $\tau = t_0$) и последующей ссылки на теорему 16.

Уравнения в вариациях

Иногда бывает нужно получить некоторые сведения о производных решения $\varphi(t, \mu)$ уравнения (2) по параметрам μ^k при фиксированном значении $\mu = \mu^*$. Оказывается, что для этого нет надобности искать решение $\varphi(t, \mu)$ уравнения (2) при переменном μ и затем дифференцировать его по μ^k, а можно получить эти сведения из рассмотрения некоторой системы линейных дифференциальных уравнений. Аналогично обстоит дело и с изучением производных решения $\varphi(t, \xi)$ уравнения (18) по начальным значениям ξ^j при фиксированном $\xi = x_0$.

Б) Пусть $\varphi(t, \mu) = (\varphi^1(t, \mu), \ldots, \varphi^n(t, \mu))$ — непродолжаемое решение уравнения (2) с начальными значениями t_0, x_0, и пусть $m_1 < t < m_2$ — интервал его определения при фиксированном значении $\mu = \mu^*$. Если частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial \mu^k}$ правых частей системы (1) непрерывны в области $\tilde{\Gamma}$, то, в силу теоремы 16, частные производные

$$\frac{\partial}{\partial \mu^k} \varphi^i(t, \mu^*) = \psi^i_k(t),$$

вычисленные при $\mu = \mu^*$, определены и непрерывны как функции t на всем интервале $m_1 < t < m_2$. Положим:

$$f^i_j(t, x, \mu) = \frac{\partial f^i(t, x, \mu)}{\partial x^j}; \qquad f^i_j(t) = f^i_j(t, \varphi(t, \mu^*), \mu^*),$$

$$g^i_k(t, x, \mu) = \frac{\partial f^i(t, x, \mu)}{\partial \mu^k}; \qquad g^i_k(t) = g^i_k(t, \varphi(t, \mu^*), \mu^*).$$

В силу теоремы 13, функции $f^i_j(t)$ и $g^i_k(t)$ переменного t определены и непрерывны на всем интервале $m_1 < t < m_2$. Система линейных уравнений

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} f^i_j(t) y^j + g^i_k(t), \tag{19}$$

определенная на интервале $m_1 < t < m_2$, называется системой уравнений в вариациях (по параметрам) для системы (1) при $\mu = \mu^*$. Оказывается, что система функций

$$y^1 = \psi^1_k(t), \ \ldots, \ y^n = \psi^n_k(t) \tag{20}$$

является решением системы уравнений (19) при начальных условиях

$$\psi_k^i(t_0) = 0. \tag{21}$$

Для доказательства предложения Б) подставим в систему (1) ее решение $x = \varphi(t, \mu)$. Мы получим тождество

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \mu)}{\partial t} = f^i(t, \varphi(t, \mu), \mu). \tag{22}$$

В силу теоремы 16 обе части этого тождества имеют производную по μ^k при $\mu = \mu^*$, определенную на всем интервале $m_1 < t < m_2$, причем

$$\frac{\partial}{\partial \mu^k} \frac{\partial \varphi^i(t, \mu)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi^i(t, \mu)}{\partial \mu^k}.$$

Дифференцируя тождество (22) по μ^k при $\mu = \mu^*$, мы, в силу сказанного, видим, что функции (20) составляют решения системы (19). Для получения начального условия (21) достаточно продифференцировать по μ^k начальные условия

$$\varphi^i(t_0, \mu) = x_0^i.$$

Таким образом, предложение Б) доказано.

В) Пусть $\varphi(t, \xi) = (\varphi^1(t, \xi), \ldots, \varphi^n(t, \xi))$ — непродолжаемое решение уравнения (18) с начальными значениями t_0, ξ и $m_1 < t < m_2$ — интервал его определения при фиксированном значении $\xi = x_0$. В силу теоремы 17 частные производные

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j} \varphi^i(t, x_0) = \psi_j^i(t),$$

вычисленные при $\xi = x_0$, определены и непрерывны как функции t на всем интервале $m_1 < t < m_2$. Положим

$$f_j^i(t, x) = \frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}, \qquad f_j^i(t) = f_j^i(t, \varphi(t, x_0)).$$

Функции $f_j^i(t)$ переменного t определены на всем интервале $m_1 < t < m_2$. Система линейных уравнений

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} f_j^i(t) y^j, \tag{23}$$

определенная на интервале $m_1 < t < m_2$, называется *системой уравнений в вариациях* (по начальным значениям) для системы (17) при начальных значениях t_0, x_0. Оказывается, что система функций

$$y^1 = \psi_j^1(t), \ \ldots, \ y^n = \psi_j^n(t) \tag{24}$$

является решением системы уравнений (23) при начальных условиях

$$\psi^i_j(t_0)=\delta^i_j, \tag{25}$$

где $\delta^i_j=0$ при $i\neq j$, а $\delta^i_i=1$.

Тот факт, что система функций (24) составляет решение линейной системы (23), доказывается точно так же, как в предложении Б), — путем подстановки в систему (17) решения $x=\varphi(t, \xi)$ и последующего дифференцирования полученного тождества по ξ^j. Начальные условия (25) получаются из начальных условий

$$\varphi^i(t_0, \xi)=\xi^i$$

дифференцированием их по ξ^j.

Примеры

1. Пусть

$$\dot{x}^i=f^i(x^1, \ldots, x^n)=f^i(x), \qquad i=1, \ldots, n, \tag{26}$$

— автономная система дифференциальных уравнений и

$$\dot{x}=f(x) \tag{27}$$

— ее векторная запись. Пусть, далее, $a=(a^1, \ldots, a^n)$ — положение равновесия этой системы (см. § 15), так что $f^i(a)=0$ и система функций $x^1=a^1, \ldots, x^n=a^n$ составляет решение системы (26). Решение уравнения (27) с начальными значениями 0, ξ обозначим через

$$\varphi(t, \xi)=(\varphi^1(t, \xi), \ldots, \varphi^n(t, \xi)).$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial}{\partial\xi^j}\varphi^i(t, a)=\psi^i_j(t) \tag{28}$$

от функций $\varphi^i(t, \xi)$, вычисленные при $\xi=a$, пользуясь предложением В).

Функции

$$f^i_j(t)=\frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}=a^i_j$$

являются в этом случае константами. Таким образом, система уравнений в вариациях (23) в данном случае есть линейная однородная система с постоянными коэффициентами

$$\dot{y}^i=\sum_{j=1}^{n}a^i_jy^j, \tag{29}$$

и производные (28), являющиеся решениями системы (29), легко могут быть найдены, в то время как решение $\varphi(t, \xi)$ при переменном ξ найти, вообще говоря, трудно.

Система уравнений в вариациях (29) играет важную роль для изучения поведения решений уравнения (27) вблизи положения равновесия a, как это мы увидим в следующей главе. Там, однако, система (29) появляется не как система уравнений в вариациях, а как линеаризация системы (26) вблизи положения равновесия a. Линеаризация системы (26) осуществляется следующим образом: вместо неизвестных функций $x^1, \ldots, x^n$ вводятся новые неизвестные функции

$$\delta x^1, \ldots, \delta x^n$$

по формулам

$$x^i = a^i + \delta x^i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

Производя в системе (26) замену переменных (30) и разлагая правые части в ряды Тейлора по новым неизвестным функциям $\delta x^1, \ldots, \delta x^n$, мы получим:

$$\frac{d}{dt}\delta x^i = f^i(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}\delta x^j + \ldots = \sum_{j=1}^{n} a^i_j \delta x^j + \ldots, \tag{31}$$

где не выписаны члены второго порядка малости относительно величины δx^i.

Линеаризуя систему (31), т. е. сохраняя в ней лишь линейные члены, мы получим систему уравнений, совпадающую с системой (29).

§ 25. Первые интегралы

Здесь будет дано понятие о первых интегралах и решена краевая задача для линейных уравнений в частных производных.

Первые интегралы

Пусть

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

— нормальная автономная система уравнений, правые части которой вместе с их частными производными определены и непрерывны на некотором открытом множестве Δ пространства переменных $x^1, \ldots, x^n$, и пусть

$$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

— векторная запись этой системы.

А) Функция

$$u(x^1, \ldots, x^n) = u(x),$$

определенная и непрерывная вместе со своими частными производными на некотором открытом множестве G, содержащемся в Δ, называется *первым интегралом* системы (1), если при подстановке в нее произвольного решения $x=\varphi(t)$ уравнения (2), траектория которого целиком расположена в множестве G, мы получаем постоянную относительно t величину, т. е. функция $u(\varphi(t))$ зависит только от выбора решения $\varphi(t)$, но не от переменной t. Оказывается, что любой первый интеграл $u(x)$ системы (1) удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} f^i(x) = 0 \tag{3}$$

и что, обратно, всякая функция $u(x)$, удовлетворяющая условию (3), является первым интегралом системы (1).

Докажем, что первый интеграл $u(x)$ системы (1) удовлетворяет условию (3). Пусть ξ — произвольная точка множества G и $x=\varphi(t, \xi)$ — решение уравнения (2) с начальными значениями 0, ξ. Мы имеем:

$$0 = \frac{d}{dt} u(\varphi(t, \xi))\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi^i} f^i(\xi);$$

так как ξ — произвольная точка из G, то соотношение (3) выполнено на множестве G.

Допустим теперь, что для функции $u(x)$ выполнено соотношение (3), и пусть $x=\varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (2), траектория которого лежит в G. Подставляя $x=\varphi(t)$ в функцию $u(x)$, мы получим некоторую функцию

$$v(t) = u(\varphi(t)).$$

Дифференцируя эту функцию по t, получаем:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\varphi(t))}{\partial x^i} f^i(\varphi(t)) = 0.$$

Таким образом, $u(\varphi(t))$ не зависит от t.

В дальнейшем изучение первых интегралов системы (1) будет проводиться чисто локально в некоторой окрестности точки a открытого множества Δ, не являющейся положением равновесия системы (1):

$$f(a) \neq 0. \tag{4}$$

Б) Первые интегралы

$$u^1(x), \ \ldots, \ u^k(x)$$

системы (1), определенные в некоторой окрестности точки a (см. (4)), называются *независимыми в точке* a или просто независимыми, если функциональная матрица

$$\left(\frac{\partial u^i(a)}{\partial x^j}\right), \qquad i=1, \ \ldots, \ k; \qquad j=1, \ \ldots, \ n,$$

имеет ранг k. Оказывается, что в некоторой окрестности точки a (см. (4)) существуют $n-1$ независимых первых интегралов системы уравнений (1).

Докажем это. Так как вектор $f(a)$ отличен от нуля, то отлична от нуля хотя бы одна из его компонент. Будем считать, что

$$f^n(a) \neq 0.$$

Пусть $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}, a^n)$ — точка, близкая к точке a, и $x = \varphi(t, \xi)$ — решение уравнения (2) с начальными значениями 0, ξ. В координатной форме решение это можно записать в виде:

$$x^i = \varphi^i(t, \xi^1, \ldots, \xi^{n-1}), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Будем рассматривать эту систему сооотношений как систему уравнений относительно неизвестных

$$\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}, t. \tag{6}$$

При $x^i = a^i$, $i = 1, \ldots, n$, эта система уравнений имеет очевидное решение $\xi^1 = a^1, \ldots, \xi^{n-1} = a^{n-1}$, $t = 0$, и функциональный определитель системы (5) отличен от нуля в этой точке.

В самом деле,

$$\varphi^i(0, \xi^1, \ldots, \xi^{n-1}) = \xi^i, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$\varphi^n(0, \xi^1, \ldots, \xi^{n-1}) = a^n,$$

и потому

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi^i(0, a^1, \ldots, a^{n-1})}{\partial \xi^j} = \delta^i_j, \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad j = 1, \ldots, n-1; \\ &\frac{\partial}{\partial t} \varphi^n(0, a^1, \ldots, a^{n-1}) = f^n(a) \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отсюда видно, что интересующий нас функциональный определитель отличен от нуля. Таким образом, существует такая окрестность G точки a, что при x, принадлежащих G, система уравнений (5) разрешима относительно неизвестных (6) (см. § 33) и решение записывается в виде:

$$\xi^1 = u^1(x), \ldots, \xi^{n-1} = u^{n-1}(x), \quad t = v(x). \tag{8}$$

Покажем, что функции

$$u^1(x), \ldots, u^{n-1}(x), \tag{9}$$

входящие в эти соотношения, являются первыми интегралами системы (1), и притом независимыми в точке a. Функциональная матрица системы (5) найдена (см. (7)); из ее вида легко следует, что функциональная матрица

$$\left(\frac{\partial u^i(a)}{\partial x^j}\right), \qquad i, j = 1, \ldots, n-1,$$

является единичной, и потому функции (9) независимы. Покажем, что они являются первыми интегралами системы (1). Для этого достаточно доказать, что при подстановке в функции (9) любого решения $x=\varphi(t)$ уравнения (2) они превращаются в величины, не зависящие от t. Так как система (8) является обращением системы (5), то функции (9) удовлетворяют тождествам

$$u^i(\varphi(t, \xi))=\xi^i, \qquad i=1, \ldots, n-1 \tag{10}$$

(см. § 33, пример 1). Таким образом, при подстановке в функции (9) решения $x=\varphi(t, \xi)$ мы получаем величины, не зависящие от t.

Пусть теперь $x=\varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (2), проходящее в окрестности G. Пусть t_0, x_0 — его начальные значения, причем x_0 принадлежит G. Так как система (5) разрешима при $x=x_0$, то существует решение $x=\varphi(t, \xi_0)$, проходящее через точку x_0, и потому решение $\varphi(t)$ может быть записано в виде:

$$\varphi(t)=\varphi(t+c, \xi_0),$$

где c — константа (см. § 15, Б)). Таким образом, при подстановке $x=\varphi(t)$ в функцию $u^i(x)$ получаем, в силу (10):

$$u^i(\varphi(t))=u^i(\varphi(t+c, \xi_0))=\xi_0^i, \qquad i=1, \ldots, n-1.$$

Итак, предложение Б) доказано.

В) Пусть

$$u^1(x), \ldots, u^{n-1}(x) \tag{11}$$

— независимые в точке a первые интегралы системы уравнений (1), причем

$$u^i(a)=b^i, \ i=1, \ldots, n-1; \ b=(b^1, \ldots, b^{n-1}),$$

и пусть $w(x)$ — некоторый первый интеграл системы (1), определенный в окрестности точки a. Существует тогда такая функция $W(y^1, \ldots, y^{n-1})$, определенная на некоторой окрестности точки b пространства переменных $y^1, \ldots, y^{n-1}$, что имеет место тождество

$$w(x)=W(u^1(x), \ldots, u^{n-1}(x)) \tag{12}$$

на некоторой окрестности точки a.

Докажем это. В силу А), первые интегралы $u^1(x), \ldots, u^{n-1}(x)$, $w(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u^j(x)}{\partial x^i}f^i(x)=0, \qquad j=1, \ldots, n-1;$$

$$\sum\frac{\partial w(x)}{\partial x^i}f^i(x)=0.$$

Таким образом, эти первые интегралы зависимы (см. (4)). В то же время первые интегралы (11) независимы. Отсюда, в силу известной теоремы анализа (см. § 33, пример 2), следует существование функции W, для которой выполнено соотношение (12).

Если нам известны некоторые первые интегралы системы (1), то тем самым решение системы (1) облегчается. Точно это обстоятельство формулируется в нижеследующем предложении:

Г) Пусть
$$u^{k+1}(x), \ldots, u^n(x) \tag{13}$$
— система из $n-k$ независимых в точке a (см. Б)) первых интегралов автономной системы уравнений (1). Пользуясь функциями (13), можно понизить порядок системы уравнений (1) на $n-k$ единиц, т. е. заменить ее автономной системой порядка k; в частности, когда имеется максимальное число $n-1$ независимых первых интегралов, порядок автономной системы (1) можно свести до первого и, следовательно (см. § 2, пример 1), решить ее в квадратурах.

Докажем предложение Г). Так как первые интегралы (13) независимы, то в функциональной матрице
$$\left(\frac{\partial u^i(a)}{\partial x^j}\right), \qquad i=k+1, \ldots, n; \; j=1, \ldots, n,$$
имеется квадратная матрица порядка $n-k$ с отличным от нуля детерминантом. Будем считать для определенности, что отличен от нуля детерминант матрицы
$$\left(\frac{\partial u^i(a)}{\partial x^j}\right), \qquad i, j=k+1, \ldots, n.$$
Пользуясь этим, введем в окрестности точки a новые координаты
$$y^1, \ldots, y^n \tag{14}$$
вместо прежних
$$x^1, \ldots, x^n,$$
положив
$$y^1=x^1, \ldots, y^k=x^k; \quad y^{k+1}=u^{k+1}(x), \ldots, y^n=u^n(x). \tag{15}$$
Этими формулами действительно вводятся новые координаты $y^1, \ldots, y^n$, так как функциональный определитель системы соотношений (15) отличен от нуля в окрестности точки a (см. § 33). В новой системе переменных (14) система (1) примет вид:
$$\dot y^i=g^i(y^1, \ldots, y^n), \qquad i=1, \ldots, n. \tag{16}$$
Но так как каждая функция (13) удовлетворяет условию (3), то мы будем иметь при $i=k+1, \ldots, n$:
$$\dot y^i=\frac{d}{dt}u^i(x^1, \ldots, x^n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u^i(x)}{\partial x^j}f^j(x)=0.$$

Таким образом,

$$g^{k+1}(y)=0, \ \ldots, \ g^n(y)=0.$$

Ввиду этого система (16) фактически оказывается автономной системой порядка k.

Линейное уравнение в частных производных первого порядка

Соотношение (3) можно рассматривать как *уравнение в частных производных* относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x^1, \ldots, x^n$. В предложениях Б) и В) установлено, что при $f(a)\neq 0$ в окрестности точки a существуют $n-1$ независимых решений этого уравнения и что, имея $n-1$ независимых решений его, можно получить всякое другое при помощи формулы (12). При этом ясно, что всякая функция, задаваемая формулой (12), является решением уравнения (3). В этом смысле можно считать, что уравнение (3) решено, а именно, показано, что, умея решать систему (1), мы тем самым умеем решать и уравнение (3). Можно, однако, подойти к решению уравнения (3) с другой точки зрения, а именно можно поставить и решить *краевую задачу* для уравнения (3) и даже для уравнения, более общего чем (3).

Д) Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}=F(x, u) \tag{17}$$

— уравнение в частных производных относительно неизвестной функции $u(x)$, где $F(x, u)$ — некоторая заданная функция, имеющая непрерывные производные первого порядка по всем своим аргументам. Пусть, далее,

$$x=\xi(t^1, \ldots, t^{n-1}) \tag{18}$$

— заданная в векторной форме параметрическая запись некоторой поверхности размерности $n-1$, проходящей через точку a при $t^1=\ldots=t^{n-1}=0$, так что

$$\xi(0, \ldots, 0)=a.$$

Мы будем предполагать, что поверхность (18) дифференцируема и в точке a не касается вектора $f(a)$, т. е. векторы

$$\frac{\partial\xi(0, \ldots, 0)}{\partial t^1}, \ \ldots, \ \frac{\partial\xi(0, \ldots, 0)}{\partial t^{n-1}}, \ f(a) \tag{19}$$

линейно независимы. Пусть, наконец,

$$u_0(t^1, \ldots, t^{n-1}) \tag{20}$$

— некоторая функция, заданная на поверхности (18). Оказывается, что в окрестности точки a существует, и притом единственное, решение $u(x)$ уравнения (17), совпадающее на поверхности (18) с заданной функцией (20), так что

$$u(\xi(t^1, \ldots, t^{n-1})) = u_0(t^1, \ldots, t^{n-1}).$$

Для нахождения решения $u(x)$ используются траектории системы (1), начинающиеся на поверхности (18). Эти траектории называются *характеристиками* уравнения (17).

Докажем предложение Д). Для этого введем в окрестности точки a фазового пространства системы (1) новые координаты вместо координат $x^1, \ldots, x^n$. Пусть $x = \varphi(t, t^1, \ldots, t^{n-1})$ — решение уравнения (2), начинающееся в точке $\xi(t^1, \ldots, t^{n-1})$ поверхности (18), т. е. решение с начальными значениями 0, $\xi(t^1, \ldots, t^{n-1})$.

Мы имеем тогда систему соотношений

$$x^i = \varphi^i(t, t^1, \ldots, t^{n-1}), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

правые части которых имеют непрерывные частные производные по переменным $t, t^1, \ldots, t^{n-1}$ (см. теорему 17). Если считать в ней неизвестными величинами переменные

$$t, t^1, \ldots, t^{n-1}, \tag{22}$$

то система эта при $x = a$ имеет очевидное решение

$$t = t^1 = \ldots = t^{n-1} = 0,$$

и функциональный определитель ее не обращается в нуль в этой точке, как это следует из линейной независимости векторов (19).

В самом деле, $\varphi(0, t^1, \ldots, t^{n-1}) = \xi(t^1, \ldots, t^{n-1})$, и потому частная производная $\frac{\partial}{\partial t^k}\varphi(0, \ldots, 0)$ равна $\frac{\partial}{\partial t^k}\xi(0, \ldots, 0)$; далее, $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(0, \ldots, 0) = f(a)$. Таким образом, система соотношений (21) дает возможность ввести в некоторой окрестности точки a вместо координат $x^1, \ldots, x^n$ новые координаты (22) (см. § 33). В этих новых координатах уравнение (17) записывается особенно просто, и легко может быть решена поставленная в предложении Д) краевая задача. Пусть $u(x)$ — некоторая функция, определенная в окрестности точки a. Подставим в ней вместо переменных $x^1, \ldots, x^n$ переменные (22) по формулам (21); тогда мы получим функцию

$$v(t, t^1, \ldots, t^{n-1}) = u(\varphi(t, t^1, \ldots, t^{n-1})).$$

Мы имеем:

$$\frac{\partial v(t, t^1, \ldots, t^{n-1})}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} f^i(x),$$

где $x = \varphi(t, t^1, \ldots, t^{n-1})$. Таким образом, в переменных (22) уравнение (17) получает вид:

$$\frac{\partial v(t, t^1, \ldots, t^{n-1})}{\partial t} = F(\varphi(t, t^1, \ldots, t^{n-1}), v(t, t^1, \ldots, t^{n-1})). \tag{23}$$

Так как поверхность (18) в координатах (22) задается уравнением $t=0$, то нам следует найти решение уравнения (23), обращающееся в заданную функцию $u_0(t^1, \ldots, t^{n-1})$ при $t=0$. Для нахождения такого решения следует решить уравнение (23), считая его обыкновенным дифференциальным уравнением с независимым переменным t, а переменные $t^1, \ldots, t^{n-1}$ — параметрами. При этом следует искать решения с начальными значениями

$$0, \ u_0(t^1, \ldots, t^{n-1}).$$

Получающаяся функция $v(t, t^1, \ldots, t^{n-1})$, в силу теоремы 18, имеет непрерывные производные по всем переменным.

Этим краевая задача, поставленная в Д), решена.

Замечание. Пусть

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n) \tag{24}$$

— неавтономная система дифференциальных уравнений. Для того чтобы ввести понятие первого интеграла этой системы, преобразуем ее в автономную систему, введя дополнительную неизвестную функцию

$$x^{n+1} = t.$$

Тогда система (24), дополненная уравнением

$$\dot{x}^{n+1} = 1,$$

будет автономной; ее первые интегралы считают первыми интегралами системы (24).

Пример

Пусть

$$H = H(x^1, \ldots, x^n; y^1, \ldots, y^n) = H(x, y) \tag{25}$$

— функция двух систем переменных. Система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial}{\partial y^i} H(x, y), \quad \dot{y}^i = -\frac{\partial}{\partial x^i} H(x, y), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{26}$$

называется *гамильтоновой системой*, а функция $H(x, y)$ — гамильтоновой функцией этой системы. Непосредственно проверяется, что функция (25) является первым интегралом системы (26).

ГЛАВА ПЯТАЯ

УСТОЙЧИВОСТЬ

Работа очень многих механических, электрических и другого типа устройств (машин, приборов и т. п.) описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет всегда бесконечное множество решений, и для задания одного определенного решения нужно указать его начальные значения. Между тем употребляемые в практике устройства обычно работают на вполне определенном режиме, и в их работе, во всяком случае на первый взгляд, невозможно обнаружить наличия бесконечного множества режимов работы, соответствующих различным решениям системы уравнений. Это может объясниться либо тем, что начальные значения решения при запуске устройства выбираются каким-то определенным образом, либо тем, что начальные значения при продолжительной работе прибора утрачивают свое влияние, и устройство само стабилизирует свою работу на *стационарном* решении. С последним явлением мы уже сталкивались, когда разбирали работу электрических цепей. Приведем еще один пример. Стенные часы идут с совершенно определенным размахом маятника, хотя при запуске их маятник можно отклонить от вертикального положения более или менее сильно. Если при запуске часов маятник отклонить не достаточно сильно, то после небольшого числа колебаний он остановится. Если же отклонение достаточно велико, то через короткое время амплитуда колебаний маятника станет вполне определенной, и часы будут идти с этой амплитудой колебаний неопределенно долго, практически бесконечно долго. Таким образом, у системы уравнений, описывающей работу часов, имеются два стационарных решения: положение равновесия, соответствующее отсутствию хода, и периодическое решение, соответствующее нормальному ходу часов. Всякое другое решение, а этих решений, несомненно, имеется бесконечное множество, очень быстро приближается к одному из этих двух стационарных и по истечении некоторого времени становится практически не отличимым от него. Каждое из отмеченных двух стационарных решений является в некотором смысле *устойчивым*. Это значит, что если мы берем не стационарное решение, а решение, отклоняющееся от стационарного в начальный момент и притом не слишком сильно, то взятое нестационарное решение приближается к стационарному. Таково не вполне точно формулированное определение устойчивости решения. На этом же примере видно, что фазовое пространство системы уравнений, описывающей работу часов, распадается на две *области притяжения*. Если взять начальное значение в одной из областей, то решение будет стремиться к положению равновесия; если взять начальные значения в другой области, то решение будет стремиться к периодическому решению.

Из сказанного уже видно, что для полного понимания работы какого-либо устройства желательно иметь хорошее представление о фазовом пространстве системы уравнений, описывающей работу этого устройства. При этом важнее всего знать все *устойчивые решения* этой системы уравнений.

Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных значений (см. § 23) мы уже знаем, что если задаться определенным конечным промежутком времени, то при достаточно малом отклонении начальных значений решение отклонится мало на всем заданном промежутке времени, но это свойство решения вовсе не означает устойчивости. Когда речь идет об устойчивости, отклонение на неопределенно большом отрезке времени должно быть малым, если только отклонение начальных значений мало.

Настоящая глава в основном посвящена проблеме устойчивости положений равновесия и периодических решений.

В нее включены также два важных приложения к техническим задачам: излагаются исследование Вышнеградского о работе паровой машины с регулятором Уатта и исследование Андронова о работе лампового генератора электрических незатухающих колебаний. Первое из этих исследований явилось основополагающим в теории автоматического регулирования, второе — в теории нелинейных колебаний.

В § 30 проводится исследование поведения траекторий вблизи положений равновесия автономной системы второго порядка, что не вполне относится к проблеме устойчивости. Этот параграф по своей трудности несколько превосходит средний уровень книги. Еще более трудным по своему содержанию является последний параграф этой главы (§ 31).

§ 26. Теорема Ляпунова

Здесь будут даны понятие устойчивости по Ляпунову и достаточные условия устойчивости применительно к положению равновесия автономной системы (см. § 15).

Устойчивость положения равновесия

Пусть

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

— нормальная автономная система, и

$$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

— ее векторная запись. Относительно функций

$$f^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

мы будем предполагать, что они определены и имеют непрерывные частные производные первого порядка на некотором открытом множестве Δ пространства переменных $x^1, \ldots, x^n$. В дальнейшем при установлении критерия устойчивости требования дифференцируемости будут усилены: именно, будет предполагаться, что функции (3) имеют на множестве Δ непрерывные частные производные второго порядка.

Не давая формального определения устойчивости по Ляпунову, постараюсь прежде всего выразить идею устойчивости. Положение равновесия $a = (a^1, \ldots, a^n)$ уравнения (2) следует считать **устойчивым**, если всякое решение уравнения (2), исходящее при $t = 0$ из точки, достаточно близкой к a, остается в течение всего дальнейшего своего изменения (т. е. при $t > 0$) вблизи точки a. Физический смысл устойчивости ясен. Физический объект (например, какая-либо машина), движения которого управляются уравнением (2), может находиться в положении равновесия a лишь тогда, когда это положение равновесия устойчиво, так как в противном случае ничтожное отклонение от положения равновесия, вызванное случайным толчком, может повлечь уход объекта далеко от положения равновесия.

Ниже через $\varphi(t, \xi)$ будет обозначаться решение уравнения (2) с начальными значениями $t = 0$, $x = \xi$, так что $\varphi(t, \xi)$ есть векторная функция скалярного переменного t и векторного переменного ξ, удовлетворяющая условию

$$\varphi(0, \xi) = \xi. \tag{4}$$

Определение. Положение равновесия a уравнения (2) называется *устойчивым по Ляпунову*, если 1) существует настолько малое положительное число ρ, что при $|\xi - a| < \rho$ решение $\varphi(t, \xi)$ уравнения (2) определено для всех положительных t; 2) для всякого положительного числа ε найдется такое положительное число $\delta < \rho$, что при $|\xi - a| < \delta$ имеем $|\varphi(t, \xi) - a| < \varepsilon$ при всех $t > 0$. Устойчивое по Ляпунову положение равновесия a уравнения (2) называется *асимп-*

тотически устойчивым, если 3) существует настолько малое положительное число $\sigma < \rho$, что при $|\xi - a| < \sigma$ имеем:

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, \xi) - a| = 0.$$

Дадим прежде всего достаточные условия устойчивости положения равновесия для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами:

А) Пусть

$$\dot{x} = Ax \tag{5}$$

— линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, взятое в векторной записи. Решение его с начальными значениями 0, ξ обозначим через $\psi(t, \xi)$. Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то существуют такие положительные числа α и r, что выполнено неравенство

$$|\psi(t, \xi)| \leqslant r|\xi| e^{-\alpha t}, \qquad t \geqslant 0. \tag{6}$$

Из неравенства (6) непосредственно следует, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (5) является устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым.

Докажем неравенство (6). Положим:

$$A = (a_j^i); \qquad L(p) = (a_j^i - p\delta_j^i).$$

Тогда, пользуясь символом дифференцирования p (см. § 7), уравнение (5) в скалярной форме можно записать в виде системы

$$\sum_{j=1}^{n} L_j^i(p) x^j = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Пусть $M_i^j(p)$ — минор элемента $L_j^i(p)$ матрицы $L(p)$, взятый с надлежащим знаком, так что выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^k(p) L_j^i(p) = \delta_j^k D(p),$$

где $D(p)$ — детерминант матрицы $L(p)$. Умножая соотношение (7) на многочлен $M_i^k(p)$ и суммируя полученное соотношение по i, получаем

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_i^k(p) L_j^i(p) x^j = \sum_{j=1}^{n} \delta_j^k D(p) x^j = D(p) x^k.$$

Таким образом, если

— некоторое решение уравнения (5), то каждая функция x^i удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D(p)\,x^i = 0.$$

Так как все корни многочлена $D(p)$ по предположению имеют отрицательные действительные части, то (см. § 9, А)) для функции x^i выполнено неравенство

$$|x^i| \leqslant Re^{-\alpha t}, \qquad i = 1, \ldots, n; \quad t \geqslant 0,$$

где R и α — положительные числа, не зависящие от номера i. Из этого неравенства следует неравенство

$$|x| \leqslant \sqrt{n}\, Re^{-\alpha t} \qquad (t \geqslant 0).$$

Последнее неравенство уже было доказано ранее (см. § 11, Б)) в более общих предположениях; здесь это доказательство проведено заново.

Пусть e_i — единичный координатный вектор номера i, так что

$$e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

где единица стоит на i-м месте. Пусть, далее, $\psi_i(t)$ — решение уравнения (5) с начальным значением e_i, так что

$$\psi_i(0) = e_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда решение $\psi(t, \xi)$ уравнения (5) с начальным значением

$$\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n),$$

очевидно, запишется в виде:

$$\psi(t, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \psi_i(t). \tag{8}$$

Так как для каждого решения $\psi_i(t)$ выполнено неравенство

$$|\psi_i(t)| \leqslant \sqrt{n}\, Re^{-\alpha t} \qquad (t \geqslant 0),$$

то для решения $\psi(t, \xi)$, очевидно, выполнено неравенство (6).

Устойчивость по Ляпунову положения равновесия $x = 0$ непосредственно вытекает из неравенства (6). Действительно, если ε — заданное положительное число, то достаточно принять за δ число $\frac{\varepsilon}{r}$. Асимптотическая устойчивость также вытекает из неравенства (6).

Функция Ляпунова

При установлении критерия устойчивости положения равновесия **нелинейной** системы (1) пользуются так называемым *дифференцированием в силу системы уравнений*; дифференцирование это находит применения не только при доказательстве теоремы Ляпунова.

Б) Пусть

$$F(x^1, \ldots, x^n) = F(x)$$

— некоторая дифференцируемая функция переменных $x^1, \ldots, x^n$, определенная на множестве Δ. Ее производная по t в силу системы уравнений (1) в точке $x = (x^1, \ldots, x^n)$ определяется следующим образом. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2), удовлетворяющее при некотором значении $t = t_0$ начальному условию:

$$\varphi(t_0) = x.$$

Производная

$$\dot{F}_{(1)}(x)$$

в силу системы (1) определяется формулой

$$\dot{F}_{(1)}(x) = \frac{d}{dt} F(\varphi(t))|_{t=t_0},$$

или в силу формулы полной производной

$$\dot{F}_{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} f^i(x). \tag{9}$$

Из формулы (9) видно, что $\dot{F}_{(1)}(x)$ не зависит от решения $\varphi(t)$, а однозначно определяется выбором точки x.

Докажем теперь одно свойство автономной системы.

В) Решение автономного уравнения (2) с начальными значениями 0, ξ по-прежнему будем обозначать через $\varphi(t, \xi)$. Оказывается, что функция $\varphi(t, \xi)$ удовлетворяет тождеству

$$\varphi(t, \varphi(s, \xi)) = \varphi(s + t, \xi). \tag{10}$$

Докажем формулу (10). Положим:

$$\eta = \varphi(s, \xi), \tag{11}$$

где s — фиксированное число, и рассмотрим решение

$$\varphi_1(t) = \varphi(t, \eta)$$

уравнения (2). Так как $\varphi(t, \xi)$ есть решение уравнения (2), то в силу автономности этого уравнения (см. § 15, А)) решением является и функция $\varphi_2(t)$, определяемая соотношением:

$$\varphi_2(t) = \varphi(t + s, \xi).$$

Мы имеем, таким образом, два решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ уравнения (2). Далее,

$$\varphi_1(0) = \varphi(0, \eta) = \eta$$

(см. (4)),

$$\varphi_2(0) = \varphi(s, \xi) = \eta$$

(см. (11)). Таким образом, решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют общие начальные значения и потому совпадают, а это и означает, что соотношение (10) выполнено.

В доказательстве теоремы Ляпунова основную роль играет некоторая положительно определенная квадратичная форма, называемая *функцией Ляпунова*. Отметим сначала некоторые свойства положительно определенных квадратичных форм (см. Г)), а затем построим и самую функцию Ляпунова (см. Д)).

Г) Пусть

$$x = (x^1, \ldots, x^n) \tag{12}$$

— переменный вектор n-мерного пространства. *Квадратичной формой* от вектора x называется его функция $W(x)$, определяемая формулой

$$W(x) = \sum_{i, j=1}^{n} w_{ij} x^i x^j,$$

где $w_{ij} = w_{ji}$ — действительные числа. Квадратичная форма $W(x)$ называется *положительно определенной*, если при $x \neq 0$ имеем:

$$W(x) > 0.$$

Оказывается, что для любой положительно определенной квадратичной формы $W(x)$ всегда можно подобрать два таких положительных числа μ, ν, что для произвольного вектора x имеют место неравенства

$$\mu |x|^2 \leqslant W(x) \leqslant \nu |x|^2. \tag{13}$$

Из этого следует, что для произвольного x (см. (12)) имеет место неравенство

$$|x^i| \leqslant \sqrt{\frac{1}{\mu} W(x)}. \tag{14}$$

Докажем существование чисел μ и ν. Для этого рассмотрим значения функции $W(\xi)$, когда вектор ξ принадлежит единичной сфере, т. е. удовлетворяет условию

$$|\xi| = 1. \tag{15}$$

Так как сфера (15) представляет собой замкнутое ограниченное множество, а функция $W(\xi)$ непрерывна, то на сфере (15) она достигает своего минимума μ и своего максимума ν. Так как все векторы сферы (15) отличны от нуля, то числа μ и ν положительны. Пусть x — произвольный вектор; тогда мы имеем $x = \lambda\xi$, где вектор ξ приналежит сфере (15), и потому для вектора ξ выполнены неравенства

$$\mu \leqslant W(\xi) \leqslant \nu.$$

Умножая это неравенство на λ^2, получаем неравенства (13).

Перейдем теперь к построению функции Ляпунова.

Д) Пусть

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{16}$$

— линейная однородная система уравнений с постоянными коэффициентами, причем все собственные значения матрицы $A = (a^i_j)$ имеют отрицательные действительные части. Существует тогда положительно определенная квадратичная форма $W(x)$, производная которой в силу системы (16) (см. Б)) удовлетворяет неравенству

$$\dot{W}_{(16)}(x) \leqslant -\beta W(x), \tag{17}$$

где x — произвольный вектор, а β — положительное число, не зависящее от вектора x.

Построим форму $W(x)$. Будем считать, что система (16) есть скалярная запись векторного уравнения (5). Решение уравнения (5) с начальными значениями 0, ξ будем, как и в предложении А), обозначать через $\psi(t, \xi)$; тогда мы имеем:

$$\psi(t, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \psi_i(t) \tag{18}$$

(см. (8)). Положим теперь

$$W(\xi) = \int_0^\infty |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau. \tag{19}$$

Мы имеем в силу (18)

$$W(\xi) = \sum_{i, j=1}^{n} \xi^i \xi^j \int_0^\infty (\psi_i(\tau), \psi_j(\tau))\, d\tau. \tag{20}$$

Так как каждая функция $\psi_i(t)$ удовлетворяет неравенству (6), то каждый несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства (20), сходится, и потому $W(x)$ есть квадратичная форма относительно вектора ξ. Эта квадратичная форма является положительно определенной, так как при $\xi \neq 0$ подынтегральное выражение в формуле (19) положительно, и, следовательно, $W(\xi) > 0$. Вычислим теперь производную $\dot{W}_{(16)}(\xi)$ функции $W(\xi)$ в силу системы (16). Для этого, согласно предложению Б), мы проведем через точку ξ решение $\psi(t, \xi)$

и затем вычислим производную при $t=0$ от функции $W(\psi(t, \xi))$. Заметим предварительно, что в силу В)

$$\psi(\tau, \psi(t, \xi)) = \psi(\tau+t, \xi),$$

так что

$$W(\psi(t, \xi)) = \int_0^\infty |\psi(\tau, \psi(t, \xi))|^2 d\tau = \int_0^\infty |\psi(t+\tau, \xi)|^2 d\tau = \int_t^\infty |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau.$$

Таким образом, мы имеем:

$$\dot{W}_{(16)}(\xi) = \frac{d}{dt} W(\psi(t, \xi))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_t^\infty |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau\Big|_{t=0} = -|\psi(t, \xi)|^2\big|_{t=0} = -|\xi|^2.$$

Итак, мы получили равенство

$$\dot{W}_{(16)}(\xi) = -|\xi|^2,$$

но в силу второго из неравенств (13) имеем:

$$-|\xi|^2 \leqslant -\frac{1}{\nu} W(\xi),$$

и потому получаем:

$$\dot{W}_{(16)}(\xi) \leqslant -\frac{1}{\nu} W(\xi).$$

Таким образом, неравенство (17) доказано.

Теорема Ляпунова

Перейдем, наконец, к формулировке и доказательству теоремы Ляпунова.

Пусть

$$a = (a^1, \ldots, a^n)$$

— положение равновесия автономной системы (1). Положим:

$$x^i = a^i + \Delta x^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

и примем за новые неизвестные функции величины

$$\Delta x^1, \ldots, \Delta x^n. \tag{22}$$

Производя подстановку (21) в системе (1) и разлагая правые части в ряд Тейлора по переменным (22), получаем:

$$\Delta\dot{x}^i = f^i(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}\Delta x^j + R^i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{23}$$

где R^i — член второго порядка малости относительно неизвестных (22). Так как a есть положение равновесия системы (1), то

$$f^i(a)=0;$$

далее, полагая

$$a_j^i=\frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}, \tag{24}$$

мы можем записать систему (23) в виде:

$$\Delta\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n} a_j^i \Delta x^j + R^i, \qquad i=1, \ldots, n. \tag{25}$$

Теорема 19. *Если все собственные значения матрицы $A=(a_j^i)$ (см. (24)) имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия a системы* (1) *асимптотически устойчиво; более полно, существует настолько малое положительное число σ, что при $|\xi-a|<\sigma$ имеет место неравенство*

$$|\varphi(t, \xi)-a| \leqslant r|\xi-a|e^{-\alpha t}, \tag{26}$$

где r и α — положительные числа, не зависящие от ξ.

Доказательство. Будем считать, что положение равновесия a системы (1) совпадает с началом координат, т. е. что $a=0$. Этого всегда можно достичь, произведя параллельный перенос системы координат; при этом матрица A не изменится. Предполагая, что $a=0$, мы имеем:

$$\Delta x^i = x^i,$$

и потому система (25) записывается в виде:

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j + R^i, \qquad i=1, \ldots, n, \tag{27}$$

где

$$R^i=\frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f^i(\theta x)}{\partial x^j \partial x^k}x^j x^k.$$

Пусть теперь $W(x)$ — функция Ляпунова (см. Д)) для линейной системы

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j, \qquad i=1, \ldots, n, \tag{28}$$

получаемой из системы (27) линеаризацией, т. е. отбрасыванием остаточных членов R^i. Вычислим производную $\dot{W}_{(27)}(x)$ функции $W(x)$

в силу системы (27). Мы имеем:

$$\dot{W}_{(27)}(x)=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial x^i}a^i_jx^j+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial x^i}R^i=$$

$$=\dot{W}_{(28)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial x^i}R^i.$$

Так как функция $W(x)$ удовлетворяет условию (17), то мы имеем:

$$\dot{W}_{(27)}(x)\leqslant-\beta W(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial x^i}R^i.$$

Выберем теперь настолько малое положительное число b, чтобы при

$$W(x)\leqslant b \tag{29}$$

вектор x принадлежал множеству Δ (такое число b существует в силу (13)). Вторые производные $\frac{\partial^2 f^i(\theta x)}{\partial x^l\partial x^k}$, будучи непрерывными функциями, ограничены в эллипсоиде (29) и потому в этом эллипсоиде

$$|R^i|\leqslant k|x|^2\leqslant\frac{k}{\mu}W(x),$$

где k — некоторая константа. Далее, так как $\frac{\partial W(x)}{\partial x^i}$ есть линейная форма относительно $x^1, \ldots, x^n$, то

$$\left|\frac{\partial W(x)}{\partial x^i}\right|\leqslant l\sqrt{W(x)},$$

где l — некоторая константа (см. (14)). Таким образом, существует такое положительное число q, что при $W(x)\leqslant b$ мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial x^i}R^i\leqslant qW(x)^{3/2}.$$

Выберем теперь положительное число c таким образом, чтобы было

$$c\leqslant b,\quad q\sqrt{c}\leqslant\frac{\beta}{2}.$$

Тогда мы будем иметь:

$$\dot{W}_{(27)}(x)\leqslant-\frac{\beta}{2}W(x),$$

если только выполнено неравенство

$$W(x)\leqslant c. \tag{30}$$

Полагая $\alpha = \frac{\beta}{4}$, получаем неравенство

$$\dot{W}_{(27)}(x) \leqslant -2\alpha W(x),$$

справедливое, если для x выполнено неравенство (30).

Пусть ξ — внутренняя точка эллипсоида (30), т. е. точка, удовлетворяющая неравенству

$$W(\xi) < c. \tag{31}$$

Решение системы (27) с начальными значениями 0, ξ, как и раньше, обозначим через $\varphi(t, \xi)$ и положим:

$$w(t) = W(\varphi(t, \xi)).$$

Функция $w(t)$ определена для всех тех значений $t \geqslant 0$, для которых определено решение $\varphi(t, \xi)$, и в силу Б) она удовлетворяет условию

$$\dot{w}(t) \leqslant -2\alpha w(t) \tag{32}$$

до тех пор, пока для нее выполнено неравенство

$$w(t) \leqslant c. \tag{33}$$

Если бы решение $\varphi(t, \xi)$ существовало не для всех положительных значений t, то точка $x = \varphi(t, \xi)$ непременно должна была бы при возрастающем t покинуть эллипсоид (30) (см. § 22, В). Допустим, что точка $x = \varphi(t, \xi)$ покидает этот эллипсоид и пусть $t' > 0$ — то значение t, при котором она впервые попадает на его границу. Тогда на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t'$ точка $\varphi(t, \xi)$ принадлежит эллипсоиду (30), и потому выполнено неравенство (32), так что $\dot{w}(t)$ неположительно. Следовательно, $c = w(t') \leqslant w(0) < c$, что противоречиво.

Таким образом, решение $\varphi(t, \xi)$, а вместе с ним и функция $w(t)$ определены для всех положительных значений t и для всех этих значений выполнено неравенство (32). Если $\xi \neq 0$, то $w(t) > 0$, и мы можем произвести следующие выкладки, исходя из неравенства (32)

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \leqslant -2\alpha; \quad \int_0^t \frac{\dot{w}(t)}{w(t)}\,dt \leqslant -2\alpha t \quad \text{при} \quad t \geqslant 0;$$

$$\ln w(t) - \ln w(0) \leqslant -2\alpha t.$$

Последнее неравенство дает:

$$W(\varphi(t, \xi)) \leqslant W(\xi)\,e^{-2\alpha t}.$$

Из этого неравенства, используя неравенства (13), мы получаем:

$$|\varphi(t, \xi)|^2 \leqslant \frac{\nu}{\mu}\,|\xi|^2 e^{-2\alpha t}, \qquad t \geqslant 0, \tag{34}$$

причем это верно, если только для ξ выполнено неравенство (31).

В силу второго из неравенств (13), из соотношения

$$|\xi| < \sigma = \sqrt{\frac{c}{\nu}} \tag{35}$$

следует неравенство (31). Таким образом, если выполнено неравенство (35), то верно неравенство (34). Извлекая из него квадратный корень, получаем неравенство:

$$|\varphi(t, \xi)| \leqslant \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\, |\xi|\, e^{-\alpha t}; \qquad t \geqslant 0,$$

которое совпадает с неравенством (26), причем $r = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}$, а $a = 0$. Итак, теорема 19 доказана.

Нижеследующее предложение Е) описывает случай, в некотором смысле противоположный рассмотренному в теореме 19.

Е) Положение равновесия a уравнения (2) будем называть *вполне неустойчивым*, если существует такое положительное число σ, что всякое решение $\varphi(t, \xi)$ уравнения (2), начинающееся в точке $\xi \neq a$ шара $|\xi - a| < \sigma$, обязательно покидает этот шар и больше в него уже не возвращается, т. е. найдется такое положительное число $T = T(\xi)$, что при $t = T$ решение $\varphi(t, \xi)$ определено, и для всех значений $t > T$, для которых это решение определено, оно удовлетворяет неравенству $|\varphi(t, \xi) - a| \geqslant \sigma$. Оказывается, что если все собственные значения матрицы $\left(\frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}\right)$ имеют положительные действительные части, то положение равновесия a уравнения (2) является вполне неустойчивым.

Для доказательства предложения Е) используем некоторые результаты, установленные в процессе доказательства теоремы 19; при этом, как и раньше, будем считать, что $a = 0$. Для этого, наряду с уравнением (2), для которого по предположению все собственные значения матрицы $\frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}$ имеют положительные действительные части, рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = -f(x), \tag{36}$$

для которого точка 0, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 19. В силу конструкции, данной при доказательстве теоремы 19, для уравнения (36) существует функция Ляпунова $W(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$\dot{W}_{(36)}(x) \leqslant -2\alpha W(x)$$

при условии (30). Выписывая левую часть этого неравенства в явном виде (см. (9)), получаем:

$$\dot{W}_{(36)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x^i}(-f^i(x)) \leqslant -2\alpha W(x),$$

или, иначе,

$$\dot{W}_{(1)}(x) \geqslant 2\alpha W(x).$$

Это неравенство заведомо верно, когда выполнено неравенство (30). Пусть теперь ξ — некоторая внутренняя точка эллипсоида (30) (см. (31)). Положим:

$$w(t) = W(\varphi(t, \xi)).$$

Для функции $w(t)$ выполнено неравенство

$$\dot{w}(t) \geqslant 2\alpha w(t), \tag{37}$$

когда для нее имеет место неравенство

$$w(t) \leqslant c.$$

Так как $\xi \neq 0$, то $w(t) > 0$, и можно произвести следующие выкладки, исходя из неравенства (37):

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \geqslant 2\alpha; \quad \int_0^t \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} dt \geqslant 2\alpha t \quad \text{при} \quad t \geqslant 0;$$

$$w(t) \geqslant w(0) e^{2\alpha t}; \quad W(\varphi(t, \xi)) \geqslant W(\xi) e^{2\alpha t}.$$

Из последнего неравенства следует, что при росте t точка $x = \varphi(t, \xi)$ непременно выйдет на границу эллипсоида (30) и, следовательно, покинет его внутренность. Покажем, что после этого она уже не вернется внутрь эллипсоида (30). Допустим противоположное; тогда найдется такое положительное значение t', что $w(t') = c$, а при всех положительных достаточно малых значениях Δt выполнено неравенство $w(t' + \Delta t) < c$. Из последних двух соотношений следует, что $\dot{w}(t') \leqslant 0$, а это противоречит неравенству (37), которое верно при $t = t'$, так как $w(t') = c$.

Таким образом, доказано, что траектория $x = \varphi(t, \xi)$, где $\xi \neq 0$ — внутренняя точка эллипсоида (30), обязательно уходит из эллипсоида (30) и больше в него уже не возвращается. В силу второго из неравенств (13), из неравенств (35) следует неравенство (31), так что шар (35) содержится в эллипсоиде (30). Ввиду этого из доказанного следует правильность утверждения Е).

Пример

В дополнение к предложению А) покажем, что если матрица A имеет собственное значение λ с положительной действительной частью, то положение равновесия $x = 0$ уравнения (5) уже не является устойчивым по Ляпунову. Действительно, в силу предложения А) § 14 решением уравнения (5) является векторная функция $x = che^{\lambda t}$, где c — произвольная действительная константа, а h — собственный вектор матрицы A с собственным значением λ. Если λ — действительное число, то при достаточно малом c указанное решение начинается в точке ch, сколь угодно близкой к положению равновесия $x=0$, но с течением времени становится сколь угодно большим по модулю. Если же λ — комплексное число, то тем же свойством обладает решение $c(he^{\lambda t}+\bar{h}e^{\bar{\lambda}t})$ уравнения (5).

§ 27. Центробежный регулятор (исследования Вышнеградского)

В современной технике благодаря изобилию приборов автоматического управления чрезвычайно большую роль играет **теория автоматического регулирования**. Одним из важнейших вопросов, возникающих перед конструктором автоматического регулятора, является вопрос об **устойчивости работы** системы машина — регулятор. Этот вопрос во многих случаях может быть решен на основании теоремы Ляпунова (см. § 26).

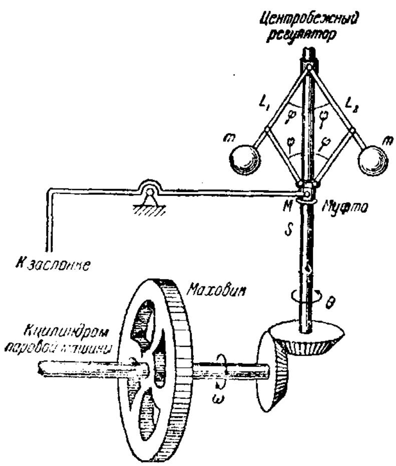


Рис. 41.

Наиболее давно существующей системой автоматического регулирования является система паровая машина — центробежный регулятор Уатта. Центробежный регулятор, вполне хорошо справлявшийся со своей задачей в конце XVIII и в первой половине XIX века, в середине XIX века ввиду его конструктивных изменений стал работать ненадежно. Широкие круги теоретиков и инженеров искали выхода из возникшего кризиса. Вопрос с полной ясностью и простотой был решен выдающимся русским инженером Вышнеградским, основателем теории автоматического регулирования. Работой Вышнеградского «О регуляторах прямого действия» (1876 г.) начинается теория регулирования машин, отвечающая на вопросы промышленной практики. В настоящем параграфе в упрощенном виде излагается исследование Вышнеградского.

Центробежный регулятор (рис. 41) представляет собой вертикальный стержень S, могущий вращаться вокруг своей вертикальной оси, в верхнем конце которого на шарнирах прикреплены два одинаковых стержня L_1 и L_2 с одинаковыми грузами на концах. Стержни L_1 и L_2 скреплены дополнительными шарнирами, так что отклоняться от своего вертикального положения они могут лишь одновременно на один и тот же угол φ, находясь в одной и той же вертикальной плоскости, неподвижно связанной со стержнем S. Когда стержни L_1 и L_2 отклоняются от своего вертикального положения на угол φ, они при помощи шарниров приводят в движение специальную муфту M, надетую на стержень S, так что расстояние этой муфты до верхнего конца стержня S пропорционально $\cos\varphi$. Длину вертикальных стержней L_1 и L_2 примем за единицу, а массу каждого из грузов, прикрепленных на их концах, обозначим через m. Если стержень S вращается с угловой скоростью θ, а стержни L_1 и L_2 отклонены от вертикального положения на угол φ, то на каждый из грузов действует центробежная сила

$$m\theta^2 \sin\varphi. \tag{1}$$

Одновременно на каждый груз действует сила тяжести, равная

$$mg. \tag{2}$$

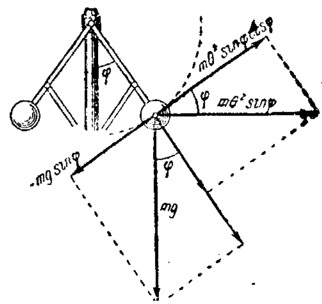


Рис. 42.

Так как в направлении стержня L_i силы, действующие на груз, уравновешиваются реакцией стержня L_i, то для расчета силы, действующей на груз, следует разложить обе упомянутые силы по осям, первая из которых направлена вдоль стержня, а вторая — в перпендикулярном направлении, в сторону возрастания угла φ. Непосредственно видно (рис. 42), что составляющая силы (1) в направлении возрастания угла φ равна

$$m\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi, \tag{3}$$

а составляющая силы тяжести (2) в том же направлении равна

$$-mg\sin\varphi. \tag{4}$$

Таким образом, равнодействующая обеих сил (3) и (4) задается формулой

$$m\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi. \tag{5}$$

Упрощенное объяснение работы центробежного регулятора заключается в том, что при заданной угловой скорости θ стержни L_1 и L_2 отклоняются под действием сил (1), (2) на угол φ, определяемый из равенства

$$m\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi = 0, \tag{6}$$

т. е. путем приравнивания нулю силы (5). Из соотношения (6) угол φ определяется как однозначная монотонно возрастающая функция скорости θ; в этом смысле регулятор Уатта может рассматриваться как **измеритель** скорости вращения. Это есть так называемое стати-

ческое рассмотрение регулятора. В действительности мы имеем здесь **динамическое** явление. Масса m, находясь под воздействием силы (5), совершает движение, описываемое дифференциальным уравнением. Кроме силы (5), на массу m действует при ее движении сила трения в сочленениях шарниров. Сила эта весьма сложным образом зависит от происходящего движения. Существенно упрощая имеющуюся здесь сложность, мы будем считать, что сила трения пропорциональна скорости $\dot{\varphi}$ движения массы m и имеет знак, противоположный этой скорости, т. е. имеет величину

$$-b\dot{\varphi},$$

где b — постоянная. Таким образом, если принять φ за координату, определяющую положение массы m, то мы получим для φ дифференциальное уравнение:

$$m\ddot{\varphi} = m\theta^2 \sin\varphi \cos\varphi - mg \sin\varphi - b\dot{\varphi}. \qquad (7)$$

(Расчет силы (5) проведен здесь в предположении, что θ и φ постоянны. При меняющихся θ и φ возникают добавочные силы, которые, однако, уравновешиваются реакциями стержней и шарниров, заставляющих стержни двигаться в одной плоскости. Таким образом, уравнение (7) оказывается справедливым.)

Паровая машина представляет собой маховое колесо с моментом инерции J, приводимое во вращательное движение силой пара и способное совершать полезную работу, например поднимать клеть из шахты. Дифференциальное уравнение паровой машины может быть, таким образом, записано в виде:

$$J\dot{\omega} = P_1 - P, \qquad (8)$$

где ω — угловая скорость вращения маховика, P_1 — момент силы действия пара, P — момент силы воздействия на маховик тяжести клети. Момент силы воздействия пара P_1 зависит от того, насколько приоткрыта заслонка, подающая пар в цилиндры паровой машины, а момент P зависит от загруженности клети.

Центробежный регулятор присоединяется к паровой машине с целью поддержать равномерность ее хода. Он «измеряет» скорость вращения махового колеса и, если она оказывается слишком большой, уменьшает подачу пара, а если она оказывается слишком малой — увеличивает подачу пара. Для осуществления этой цели маховое колесо паровой машины связывается при помощи зубчатой передачи с вертикальным стержнем регулятора (рис. 41), так что между угловыми скоростями ω и θ возникает постоянная связь:

$$\theta = n\omega, \qquad (9)$$

где n — так называемое *передаточное число*. Таково **воздействие машины на регулятор**, в результате которого осуществляется измерение скорости вращения маховика. С другой стороны, муфта M регулятора связана с заслонкой, подающей пар, так что

$$P_1 = F_1 + k(\cos\varphi - \cos\varphi^*), \tag{10}$$

где φ^* — некоторое «среднее» значение φ, вблизи которого должно поддерживаться значение регулируемой величины φ, F_1 — значение силы воздействия пара P_1 при $\varphi = \varphi^*$, а $k > 0$ — постоянный коэффициент пропорциональности.

Как видно из (10), обратное воздействие регулятора на паровую машину осуществляется таким образом, что при увеличении угла φ подача пара (а вместе с ней и сила воздействия пара P_1) уменьшается. В результате описанных взаимодействий машины и регулятора, последний, казалось бы, полностью осуществляет поставленную перед ним задачу, увеличивая подачу пара при уменьшении скорости вращения маховика и уменьшая подачу пара при увеличении скорости. В связи с этим естественно ожидать, что скорость вращения маховика будет стабилизироваться. Это и наблюдалось в паровых машинах, строившихся до середины XIX столетия. Для того чтобы выяснить причины начавшего наблюдаться после середины XIX столетия нарушения работы регулятора, необходимо было точно изучить динамику работы системы машина — регулятор и исследовать ее устойчивость, что и было сделано Вышнеградским.

Как видно из соотношений (7) — (10), система машина — регулятор описывается двумя дифференциальными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\varphi} &= mn^2\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi - b\dot{\varphi}, \\ J\dot{\omega} &= k\cos\varphi - F, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $F = P - F_1 + k\cos\varphi^*$ — величина, зависящая от нагрузки. Первое из этих уранений имеет второй порядок. Для приведения системы к нормальному виду введем новое переменное ψ, положив:

$$\psi = \dot{\varphi}.$$

Тогда система (11) запишется в нормальной форме:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \psi, \\ \dot{\psi} &= n^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - g\sin\varphi - \frac{b}{m}\psi, \\ \dot{\omega} &= \frac{k}{J}\cos\varphi - \frac{F}{J}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Правильная работа паровой машины заключается в том, что угловая скорость ω вращения ее маховика остается постоянной при неизменной нагрузке P, т. е. при постоянном F, а заслонка, подающая пар, неподвижна. Последнее означает, что угол φ остается неизменным. Таким образом, речь идет об отыскании такого решения системы (12), которое имеет вид:

$$\varphi=\varphi_0, \quad \psi=0, \quad \omega=\omega_0,$$

т. е. об отыскании положения равновесия этой системы. Задача заключается в том, чтобы, найдя положение равновесия системы (12), исследовать его устойчивость.

Приравнивая нулю правые части соотношений (12) и решая получающиеся уравнения, найдем координаты положения равновесия:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0&=0,\\ \cos\varphi_0&=\frac{F}{k},\\ n^2\omega_0^2&=\frac{g}{\cos\varphi_0}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Положим:

$$\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi, \quad \psi=\psi_0+\Delta\psi, \quad \omega=\omega_0+\Delta\omega.$$

В результате такой замены и линеаризации уравнений (12), мы получаем систему:

$$\begin{aligned} \Delta\dot\varphi&=\Delta\psi,\\ \Delta\dot\psi&=n^2\omega_0^2\cos 2\varphi_0\Delta\varphi+n^2\omega_0\sin 2\varphi_0\Delta\omega-g\cos\varphi_0\Delta\varphi-\frac{b}{m}\Delta\psi,\\ \Delta\dot\omega&=-\frac{k}{J}\sin\varphi_0\Delta\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя во второе из этих уравнений значение величины $n^2\omega_0^2$ из (13), получаем после простых вычислений:

$$\Delta\dot\psi=-\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}\Delta\varphi-\frac{b}{m}\Delta\psi+\frac{2g\sin\varphi_0}{\omega_0}\Delta\omega.$$

Характеристический многочлен полученной линейной системы уравнений для $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\omega$ равен:

$$D(p)=\begin{vmatrix} -p & 1 & 0\\ -\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0} & -\frac{b}{m}-p & \frac{2g\sin\varphi_0}{\omega_0}\\ -\frac{k}{J}\sin\varphi_0 & 0 & -p \end{vmatrix},$$

или, после вычисления определителя и умножения на -1,

$$-D(p)=p^3+\frac{b}{m}p^2+\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}p+\frac{2kg\sin^2\varphi_0}{J\omega_0}.$$

Все коэффициенты этого многочлена положительны, и потому необходимым и достаточным условием его устойчивости является (в силу теоремы 6) выполнение неравенства

$$\frac{b}{m}\cdot\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}>1\cdot\frac{2kg\sin^2\varphi_0}{J\omega_0},$$

или, иначе, неравенства

$$\frac{bJ}{m}>\frac{2k\cos\varphi_0}{\omega_0}=\frac{2F}{\omega_0} \tag{14}$$

(см. (13)). Соотношение (14) представляет собой, в силу теоремы Ляпунова (теорема 19), достаточное условие устойчивости системы машина — регулятор.

Для того чтобы выяснить смысл правой части последнего неравенства, введем играющее важную роль в технике понятие *неравномерности хода* паровой машины. Из соотношений (13) видно, что при изменении величины $F=P-F_1+k\cos\varphi^*$ (т. е. при изменении нагрузки P) меняется стабильная скорость ω_0. Величина $\frac{d\omega_0}{dP}$ характеризует скорость изменения величины ω_0 при изменении нагрузки P; ее абсолютная величина $\nu=\left|\frac{d\omega_0}{dP}\right|$ (как мы сейчас увидим, производная $\frac{d\omega_0}{dP}$ отрицательна) и называется *неравномерностью хода* паровой машины. Мы имеем в силу (13):

$$F\omega_0^2=\text{const},$$

и потому, дифференцируя, получаем:

$$\frac{d\omega_0}{dF}=-\frac{\omega_0}{2F}.$$

Таким образом,

$$\nu=\frac{\omega_0}{2F},$$

и условие устойчивости (14) переписывается окончательно в виде:

$$\frac{bJ}{m}\cdot\nu>1. \tag{15}$$

Из формулы (15) Вышнеградским были сделаны следующие выводы:

1. Увеличение массы m шаров вредно влияет на устойчивость.

2. Уменьшение коэффициента трения b вредно влияет на устойчивость.

3. Уменьшение моментов инерции J маховика вредно влияет на устойчивость.

4. Уменьшение неравномерности ν вредно влияет на устойчивость.

Чтобы сделать свои выводы доступными для инженеров и привлечь внимание к наиболее важным из них, Вышнеградский формулирует в конце работы свои знаменитые «тезисы».

Первый тезис: Катаракт (трение) есть существенная принадлежность чувствительного и правильно действующего регулятора, короче: «без катаракта нет регулятора».

Второй тезис: астатические регуляторы (т. е. регуляторы с нулевой неравномерностью) даже и с катарактом не должны быть употребляемы, короче: «без неравномерности нет регулятора».

Нарушения работы регуляторов в середине XIX столетия объясняются тем, что благодаря развитию техники все четыре величины, входящие в соотношение (15), стали изменяться в направлении, ухудшающем устойчивость. Именно, ввиду увеличения веса заслонок (связанного с возрастанием мощности машин) стали применяться все более тяжелые шары. Совершенствование обработки поверхностей деталей приводило к уменьшению трения. Увеличение рабочей скорости машин сделало необходимым уменьшение момента инерции J маховика. Наконец, стремление уменьшить зависимость скорости от нагрузки приводило к уменьшению неравномерности хода.

Уяснив неблагоприятное влияние всех указанных факторов, Вышнеградский в своих тезисах рекомендует искусственное увеличение трения (при помощи специального устройства — катаракта) и увеличение неравномерности хода (за счет изменения чисел n и k, зависящих от конструкции машины).

§ 28. Предельные циклы

В этом параграфе будет определено и до некоторой степени изучено понятие предельного цикла, введенное великим французским математиком Пуанкаре, а также дан один критерий, позволяющий в некоторых случаях установить существование предельного цикла. Понятие предельного цикла играет важнейшую роль как в самой теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так и в ее приложениях к технике.

Мы будем рассматривать нормальную автономную (см. § 15) систему уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

правые части которых определены и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ на некотором открытом множестве Δ фазового пространства R переменных $x^1, \ldots, x^n$. Мы будем пользоваться также векторной записью этой системы:

$$\dot{x} = f(x). \tag{2}$$

Все наиболее существенные построения этого параграфа будут относиться к случаю $n = 2$. Чтобы подчеркнуть двумерность, мы будем говорить о фазовой плоскости P системы (1), а не о ее фазовом пространстве R. При рассмотрении фазовой плоскости будут играть существенную роль геометрические построения, обладающие большой наглядностью. Случай, когда открытое множество Δ совпадает со всей фазовой плоскостью P, отнюдь не является тривиальным, и для простоты можно сосредоточить все внимание на нем.

Предельный цикл и поведение траекторий вблизи него

Предельным циклом уравнения (2) ($n = 2$) называется изолированное периодическое решение этого уравнения. Более полно, пусть $x = \varphi(t)$ — периодическое решение уравнения (2) и K — описываемая этим решением замкнутая кривая в плоскости P. Решение $x = \varphi(t)$ (а также траектория K) считается *изолированным* периодическим решением и называется *предельным циклом*, если существует такое положительное число ρ, что, какова бы ни была точка ξ плоскости P, находящаяся от кривой K на положительном расстоянии, меньшем чем ρ, решение уравнения (2), проходящее через точку ξ, не является периодическим.

Сказанное означает геометрически, что в фазовой картине уравнения (2) на плоскости P вблизи замкнутой траектории K не проходит других замкнутых траекторий этого уравнения. Вопрос о том, как ведут себя траектории уравнения (2) вблизи предельного цикла K, решается следующей теоремой.

Теорема 20. *Пусть $x = \varphi(t)$ — предельный цикл уравнения* (2) ($n = 2$) *и K — замкнутая траектория, описываемая этим решением на плоскости P. Замкнутая кривая, как известно, разбивает плоскость на две области:* внутреннюю и внешнюю, *а так как траектории уравнения* (2) *не могут между собой пересекаться, то каждая отличная от K траектория является внутренней или внешней по отношению к траектории K. Оказывается, что как для внешних, так и для внутренних траекторий имеются две взаимно исключающие друг друга возможности поведения вблизи K. Именно, все внутренние траектории, начинающиеся вблизи K, наматываются на K, как спирали, либо при $t \to +\infty$* (рис. 43, *а*), *либо при $t \to -\infty$* (рис. 43, *б*). *То же самое имеет место и для внешних траекторий* (рис. 43, *а*, *б*).

Если все траектории (как внешние, так и внутренние), начинающиеся вблизи K, наматываются на K при $t \to +\infty$, то предельный цикл называется *устойчивым* (рис. 43, *а*). Если все траектории, начинающиеся вблизи K, наматываются на K при $t \to -\infty$, то предельный цикл K называется *вполне неустойчивым* (рис. 43, *б*), в двух других случаях (т. е. если внутренние траектории наматываются на K при $t \to -\infty$, а внешние — при $t \to +\infty$, или наоборот) предельный цикл K называется *полуустойчивым* (рис. 43, *в*).

Как само доказательство теоремы 20, так и более полное описание «наматывания» траекторий на предельный цикл опираются на понятие *функции последования.* Эта функция имеет наглядный геометрический смысл и без детального доказательства ее свойств может быть описана сравнительно коротко.

Дадим это описание. Пусть K — замкнутая кривая на фазовой плоскости P, соответствующая периодическому решению с периодом τ.

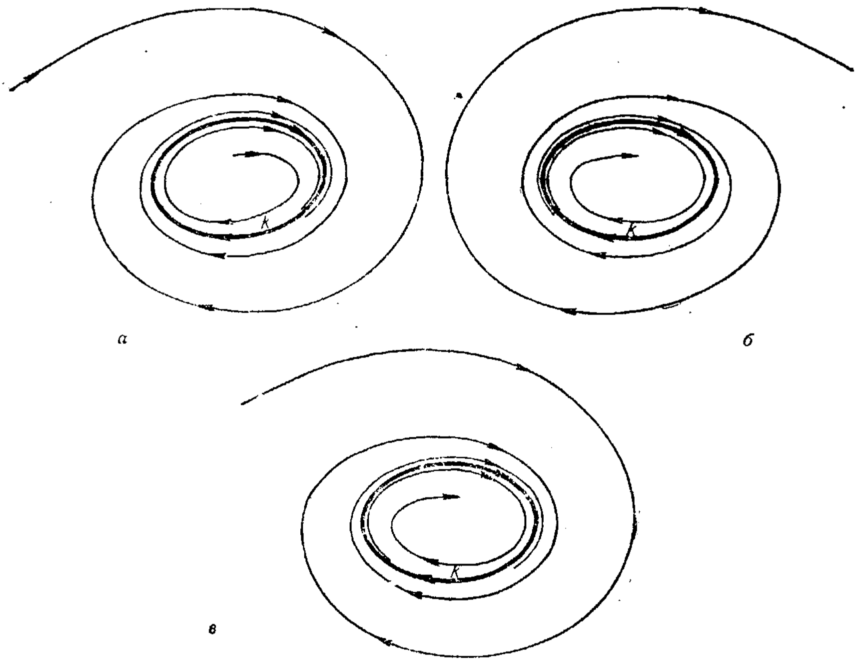


Рис. 43.

Пусть, далее, L — прямолинейный отрезок в плоскости P, пересекающий кривую K, не касаясь ее, в единственной точке a, внутренней для отрезка L. На отрезке L (точнее, на прямой, содержащей этот отрезок) обычным образом введем числовую координату. Координату точки a обозначим через u_0. Через точку p отрезка L с координатой u проведем траекторию уравнения (2) и будем двигаться по ней в направлении возрастания времени t.

Геометрически ясно, что если точка p близка к a, то мы будем двигаться вблизи кривой K, и потому вновь и вновь будем встречать отрезок L. Первая встреча произойдет через время, близкое к τ, в некоторой точке q (рис. 44), координату которой мы обозначим через $\chi_1(u)$. Точно так же, если мы будем двигаться из точки p по траектории в направлении убывания времени, то через время, близкое к τ, мы впервые встретим отрезок L в некоторой точке r, координату которой обозначим через $\chi_{-1}(u)$. Обе функции χ_1 и χ_{-1} непрерывны и взаимно обратны, т. е.

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u, \quad \chi_1(\chi_{-1}(u)) = u.$$

Действительно, если двигаться из точки q в направлении убывания времени, то мы впервые встретим отрезок L в точке p, так что $\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u$. Точно так же, при движении из точки r в направлении возрастания времени мы впервые встретим отрезок L в точке p, т. е. $\chi_1(\chi_{-1}(u)) = u$. Функция $\chi = \chi_1$ называется *функцией последования*; для дальнейшего существенно, что она непрерывна и имеет непрерывную обратную функцию $\chi^{-1} = \chi_{-1}$.

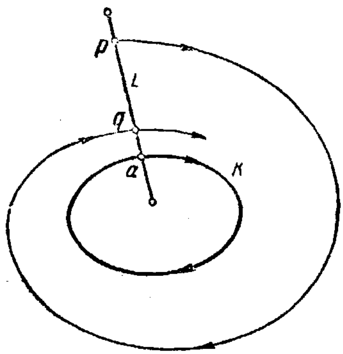


Рис. 44.

В действительности функции χ и χ^{-1} имеют непрерывные производные (см. В)), но это их свойство не будет использовано при доказательстве теоремы 20.

Приведенные здесь геометрические соображения наглядно достаточно убедительны. Читатель, склонный удовольствоваться ими, может ознакомиться с доказательством теоремы 20, не читая предложений А) и Б), в которых существование и свойства функции последования доказываются строго.

А) Обозначим через $\varphi(t, \xi)$ решение уравнения (2) с начальными значениями 0, ξ. Пусть L — прямолинейный отрезок на фазовой плоскости P уравнения (2), на котором введена числовая координата v, так что в параметрической форме отрезок задается линейным уравнением:

$$x = g(v).$$

Допустим, что траектория $\varphi(t, \xi_0)$ пересекает отрезок L в его внутренней точке a с координатой v_0 в момент времени t_0, так что

$$\varphi(t_0, \xi_0) = g(v_0),$$

причем траектория $\varphi(t, \xi_0)$ в момент времени t_0 не касается отрезка L. Существуют тогда такие положительные числа δ и ε, что: 1) при $|\xi - \xi_0| < \delta$ определены непрерывные функции $t(\xi)$ и $v(\xi)$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi(t(\xi), \xi) = g(v(\xi)); \quad t(\xi_0) = t_0; \quad v(\xi_0) = v_0; \quad |t(\xi) - t_0| < \varepsilon; \quad (3)$$

2) имеет место единственность; именно, если при $|\xi-\xi_0|<\delta$, $|t-t_0|<\varepsilon$ имеет место равенство

$$\varphi(t, \xi)-g(v)=0, \tag{4}$$

то величины ξ, t, v удовлетворяют условиям:

$$t=t(\xi), \qquad v=v(\xi). \tag{5}$$

Сказанное означает геометрически, что траектория, выходящая в момент времени $t=0$ из точки ξ, близкой к ξ_0, пересекает отрезок L в точке с координатой $v(\xi)$, близкой к v_0, в момент времени $t(\xi)$, близкий к t_0, причем пересечение это является единственным на некотором интервале времени $|t-t_0|<\varepsilon$, а функции $t(\xi)$ и $v(\xi)$ непрерывны.

Следует заметить, что траектория $\varphi(t, \xi_0)$ может пересекать отрезок L не только в момент времени t_0, но и в некоторый другой момент времени t_1, причем точка пересечения может даже совпасть с a (этот случай имеет место, если $\varphi(t, \xi_0)$ — периодическое решение), но функция $t(\xi)$ (а возможно и $v(\xi)$), получаемая из рассмотрения пересечения в момент времени t_1, будет, очевидно, отличаться от функции, получаемой из рассмотрения пересечения в момент времени t_0.

Доказательство предложения А) почти непосредственно вытекает из теоремы о неявных функциях (см. § 33), примененной к уравнению (4), в котором ξ считается независимой переменной величиной, а t и v — ее неявными функциями. При $\xi=\xi_0$ уравнение (4) имеет очевидное решение $t=t_0$, $v=v_0$. Для доказательства того, что функциональный определитель левой части уравнения (4) отличен от нуля в точке (ξ_0, t_0, v_0), запишем уравнение (4) в скалярной форме:

$$\varphi^i(t, \xi)-g^i(v)=0, \qquad i=1, 2. \tag{6}$$

Производные от левых частей этих соотношений по t в точке (ξ_0, t_0, v_0) дают компоненты вектора $\dot\varphi(t_0, \xi_0)$; производные от левых частей этих соотношений по v в той же точке дают компоненты вектора $-\frac{dg(v_0)}{dv}$. Векторы эти линейно независимы, так как траектория $\varphi(t, \xi_0)$ в момент t_0 не касается отрезка L. Следовательно, функциональный определитель системы (6) отличен от нуля в точке (ξ_0, t_0, v_0). Таким образом, теорема о неявных функциях к уравнению (4) применима, и существует его непрерывное решение $t(\xi)$, $v(\xi)$, определенное на некоторой окрестности $|\xi-\xi_0|<\alpha$ и обращающееся в t_0, v_0 при $\xi=\xi_0$.

В силу второй части теоремы существования неявных функций, найдется такая окрестность U точки (ξ_0, t_0, v_0) в пространстве переменных ξ, t, v, что всякая точка (ξ, t, v) из этой окрестности, удовлетворяющая уравнению (4), удовлетворяет и уравнениям (5).

В отличие от того, что содержится в формулировке предложения А), эта единственность, в силу теоремы 27, имеет место, когда малы не только величины $|\xi-\xi_0|$ и $|t-t_0|$, но также величина $|v-v_0|$. Для того, чтобы доказать единственность при малости только двух первых из указанных величин, покажем, что если эти две величины малы и точка (ξ, t, v) удовлетворяет условию (4), то величина $|v-v_0|$ также мала. Окрестность U, в которой имеет место единственность в силу теоремы 27, можно задать неравенствами

$$|\xi-\xi_0|<\delta\leqslant\alpha, \qquad |t-t_0|<\varepsilon, \qquad |v-v_0|<\beta.$$

Из предложения Г) § 23 следует, что при достаточно малом δ на всем интервале времени $|t-t_0|<\varepsilon$ имеет место неравенство $|\varphi(t, \xi)-\varphi(t, \xi_0)|<\gamma$, где γ — наперед заданное малое число. Таким образом, точка пересечения траектории $\varphi(t, \xi)$ с отрезком L при $|\xi-\xi_0|<\delta$, $|t-t_0|<\varepsilon$ лежит тем ближе к отрезку траектории $\varphi(t, \xi_0)$ $(|t-t_0|<\varepsilon)$, чем меньше δ, и потому малость координаты v этого пересечения обеспечивается достаточной малостью числа δ.

Таким образом, предложение А) доказано.

Б) Пусть $\varphi(t, \xi)$ — решение уравнения (2) с начальными значениями 0, ξ; пусть, далее, $\varphi(t, a)$ — периодическое решение с периодом τ, K — замкнутая кривая на фазовой плоскости P, соответствующая решению $\varphi(t, a)$, и L — прямолинейный отрезок, пересекающий кривую K без касания в единственной точке a, лежащей внутри него. На отрезке L введем числовую координату, так что $x=g(v)$ есть параметрическое уравнение отрезка L, заданное при помощи этой координаты, и пусть $v=u_0$ — координата точки a. Оказывается, что при достаточно малом $\alpha>0$ траектория $\varphi(t, g(u))=\varphi(t, u)$, где $|u-u_0|<\alpha$, пересекает отрезок L как при положительных значениях t, так и при отрицательных его значениях. Обозначим через $t_1(u)$ минимальное положительное значение t, при котором траектория $\varphi(t, u)$ пересекается с L, и через $\chi_1(u)$ — координату этой точки пересечения на отрезке L. Точно так же обозначим через $t_{-1}(u)$ минимальное по модулю отрицательное значение t, при котором траектория $\varphi(t, u)$ пересекается с L, и через $\chi_{-1}(u)$ — координату этой точки пересечения на отрезке L. Оказывается, далее, что если α достаточно мало, то при $|u-u_0|<\alpha$ все четыре построенные функции

$$t_1(u), \quad \chi_1(u), \quad t_{-1}(u), \quad \chi_{-1}(u)$$

непрерывны и удовлетворяют условиям

$$t_1(u_0)=\tau, \quad \chi_1(u_0)=u_0, \quad t_{-1}(u_0)=-\tau, \quad \chi_{-1}(u_0)=u_0.$$

Кроме того, функции χ_1 и χ_{-1} взаимно обратны при достаточно малом u, т. е.

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u, \qquad \chi_1(\chi_{-1}(u)) = u.$$

Функция $\chi = \chi_1$ называется *функцией последования.*

Для доказательства предложения Б) используем предложение А), считая, что $\xi_0 = a$, $\xi = g(u)$, $t_0 = k\tau$, где k — произвольное целое число. (В действительности мы используем лишь значения $k = -1$, 0, $+1$.) В силу предложения А), существуют непрерывные функции $t_k(u) = t_k(g(u))$ и $\chi_k(u) = v_k(g(u))$, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi(t_k(u),\ g(u)) = g(\chi_k(u)), \qquad t_k(u_0) = k\tau, \qquad \chi_k(u_0) = u_0, \tag{7}$$

причем, в силу единственности, функции, удовлетворяющие этим условиям, определены однозначно. В частности, $\chi_0(u) \equiv u$.

Докажем, что

$$\chi_k(\chi_l(u)) = \chi_{k+l}(u). \tag{8}$$

Пользуясь соотношением (7) и предложением В) § 26, получаем:

$$g(\chi_k(\chi_l(u))) = \varphi(t_k(\chi_l(u)),\ g(\chi_l(u))) =$$
$$= \varphi(t_k(\chi_l(u)),\ \varphi(t_l(u),\ g(u))) = \varphi(t_k(\chi_l(u)) + t_l(u),\ g(u)),$$

причем выполнены условия

$$t_k(\chi_l(u_0)) + t_l(u_0) = t_k(u_0) + t_l(u_0) = (k+l)\tau;$$
$$\chi_k(\chi_l(u_0)) = u_0.$$

С другой стороны, мы имеем:

$$g(\chi_{k+l}(u)) = \varphi(t_{k+l}(u),\ g(u)),$$

причем

$$\chi_{k+l}(u_0) = u_0,$$
$$t_{k+l}(u_0) = (k+l)\tau.$$

В силу единственности функций, удовлетворяющих условиям (7), мы получаем:

$$t_k(\chi_l(u)) + t_l(u) = t_{k+l}(u);$$
$$\chi_k(\chi_l(u)) = \chi_{k+l}(u).$$

Таким образом, соотношение (8) доказано.

В частных случаях, когда $k = -1$, $l = +1$ и $k = +1$, $l = -1$, получаем:

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = \chi_0(u) = u,$$
$$\chi_1(\chi_{-1}(u)) = \chi_0(u) = u.$$

Таким образом, функции $\chi = \chi_1$ и $\chi^{-1} = \chi_{-1}$ взаимно обратны.

Докажем теперь, что при достаточно малом $|u - u_0|$ траектория $\varphi(t, u)$ первый раз пересекается с L при возрастании t в момент времени $t_1(u)$, а при убывании t — в момент времени $t_{-1}(u)$. Из единственности пересечения (см. А)) следует, что на каждом из интервалов $|t-(-\tau)|<\varepsilon$, $|t|<\varepsilon$, $|t-\tau|<\varepsilon$ траектория $\varphi(t, u)$ пересекается с отрезком L в единственной точке.

Других пересечений с отрезком L траектория $\varphi(t, u)$ при $|t|<(\varepsilon+\tau)$ и достаточно малом $|u-u_0|$ вообще не имеет по следующим соображениям.

Часть K^* траектории K, описываемая точкой $\varphi(t, a)$, когда

$$\varepsilon \leqslant t \leqslant (\tau-\varepsilon) \quad \text{или} \quad -(\tau-\varepsilon) \leqslant t \leqslant -\varepsilon, \tag{9}$$

является замкнутым множеством, которое не пересекается с замкнутым множеством L и потому расстояние ρ между множествами K^* и L положительно. Далее, в силу предложения Г) § 23, расстояние между точками $\varphi(t, a)$ и $\varphi(t, u)$, когда t принадлежит множеству (9), меньше ρ, если только величина $|u-u_0|$ достаточно мала.

Таким образом, и траектория $\varphi(t, u)$, когда t принадлежит множеству (9), не пересекается с отрезком L.

Итак, предложение Б) доказано.

Доказательство теоремы 20. Выберем на фазовой плоскости P прямолинейный отрезок L, пересекающий кривую K, не касаясь ее, в единственной точке a, внутренней для отрезка L. Введем на отрезке L числовую координату и обозначим через u_0 координату точки a. Для определенности будем считать, что точкам отрезка L, лежащим вне кривой K, соответствуют координаты, бо́льшие u_0, а точкам, лежащим внутри K, — координаты, меньшие u_0. Через χ обозначим функцию последования, соответствующую отрезку L (см. Б)).

Таким образом, для всех чисел достаточно малого интервала $|u-u_0|<\alpha$ траектория уравнения (2), начинающаяся на отрезке L в точке p с координатой u, при возрастании времени впервые пересекает отрезок L в точке q с координатой $\chi(u)=v$.

Мы имеем, очевидно:

$$\chi(u_0)=u_0.$$

Далее, если для числа u выполнено равенство

$$\chi(u)=u, \tag{10}$$

то траектория, начинающаяся в точке p с координатой u, замкнута. Так как, по предположению, траектория K является изолированной замкнутой траекторией, то существует настолько малое положительное число α, что при $|u-u_0|<\alpha$ уравнение (10) имеет единственное решение $u=u_0$. Из этого следует, что для всех точек интервала $u_0<u<u_0+\alpha$ имеет место одно из неравенств:

$$\chi(u)<u, \tag{11}$$

$$\chi(u)>u. \tag{12}$$

В самом деле, если бы для некоторых точек этого интервала имело место неравенство (11), а для некоторых — неравенство (12), то, в силу непрерывности функции χ, на том же интервале нашлась бы точка u, для которой выполняется равенство (10), что невозможно. Так как траектория, начинающаяся в точке p с координатой u, принадлежащей интервалу $u_0 < u < u_0 + \alpha$, не может пересечь траектории K, то обе точки p и q лежат по одну сторону кривой K (а именно, вне K), так что

$$\chi(u) > u_0. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь случай, когда для всех точек интервала $u_0 < u < u_0 + \alpha$ имеет место неравенство (11). Пусть u_1 — произвольное число этого интервала. Определим индуктивно последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots$, положив:

$$u_{i+1} = \chi(u_i), \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

В силу неравенств (11) и (13) эти числа расположены на интервале $u_0 < u < u_0 + \alpha$ и образуют убывающую последовательность. Следовательно, они имеют некоторый предел u^*. Переходя в равенстве (14) к пределу при $i \to \infty$, получаем $\chi(u^*) = u^*$, а так как точка u^* принадлежит интервалу $|u - u_0| < \alpha$, то, в силу единственности решения уравнения (10) на этом интервале, $u^* = u_0$. Итак, $\lim\limits_{i \to \infty} u_i = u_0$. Обозначая через p_i точку отрезка L с координатой u_i, мы видим, что последовательные точки $p_1, p_2, \ldots$ пересечения траектории, начинающейся в p_1, с отрезком L сходятся к точке a, лежащей на траектории K. Так как время перехода по нашей траектории от точки p_i до точки p_{i+1} близко к периоду τ предельного цикла K (и, в частности, ограничено), то при росте i весь отрезок траектории от точки p_i до точки p_{i+1} прижимается к траектории K (см. § 23, Г)). Это и значит, что траектория, начинающаяся в точке p_1, спирально наматывается на траекторию K при $t \to +\infty$. Таким образом, доказано, что при выполнении неравенства (11) траектория, начинающаяся в любой точке отрезка L с координатой u, принадлежащей интервалу $u_0 < u < u_0 + \alpha$, спирально наматывается на K при $t \to +\infty$.

Если на интервале $u_0 < u < u_0 + \alpha$ имеет место неравенство (12), то для обратной к χ функции χ^{-1} на некотором интервале $u_0 < v < u_0 + \beta$ имеет место неравенство

$$\chi^{-1}(v) < v.$$

Исходя из него, мы точно так же покажем, что в этом случае любая траектория, начинающаяся в точке отрезка L с координатой v, принадлежащей интервалу $u_0 < v < u_0 + \beta$, спирально наматывается на траекторию K при $t \to -\infty$.

Аналогично исследуется поведение траекторий, начинающихся на отрезке L в точках с координатами u, из достаточно малого интервала $u_0 > u > u_0 - \gamma$.

Так как каждая траектория, проходящая достаточно близко от траектории K, пересекает отрезок L в точке с координатой, достаточно близкой к u_0, то мы разобрали поведение всех траекторий, близких к предельному циклу.

Таким образом, теорема 20 полностью доказана.

Замечание. Для того чтобы объединить в одной формулировке связь между поведением функции $\chi(u)$ вблизи u_0 с поведением как внешних, так и внутренних траекторий, мы рассмотрим неравенства

$$\left.\begin{aligned} |\chi(u) - u_0| &< |u - u_0|, \\ |\chi(u) - u_0| &> |u - u_0|. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Если в полуокрестности линии K (внешней или внутренней) выполнено первое из этих неравенств, то точка q находится на линии L ближе к a, чем p, и потому в этой полуокрестности траектории спирально наматываются на K при $t \to +\infty$. Если же в полуокрестности выполнено второе из неравенств (15), то в этой полуокрестности траектории спирально наматываются на K при $t \to -\infty$.

В) Функция последования $\chi = \chi_1$ и ее обратная функция $\chi^{-1} = \chi_{-1}$ (см. Б)) имеют непрерывные производные.

Для доказательства напомним, что функция $\chi_k(u)$, $k = \pm 1$, определяется из уравнения (7):

$$\varphi(t_k, g(u)) - g(\chi_k) = 0, \tag{16}$$

где u является независимым переменным, а t_k и χ_k определяются как неявные функции переменного u. Так как функция $\varphi(t, \xi)$ имеет непрерывные частные производные по компонентам вектора ξ (см. теорему 17), а функция $\xi = g(u)$, являющаяся линейной относительно u, имеет непрерывную производную по u, то левая часть соотношения (16) имеет непрерывную производную по u. Поэтому, в силу теоремы 28, неявные функции $t_k(u)$ и $\chi_k(u)$, определяемые уравнением (16), имеют непрерывные производные по u.

Таким образом, предложение В) доказано.

Большую привлекательность имеет геометрическое изучение функции последования $\chi(u)$. Изобразим ее в виде графика уравнения

$$v = \chi(u) \tag{17}$$

в плоскости переменных u, v, считая при этом для удобства, что $u_0 > 0$. Для того чтобы изучить решение уравнения (10), мы рассмотрим наряду с кривой (17) биссектрису первого координатного угла

$$v = u \tag{18}$$

(рис. 45). Для нахождения всех решений уравнения (10) следует найти все точки пересечения линий (17) и (18). Для того чтобы замкнутая траектория K была предельным циклом, необходимо и достаточно, чтобы точка (u_0, u_0) являлась изолированной точкой пересечения графиков (17) и (18). Если эти графики не касаются друг друга в точке (u_0, u_0), т. е. если $\chi'(u_0) \neq 1$, то точка (u_0, u_0) их пересечения обязательно изолированная. В этом случае траектория K называется *грубым* предельным циклом. При $\chi'(u_0) < 1$ (см. рис. 45) в обеих полуокрестностях очевидно выполнено первое из неравенств (15), и, следовательно, предельный цикл K устойчив. При $\chi'(u_0) > 1$ (рис. 46) выполнено второе из неравенств (15), и, следовательно, предельный цикл K вполне неустойчив.

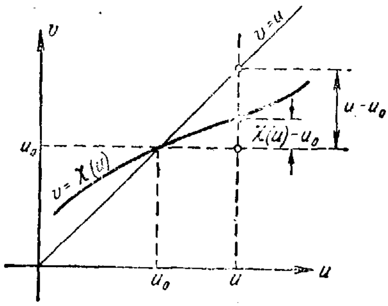


Рис. 45.

Если графики (17) и (18) касаются друг друга в точке (u_0, u_0), но кривая (17) переходит с одной стороны биссектрисы (18) на

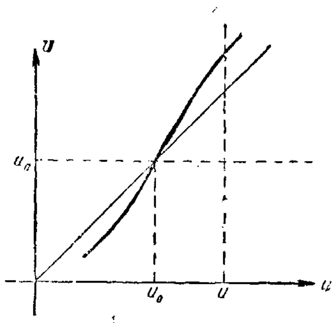


Рис. 46.

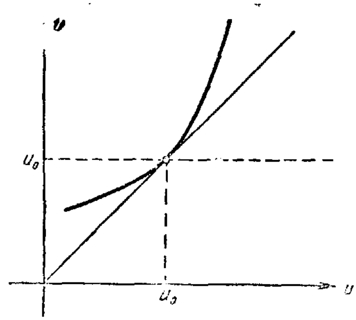


Рис. 47.

другую, то предельный цикл K является либо устойчивым, либо вполне неустойчивым. Если же кривая (17), касаясь биссектрисы (18), находится по одну ее сторону (рис. 47), то соответствующий предельный цикл является полуустойчивым.

Критерий существования предельного цикла

Г) Пусть $\varphi(t)$ — некоторое решение уравнения (2) (n произвольно), определенное для всех значений $t \geqslant t_0$ и остающееся для этих значений t в замкнутом ограниченном множестве F, расположенном в Δ.

Точка p пространства R называется *ω-предельной точкой* решения $\varphi(t)$, если существует такая неограниченно возрастающая последовательность значений (больших t_0)

$$t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots; \quad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,$$

что

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = p.$$

Совокупность Ω всех ω-предельных точек решения $\varphi(t)$ называется его *ω-предельным множеством*. Оказывается, что множество Ω непусто, замкнуто, ограничено и состоит из целых траекторий; последнее означает, что если точка ξ принадлежит Ω, то решение $\varphi(t, \xi)$ с начальными значениями $(0, \xi)$ определено для всех значений t, и вся траектория $\varphi(t, \xi)$ входит в множество Ω. Очевидно, что ω-предельное множество траектории $\varphi(t, \xi)$ целиком содержится в Ω.

Докажем предложение Г). Из замкнутости и ограниченности множества F следует, что множество Ω (очевидно, содержащееся в F) непусто и ограничено. Покажем, что оно замкнуто. Пусть

$$p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$$

— некоторая последовательность точек множества Ω, сходящаяся к некоторой точке p множества F; докажем, что p принадлежит Ω. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ и $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$ — две такие последовательности положительных чисел, что

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0; \quad \lim_{k\to\infty} s_k = \infty.$$

Так как точка p_k принадлежит Ω, то найдется такое значение $t_k > s_k$, что расстояние между точками p_k и $\varphi(t_k)$ меньше ε_k. Для выбранных значений

$$t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots; \quad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty$$

мы получаем

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = p,$$

а это значит, что точка p входит в Ω.

Покажем теперь, что множество Ω состоит из целых траекторий. Пусть ξ — произвольная точка множества Ω и $\varphi(t, \xi)$ — решение с начальными значениями $(0, \xi)$. Пусть, далее, T — такое значение переменного t (оно может быть и отрицательно), для которого решение $\varphi(t, \xi)$ определено, так что точка $\varphi(T, \xi)$ существует. Так как точка ξ принадлежит Ω, то найдется такая неограниченно возрастающая последовательность

$$t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots; \quad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,$$

что

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = \xi. \tag{19}$$

Так как решение $\varphi(t)$ определено для всех достаточно больших значений t, то при заданном T определены (начиная с некоторого k) точки

$$\varphi(t_k + T) = \varphi(T, \varphi(t_k))$$

(см. § 26, В)). Из формулы (19) в силу теоремы 14 мы имеем:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k + T) = \lim_{k\to\infty} \varphi(T, \varphi(t_k)) = \varphi(T, \xi),$$

а из этого следует, что точка $\varphi(T, \xi)$ принадлежит множеству Ω, а следовательно, и множеству F. Таким образом, траектория $\varphi(t, \xi)$ не может покинуть множества F ни при t возрастающем, ни при t убывающем, а потому в силу предложения В) § 22 она определена для всех значений t.

Итак, предложение Г) доказано.

Рассмотрим некоторые частные случаи ω-предельного множества. Если решение $\varphi(t)$ (см. Г)) есть положение равновесия, т. е. $\varphi(t) \equiv x_0$, то ω-предельное множество решения $\varphi(t)$ состоит, очевидно, из одной точки x_0. Если $\varphi(t)$ есть периодическое решение, описывающее замкнутую траекторию K, то ω-предельное множество решения $\varphi(t)$, очевидно, совпадает с K. Наконец, если K есть периодическое решение, а $\varphi(t)$ — спирально навертывающаяся на него при $t \to +\infty$ траектория, то K есть ω-предельное множество решения $\varphi(t)$.

Докажем теперь теорему, дающую возможность установить в некоторых случаях существование периодического решения. В случае аналитических правых частей системы (1) это периодическое решение будет либо предельным циклом, либо будет содержаться внутри семейства периодических траекторий (см. пример 3).

Теорема 21. *Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2) ($n=2$), определенное для всех значений $t \geqslant t_0$ и остающееся при этих значениях t в замкнутом ограниченном множестве F, содержащемся в Δ, и пусть Ω есть ω-предельное множество решения $\varphi(t)$. Если множество Ω не содержит положений равновесия, то оно состоит из одной замкнутой траектории K. При этом возможны два случая: 1) $\varphi(t)$ есть периодическое решение, а K — описываемая им траектория, 2) траектория, описываемая решением $\varphi(t)$, при $t \to +\infty$ наматывается на траекторию K, как спираль.*

Доказательство. Если $\varphi(t)$ — периодическое решение, то множество Ω состоит из единственной периодической траектории K, описываемой решением $\varphi(t)$, и утверждение теоремы очевидно (случай 1). Допустим, что решение $\varphi(t)$ не является периодическим и пусть b — произвольная точка множества Ω. Через точку b проведем прямолинейный отрезок L, не коллинеарный вектору $f(b)$ фазовой скорости, выходящему из точки b ($f(b) \neq 0$, так как, по предположению, точка b множества Ω не является положением равновесия), и выберем этот отрезок настолько коротким, чтобы все траектории, проходящие через точки этого отрезка, пересекали его (не касаясь) в том же направлении, что и траектория, проходящая через b (рис. 48). Так как точка b является ω-предельной для траектории $\varphi(t)$, а последняя не является замкнутой, то эта траектория должна, очевидно, бесчисленное множество раз пересечь отрезок L и притом в различных точках (см. А)). Пусть

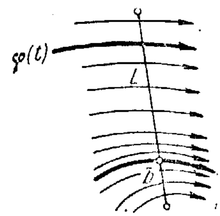


Рис. 48.

$a_1 = \varphi(t_1)$ и $a_2 = \varphi(t_2)$ — две следующие друг за другом во времени ($t_1 < t_2$) точки пересечения траектории $\varphi(t)$ с отрезком L. Кусок траектории $\varphi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, обозначим через M. Вместе с отрезком $\overline{a_1a_2}$ он образует замкнутую кривую Q, которая разбивает плоскость на две области G_1 и G_2. Пусть h — малое положительное число. Геометрически очевидно (рис. 49), что точки $\varphi(t_1 - h)$ и $\varphi(t_2 + h)$ лежат по разные стороны кривой Q; будем считать, что первая принадлежит области G_1, а вторая — области G_2. Через отрезок $\overline{a_1a_2}$ все траектории входят из области G_1 в область G_2. Таким образом, ни одна траектория не может выйти из области G_2 через этот отрезок. Войти или выйти в область G_2 через кривую M никакая траектория также не может, так как M есть кусок траектории, а траектории не могут пересекаться между собой. Так как кусок M траектории $\varphi(t)$ пересекается с отрезком L только в своих концах, то концы отрезка L лежат по разные стороны кривой Q. Обозначим через a тот конец отрезка L, который лежит в области G_2. Траектория $\varphi(t)$, начиная с $t > t_2 + h$, вся протекает в области G_2 и не может пересекать отрезок $\overline{a_1a_2}$; поэтому точка b не принадлежит отрезку $\overline{a_1a_2}$ (см. А)), и, следовательно, она должна лежать на отрезке $\overline{aa_2}$. Если теперь $a_3 = \varphi(t_3)$ — следующая (во времени) после a_2 точка пересечения траектории $\varphi(t)$ с отрезком L, то из аналогичных соображений

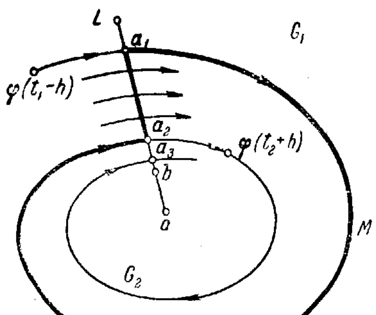


Рис. 49.

видно, что она лежит на отрезке $\overline{ba_2}$ (рис. 49). Обозначая через

$$a_4 = \varphi(t_4), \ldots, a_k = \varphi(t_k), \ldots$$

следующие друг за другом (во времени) точки пересечения траектории $\varphi(t)$ с отрезком L, мы убедимся, что они образуют на отрезке L монотонную последовательность точек, идущих в направлении от a_1 к b. Покажем, что предел b' последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ совпадает с b.

Для этого мы, прежде всего, докажем, что последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ неограниченно возрастает. Допустим, что $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \tau < +\infty$. Тогда $\varphi(\tau) = b'$ и $f(b') = \varphi'(\tau) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_k)}{\tau - t_k}$, а это невозможно, так как вектор $\varphi(\tau) - \varphi(t_k)$ направлен вдоль отрезка L, а вектор $f(b')$ не коллинеарен этому отрезку. Таким образом, должно быть выполнено соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$, и потому вся траектория $\varphi(t)$ при $t \geqslant t_1$ пересекается с L лишь в точках $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ Следовательно, эта траектория имеет на отрезке L лишь одну ω-предельную точку b' (см. А)), так что $b' = b$. Отметим, что в проведенном доказательстве было пока использовано лишь то, что сама точка b не является положением равновесия.

Покажем теперь, что траектория $\varphi(t)$ не может входить в ω-предельное множество для какой-либо другой траектории $\psi(t)$. Допустим противоположное. Тогда каждая точка траектории $\varphi(t)$ является ω-предельной для $\psi(t)$ (см. Г)); в частности, таковой будет точка a_1. Так как точка a_1 не является положением равновесия, то в силу доказанного выше последовательные точки

$$b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$$

пересечения траектории $\psi(t)$ с отрезком L образуют монотонную последовательность, сходящуюся к a_1, и других ω-предельных точек траектории $\psi(t)$ на отрезке L не существует. Но это противоречит тому, что все точки $a_2, a_3, \ldots$, лежащие на траектории $\varphi(t)$, являются ω-предельными точками траектории $\psi(t)$.

Итак, доказано, что *незамкнутая траектория, среди ω-предельных точек которой нет положений равновесия, не может быть сама ω-предельной.*

Так как траектория K содержится в ω-предельном множестве Ω траектории $\varphi(t)$, а это множество замкнуто (см. Г)), то все ω-предельные точки траектории K содержатся в Ω и потому не являются положениями равновесия. Таким образом, к траектории K можно применить доказанное выше предложение, так что траектория K должна быть замкнутой. Из всего построения видно, что траектория $\varphi(t)$ наматывается на K, как спираль, и потому множество Ω состоит лишь из замкнутой траектории K, проходящей через точку b.

Таким образом, теорема 21 доказана.

Примеры

1. Дадим пример системы уравнений вида (1) ($n=2$), имеющей периодические решения различного типа, в частности предельные циклы различных видов. Первоначально мы зададим ее в полярных координатах φ, ρ, а затем уже преобразуем в декартовы координаты x, y. Имея в виду последующее преобразование к декартовым координатам, мы зададим ее в виде:

$$\dot{\varphi}=1; \quad \dot{\rho}=\rho g(\rho^2), \tag{20}$$

где $g(u)$ — непрерывно дифференцируемая функция своего аргумента, определенная для всех неотрицательных его значений. При рассмотрении в полярных координатах мы будем использовать лишь положительные значения для ρ.

Множество всех положительных значений ρ, для которых $g(\rho^2)=0$, обозначим через N, а его дополнение в множестве положительных чисел — через D. Каждому числу u_0 из N соответствует, очевидно, решение

$$\varphi=t, \quad \rho=u_0$$

уравнения (20); соответствующая траектория K_{u_0} замкнута: она является окружностью в плоскости P с центром в начале координат и радиусом u_0. Так как множество N замкнуто в совокупности всех положительных чисел, то D открыто и состоит из конечного или счетного числа интервалов, попарно друг друга не пересекающих. Пусть $u_1<\rho<u_2$ — один из конечных интервалов. Тогда замкнутые траектории K_{u_1} и K_{u_2} ограничивают в плоскости P кольцо Q. Для всех чисел ρ интервала $u_1<\rho<u_2$ функция $g(\rho^2)$ сохраняет знак, так что на всем интервале имеет место одно из неравенств:

$$g(\rho^2)<0; \qquad g(\rho^2)>0. \tag{21}$$

Пусть

$$\varphi=t, \qquad \rho=\rho(t, u) \tag{22}$$

— решение системы (20) с начальными значениями $t=0$, $\varphi=0$, $\rho=u$, где $u_1<u<u_2$. В силу доказанного в примере 1 § 15 функция $\rho(t, u)$ определена для всех значений t и при $t\to+\infty$ приближается к одному из концов интервала $u_1<\rho<u_2$, а при $t\to-\infty$ — к другому. Из этого следует, что траектория (22) при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$ наматывается, как спираль на окружности K_{u_1}, K_{u_2}. Именно, если выполнено первое из неравенств (21), то траектория (22) представляет собой

спираль, наматывающуюся на K_{u_1} при $t \to +\infty$ и на K_{u_2} при $t \to -\infty$ (рис. 50). Если выполнено второе из неравенств (21), то решение (22) представляет собой спираль, наматывающуюся на K_{u_1} при $t \to -\infty$ и на K_{u_2} при $t \to +\infty$ (рис. 51). Таким образом, кольцо Q заполнено однотипными спиралями одного из двух видов в зависимости от того, какое из неравенств (21) выполняется на интервале $u_1 < \rho < u_2$. Если множество N ограничено и u^* — его верхняя грань, то на бесконечном интервале $u^* < \rho < +\infty$ траектории (22) в одну сторону наматываются на окружность K_{u^*}, а в другую сторону уходят в бесконечность.

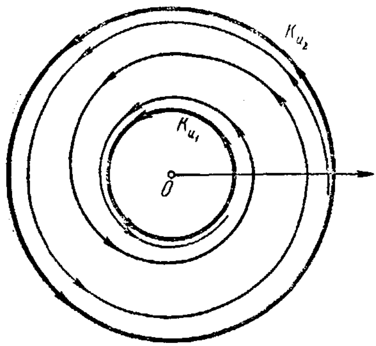


Рис. 50.

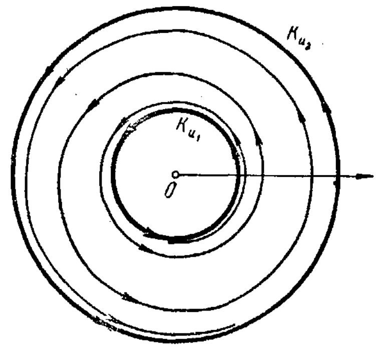


Рис. 51.

Если точка u_0 множества N является его изолированной точкой, то замкнутая траектория K_{u_0} является предельным циклом, вид которого зависит от типа спиралей, заполняющих кольца, примыкающие к траектории K_{u_0}. Если точка u_0 множества N не является его изолированной точкой, то периодическое решение K_{u_0} не является предельным циклом. Если при этом в N содержится целый интервал с центром в u_0, то периодическое решение K_{u_0} содержится внутри целого семейства периодических решений, составляющих совокупность концентрических окружностей с общим центром в начале координат. Если к числу u_0 с одной стороны примыкает целый отрезок чисел множества N, а с другой — интервал из D, то траектория K_{u_0} является крайней в семействе замкнутых траекторий, примыкающих к ней с одной стороны, а с другой стороны на нее наматывается семейство спиральных траекторий. Возможны, однако, и более сложные случаи примыкания замкнутых траекторий к периодическому решению K_{u_0}. Их легко себе представить; например, N может быть канторовым совершенным множеством.

Запишем теперь систему (20) в декартовых координатах, положив:

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi. \tag{23}$$

Дифференцируя соотношения (23), мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi = \rho g(\rho^2)\cdot\frac{x}{\rho} - \rho\cdot\frac{y}{\rho} = xg(x^2+y^2) - y; \\ \dot{y} &= \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi = \rho g(\rho^2)\cdot\frac{y}{\rho} + \rho\cdot\frac{x}{\rho} = yg(x^2+y^2) + x. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Итак, в декартовых координатах система (20) записывается в виде:

$$\dot{x} = xg(x^2+y^2) - y; \qquad \dot{y} = yg(x^2+y^2) + x. \tag{25}$$

(Здесь g может быть, например, произвольным многочленом.) Система (25) имеет в начале координат положение равновесия.

2. Пусть

$$\dot{x}^1 = f^1(x^1,\ x^2,\ \mu); \qquad \dot{x}^2 = f^2(x^1,\ x^2,\ \mu)$$

— нормальная автономная система второго порядка, правые части которой зависят от числового параметра μ и обладают непрерывными частными производными первого порядка по всем своим аргументам x^1, x^2, μ. Пусть, далее,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ \mu) \tag{26}$$

— векторная запись этой системы. Решение уравнения (26) с начальными значениями 0, ξ обозначим через $\varphi(t,\ \xi,\ \mu)$; предположим, что $\varphi(t,\ \xi_0,\ \mu_0)$ есть периодическое решение уравнения (26) при $(\mu = \mu_0)$ периода T. Выясним вопрос о том, что происходит с этим решением при изменении параметра μ вблизи значения μ_0.

Решения уравнения (26) будем изображать в одной и той же плоскости P независимо от значения параметра μ. Пусть K — замкнутая траектория, соответствующая решению $\varphi(t,\ \xi_0,\ \mu_0)$ и L — гладкая кривая, заданная в плоскости P параметрическим векторным уравнением

$$\boldsymbol{x} = \psi(u),$$

которая пересекается с траекторией K в единственной точке

$$\xi_0 = \varphi(0,\ \xi_0,\ \mu_0) = \varphi(T,\ \xi_0,\ \mu_0) = \psi(u_0), \tag{27}$$

не касаясь ее. Рассмотрим векторное уравнение:

$$\varphi(t,\ \psi(u),\ \mu) - \psi(v) = 0, \tag{28}$$

в котором независимыми переменными будем считать μ, u, а неизвестными функциями t и v. Независимые переменные пусть меняются: u вблизи u_0, μ вблизи μ_0. Решения будем искать при t, близком к T, v, близком к u_0. При $u = u_0$, $\mu = \mu_0$ имеется очевидное решение уравнения (28): $t = T$, $v = u_0$ (см. (27)), и функциональный определитель соответствующей системы уравнений при этих значениях переменных отличен от нуля, так как векторы $\boldsymbol{f}(\xi_0,\ \mu_0)$ и $\psi'(u_0)$ независимы. При $\mu = \mu_0$ уравнение (28) определяет функцию последования

$v=\chi(u, \mu_0)$ уравнения (26) ($\mu=\mu_0$) вблизи замкнутой траектории K. При μ, близком к μ_0, функция $v=\chi(u, \mu)$ также определяется из уравнения (28) и может считаться *функцией последования* уравнения (26) вблизи периодического решения K. Однако уравнение (26) при $\mu\neq\mu_0$ может и не иметь периодического решения. Для отыскания периодического решения уравнения (26) при μ, близком к μ_0, рассмотрим уравнение

$$\chi(u, \mu)-u=0 \tag{29}$$

относительно неизвестной функции $u(\mu)$ переменного μ. Если производная левой части уравнения (29) по переменному u при $u=u_0$, $\mu=\mu_0$ отлична от нуля, т. е. если

$$\frac{\partial}{\partial u}\chi(u_0, \mu_0)\neq 1, \tag{30}$$

то уравнение (29) заведомо имеет дифференцируемое решение $u(\mu)$, и тогда уравнение (26) имеет при μ, близком к μ_0, единственное

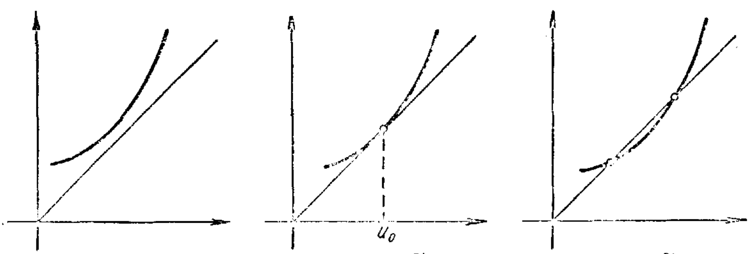


Рис. 52.

периодическое решение, гладко зависящее от μ и превращающееся в K при $\mu=\mu_0$. Условие (30) означает предположение грубости цикла K. В полученном результате заключается оправдание термина «грубый». Грубый предельный цикл не исчезает (и остается грубым) при малых изменениях правых частей системы, он «прочен» при этих изменениях.

Если график уравнения

$$v=\chi(u, \mu) \tag{31}$$

в плоскости переменных u, v при $\mu=\mu_0$ касается в точке (u_0, u_0) биссектрисы

$$v=u \tag{32}$$

с порядком касания единица (рис. 52, б), то кривая (31) при $\mu=\mu_0$ лежит по одну сторону биссектрисы (32), и предельный цикл K является полуустойчивым (рис. 53, *б*). При изменениях параметра μ вблизи μ_0 наиболее естественное поведение графика (31) заключается в том, что при значениях μ, лежащих по одну сторону от μ_0, точка пересечения графиков (31) и (32) вовсе исчезает (рис. 52, *а*), а при значениях μ, лежащих по другую сторону, появляются две точки пересечения этих графиков (рис. 52, *в*), так что у уравнения (26) появляются два грубых предельных цикла, близких к K (рис. 53, *в*). Таким образом, при прохождении параметра μ через значение μ_0 мы сначала не имеем предельного цикла (рис. 53, *а*), далее при $\mu = \mu_0$ появляется один полуустойчивый цикл, и при дальнейшем изменении параметра μ он

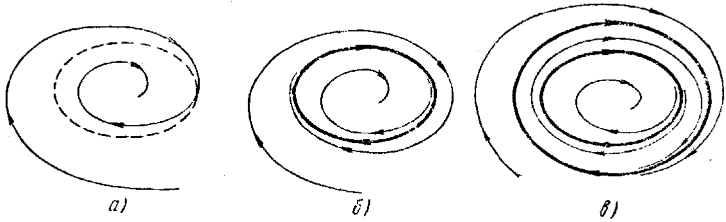


Рис. 53.

распадается на два грубых предельных цикла, близких к K. Описанное явление принято называть «рождением» предельных циклов уравнения (26) при изменении его правой части.

3. Отметим некоторые очень важные свойства периодического решения K уравнения (2) в случае аналитических правых частей. Здесь мы без доказательства используем тот факт, что решение $\varphi(t, \xi)$ уравнения (2) является в этом случае аналитической функцией переменных t и ξ^1, ξ^2. При построении функции последования будем считать, что кривая L задается аналитическим уравнением. В этих предположениях функция последования $\chi(u)$ оказывается аналитической, будучи решением аналитического уравнения.

Так как нулям функции $\chi(u) - u$ соответствуют периодические решения уравнения (2), то ввиду аналитичности функции $\chi(u)$ возможны лишь два взаимно исключающих друг друга случая: 1) K есть предельный цикл — случай, когда u_0 есть изолированный нуль функции $\chi(u) - u$; 2) Периодическое решение K содержится внутри семейства периодических решений — случай, когда функция $\chi(u) - u$ тождественно равна нулю. Если на траекторию K спирально наворачивается какая-либо другая траектория, то K не содержится внутри семейства периодических решений и, следовательно, является предельным циклом. Таким образом, при аналитических правых частях в случае 2) теоремы 21 периодическое решение K является предельным циклом.

§ 29. Ламповый генератор

Здесь схематически будет описано устройство простейшего лампового генератора — прибора, являющегося источником периодических (незатухающих) электрических колебаний. Будет дана качественная математическая теория работы генератора. Уравнение, описывающее работу лампового генератора, нелинейно. Его предельный цикл и соответствует периодическим колебаниям, возбуждаемым генератором. Адэкватность математического понятия предельного цикла и физического понятия незатухающего колебания, возбуждаемого ламповым генератором, была впервые установлена выдающимся советским ученым А. А. Андроновым. До исследований Андронова работу лампового генератора пытались объяснить при помощи линейных дифференциальных уравнений, что не могло дать правильной математической картины работы генератора.

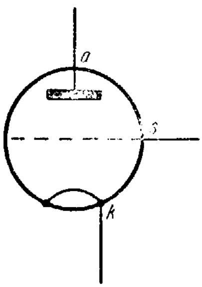


Рис. 54.

А) *Триод* (один из видов электронной лампы) представляет собой трехполюсник aks. Условное изображение триода показано на рис. 54. Здесь a — анод, k — катод, s — сетка. Между полюсами s и k подается разность напряжений U_s (сеточное напряжение), однако ток между полюсами s и k отсутствует; от полюса a к полюсу k через лампу течет ток I_a (анодный ток). Закон, управляющий работой триода, записывается формулой

$$I_a = f(U_s). \tag{1}$$

Функция f называется *характеристикой* триода. Мы будем считать, что она является монотонно возрастающей и положительной и удовлетворяет условиям:

$$\lim_{U_s \to -\infty} f(U_s) = 0,$$

$$\lim_{U_s \to +\infty} f(U_s) = I_N,$$

где I_N — ток насыщения триода (рис. 55). Обычно предполагают также, что максимум функции $f'(U_s)$ достигается в точке $U_s = 0$.

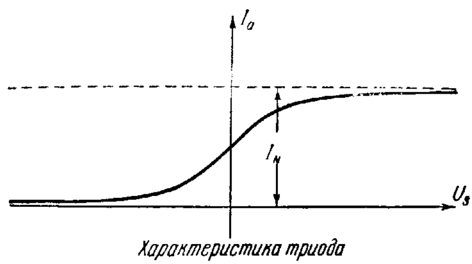


Рис. 55.

Описанный в А) под названием триода трехполюсник в действительности включает в себя, кроме электронной лампы, еще анодную батарею, батарею сеточного смещения и батарею накаливания катода.

Б) Ламповый генератор с колебательным контуром в анодной цепи имеет следующее устройство (рис. 56). Он имеет четыре узла a, k, s, b и состоит из триода aks (см. А)) с характеристикой $f(U_s)$, конденсатора ak с емкостью C, сопротивления ab величины R, индуктивности bk величины L и еще одной индуктивности sk, величина которой не имеет значения. Индуктивности kb и ks связаны отрицательной взаимоиндукцией $-M$ $(M>0)$, которая осуществляет так называемую обратную связь в ламповом генераторе. Если обозначить через J силу тока, идущего через сопротивление ba, или, что то же самое, через индуктивность kb:

$$J = I_{ba} = I_{kb},$$

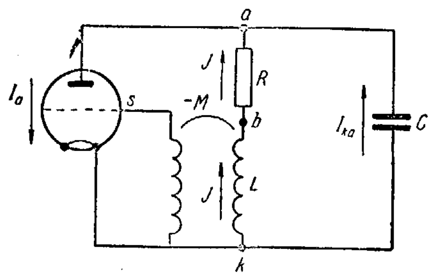


Рис. 56.

то оказывается, что величина J, как функция времени t, удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{J}{C} = \frac{1}{C} f(M\dot{J}). \tag{2}$$

Выведем уравнение (2). В силу первого закона Кирхгофа мы имеем:

$$J + I_{ka} = I_a, \tag{3}$$

где I_{ka} — ток, идущий через конденсатор ka. Кроме того, в силу свойств триода имеем:

$$I_{sk} = 0. \tag{4}$$

Применяя второй закон Кирхгофа к колебательному контуру $kbak$, получаем (см. (4)):

$$L\dot{I}_{kb} + RI_{ba} + \frac{1}{C}\int I_{ak}\,dt = 0.$$

Дифференцируя это соотношение, получаем:

$$L\ddot{I}_{kb} + R\dot{I}_{ba} + \frac{1}{C} I_{ak} = 0. \tag{5}$$

В силу взаимоиндукции между индуктивностями kb и ks получаем (см. (4), а также § 13, Б)):

$$U_s = M\dot{I}_{kb}. \tag{6}$$

Таким образом, из соотношений (1), (3), (5), (6) следует (2).

В) Уравнение (2) в фазовой плоскости переменных J, $\dot{J}$ имеет единственное положение равновесия с координатами:

$$J = f(0), \quad \dot{J} = 0. \tag{7}$$

Это положение равновесия асимптотически устойчиво, если

$$R > \frac{M}{C} f'(0), \tag{8}$$

и вполне неустойчиво (см. § 26, Е)), если

$$R < \frac{M}{C} f'(0). \tag{9}$$

Бесконечно удаленная точка плоскости переменных J, $\dot{J}$ во всех случаях вполне неустойчива. Это значит, что существует настолько большой круг K в плоскости J, $\dot{J}$, что всякая траектория уравнения (2), начиная с некоторого момента времени, приходит в этот круг и остается в нем. При выполнении неравенства (9) положение равновесия (7) также вполне неустойчиво. Таким образом, в силу теоремы 21 (см. § 28) ω-предельное множество любой траектории, отличной от положения равновесия (7), представляет собой замкнутую траекторию. Итак, в случае выполнения неравенства (9), ламповый генератор является источником периодических незатухающих электрических колебаний.

Замечание. При надлежащем выборе характеристики f уравнение (2) имеет единственный предельный цикл, а все остальные траектории уравнения (2), отличные от положения равновесия (7), наматываются на него. Одна из характеристик, обладающих этим свойством, будет указана в примере.

Для доказательства предложения В) введем вместо неизвестной функции J новую неизвестную функцию x, положив:

$$J = x + f(0) \tag{10}$$

с тем, чтобы точке (7) соответствовало начало координат плоскости x, $\dot{x}$.

Сделав подстановку (10), получаем из уравнения (2) уравнение

$$\ddot{x} + \frac{R}{L}\dot{x} + \frac{1}{LC}x = \frac{1}{LC}[f(M\dot{x}) - f(0)]. \tag{11}$$

Функцию переменного $\dot{x}$, стоящую в правой части этого уравнения, обозначим через $g(\dot{x})$. Непосредственно видно, что функция g является ограниченной, монотонно возрастающей и обращается в нуль лишь при нулевом значении аргумента (рис. 57). Полагая сверх того,

$$\frac{R}{L} = 2\delta, \qquad \frac{1}{LC} = \omega^2,$$

мы запишем уравнение (11) в виде:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = g(\dot{x}).$$

Вводя новое переменное $y = \dot{x}$, мы из этого уравнения получаем нормальную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y + g(y). \end{cases} \tag{12}$$

Для отыскания положений равновесия системы (12) приравниваем ее правые части нулю:

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\omega^2 x - 2\delta y + g(y) = 0. \end{cases}$$

Полученная система имеет единственное решение

$$x = 0, \quad y = 0.$$

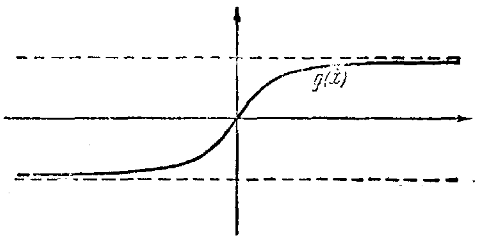


Рис. 57.

Таким образом, начало координат является единственным положением равновесия системы (12), а из этого следует, что единственным положением равновесия уравнения (2) является точка (7).

Выясним теперь условия устойчивости положения равновесия (0, 0) системы (12), для чего линеаризуем эту систему в точке (0, 0). Мы получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y + g'(0)\,y. \end{cases} \tag{13}$$

Легкие вычисления дают характеристический многочлен

$$\lambda^2 + (2\delta - g'(0))\lambda + \omega^2$$

линейной системы (13). В новых обозначениях условия (8) и (9) соответственно принимают вид: $2\delta > g'(0)$, $2\delta < g'(0)$. Таким образом, при выполнении условия (8) положение равновесия (0, 0) асимптотически устойчиво (см. теорему 19 и § 9, Б)), а при выполнении условия (9) оно вполне неустойчиво (см. § 26, Е)).

Для выяснения поведения траекторий системы (12) в далеких частях фазовой плоскости x, y рассмотрим линейную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y, \end{cases} \tag{14}$$

полученную из системы (12) отбрасыванием ограниченного во всей плоскости члена $g(y)$. Легкие вычисления дают характеристический многочлен системы (14):

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2; \tag{15}$$

так как числа 2δ и ω^2 положительны, то его корни имеют отрицательные действительные части. Таким образом, в силу предложения Д) § 26 для линейной системы (14) существует функция Ляпунова $W(x, y)$, удовлетворяющая условию:

$$\dot{W}_{(14)}(x, y) \leqslant -\beta W(x, y). \tag{16}$$

Вычислим теперь производную $\dot{W}_{(12)}(x, y)$ функции $W(x, y)$ в силу системы (12). Мы имеем:

$$\dot{W}_{(12)}(x, y) = \dot{W}_{(14)}(x, y) + \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} g(y). \tag{17}$$

Так как функция $g(y)$ ограничена, то имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \cdot g(y) \right| \leqslant \gamma \sqrt{W(x, y)} \tag{18}$$

(см. формулу (14) § 26), где γ — некоторая положительная константа.

Полагая теперь

$$c = \frac{2\gamma}{\beta}, \qquad \alpha = \frac{\beta}{4},$$

мы из (16), (17) и (18) получаем неравенство

$$\dot{W}_{(12)}(x, y) \leqslant -2\alpha W(x, y) \quad \text{при} \quad W(x, y) \geqslant c^2. \tag{19}$$

Уравнение

$$W(x, y) = c^2 \tag{20}$$

определяет в плоскости x, y эллипс. Из неравенства (19) непосредственно следует, что в точке (x, y), принадлежащей эллипсу (20) функция $W(x, y)$ убывает вдоль траектории системы (12), проходящей через точку (x, y). Таким образом, все траектории системы (12), пересекая эллипс (20), входят внутрь этого эллипса. Если

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{21}$$

— решение системы (12), начинающееся в точке (ξ, η) вне эллипса (20), то, полагая

$$w(t) = W(\varphi(t), \psi(t)),$$

мы для функции $w(t)$ получаем неравенство

$$\dot{w}(t) \leqslant -2\alpha w(t), \tag{22}$$

верное при условии

$$w(t) \geqslant c^2.$$

Интегрируя неравенство (22), получаем:

$$W(\varphi(t),\ \psi(t)) \leqslant W(\xi,\ \eta)\, e^{-2\alpha t}.$$

Из этого следует, что траектория (21) обязательно входит в эллипс (20). При этом ни одна траектория не может выйти из этого эллипса, так как в его граничных точках все траектории входят внутрь.

Пусть теперь K — некоторая окружность в плоскости x, y, содержащая эллипс (20). Из доказанного следует, что всякая траектория системы (12), отличная от положения равновесия (0, 0), обязательно входит в окружность K и остается в ней. Так как точка (0, 0) вполне неустойчива, то траектория эта не может иметь ее в числе своих ω-предельных точек и потому в силу теоремы 21 (см. § 28) она есть либо спираль, наматывающаяся на периодическое решение, либо периодическое решение.

Итак, предложение В) доказано.

Пример

А. А. Андронов, который впервые составил для лампового генератора нелинейное уравнение (2), рассмотрел случай, когда характеристика f триода имеет особо простой вид, а именно она равна нулю при отрицательных значениях аргумента и равна положительной константе b при положительных значениях аргумента. Считая, что $f(0)=\frac{b}{2}$ и производя замену переменных (10), мы придем к системе (12), в которой функция $g(y)$ определяется условием:

$$g(y)=\begin{cases} -\omega^2 a & \text{при } y<0, \\ \omega^2 a & \text{при } y>0, \end{cases} \tag{23}$$

где $a=\frac{b}{2}$. Система (12) с выбранной таким образом разрывной функцией $g(y)$ записывается при $y>0$, т. е. в верхней полуплоскости, в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-\omega^2 x-2\delta y+\omega^2 a, \end{cases} \tag{24}$$

а при $y<0$, т. е. в нижней полуплоскости, в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-\omega^2 x-2\delta y-\omega^2 a. \end{cases} \tag{25}$$

Мы будем считать, что корни многочлена (15) комплексные. Таким образом, положение равновесия (0, 0) системы (14) представляет собой устойчивый фокус (см. § 16, В)); системы же (24) и (25) отличаются от системы (14) только сдвигом: их положения равновесия помещены не в начале координат, как у системы (14), а в точке $(a, 0)$

у системы (24) и в точке $(-a, 0)$ у системы (25). Заметим, что спирали линейной системы (14) наматываются на положение равновесия $(0, 0)$ по часовой стрелке и что при прохождении полувитка спирали фазовая точка приближается к началу координат, так что ее первоначальное расстояние от начала координат умножается на некоторое число $\lambda < 1$, не зависящее от начального положения точки (см. § 16, В)).

Для того чтобы представить себе фазовую плоскость системы (12) в случае, когда функция $g(y)$ определяется условиями (23), нужно верхнюю полуплоскость заполнить полувитками спиральных траекторий системы (24), а нижнюю — полувитками спиральных траекторий системы (25); при переходе же через прямую $y=0$ следует непрерывно переходить с одних траекторий на другие. Исходя из этого описания фазовой картины системы (12) (см. (23)), будем искать ее замкнутые траектории.

Рассмотрим траекторию системы (12) (см. (23)), начинающуюся на оси абсцисс в точке с координатой $\xi > 0$. Так как движение в фазовой плоскости системы (12) происходит по часовой стрелке, то из выбранной точки траектория пойдет в нижнюю полуплоскость и, следовательно, будет управляться системой (25). После прохождения полувитка спирали в нижней полуплоскости фазовая точка вновь попадает на ось абсцисс в точку с координатой

$$-(a+\lambda(a+\xi)). \qquad (26)$$

Это следует из того, что при прохождении полувитка спирали расстояние фазовой точки от положения равновесия $(-a, 0)$ умножается на λ. Точка с координатой (26), лежащая на оси абсцисс, будет затем двигаться в силу системы (24) и, после прохождения полувитка спирали в верхней полуплоскости, придет на ось абсцисс в точку с координатой:

$$a+\lambda(2a+\lambda(a+\xi)). \qquad (27)$$

Таким образом, траектория, начинающаяся в точке с координатой $\xi > 0$ на положительной части оси абсцисс, после полного обхода вновь попадает на положительную часть оси абсцисс, но уже в точку с координатой (27), и мы получаем отображение χ положительной полуоси абсцисс в себя, определяемое соотношением

$$\chi(\xi)=a+2\lambda a+\lambda^2 a+\lambda^2\xi.$$

Функция $\chi(\xi)$ есть функция последования для системы (12) (см. (23)). Имеется лишь одно значение ξ, удовлетворяющее условию

$$\chi(\xi)=\xi,$$

и этому значению ξ соответствует предельный цикл системы (12), и притом грубый и устойчивый, так как $\chi'(\xi)=\lambda^2<1$ (см. § 28).

§ 30. Положения равновесия автономной системы второго порядка

Здесь будут классифицированы и изучены невырожденные положения равновесия нормальной автономной системы уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

причем будет предполагаться, что правые части дважды непрерывно дифференцируемы, а в теореме 23 — что они трижды непрерывно дифференцируемы.

Невырожденные положения равновесия

Так как положение равновесия всегда можно принять за начало координат, то мы будем предполагать, что подлежащее изучению положение равновесия системы (1) есть начало координат. Линеаризуя систему (1) в точке (0, 0), т. е. разлагая правые части системы (1) в ряды Тейлора по x и y и отбрасывая члены второго порядка, получаем линейную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1^1 x + a_2^1 y, \\ \dot{y} = a_1^2 x + a_2^2 y. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть λ и μ — собственные значения матрицы (a_j^i). Положение равновесия (0, 0) системы (1) называется *невырожденным*, если числа λ и μ не равны между собой и их действительные части отличны от нуля. Поведение траекторий линейной системы (2) было детально изучено в § 16. Здесь будет показано, что для невырожденного положения равновесия поведение траекторий вблизи положения равновесия (0, 0) системы (1) в существенном совпадает с поведением траекторий вблизи положения равновесия (0, 0) системы (2).

За положением равновесия (0, 0) системы (1) сохраняется наименование, данное в § 16. Если числа λ и μ оба действительны и отрицательны, то положение равновесия называется *устойчивым узлом*. Если числа λ и μ оба действительны и положительны, то положение равновесия называется *неустойчивым узлом*. Если числа λ и μ комплексно-сопряжены и имеют отрицательную действительную часть, то положение равновесия называется *устойчивым фокусом*. Если числа λ и μ комплексно-сопряжены и имеют положительную действительную часть, то положение равновесия называется *неустойчивым фокусом*. Наконец, если числа λ и μ действительны и имеют различные знаки, то положение равновесия называется *седлом*.

Наиболее простые свойства поведения траекторий вблизи положений равновесия можно установить, непосредственно опираясь на теорему Ляпунова (теорема 19) и предложение E) § 26. Таким образом, мы получаем предложение:

А) Устойчивый узел и устойчивый фокус являются асимптотически устойчивыми положениями равновесия. Неустойчивый узел и неустойчивый фокус являются вполне неустойчивыми положениями равновесия.

Это предложение в значительной степени уже решает вопрос о поведении траекторий вблизи узла и фокуса. Действительно, если известно, что данное положение равновесия является асимптотически устойчивым, то с точки зрения приложений уже часто бывает неважно, каким именно способом стремятся к нему траектории. То же самое относится и ко вполне неустойчивому положению равновесия. Совсем другую роль играет седло: зная поведение траекторий вблизи него, можно высказать ценные суждения о поведении траекторий на всей плоскости. В то же время теорема о поведении траекторий вблизи седла доказывается значительно труднее, чем соответствующие теоремы относительно узла и фокуса.

Произведем теперь в фазовой плоскости системы (1) линейное преобразование координат, с тем, чтобы придать ей наиболее простой вид:

Б) Разлагая правые части системы (1) в ряды Тейлора по x и y с точностью до членов второго порядка, получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1^1 x + a_2^1 y + r(x, y), \\ \dot{y} = a_1^2 x + a_2^2 y + s(x, y), \end{cases} \tag{3}$$

где остаточные члены $r(x, y)$ и $s(x, y)$ в точке $x=0$, $y=0$ обращаются в нуль вместе со своими первыми производными по x и y и могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} r(x, y) = r_{11}x^2 + 2r_{12}xy + r_{22}y^2, \\ s(x, y) = s_{11}x^2 + 2s_{12}xy + s_{22}y^2, \end{cases} \tag{4}$$

причем коэффициенты r_{ij} и s_{ij} этих «квадратичных форм» являются функциями переменных x, y, ограниченными вблизи начала координат. Оказывается, что, производя действительное линейное преобразование величин x, y в величины ξ, η, можно привести систему (3) к простому виду, причем следует различать два случая: 1) Если собственные значения λ, μ матрицы (a_j^i) действительны и различны, то система уравнений для ξ и η записывается в виде:

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + \rho(\xi, \eta), \qquad \dot{\eta} = \mu\eta + \sigma(\xi, \eta). \tag{5}$$

2) Если собственные значения матрицы (a_j^i) комплексно-сопряжены, т. е. имеют вид $\mu + i\nu$ и $\mu - i\nu$, то система уравнений для ξ и η

записывается в виде:

$$\dot{\xi}=\mu\xi-\nu\eta+\rho(\xi,\ \eta),\qquad \dot{\eta}=\nu\xi+\mu\eta+\sigma(\xi,\ \eta). \tag{6}$$

В обоих случаях остаточные члены $\rho(\xi,\ \eta)$ и $\sigma(\xi,\ \eta)$ обладают теми свойствами, которые были отмечены выше для функций $r(x,\ y)$ и $s(x,\ y)$. В первом случае система принимает вид (5), если принять за оси направления собственных векторов матрицы (a_j^i).

Для доказательства предложения Б) достаточно найти такое линейное преобразование координат x, y в координаты ξ, η, чтобы линейная система (2) приобрела простой вид. Такое преобразование уже было найдено (см. § 14, Е)). Применяя то же преобразование к системе (3), мы получим систему (5) или, соответственно, систему (6).

Поведение траекторий вблизи седла

Теорема 22. *Предположим, что положение равновесия* $O=(0,\ 0)$ *системы* (1) *является седлом. Пусть* P — *прямая, проходящая через точку* O *в направлении собственного вектора матрицы* (a_j^i) *с отрицательным собственным значением, а* Q — *прямая, проходящая через точку* O *в направлении собственного вектора матрицы* (a_j^i) *с положительным собственным значением. Тогда* (рис. 58) *существуют ровно две траектории* U_1 *и* U_2 *системы* (1), *которые при* $t\to+\infty$ *асимптотически приближаются к точке* O.

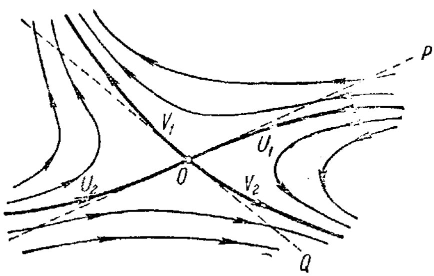


Рис. 58.

Эти траектории вместе с точкой O *образуют непрерывную дифференцируемую кривую* U, *касающуюся прямой* P *в точке* O. *Точно так же существуют ровно две траектории* V_1 *и* V_2 *системы* (1), *которые при* $t\to-\infty$ *асимптотически приближаются к точке* O; *эти траектории вместе с точкой* O *образуют непрерывную дифференцируемую кривую* V, *касающуюся прямой* Q *в точке* O. *Остальные траектории системы* (1), *проходящие вблизи точки* O, *ведут себя, в общем, так же, как в случае линейного уравнения* (см. § 16).

Траектории U_1 и U_2 называются *устойчивыми усами* седла O, а траектории V_1 и V_2 называются *неустойчивыми усами* седла O.

Доказательство. Прежде всего примем прямую P за ось абсцисс, а прямую Q — за ось ординат; тогда система (1) запишется в виде (5). Переходя снова к обозначениям x и y вместо ξ и η, мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = \lambda x + r(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y) = \mu y + s(x, y), \end{cases} \tag{7}$$

где $r(x, y)$ и $s(x, y)$ имеют вид (4); здесь $\lambda < 0$, $\mu > 0$. Отметим для дальнейшего, что в последующем доказательстве будут использованы лишь следующие свойства правых частей системы (7): непрерывная дифференцируемость правых частей по x и y и ограниченность функций r_j^i и s_j^i (см. (4)) вблизи начала координат.

Доказательство распадается на две главные части: а) доказательство существования уса U_1, подходящего к точке O вдоль положительной части оси абсцисс при убывании координаты x; б) доказательство его единственности. Существование и единственность уса U_2 доказываются аналогично. Для рассмотрения усов V_1 и V_2 достаточно изменить знак времени t: при этом устойчивые усы перейдут в неустойчивые и наоборот.

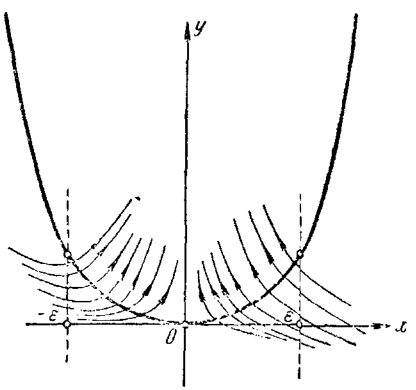


Рис. 59.

Перейдем к доказательству существования уса U_1. Для этого положим:

$$\omega(x, y) = y - \alpha x^2 \qquad (\alpha > 0)$$

и рассмотрим в плоскости (x, y) параболу, определяемую уравнением

$$\omega(x, y) = 0. \tag{8}$$

Парабола (8) разбивает плоскость на две части: положительную, содержащую положительную полуось ординат, и отрицательную. Положительная область является внутренней для параболы. Покажем прежде всего, что, если α — достаточно большое положительное число, а x достаточно мало ($|x| \leqslant \varepsilon$), то все траектории системы (7) (за исключением положения равновесия O), пересекающие участок $|x| \leqslant \varepsilon$ параболы (8), переходят с отрицательной стороны на положительную, т. е. снаружи внутрь (рис. 59). Для этого вычислим производную $\dot{\omega}_{(7)}(x, y)$ функции $\omega(x, y)$. В силу системы (7) в точках параболы (8) мы имеем:

$$\dot{\omega}_{(7)}(x, \alpha x^2) = \dot{y} - 2\alpha x \dot{x} = \alpha(\mu - 2\lambda) x^2 + s_{11} x^2 + \ldots$$

(здесь невыписанные члены содержат x по крайней мере в 3-й степени). Число $\mu - 2\lambda$ положительно, а функция s_{11} ограничена в окрестности начала координат; поэтому можно выбрать настолько большое число α, что

$$\alpha(\mu - 2\lambda) - |s_{11}| > \delta, \qquad \delta > 0.$$

Опущенные члены выражения для $\dot{\omega}_{(7)}(x, \alpha x^2)$ имеют, по крайней мере, третий порядок малости по x, и потому существует такое положительное ε, что при $|x| \leqslant \varepsilon$ мы имеем:

$$\dot{\omega}_{(7)}(x, \alpha x^2) \geqslant 0,$$

причем равенство имеет место лишь при $x = 0$, т. е. в точке O. Из доказанного следует, что все траектории системы (1), за исключением положения равновесия O, пересекают рассмотренный участок параболы (8) в направлении роста функции $\omega(x, y)$, т. е. снаружи внутрь.

Точно так же доказывается, что участок $|x| \leqslant \varepsilon$ параболы

$$y + \alpha x^2 = 0 \tag{9}$$

пересекается всеми траекториями системы (7), за исключением положения равновесия O, снаружи внутрь (внутренняя часть параболы (9) содержит отрицательную полуось ординат, рис. 60).

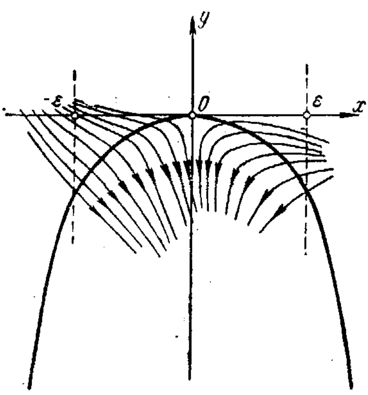


Рис. 60.

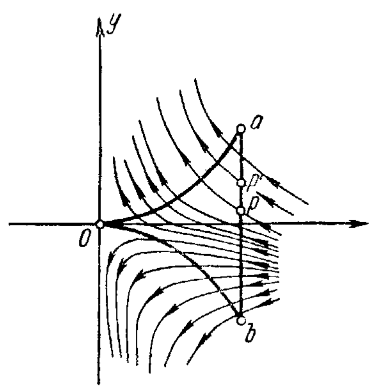


Рис. 61.

Пусть a и b — точки, в которых прямая $x = \varepsilon$ пересекает соответственно параболы (8) и (9). Рассмотрим треугольник $[O, a, b]$, составленный из двух кусков парабол (8) и (9) и прямолинейного отрезка $[a, b]$. Если ε достаточно мало, то все траектории системы (1), проходящие в треугольнике $[O, a, b]$, идут справа налево (рис. 61), в частности пересекают отрезок $[a, b]$ справа налево, входя в треугольник $[O, a, b]$. Это следует из того, что выражение

$$\dot{x} = \lambda x + r(x, y)$$

(см. (7)) при $0 < x \leqslant \varepsilon$, $|y| < \alpha x^2$ отрицательно, так как $\lambda < 0$, а

$r(x, y)$ есть «квадратичная форма» по x и y с ограниченными коэффициентами.

Пусть $\varphi(t, p)$ — траектория системы (7), начинающаяся при $t=0$ в некоторой точке p интервала (a, b). Эта траектория входит в треугольник $[O, a, b]$ через сторону $[a, b]$. Она может при возрастании t либо выйти из треугольника через дуги парабол Oa, Ob, либо вовсе не выйти из треугольника. В последнем случае траектория при $t \to \infty$ асимптотически приближается к точке O. Геометрически видно, что если траектория $\varphi(t, p)$ выходит из треугольника через дугу Oa, то и траектория $\varphi(t, p')$, где p' есть точка интервала (a, p), также выходит из треугольника через дугу Oa (рис. 61). Далее, если траектория $\varphi(t, p)$ выходит из треугольника через дугу Oa, то, в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных значений (теорема 14 и предложение Д) § 23), траектория $\varphi(t, p'')$, где p'' — точка, достаточно близкая к p', также выходит через дугу Oa. Таким образом, совокупность всех таких точек p интервала (a, b), для которых траектория $\varphi(t, p)$ выходит из треугольника через дугу Oa, составляет некоторый интервал (a, a'). (Этот интервал непуст, т. е. $a' \neq a$, ибо траектории, начинающиеся в точках p, достаточно близких к a, очевидно, пересекают дугу Oa.) Точно так же совокупность всех таких точек p, для которых траектория $\varphi(t, p)$ выходит из треугольника через сторону Ob, составляет интервал (b, b'). Интервалы (a, a') и (b, b') не могут пересекаться, так что точка a' лежит выше точки b' или, в крайнем случае, совпадает с ней. (В действительности имеет место совпадение, но это требует еще сравнительно сложного доказательства.) Таким образом, отрезок $[a', b']$ содержит хотя бы одну точку, и потому существует траектория $\varphi(t, p_0)$, начинающаяся на отрезке $[a', b']$ и асимптотически приближающаяся к точке O.

Касательная к траектории $\varphi(t, p_0)$ в точке (x, y) имеет угловой коэффициент

$$k(x, y) = \frac{\mu y + s(x, y)}{\lambda x + r(x, y)}.$$

Так как точка (x, y) траектории $\varphi(t, p_0)$ принадлежит треугольнику $[O, a, b]$, то

$$|y| < \alpha x^2, \qquad 0 < x < \varepsilon, \tag{10}$$

а из этого следует, что число $k(x, y)$ остается конечным и при $x \to 0$ стремится к нулю. С другой стороны, угловой коэффициент $l(x, y)$ секущей, проведенной из точки O в точку (x, y) траектории $\varphi(t, p_0)$, равен $\frac{y}{x}$, а так как имеют место неравенства (10), то при $x \to 0$ имеем $l(x, y) \to 0$. Таким образом, кривая $\varphi(t, p_0)$, упирающаяся в точку O, имеет в точке O непрерывную производную и касается оси абсцисс. Траектория $\varphi(t, p_0)$ представляет собой ус U_1. Ус U_2, подходящий к точке O вдоль отрицательной части оси абсцисс, также касается в точке O оси абсцисс; оба эти уса составляют вместе кривую U с уравнением

$$y = u(x), \tag{11}$$

где $u(x)$ есть непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция переменного x, причем $u'(0) = 0$.

Итак, существование устойчивых усов U_1 и U_2, составляющих вместе с точкой O кривую U, определяемую уравнением (11), доказано. Докажем теперь единственность этих усов. Для этого преобразуем в окрестности начала координат плоскости (x, y) систему координат так, чтобы кривая (11) стала осью абсцисс. Мы добьемся этой цели, введя вместо неизвестной функции y новую неизвестную функцию z по формуле

$$y = u(x) + z. \tag{12}$$

Произведя в системе (7) замену (12), получаем новую систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = f(x,\ u(x) + z) = F(x,\ z), \\ \dot{z} = g(x,\ u(x) + z) - u'(x) f(x,\ u(x) + z) = G(x,\ z), \end{array}\right. \tag{13}$$

где неизвестными функциями являются x и z. Так как функция $u(x)$ имеет непрерывную производную, то функция $F(x, z)$ имеет непрерывные производные по обеим переменным x и z, а функция $G(x, z)$ непрерывна по x и имеет непрерывную производную по z. Однако существование непрерывной производной функции $G(x, z)$ по x не установлено. Таким образом, не установлено, что для системы (13) выполнены обычные наши предположения о непрерывной дифференцируемости правых частей по всем переменным, являющимся неизвестными функциями. Очевидно, однако, что каждому решению системы (13) соответствует в силу (12) решение системы (7) и обратно. Таким образом, по поведению траекторий системы (13) можно судить о поведении траекторий системы (7).

Устойчивые усы U_1 и U_2 системы (7) перешли в отрезки оси абсцисс плоскости (x, z), и потому система (13) имеет решения, в которых функция x некоторым образом монотонно меняется, асимптотически приближаясь к нулю, а функция z тождественно равна нулю. Из этого следует, что

$$G(x,\ 0) \equiv 0.$$

Ниже будет показано (см. В)), что функция $G(x, z)$ может быть записана в виде:

$$G(x,\ z) = zH(x,\ z), \tag{14}$$

где $H(x, z)$ — непрерывная функция переменных x и z. Из соотношения (14) в силу непрерывности функции $H(x, z)$ мы получаем:

$$\left.\frac{\partial G(x, z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\z=0}}=\lim_{z\to 0}\frac{G(0, z)-G(0, 0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{G(0, z)}{z}=$$

$$=\lim_{z\to 0}H(0, z)=H(0, 0).$$

Но в силу (7) и (13) мы имеем $\left.\frac{\partial G(x, z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\z=0}}=\mu$, так что

$$H(0, 0)=\mu.$$

Таким образом, второе из уравнений системы (13) имеет вид:

$$\dot{z}=zH(x, z),$$

где $H(x, z)$ близко к μ в окрестности начала координат и, следовательно, положительно. Из этого следует, что в окрестности начала координат вдоль каждой траектории, отличной от усов U_1 и U_2, координата z сохраняет знак и по модулю увеличивается при увеличении t. Таким образом, ни одна траектория, протекающая вне оси абсцисс плоскости (x, z), не может асимптотически приближаться к точке O, и единственность устойчивых усов U_1 и U_2 доказана.

Теперь доказано, что на интервале (a, b) существует лишь одна такая точка p_0, что выходящая из нее траектория системы (7) при $t\to\infty$ асимптотически приближается к точке O, образуя ус U_1. Если точка p лежит на интервале (a, p_0), то выходящая из нее траектория пересекает дугу Oa, а если точка p лежит на интервале (b, p_0), то выходящая из нее траектория пересекает дугу Ob.

Исходя из парабол

$$x-\alpha y^2=0, \tag{15}$$

$$x+\alpha y^2=0 \tag{16}$$

и прямой

$$y=\varepsilon$$

(рис. 62), можно построить треугольник $[O, c, d]$, обладающий свойствами, аналогичными свойствам треугольника $[O, a, b]$. Существует лишь одна такая точка q_0 на интервале (c, d), что выходящая из нее траектория при убывающем t асимптотически приближается к точке O и образует неустойчивый ус V_1. Если точка q лежит на интервале (c, q_0), то выходящая из нее при убывающем t траектория пересекает дугу Oc, а если точка q лежит на интервале (q_0, d), то выходящая из нее при убывающем t траектория пересекает дугу Od.

Рассмотрим теперь кривую

$$f(x, y)=0 \tag{17}$$

(см. (7)). Легко видеть, что она касается оси ординат в точке O.

Так как функция $f(x, y)$ имеет вторые непрерывные производные, и потому кривая (17) имеет в точке O определенный радиус кривизны, то число α можно выбрать настолько большим, а число ε — настолько малым, что на отрезке $|y| \leqslant \varepsilon$ кривая (17) проходит между

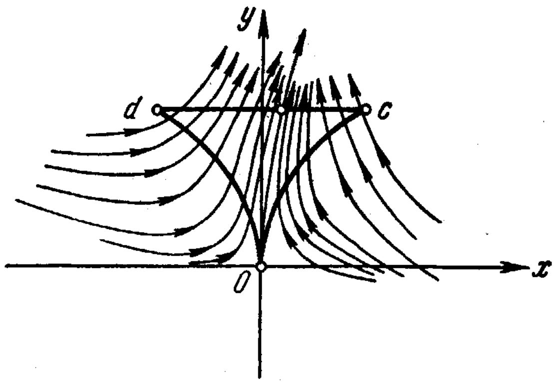


Рис. 62.

параболами (15) и (16) (рис. 63). Справа от кривой (17) функция $f(x, y)$ отрицательна, и потому векторы фазовой скорости в точках, лежащих справа от кривой (17), направлены налево. Проведем из точки c вертикальный отрезок $[ce]$, нижний конец e которого лежит на усе U_1. Пусть p — точка интервала (a, p_0). Если точка p достаточно близка к точке p_0, то, в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных значений (теорема 14 и предложение Д) § 23), точка, вышедшая из p, пройдет достаточно близко к началу координат и потому пересечет отрезок $[c, e]$. При дальнейшем движении она обязательно пересечет дугу Oc. В самом деле, если движущаяся точка пересекает линию (17), то она обязательно пересекает перед этим дугу Oc. Если же движущая точка не пересекает линии (17), то она перемещается все время налево, а расстояние z от этой точки до линии (11), измеряемое по вертикали, растет; таким образом, и в этом случае траектория пересекает дугу Oc.

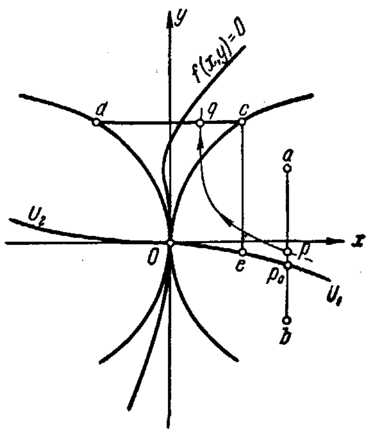


Рис. 63.

Таким образом, рассматриваемая траектория входит в треугольник $[O, c, d]$. После этого траектория уже должна будет пересечь интервал (c, q_0) в некоторой точке q. Если, наоборот, пустить из точки q' интервала (c, q_0) траекторию в направлении убывания t, то при достаточной близости точек q и q_0 эта траектория, пройдя вблизи начала координат, пересечет интервал (a, p_0) в некоторой точке p' (рис. 64). Сопоставляя эти два обстоятельства, легко прийти к выводу, что при $p \to p_0$ имеем $q \to q_0$. Это дает полное качественное представление о поведении траекторий вблизи седла.

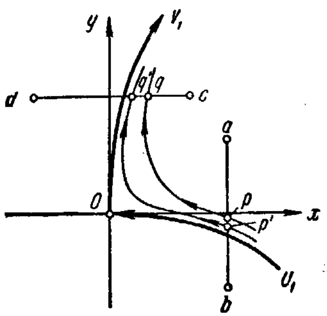


Рис. 64.

Таким образом, теорема 22 доказана.

Докажем теперь свойство (14) функции $G(x, z)$.

В) Пусть $G(x, z)$ — непрерывная функция, определенная вблизи значений $x = z = 0$ и обладающая непрерывной производной $\frac{\partial}{\partial z} G(x, z)$. Если

$$G(x, 0) \equiv 0,$$

то

$$G(x, z) = zH(x, z),$$

где $H(x, z)$ — непрерывная функция.

Для доказательства предложения В) определим функцию $H(x, z)$, положив:

$$\left.\begin{aligned} H(x, z) &= \frac{G(x, z)}{z} \quad &\text{при } z \neq 0, \\ H(x, z) &= \frac{\partial}{\partial z} G(x, z) \quad &\text{при } z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

и покажем, что определенная таким образом функция непрерывна. При $z \neq 0$ функция, определенная соотношениями (18), очевидно, непрерывна. Докажем, что она непрерывна в точке $(x_0, 0)$. Мы имеем:

$$G(x, z) = G(x, z) - G(x, 0) = z \frac{\partial}{\partial z} G(x, \theta z),$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Так как функция $\frac{\partial}{\partial z} G(x, z)$ непрерывна, то при $x \to x_0$, $z \to 0$ $(z \neq 0)$ имеем $\frac{G(x, z)}{z} = \frac{\partial}{\partial z} G(x, \theta z) \to \frac{\partial}{\partial z} G(x_0, 0)$.

Таким образом, предложение В) доказано.

Поведение траекторий вблизи узла и фокуса

Изучение узла и фокуса значительно проще, чем изучение седла. При этом достаточно рассмотреть лишь случай устойчивости, так как неустойчивые узлы и фокусы получаются из устойчивых переменой направления течения времени. Основным приемом при исследовании узла и фокуса является введение полярных координат.

Теорема 23. *Пусть $O=(0,0)$ — устойчивый узел системы* (1) *с собственными значениями λ и μ, причем $\mu<\lambda<0$. В направлении собственного вектора с собственным значением λ проведем через O прямую P, а в направлении собственного вектора с собственным значением μ — прямую Q. Оказывается, что каждая траектория, начинающаяся достаточно близко к точке O, асимптотически приближается к O и имеет в точке O касательную. При этом только две траектории касаются прямой Q, подходя к точке O с противоположных сторон, остальные же все касаются прямой P. В случае неустойчивого узла* ($0<\lambda<\mu$) *поведение траекторий при $t\to-\infty$ аналогично.*

Доказательство будет проведено в предположении трехкратной дифференцируемости правых частей системы (1). В силу предложения Б) система (1) может быть записана в виде (5); обозначая переменные ξ и η вновь через x и y, получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x,y)=\lambda x+r(x,y), \\ \dot{y}=g(x,y)=\mu y+s(x,y). \end{cases} \tag{19}$$

При этом функции $r(x,y)$ и $s(x,y)$ трижды непрерывно дифференцируемы и в точке O обращаются в нуль вместе со своими первыми производными по x и y.

Введем теперь полярные координаты, т. е. положим:

$$x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi. \tag{20}$$

Дифференцируя соотношения (20) и подставляя их в систему (19), получаем:

$$\begin{cases} \dot{\rho}\cos\varphi-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi=\lambda\rho\cos\varphi+r(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi), \\ \dot{\rho}\sin\varphi+\rho\dot{\varphi}\cos\varphi=\mu\rho\sin\varphi+s(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi). \end{cases}$$

Разрешая полученные соотношения относительно $\dot{\rho}$ и $\dot{\varphi}$, получаем:

$$\begin{cases} \dot{\rho}=\rho(\lambda\cos^2\varphi+\mu\sin^2\varphi)+F(\rho,\ \varphi), \\ \rho\dot{\varphi}=(\mu-\lambda)\rho\sin\varphi\cos\varphi+G(\rho,\ \varphi), \end{cases} \tag{21}$$

где функции

$$F(\rho,\ \varphi)=\cos\varphi\cdot r(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)+\sin\varphi\cdot s(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi),$$

$$G(\rho,\ \varphi)=-\sin\varphi\cdot r(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)+\cos\varphi\cdot s(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)$$

периодичны по φ с периодом 2π, трижды непрерывно дифференцируемы по ρ и φ и при $\rho=0$ обращаются в нуль вместе со своими первыми частными производными по ρ:

$$F(0, \varphi)=G(0, \varphi)=\frac{\partial F(0, \varphi)}{\partial \rho}=\frac{\partial G(0, \varphi)}{\partial \rho}=0. \tag{22}$$

В силу приводимого ниже предложения Г) функция $G(\rho, \varphi)$ может быть записана в виде:

$$G(\rho, \varphi)=\rho H(\rho, \varphi),$$

где $H(\rho, \varphi)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по ρ и φ функция, обращающаяся в нуль при $\rho=0$ (и любом φ, см. (31) и (22)):

$$H(0, \varphi)=0, \tag{23}$$

так что

$$\frac{\partial H(0, \varphi)}{\partial \varphi}=0. \tag{24}$$

Деля второе из соотношений (21) на ρ, мы получаем систему

$$\left\{\begin{aligned} \dot{\rho}&=\rho(\lambda\cos^2\varphi+\mu\sin^2\varphi)+F(\rho, \varphi),\\ \dot{\varphi}&=(\mu-\lambda)\sin\varphi\cos\varphi+H(\rho, \varphi). \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Систему (25) будем рассматривать на фазовой плоскости переменных ρ и φ, откладывая φ по оси абсцисс, а ρ — по оси ординат. Системы (19) и (25) отнюдь не эквивалентны друг другу, так как преобразование (20) плоскости (x, y) в плоскость (ρ, φ) не взаимно однозначно; тем не менее из поведения траекторий системы (25) можно делать выводы о поведении траекторий системы (19). Поведение траекторий системы (25) мы будем рассматривать только в полосе $|\rho|<\varepsilon$.

Найдем прежде всего положения равновесия системы (25). Из первого уравнения (25) видно, что при достаточно малом $\rho\neq 0$ величина $\dot{\rho}$ отлична от нуля (см. (22)), и потому в полосе $|\rho|<\varepsilon$ все положения равновесия лежат на оси $\rho=0$. После этого из второго уравнения (25) находим все положения равновесия (см. (23))

$$\rho=0,\ \varphi=\frac{k\pi}{2};\qquad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Линеаризуя систему (25) в точке $\rho=0$, $\varphi=\frac{k\pi}{2}$, получаем (см. (22) и (24)):

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\dot{\rho}&=\mu_k\Delta\rho,\\ \Delta\dot{\varphi}&=(\mu-\lambda)\cdot(-1)^k\,\Delta\varphi+\alpha_k\Delta\rho, \end{aligned}\right.$$

где μ_k (равное λ при k четном и μ при k нечетном) есть отрицательное число. Таким образом, точка $\rho=0$, $\varphi=\frac{k\pi}{2}$ есть устойчивый узел системы (25) при четном k и седло при нечетном k (рис. 65). Неустойчивые усы седла при этом направлены по оси φ, а устойчивые — по кривым, приближающимся к седлу сверху и снизу (см. теорему 22).

Покажем теперь, что при достаточно малом положительном ε каждое решение системы (25), начинающееся в полосе $|\rho|<\varepsilon$, либо является устойчивым усом одного из седел системы (25), либо, не выходя из полосы $|\rho|<\varepsilon$, асимптотически приближается к одному из узлов системы (25).

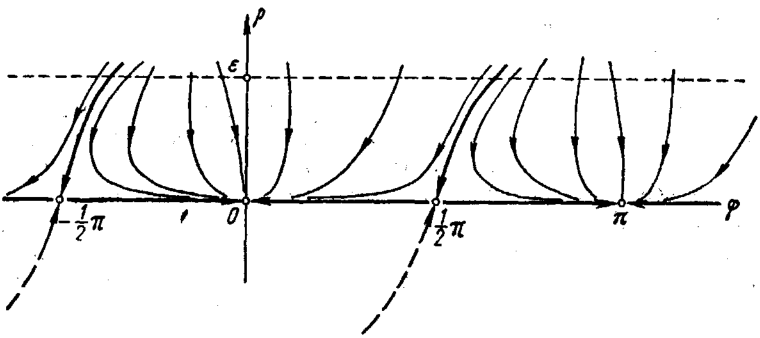


Рис. 65.

Каждому положению равновесия $\rho=0$, $\varphi=\frac{k\pi}{2}$ поставим в соответствие его окрестность U_k, определяемую неравенствами $|\rho|<\delta$, $\left|\varphi-\frac{k\pi}{2}\right|<\delta$, где δ — положительное число. Если k четно, то рассматриваемое положение равновесия является устойчивым узлом, и в силу его асимптотической устойчивости существует настолько малое положительное число δ, что каждое решение, начинающееся в окрестности U_k, асимптотически приближается к узлу. Если k нечетно, то соответствующее положение равновесия есть седло, и существует настолько малое положительное число δ, что отличное от положения равновесия решение, начинающееся в U_k, либо описывает устойчивый ус седла, либо покидает окрестность U_k (см. теорему 22). Так как правые части системы (25) периодичны по φ, то можно выбрать положительное δ, общее для всех окрестностей U_k. Теперь можно выбрать настолько малое положительное число $\varepsilon\leqslant\delta$, что в полосе $|\rho|<\varepsilon$ правая часть первого из уравнений (25) имеет знак, противоположный знаку ρ, так что на каждом решении, начинающемся в этой полосе, величина $|\rho|$ убывает. Далее, при фиксированном δ можно выбрать настолько малое положительное число ε, что в прямоугольнике

$$|\rho|<\varepsilon, \quad \frac{k\pi}{2}+\delta\leqslant\varphi\leqslant\frac{(k+1)\pi}{2}-\delta$$

правая часть второго из уравнений (25) сохраняет знак и по модулю превосходит некоторое положительное число α, так что решение, начинающееся в этом прямоугольнике, покидает его через время, не превосходящее числа $\frac{\pi}{2\alpha}$, и входит в ту из окрестностей U_k или U_{k+1}, которая соответствует устойчивому узлу. В силу периодичности системы (25) по φ число ε можно считать общим для всех прямоугольников рассматриваемого вида.

Мы видим теперь, что при выбранном ε каждое решение, начинающееся в полосе $|\rho|<\varepsilon$, либо пробегает устойчивый ус седла, либо асимптотически приближается к устойчивому узлу.

Каждому решению системы (25), начинающемуся в полосе $|\rho|<\varepsilon$, соответствует решение системы (19), начинающееся на расстоянии, меньшем чем ε, от устойчивого узла O этой системы. Для того чтобы получить все такие решения системы (19), достаточно рассматривать лишь решения системы (25), начинающиеся при $0\leqslant\rho<\varepsilon$. В силу периодичности системы (25) по φ и периодичности преобразования (20) существуют лишь два решения системы (19), соответствующие устойчивым усам седел системы (25), проходящим при $\rho>0$, и эти решения системы (19) асимптотически приближаются к положению равновесия O, касаясь прямой Q и подходя к O с противоположных сторон. Решениям системы (25), стремящимся к устойчивым узлам, соответствуют решения системы (19), стремящиеся к положению равновесия O и касающиеся при подходе к O прямой P.

Таким образом, теорема 23 доказана.

Теорема 24. *Допустим, что начало координат O системы* (1) *представляет собой фокус, т. е. собственные значения матрицы (a^i_j) являются комплексно сопряженными числами*

$$\lambda=\mu+i\nu, \quad \bar{\lambda}=\mu-i\nu,$$

причем $\mu\neq0$, $\nu\neq0$. Оказывается, что если $\mu<0$, то при $t\to\infty$ все траектории, проходящие вблизи точки O, наматываются на начало координат O как спирали; если же $\mu>0$, то при $t\to-\infty$ все траектории, проходящие вблизи точки O, наматываются на начало координат O, как спирали.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся каноническим видом (6), переименовав в нем переменные ξ и η в переменные x и y. Таким образом, нам следует изучить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x, y)=\mu x-\nu y+r(x, y), \\ \dot{y}=g(x, y)=\nu x+\mu y+s(x, y). \end{cases} \tag{26}$$

Введем полярные координаты, т. е. положим:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{27}$$

Дифференцируя соотношения (27) и подставляя полученные выражения в систему (26), получаем:

$$\dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi = \mu\rho\cos\varphi - \nu\rho\sin\varphi + r(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi),$$

$$\dot\rho\sin\varphi + \rho\dot\varphi\cos\varphi = \nu\rho\cos\varphi + \mu\rho\sin\varphi + s(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi).$$

Решая полученную систему уравнений относительно $\dot\rho$ и $\dot\varphi$, получаем

$$\begin{cases} \dot\rho = \mu\rho + \rho^2\cdot p(\rho,\ \varphi), \\ \dot\varphi = \nu + \rho\cdot q(\rho,\ \varphi), \end{cases} \tag{28}$$

где $p(\rho, \varphi)$ и $q(\rho, \varphi)$ — функции, ограниченные при малых ρ и периодические по φ с периодом 2π. Будем для определенности считать, что $\mu < 0$. Рассмотрим траекторию системы (28), начинающуюся в точке (ρ_0, φ_0), где $0 < \rho_0 < \varepsilon$, а ε — достаточно малое число. Из уравнений (28) следует, что траектория эта асимптотически приближается к оси $\rho = 0$, причем φ стремится либо к $+\infty$, либо — к $-\infty$ в зависимости от того, положительно число ν или отрицательно. Из этого следует, что соответствующая траектория в плоскости (x, y) навертывается, как спираль, на начало координат.

Таким образом, теорема 24 доказана. Нижеследующее предложение Г), являющееся существенным обобщением доказанного выше предложения В), используется только при доказательстве теоремы 23.

Г) Пусть $G(\rho, \varphi)$ — функция, определенная в области W, заданной неравенствами $|\rho| < \varepsilon$, $\beta_1 < \varphi < \beta_2$, удовлетворяющая условию

$$G(0,\ \varphi) = 0 \tag{29}$$

и обладающая тем свойством, что функция

$$\frac{\partial G(\rho,\ \varphi)}{\partial\rho}$$

существует и имеет непрерывные частные производные до порядка r включительно. Тогда функция $G(\rho, \varphi)$ в области W может быть записана в виде:

$$G(\rho,\ \varphi) = \rho H(\rho,\ \varphi), \tag{30}$$

где функция $H(\rho, \varphi)$ определяется равенствами

$$\left.\begin{aligned} H(\rho,\ \varphi) &= \frac{G(\rho,\ \varphi)}{\rho} \quad \text{при } \rho \neq 0, \\ H(0,\ \varphi) &= \frac{\partial G(0,\ \varphi)}{\partial\rho} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

и имеет в области W непрерывные частные производные до порядка r включительно. (При $r=0$ доказываемое предложение Г) превращается в предложение В).)

Для доказательства предложения Г) рассмотрим функцию

$$K(\rho, \varphi)=\frac{\partial G(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^{r-s}}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant r. \tag{32}$$

Эта функция обладает в области W непрерывными частными производными по ρ до порядка $s+1$ включительно и удовлетворяет условию

$$K(0, \varphi)=0 \tag{33}$$

(см. (29)). Докажем, что при $\rho \neq 0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right)=\sum_{l=0}^{k} \gamma_l \frac{\partial^{k+1} K(\theta_l \rho, \varphi)}{\partial \rho^{k+1}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant s, \tag{34}$$

где числа $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ при каждом фиксированном k не зависят от функции $G(\rho, \varphi)$ и удовлетворяют условию

$$\gamma_0+\gamma_1+\ldots+\gamma_k=\frac{1}{k+1}, \tag{35}$$

а числа $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant \theta_l \leqslant 1; \qquad l=0, 1, \ldots, k. \tag{36}$$

Вычисляя производную $\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right)$ по формуле Лейбница, получаем:

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{1}{\rho} \cdot K(\rho, \varphi)\right)=\frac{1}{\rho^{k+1}} \sum_{l=0}^{k} a_l \rho^l \frac{\partial^l K(\rho, \varphi)}{\partial \rho^l}, \tag{37}$$

где числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ при каждом фиксированном k не зависят от функции $G(\rho, \varphi)$. Разлагая каждую из функций $\frac{\partial^l K(\rho, \varphi)}{\partial \rho^l}$ $l=0, 1, \ldots, k$ в ряд Тэйлора по ρ, получаем:

$$\frac{\partial^l K(\rho, \varphi)}{\partial \rho^l}=\frac{\partial^l K(0, \varphi)}{\partial \rho^l}+\frac{\rho}{1!} \frac{\partial^{l+1} K(0, \varphi)}{\partial \rho^{l+1}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\rho^{k-l}}{(k-l)!} \cdot \frac{\partial^k K(0, \varphi)}{\partial \rho^k}+\frac{\rho^{k-l+1}}{(k-l+1)!} \cdot \frac{\partial^{k+1} K(\theta_l \rho, \varphi)}{\partial \rho^{k+1}}. \tag{38}$$

Далее, подставляя выражения (38) и (37), мы получаем в силу (33)

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho^{k+1}}\left[\sum_{i=1}^{k} b_i \rho^i \frac{\partial^i K(0, \varphi)}{\partial \rho^i}+\sum_{j=1}^{k} \gamma_j \rho^{k+1} \frac{\partial^{k+1} K(\theta_j \rho, \varphi)}{\partial \rho^{k+1}}\right], \tag{39}$$

где b_i и γ_j — константы, не зависящие (при каждом фиксированном k) от выбора функции $G(\rho, \varphi)$.

Для доказательства соотношения (34) достаточно теперь установить, что константы $b_1, \ldots, b_k$ равны нулю, а константы $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ удовлетворяют условию (35). Так как перечисленные константы не зависят от выбора функции $G(\rho, \varphi)$, то указанные их свойства достаточно установить для функций $G(\rho, \varphi)$ какого-либо специального вида. Рассмотрим случай, когда $G(\rho, \varphi)$ является многочленом:

$$G(\rho, \varphi) = \frac{\varphi^{r-s}}{(r-s)!} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\alpha_i}{i!} \rho^i. \tag{40}$$

В силу (32) находим:

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right) = \frac{\alpha_{k+1}}{k+1}. \tag{41}$$

С другой стороны, равенство (39) для многочлена (40) имеет вид:

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^{k+1}}\left[\sum_{i=1}^{k} b_i \rho^i \alpha_i + \alpha_{k+1}\rho^{k+1} \sum_{j=0}^{k} \gamma_j\right]. \tag{42}$$

Правые части равенств (41) и (42) должны совпадать при $|\rho| < \varepsilon$, $\rho \neq 0$, а так как числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ произвольны, то из этого вытекает равенство нулю чисел $b_1, \ldots, b_k$ и соотношение (35).

Таким образом, формула (34) доказана.

Введем в рассмотрение функцию $L_k(\rho, \varphi)$, $k = 0, 1, \ldots, s$, положив:

$$\begin{cases} L_k(\rho, \varphi) = \dfrac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\dfrac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right) & \text{при } \rho \neq 0, \\ L_k(0, \varphi) = \dfrac{1}{k+1} \dfrac{\partial^{k+1} K(0, \varphi)}{\partial \rho^{k+1}}. \end{cases} \tag{43}$$

Из равенств (34) и (35) следует, что $L_k(\rho, \varphi)$ есть непрерывная функция пары переменных ρ, φ во всей области W. Очевидно, что при $\rho \neq 0$ выполнены равенства

$$L_{k+1}(\rho, \varphi) = \frac{\partial L_k(\rho, \varphi)}{\partial \rho}, \qquad k = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{44}$$

Докажем, что эти равенства справедливы и при $\rho = 0$. Пусть $0 < \rho_0 < \varepsilon$, $0 < \rho < \varepsilon$; тогда мы имеем:

$$L_k(\rho, \varphi) = L_k(\rho_0, \varphi) + \int_{\rho_0}^{\rho} L_{k+1}(\xi, \varphi)\, d\xi. \tag{45}$$

Так как функции, стоящие в левой и правой частях этого равенства, непрерывны, то равенство это справедливо и при $\rho = 0$, так что мы имеем:

$$L_k(0, \varphi) = L_k(\rho_0, \varphi) + \int_{\rho_0}^{0} L_{k+1}(\xi, \varphi)\, d\xi. \tag{46}$$

Вычитая соотношение (46) из (45) и деля результат на ρ, находим:

$$\frac{L_k(\rho, \varphi) - L_k(0, \varphi)}{\rho} = \frac{\int_0^{\rho} L_{k+1}(\xi, \varphi)\, d\xi}{\rho} \qquad (\rho > 0).$$

Переходя к пределу при $\rho \to 0$, мы видим, что правая производная функции $L_k(\rho, \varphi)$ по ρ в точке $\rho = 0$ существует и равна $L_{k+1}(0, \varphi)$. Точно так же доказывается, что и левая производная равна $L_{k+1}(0, \varphi)$. Таким образом, равенство (44) справедливо во всей области W.

Из соотношений (43), (32) при $k = 0$, $s = r$ следуют равенства (30), (31), а из соотношений (44) и (32) следует, что функция $H(\rho, \varphi)$ обладает непрерывной производной

$$\frac{\partial^{r-s+k} H(\rho, \varphi)}{\partial \rho^k \partial \varphi^{r-s}}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant r,$$

а это и значит, что функция $H(\rho, \varphi)$ обладает всеми непрерывными частными производными до порядка r включительно.

Итак, предложение Г) доказано.

§ 31. Устойчивость периодических решений

В этом параграфе будет рассматриваться вопрос об устойчивости периодических решений автономных систем, а также систем с периодическими правыми частями.

Понятие устойчивости

В параграфе 26 уже было дано определение устойчивости по Ляпунову положения равновесия автономной системы. Здесь мы, прежде всего, дадим определение устойчивости по Ляпунову решения произвольной системы уравнений.

Пусть

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

— векторная запись произвольной нормальной системы уравнений порядка n, правые части которой вместе с их производными $\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}$ определены и непрерывны на некотором открытом множестве Γ пространства переменных t, x. Решение уравнения (1) с начальными значениями θ, ξ обозначим через $\varphi(t, \theta, \xi)$.

Определение. Решение $\varphi(t)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0 называется *устойчивым по Ляпунову*, если выполнены условия: 1) Существует такое положительное число ρ, что при $|x_1 - x_0| < \rho$ решение $\varphi(t, t_0, x_1)$ определено для всех значений $t \geqslant t_0$, в частности и само решение $\varphi(t)$ определено для всех $t \geqslant t_0$. 2) Для всякого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число $\delta \leqslant \rho$, что при $|x_1 - x_0| < \delta$ выполнено неравенство $|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t)| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$. Устойчивое по Ляпунову решение $\varphi(t)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0 называется *асимптотически устойчивым*, если найдется такое положительное число $\sigma \leqslant \rho$, что при $|x_1 - x_0| < \sigma$ имеем:

$$|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t)| \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

Приведенные здесь определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости инвариантны относительно случайного выбора начальных значений t_0, x_0 решения $\varphi(t)$. Это легко может быть выведено из предложения Д) § 23.

В частном случае, когда система (1) автономна, а решение $\varphi(t)$ есть положение равновесия, приведенные здесь определения устойчивости совпадают с данными в § 26.

Ниже будут рассмотрены системы (1), правые части которых зависят от t периодически с периодом τ:

$$f(t+\tau, x) = f(t, x), \tag{2}$$

а также системы (1), являющиеся автономными:

$$f(t, x) = f(x). \tag{3}$$

В том и другом случае будет исследоваться вопрос об устойчивости периодического решения $\varphi(t)$ периода τ:

$$\varphi(t+\tau) = \varphi(t), \tag{4}$$

которое в случае автономной системы будет предполагаться отличным от положения равновесия. В случае периодической системы (см. (2)) будут даны достаточные условия асимптотической устойчивости решения (4) периода τ. Автономная система является частным случаем периодической, и потому можно было бы ожидать, что эти условия применимы и для периодического решения автономной системы. Оказывается, однако, что для нее они невыполнимы (периодическое решение автономной системы не может быть асимптотически устойчивым), и потому для устойчивости по Ляпунову периодического решения автономной системы даются другие, более слабые условия.

А) Для того чтобы изучить поведение решений уравнения (1) вблизи решения $\varphi(t)$, введем новую неизвестную векторную функцию y, положив:

$$x = \varphi(t) + y. \tag{5}$$

В дальнейшем мы будем считать, что правые части системы (1) имеют на множестве Г вторые непрерывные производные по координатам вектора x. Произведя в системе (1) замену переменных (5), принимая во внимание, что $\varphi(t)$ есть решение уравнения (1), и разлагая правые части по y, получаем:

$$\dot{y}^i = \sum_j \frac{\partial f^i(t, \varphi(t))}{\partial x^j} y^j + r^i(t, y). \tag{6}$$

Линеаризуя эту систему, т. е. отбрасывая члены r^i второго порядка малости относительно y, получаем линейную систему:

$$\dot{y} = A(t) y, \tag{7}$$

где $A(t)$ — матрица с элементами

$$a_j^i(t) = \frac{\partial f^i(t, \varphi(t))}{\partial x^j}.$$

Будем считать теперь, что правая часть уравнения (1) — периодическая периода τ по t (см. (2)) и что решение $\varphi(t)$ — также периодическое периода τ. При этих предположениях линейная система (7) является периодической периода τ:

$$a_j^i(t+\tau) = a_j^i(t), \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

так что можно говорить о ее характеристических числах (см. § 19, Д)). Оказывается, что в случае, когда система (1) автономна (см. (3)), а ее периодическое решение $\varphi(t)$ отлично от положения равновесия, линейная система (7) обязательно имеет одно характеристическое число равным единице.

Докажем последнее утверждение. Пусть $\Psi(t)$ — матрица, удовлетворяющая матричному уравнению

$$\dot{\Psi} = A(t)\Psi$$

с начальным условием

$$\Psi(t_0) = E, \tag{8}$$

и пусть C — основная матрица решения $\Psi(t)$ (см. 19, А)), так что

$$\Psi(t+\tau) = \Psi(t) C. \tag{9}$$

Непосредственно проверяется, что всякое решение $\psi(t)$ векторного уравнения (7) записывается в виде:

$$\psi(t) = \Psi(t)\psi(t_0).$$

Из этого и из соотношений (8) и (9) следует

$$\psi(t_0+\tau) = C\psi(t_0). \tag{10}$$

Примем теперь во внимание, что система (1) автономна. Мы имеем (см. (3)):

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t));$$

дифференцируя это соотношение по t, получаем:

$$\ddot{\varphi}(t) = A(t)\dot{\varphi}(t).$$

Таким образом, векторная функция $\dot{\varphi}(t)$ удовлетворяет векторному уравнению (7). Но векторная функция $\dot{\varphi}(t)$ является периодической с периодом τ; таким образом, из (10) получаем:

$$\dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}(t_0 + \tau) = C\dot{\varphi}(t_0), \tag{11}$$

а так как $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$ (ибо $\varphi(t)$ не есть положение равновесия), то из этого следует, что матрица C имеет собственное значение, равное единице, и, следовательно, одно из характеристических чисел уравнения (7) равно единице.

Теоремы Ляпунова и Андронова — Витта

Теперь мы можем формулировать достаточные условия устойчивости периодического решения $\varphi(t)$ для случая, когда система (1) периодична, и для случая, когда она автономна.

Теорема 25. *Пусть уравнение* (1) *периодично по t с периодом* τ (см. (2)) *и $\varphi(t)$ — его периодическое решение также периода* τ (см. (4)). *Если все характеристические числа уравнения* (7) (см. § 19, Д)) *по модулю меньше единицы, то решение $\varphi(t)$ асимптотически устойчиво; более того, существует такое число $\sigma > 0$, что при $|x_1 - x_0| < \sigma$ имеет место оценка:*

$$|\varphi(t;\, t_0,\, x_1) - \varphi(t)| < re^{-\alpha(t - t_0)}|x_1 - x_0|, \qquad t \geqslant t_0, \tag{12}$$

где r и α — два положительных числа, не зависящих от x_1.

Теорема 26. *Пусть уравнение* (1) *автономно, и $\varphi(t)$ — его периодическое решение периода τ, отличное от положения равновесия. Если характеристическое число уравнения* (7), *равное единице, имеет кратность единица, а все остальные характеристические числа уравнения* (7) *по модулю меньше единицы, то решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 25 принадлежит Ляпунову. Теорема 26 принадлежит Андронову и Витту, которые получили ее как довольно простое следствие одной весьма тонкой теоремы Ляпунова. Здесь дается другое доказательство теоремы 26, опирающееся на метод Ляпунова.

Доказательствам теорем 25 и 26 предпошлем построения, нужные в обоих случаях.

В § 26 было дано определение производной некоторой функции в силу автономной системы уравнений. Дадим его здесь для случая неавтономной системы.

Б) Пусть

$$F(x) = F(x^1, \ldots, x^n)$$

— некоторая скалярная функция векторного переменного x. Производную $\dot{F}_{(1)}(t_0, x_0)$ этой функции в силу системы (1) в точке t_0, x_0 определим следующим образом. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0. Положим:

$$\dot{F}_{(1)}(t_0, x_0) = \frac{d}{dt} F(\varphi(t))\Big|_{t=t_0}.$$

Осуществляя указанное справа дифференцирование, получаем:

$$\dot{F}_{(1)}(t, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} f^i(t, x).$$

В случае, если система (1) автономна, производная $\dot{F}_{(1)}(t, x)$ функции $F(x)$ в силу системы (1) в точке t, x не зависит от t.

В) Пусть

$$\dot{z} = Bz + p(t, z) \tag{13}$$

— нормальная система дифференциальных уравнений в векторной записи, где $B = (b^i_j)$ — постоянная матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные действительные части, а $p(t, z)$ — остаточный член, определенный при $t \geqslant t_0$, $|z| < c$ $(c > 0)$ и допускающий оценку

$$|p(t, z)| \leqslant p|z|^2, \tag{14}$$

где p — положительное число. Оказывается, что решение $z = 0$ уравнения (13) асимптотически устойчиво; более того, для решения $z = \chi(t, z_1)$ с начальными значениями t_0, z_1, $|z_1| < c_1 < c$ имеет место оценка

$$|\chi(t, z_1)| \leqslant r|z_1|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0, \tag{15}$$

где r, α — положительные числа, не зависящие от z_1.

Предложение В) доказывается совершенно так же, как теорема Ляпунова (см. § 26). Проведем это доказательство без излишней детализации.

Пусть $W(z)$ — функция Ляпунова для линейной системы

$$\dot{z} = Bz \tag{16}$$

с постоянными коэффициентами (см. § 26, Д)), так что выполнено неравенство

$$\dot{W}_{(16)}(z) = \sum_{i, j} \frac{\partial W(z)}{\partial z^i} b^i_j z^j \leqslant -2\beta W(z) \qquad (\beta > 0).$$

Из этого неравенства в силу оценки (14) получаем при

$$W(z) \leqslant c_2$$

неравенство

$$\dot{W}_{(13)}(z) = \sum_{i,j} \frac{\partial W(z)}{\partial z^i} b^i_j z^j + \sum_i \frac{\partial W(z)}{\partial z^i} p^i(t, z) \leqslant -2\alpha W(z),$$

где $\alpha < \beta$ и c_2 — некоторые положительные числа. Положим:

$$w(t) = W(\chi(t, z_1)), \text{ где } W(z_1) < c_2.$$

Для функции $w(t)$, $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\dot{w}(t) \leqslant -2\alpha w(t), \tag{17}$$

если только для нее имеет место соотношение

$$w(t) \leqslant c_2.$$

Из (17) следует, что пока имеет место неравенство $w(t) \leqslant c_2$, функция $w(t)$ убывает, точнее не возрастает, а так как в начальный момент $t = t_0$ выполнено неравенство $w(t) < c_2$, то точка $\chi(t, z_1)$ не может покинуть замкнутого множества F, определяемого неравенством $W(z) \leqslant c_2$, и потому решение $\chi(t, z_1)$ определено для всех значений $t \geqslant t_0$ (ср. § 22, Б), В)) и для всех этих значений имеет место неравенство (17). Считая теперь, что $z_1 \neq 0$, мы можем произвести следующие выкладки, исходя из неравенства (17):

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \leqslant -2\alpha$$

или, интегрируя, получаем:

$$\ln w(t) - \ln w(t_0) \leqslant -2\alpha(t - t_0),$$

а из этого следует:

$$w(t) \leqslant w(t_0)\, e^{-2\alpha(t - t_0)},$$

или, что то же,

$$W(\chi(t, z_1)) \leqslant W(z_1)\, e^{-2\alpha(t - t_0)}.$$

Из этой оценки непосредственно вытекает оценка (15).

Таким образом, предложение В) доказано.

Доказательство теоремы 25

В силу теоремы 12 существует преобразование

$$y = T(t)\, z, \tag{18}$$

где матрица $T(t)$ действительна и имеет период 2τ, при котором уравнение (7) переходит в уравнение

$$\dot{z} = Bz$$

с постоянной действительной матрицей B. Решением уравнения $\dot{z}=Bz$ является матрица e^{tB} (см. § 19, В)), и потому матрица $e^{2\tau B}$ является основной для этого уравнения, а значит, и для уравнения (7). Таким образом, в силу предположений теоремы 25 все собственные значения матрицы $e^{2\tau B}$ по модулю меньше единицы. Но согласно теореме 29 собственные значения матрицы $e^{2\tau B}$ имеют вид $e^{2\tau\lambda}$, где λ пробегает все собственные значения матрицы B. Таким образом, $|e^{2\tau\lambda}|<1$, и потому все собственные значения матрицы B имеют отрицательные действительные части. Применяя преобразование переменных (18) к уравнению (6), мы приводим его к виду (13), и для его решения $z=\chi(t, z_1)$ получаем оценку (15). Из этой оценки в силу невырожденности матрицы $T(t)$ получается оценка (12).

Таким образом, теорема 25 доказана.

Доказательство теоремы 26

Исходя из предположения, что уравнение (7) имеет характеристическое число единица кратности один, а все остальные его характеристические числа по модулю меньше единицы, покажем, что существует такое преобразование:

$$y=T(t)z \tag{19}$$

с действительной матрицей $T(t)$ периода 2τ, переводящее уравнение (7) в уравнение

$$\dot{z}=Bz \tag{20}$$

с постоянной матрицей B, которая имеет вид:

$$B=\left(\begin{array}{c|c} B^* & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \tag{21}$$

где B^* — квадратная матрица порядка $n-1$, все собственные значения которой имеют отрицательные действительные части.

Пусть C — основная матрица некоторого решения матричного уравнения (см. (7))

$$\dot{Y}=A(t)Y. \tag{22}$$

Так как матрица C имеет собственное значение единицу кратности один, то в некотором базисе она имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} C^* & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \tag{23}$$

где C^* — действительная квадратная матрица порядка $n-1$, все собственные значения которой по модулю меньше единицы (см. § 34, Ж), З)).

Так как матрица C и матрица (23) получаются друг из друга трансформацией, то матрица (23) является основной для некоторого решения уравнения (22); мы будем считать, что C совпадает с матрицей (23). В силу предложения Г) § 35 существует действительная матрица B^*, удовлетворяющая условию:

$$e^{2\tau B^*} = C^{*2},$$

причем в силу теоремы 29 все собственные значения матрицы B^* имеют отрицательные действительные части. Очевидно, что матрица B (см. (21)) удовлетворяет условию:

$$e^{2\tau B} = C^2$$

(см. (23)). Таким образом (ср. доказательство теоремы 12), существует преобразование (19), переводящее уравнение (7) в уравнение (20).

Выясним теперь, каким условиям должна удовлетворять матрица $T(t)$, для того чтобы преобразование (19) переводило уравнение (7) в уравнение (20). Дифференцируя соотношение (19), получаем:

$$\dot{y} = \dot{T}(t)z + T(t)\dot{z} = \dot{T}(t)z + T(t)Bz.$$

Заменяя в этом соотношении z по формуле $z = T^{-1}(t)y$, получаем:

$$\dot{y} = (\dot{T}(t) + T(t)B)T^{-1}(t)y.$$

Так как это уравнение совпадает с уравнением (7), то мы имеем:

$$(\dot{T}(t) + T(t)B)T^{-1}(t) = A(t)$$

и, умножая это соотношение справа на матрицу $T(t)$, получаем:

$$\dot{T}(t) + T(t)B = A(t)T(t). \tag{24}$$

Это условие, налагаемое на матрицу $T(t)$, является необходимым и достаточным для того, чтобы преобразование (19) переводило уравнение (7) в уравнение (20). Расщепим соотношение (24) на два, представив матрицу $T(t)$ в виде:

$$T(t) = (T^*(t), \mathfrak{t}(t)),$$

где матрица $T^*(t)$ имеет n строк и $n-1$ столбцов, а матрица $\mathfrak{t}(t)$ представляет собой последний столбец матрицы $T(t)$ и потому является отличным от нуля вектором. Мы имеем (см. (21)):

$$\dot{T}^*(t) + T^*(t)B^* = A(t)T^*(t), \tag{25}$$

$$\dot{\mathfrak{t}}(t) = A(t)\mathfrak{t}(t). \tag{26}$$

Из последнего соотношения видно, что $\mathfrak{t}(t)$ есть периодическое решение периода 2τ уравнения (7) и потому для него выполнено условие (ср. (10)):

$$\boldsymbol{t}(t_0)=\boldsymbol{t}(t_0+2\tau)=C^2\boldsymbol{t}(t_0).$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{t}(t_0)$ есть собственный вектор матрицы C^2 с собственным значением единица. Так как матрица

$$C^2=\left(\begin{array}{c|c} C^{*2} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

имеет единицу собственным значением кратности один, и уже известен один вектор $\dot{\varphi}(t_0)\neq 0$ с этим собственным значением у матрицы C^2 (см. (11)), то мы имеем:

$$\boldsymbol{t}(t_0)=\gamma\dot{\varphi}(t_0)$$

и потому

$$\boldsymbol{t}(t)=\gamma\dot{\varphi}(t)$$

(ибо обе векторные функции $\boldsymbol{t}(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ являются решениями уравнения (7)). Из этого видно, что если в матрице $T(t)$ заменить ее последний столбец $\boldsymbol{t}(t)$ вектором $\dot{\varphi}(t)$, то вновь полученная матрица $(T^*(t),\ \dot{\varphi}(t))$ будет удовлетворять условиям (25) и (26). Поэтому мы будем считать, что

$$T(t)=(T^*(t),\ \dot{\varphi}(t)). \tag{27}$$

Исходя из полученных соотношений (25), (27), преобразуем неизвестную функцию x уравнения (1) в автономном случае (см. (3)) в новые неизвестные функции z^*, s, где $z^*=(z^1, \ldots, z^{n-1})$ есть вектор размерности $n-1$, который в дальнейшем мы будем рассматривать как матрицу с одним столбцом, а s — новое скалярное переменное. Для этого положим:

$$x=T^*(s)\,z^*+\varphi(s)=g(z^*,\ s). \tag{28}$$

Это преобразование периодично по s с периодом 2τ. Каждой паре z^*, s при достаточно малом $|z^*|$ соотношение (28) ставит в соответствие точку x, близкую к точке $\varphi(s)$ периодической траектории K, определяемой решением $x=\varphi(t)$. Вблизи каждой пары $z^*=0$, $s=s_0$ отображение (28) взаимно однозначно, так как функциональный определитель этого отображения в точке $z^*=0$, $s=s_0$ равен детерминанту матрицы $T(s_0)$ (см. (27)) и потому отличен от нуля. Координату s пары (z^*, s) будем считать циклической координатой периода 2τ, т. е. будем отождествлять пары (z^*, s) и $(z^*, s+2\tau)$. Так как пары $(0, s_0)$ и $(0, s_0+\tau)$ преобразованием (28) переводятся в одну и ту же точку $\varphi(s_0)$ траектории K, то некоторые окрестности пар $(0, s_0)$ и $(0, s_0+\tau)$ отображаются взаимно однозначно на одну и ту же окрестность точки $\varphi(s_0)$ линии K. Таким образом, отображение (28) двуслойно накладывает множество всех пар (z^*, s) (при достаточно малых $|z^*|$) на некоторую окрестность линии K. При этом замкнутая кривая, состоящая из всех пар $(0, s)$, $0 \leqslant s \leqslant 2\tau$, дважды накладывается на линию K.

Заменим теперь в уравнении (1) (см. (3)) неизвестный вектор $\boldsymbol{x}$ по формуле (28). Подстановка в левую часть дает:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = T^{*\prime}(s)\,\boldsymbol{z}^*\dot{s} + T^*(s)\,\dot{\boldsymbol{z}}^* + \boldsymbol{\varphi}'(s)\,\dot{s}. \tag{29}$$

Подстановка в правую часть дает:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) + A(s)\,T^*(s)\,\boldsymbol{z}^* + R(s, \boldsymbol{z}^*), \tag{30}$$

где остаточный член $R(s, \boldsymbol{z}^*)$ периодичен по s с периодом 2τ и имеет второй порядок малости относительно вектора $\boldsymbol{z}^*$. Приравнивая правые части соотношений (29) и (30), получаем:

$$T^*(s)\,\dot{\boldsymbol{z}}^* + \boldsymbol{\varphi}'(s)\,\dot{s} + T^{*\prime}(s)\,\boldsymbol{z}^*\dot{s} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) + A(s)\,T^*(s)\,\boldsymbol{z}^* + R(s, \boldsymbol{z}^*).$$

Заменяя матрицу $A(s)\,T^*(s)$ по формуле (25) и заменяя $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s))$ через $\boldsymbol{\varphi}'(s)$, получаем:

$$T^*(s)\,\dot{\boldsymbol{z}}^* + \boldsymbol{\varphi}'(s)\,\dot{s} + T^{*\prime}(s)\,\boldsymbol{z}^*\dot{s} =$$
$$= \boldsymbol{\varphi}'(s) + (T^{*\prime}(s) + T^*(s)\,B^*)\,\boldsymbol{z}^* + R(s, \boldsymbol{z}^*),$$

откуда

$$T^*(s)\,(\dot{\boldsymbol{z}}^* - B^*\boldsymbol{z}^*) + (\boldsymbol{\varphi}'(s) + T^{*\prime}(s)\,\boldsymbol{z}^*)\,(\dot{s} - 1) = R(s, \boldsymbol{z}^*). \tag{31}$$

Введем теперь в рассмотрение новые вспомогательные переменные: вектор $\boldsymbol{u}^* = (u^1, \ldots, u^{n-1})$ и скаляр u^n. В n-мерном пространстве переменных $(\boldsymbol{u}^*, u^n) = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$ рассмотрим линейное преобразование M, зависящее от параметров s и $\boldsymbol{z}^*$, положив:

$$M(\boldsymbol{u}^*, u^n) = T^*(s)\,\boldsymbol{u}^* + (\boldsymbol{\varphi}'(s) + T^{*\prime}(s)\,\boldsymbol{z}^*)\,u^n.$$

При $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}$ преобразование M превращается в $T(s)$, и потому при $\boldsymbol{z}^*$, близком к нулю, преобразование M невырожденно. Таким образом, уравнение

$$M(\boldsymbol{u}^*, u^n) = R(s, \boldsymbol{z}^*)$$

однозначно разрешимо (при $\boldsymbol{z}^*$, близком к нулю) относительно неизвестных $\boldsymbol{u}^*$, u^n, и его решение

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{q}^*(s, \boldsymbol{z}^*),$$
$$u^n = q(s, \boldsymbol{z}^*)$$

периодично по s с периодом 2τ и имеет второй порядок малости относительно вектора $\boldsymbol{z}^*$. Так как соотношение (31) можно переписать в виде:

$$M(\dot{\boldsymbol{z}}^* - B^*\boldsymbol{z}^*, \dot{s} - 1) = R(s, \boldsymbol{z}^*),$$

то мы получаем:

$$\dot{\boldsymbol{z}}^* - B^*\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{q}^*(s, \boldsymbol{z}^*), \quad \dot{s} - 1 = q(s, \boldsymbol{z}^*).$$

Итак, в пространстве переменных z^*, s уравнение (1) записывается в виде

$$\dot{z}^* = B^* z^* + q^*(s, z^*), \qquad (32)$$

$$\dot{s} = 1 + q(s, z^*). \qquad (33)$$

Существует теперь такое положительное число ε, что при $|z^*| < \varepsilon$ остаточный член $q(s, z^*)$ удовлетворяет неравенству $|q(s, z^*)| < 1$. При выполнении этого неравенства на каждом решении $z^* = z^*(t)$, $s = s(t)$ за независимое переменное можно вместо t принять s, и уравнения (32), (33) перепишутся тогда в виде:

$$\frac{dz^*}{ds} = \frac{B^* z^* + q^*(s, z^*)}{1 + q(s, z^*)},$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{1 + q(s, z^*)},$$

или иначе:

$$\frac{dz^*}{ds} = B^* z^* + k^*(s, z^*), \qquad (34)$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 + k(s, z^*), \qquad (35)$$

где остаточные члены $k^*(s, z^*)$ и $k(s, z^*)$ периодичны по s с периодом 2τ и имеют второй порядок малости относительно вектора z^*.

В системе (34), (35) независимым переменным является s, а z^* и t рассматриваются как неизвестные функции от s. Уравнение (34) не содержит неизвестной функции t, и его можно решать отдельно. Таким образом, для того чтобы найти решение системы (32), (33) с начальными значениями t_0, z_1^*, s_1, следует сначала найти решение $z^*(s, z_1^*, s_1)$ уравнения (34) с начальными значениями z_1^*, s_1, которое в силу предложения В) при достаточно малом $|z_1^*|$ определено для всех значений $s \geqslant s_1$ и имеет оценку

$$|z^*(s, z_1^*, s_1)| \leqslant r |z_1^*| e^{-\alpha s}. \qquad (36)$$

После этого следует найти решение уравнения (35) с начальными значениями t_0, z_1^*, s_1; это решение дается очевидной формулой:

$$t = t_0 + \int_{s_1}^{s} (1 + k(s, z^*(s, z_1^*, s_1)))\, ds =$$

$$= t_0 - s_1 + s + \int_{s_1}^{s} k(s, z^*(s, z_1^*, s_1))\, ds. \qquad (37)$$

Последнее уравнение можно разрешить относительно s, если только $|z^*|$ достаточно мало, так что мы получаем:

$$s = s(t, z_1^*, s_1). \qquad (38)$$

Подставляя это выражение для s в решение $z^*(s, z_1^*, s_1)$ уравнения (34), получаем:

$$z^*(t) = z^*(s(t, z_1^*, s_1), z_1^*, s_1). \tag{39}$$

Формулы (38) и (39) вместе дают решение системы (32), (33) с начальными значениями t_0, z_1^*, s_1. Из (37) следует, что при $t \geqslant t_0$ мы имеем:

$$|s(t, z_1^*, s_1) - t| \leqslant |s_1 - t_0| + l|z_1^*|^2, \tag{40}$$

где l — некоторая положительная константа. В частном случае, когда $z_1^* = 0$, $s_1 = t_0$, решение (38), (39) имеет вид:

$$z^*(t) = 0, \qquad s(t) = t.$$

Из оценок (36) и (40) следует, что это решение системы (32), (33) устойчиво по Ляпунову.

Подставляя решение (38), (39) в формулу преобразования (28), мы получим решение $x = \varphi(t, x_1)$ уравнения (1) с начальными значениями $t = t_0$, $x = x_1 = g(z_1^*, s_1)$. Так как отображение (28) взаимно однозначно на некоторой окрестности пары $z^* = 0$, $s = t_0$, то любое решение $\varphi(t, x_1)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_1 при достаточно малом $|x_1 - x_0|$ может быть получено таким способом из некоторого решения (38), (39) системы (32), (33). При этом решение $x = \varphi(t)$ получается из решения $z^* = 0$, $s \equiv t$. Теперь из устойчивости по Ляпунову решения $z^* = 0$, $s \equiv t$ вытекает (в силу равномерной непрерывности отображения (28)) устойчивость по Ляпунову исходного периодического решения $x = \varphi(t)$.

Таким образом, теорема 26 доказана.

Применим полученные здесь результаты к случаю предельного цикла.

Г) Будем считать, что автономная система (1) (см. (3)) имеет второй порядок:

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, x^2) = f^i(x), \qquad i = 1, 2,$$

и пусть

$$x = \varphi(t)$$

— ее периодическое решение с периодом τ. Система (7) имеет здесь вид:

$$\dot{y}^i = \frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^1} y^1 + \frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^2} y^2, \qquad i = 1, 2.$$

В силу предложения А) одно характеристическое число этой системы равно единице; второе обозначим через λ. Оказывается, что

$$\lambda = e^{\int\limits_0^\tau \left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1} + \frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right) dt}. \tag{41}$$

Таким образом, если

$$\int_0^\tau \left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1} + \frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right) dt < 0,$$

то периодическое решение $x = \varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову. В действительности (см. пример) существует функция последования $\chi(u)$ периодического решения $x = \varphi(t)$ (см. § 28), для которой

$$\chi'(u_0) = \lambda, \tag{42}$$

так что при $\lambda \neq 1$ периодическое решение $x = \varphi(t)$ является грубым предельным циклом. Он устойчив при $\lambda < 1$ и неустойчив при $\lambda > 1$..

Докажем неравенство (41). Основная матрица C решения $Y = \Psi(t)$ уравнения $\dot{Y} = A(t)Y$ с начальным значением $\Psi(0) = E$ (см. Λ)) задается равенством

$$C = \Psi(\tau).$$

В силу формулы Лиувилля мы имеем:

$$\operatorname{Det} \Psi(\tau) = \operatorname{Det} \Psi(0) \cdot e^{\int_0^\tau S(t)\,dt},$$

где

$$S(t) = a_1^1(t) + a_2^2(t) = \frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1} + \frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}$$

(см. § 17, Ж)). В нашем случае, когда матрица C имеет второй порядок и одно ее собственное значение равно единице, а другое равно λ, имеем:

$$\lambda = \operatorname{Det} C = e^{\int_0^\tau \left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1} + \frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right) dt}$$

Пример

Пусть $\varphi(t)$ — периодическое решение автономной системы (1) (см. (3)) периода τ с начальными значениями t_0, x_0. Решение этой системы с начальными значениями t_0, ξ будем обозначать через $\varphi(t, \xi)$. Построим для решения $\varphi(t)$ аналог функции последования (см. § 28), который будет здесь отображением $(n-1)$-мерного пространства переменных $u^1, \ldots, u^{n-1}$ в себя.

Пусть

$$x = g(u); \qquad u = (u^1, \ldots, u^{n-1}) \tag{43}$$

— уравнение поверхности, пересекающей траекторию $\varphi(t)$ в единственной точке

$$x_0 = \varphi(t_0, x_0) = g(u_0) \tag{44}$$

и не касающейся в этой точке траектории $\varphi(t)$, так что векторы

$$\dot{\varphi}(t_0), \quad \frac{\partial g(u_0)}{\partial u^1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial g(u_0)}{\partial u^{n-1}} \tag{45}$$

линейно независимы. Найдем пересечение траектории $\varphi(t, g(u))$ с поверхностью (43) при t, близком к $t_0 + \tau$, считая, что $|u - u_0|$ мало. Пусть $g(v)$ — точка пересечения; тогда справедливо соотношение:

$$\varphi(t, g(u)) - g(v) = 0. \tag{46}$$

При $u = u_0$ мы имеем очевидное решение уравнения (16):

$$t = t_0 + \tau; \qquad v = u_0$$

(см. (4) и (44)). Здесь мы считаем u независимым переменным, а t, v — неизвестными величинами. Так как функциональный определитель системы (46) при $t = t_0 + \tau$, $u = u_0$, $v = u_0$ по неизвестным функциям t и v не равен нулю в силу линейной независимости векторов (45), то при малом $|u - u_0|$ существует решение

$$t = t(u), \qquad v = \chi(u)$$

системы (46) с малыми $|t(u) - (t_0 + \tau)|$ и $|\chi(u) - u_0|$. Отображение $\chi(u)$ пространства переменных $u^1, \ldots, u^{n-1}$ в себя (определенное при малом $|u - u_0|$) будем называть *отображением последования.* Каждому решению $u = u_1$ уравнения

$$\chi(u) - u = 0 \tag{47}$$

соответствует периодическое решение $\varphi(t, g(u_1))$ автономного уравнения (1) (см. (3)) с периодом, близким к τ; в частности, решению $u = u_0$ соответствует исходное периодическое решение $\varphi(t) = \varphi(t, g(u_0))$. Если функциональная матрица

$$M = \left(\frac{\partial \chi^i(u_0)}{\partial u^j}\right) \qquad (i, j = 1, \ldots, n-1)$$

не имеет собственных значений, равных единице, то решение $u = u_0$ уравнения (47) является изолированным. В самом деле, функциональная матрица уравнения (47) при $u = u_0$ равна

$$M - E^*.$$

Для того чтобы детерминант этой матрицы не обращался в нуль, необходимо и достаточно, чтобы матрица M не имела собственного значения, равного единице.

Выясним теперь вопрос о том, всякая ли периодическая траектория K_1, проходящая вблизи траектории K, описываемой решением $\varphi(t)$, описывается решением $\varphi(t, g(u_1))$, где u_1 есть некоторое решение уравнения (47). Именно так обстояло дело в плоском случае ($n = 2$). Оказывается, что при $n \geqslant 3$ дело обстоит уже не так. Разберем этот вопрос. Будем считать, что τ есть минимальный период решения $\varphi(t)$, т. е. что равенство

$$\varphi(t_0+t)=\varphi(t_0)$$

может иметь место лишь при условии, что $t=k\tau$, где k — целое число (см. § 15, В)). Если траектория K_1 близка к траектории K, то она пересекается с поверхностью (43) в некоторой точке $g(u_1)$, причем $|u_1-u_0|$ близко к нулю. Положим:

$$u_2=\chi(u_1), \qquad u_3=\chi(u_2), \ \ldots, \qquad u_{i+1}=\chi(u_i), \ \ldots$$

Так как траектория K_1 — замкнутая, то в этой последовательности найдется точка, совпадающая с точкой u_1; пусть u_{k+1} будет первая из них. Тогда траектория K_1 описывается решением $\varphi(t, g(u_1))$, причем минимальный ее период близок к числу $k\tau$; решение $\varphi(t, g(u_1))$ замыкается только после того, как оно k раз обойдет вдоль траектории $\varphi(t)$. В плоском случае возможен лишь случай $k=1$. Будем называть число k *кратностью* траектории K_1. Для отыскания двукратных траекторий нужно решать не уравнение (47), а уравнение

$$\chi(\chi(u))-u=0;$$

для отыскания трехкратных траекторий нужно решать уравнение:

$$\chi[\chi(\chi(u))]-u=0$$

и т. д. Функции $\chi(\chi(u))$, $\chi[\chi(\chi(u))]$, ... называются *итерациями* функции $\chi(u)$; k-кратную итерацию обозначим через $\chi^k(u)$. Таким образом, для нахождения всех k-кратных периодических решений, близких к решению $\varphi(t)$, следует решать уравнение

$$\chi^k(u)-u=0, \tag{48}$$

но из всех решений уравнения (48) следует брать лишь те, которые не являются решениями уравнений предшествующих кратностей; решение $u=u_0$ уравнения (47) является решением и всякого уравнения (48). Функциональная матрица уравнения (48) при $u=u_0$ равна, очевидно, M^k-E^*; таким образом, для того чтобы уравнение (48) имело лишь одно решение $u=u_0$, близкое к u_0, достаточно, чтобы детерминант матрицы M^k-E^* был отличен от нуля, или, что то же, чтобы матрица M^k не имела собственных значений, равных единице, или, наконец, чтобы матрица M не имела собственных значений, равных $\sqrt[k]{1}$. Таким образом, для того чтобы вблизи траектории K не было периодических траекторий данной кратности k, достаточно, чтобы матрица M не имела собственных значений, равных $\sqrt[k]{1}$. В частности, таких собственных значений у матрицы M нет, если все ее собственные значения по модулю меньше единицы.

Из сказанного видно, какую важную роль играет матрица M в изучении траекторий автономного уравнения (1) (см. (3)), близких к периодическому решению $\varphi(t)$. Покажем теперь, что если уравнение (7) имеет характеристическое число единица кратности единица, то при некотором выборе поверхности (43) матрица M совпадает с матрицей C^* (см. (23)). Положим:

$$\psi^i_j(t)=\left.\frac{\partial\varphi^i(t,\xi)}{\partial\xi^j}\right|_{\xi=x_0}; \qquad \Psi(t)=(\psi^i_j(t)).$$

В силу предложения В) § 24, мы имеем:

$$\dot{\Psi}(t)=A(t)\Psi(t), \tag{49}$$

причем выполнено начальное условие:

$$\Psi(t_0)=E.$$

Таким образом, матрица $\Psi(t)$ представляет собой решение матричного уравнения (49), являющегося матричной записью уравнения (7), и потому

$$\Psi(t_0+\tau)=C.$$

Так как матрица C имеет собственное значение единица кратности единица, то в пространстве векторов y (см. А)) можно выбрать такой базис, что матрица C запишется в виде (23). Выберем теперь за координаты в фазовом пространстве уравнения (1) (см. (3)) компоненты вектора y, положив:

$$x=\varphi(t_0)+y$$

(ср. (5)). Полученные таким образом в фазовом пространстве координаты вновь обозначим через $x^1, \ldots, x^n$ и поверхность (43) зададим уравнениями:

$$x^1=u^1, \ \ldots, \qquad x^{n-1}=u^{n-1}, \qquad x^n=0.$$

Дифференцируя соотношение (46) по $u^1, \ldots, u^{n-1}$ при $u=0$, $t=t_0+\tau$, $v=0$ в предположении, что $t=t(u)$ и $v=\chi(u)$ — функции переменных $u^1, \ldots, u^{n-1}$, получим равенство

$$C^*=M. \tag{50}$$

В случае, когда $n=2$, матрица C^* есть скаляр λ, и соотношение (50) дает равенство (42).

Если все собственные значения матрицы C^* по модулю меньше единицы, то вблизи траектории K нет периодических решений никакой кратности. Это следует из оценки (36).

ДОБАВЛЕНИЕ I

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА

Это добавление содержит два параграфа, посвященных двум совершенно различным вопросам анализа.

В § 32 приведены основные факты, относящиеся к понятию непрерывности в пространстве многих переменных; важное место в этом параграфе занимает понятие открытого множества. Я придаю существенное значение тому, что правые части дифференциальных уравнений считаются заданными на открытых множествах. Точно так же я считаю существенным, что решение, зависящее от параметров, оказывается естественным образом определенным на открытом множестве (см. теорему 13). В связи с этим четкое понимание того, что представляет собой открытое множество, совершенно необходимо для понимания теорем существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

В § 33 приведено доказательство теорем существования неявных функций и некоторые их применения.

Вопросы, затронутые в этих двух параграфах, не всегда с достаточной точностью и полнотой освещаются в курсе анализа, и потому я позволил себе включить их в эту книгу.

§ 32. Топологические свойства евклидовых пространств

В анализе важную роль играет геометрическое изображение или, как говорят, геометрическая интерпретация аналитических соотношений, т. е. формул. Геометрическая интерпретация дает возможность установить связь между формулами и геометрическими образами и тем самым на помощь анализу привлекает геометрическую интуицию. Образец такой связи между формулами и геометрическими образами дает аналитическая геометрия. В прямом смысле слова геометрические образы могут рассматриваться на плоскости и в трехмерном пространстве, но анализ, имеющий дело с многими переменными, пользуется геометрическим языком и в многомерных пространствах. Здесь мы будем рассматривать многомерные евклидовы пространства, представляя их себе одновременно как векторные. Важнейшими геометрическими свойствами геометрических образов являются топологические свойства; на простейших из них мы здесь и остановимся.

Евклидовы пространства

Напомним прежде всего понятие n-мерного евклидова векторного пространства.

А) Будем называть *n-мерным вектором* последовательность из n действительных чисел; числа эти называются *координатами* вектора. Их мы, как правило, будем обозначать одной и той же буквой с номерами в виде индексов наверху, например через $x^1, x^2, \ldots, x^n$; сам вектор будем обозначать той же буквой, только жирной, в данном случае — буквой $\mathbf{x}$. Формулой это запишем в виде:

$$\mathbf{x}=(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Совокупность всех n-мерных векторов будем называть *n-мерным векторным пространством* и обозначать одной большой буквой, например через R. *Сумма* и *разность* двух векторов

$$\mathbf{x}=(x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad \mathbf{y}=(y^1, y^2, \ldots, y^n)$$

определяются формулами:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x^1+y^1, \ldots, x^n+y^n); \qquad \mathbf{x}-\mathbf{y}=(x^1-y^1, \ldots, x^n-y^n).$$

Произведение вектора $\mathbf{x}$ на действительное число α определяется формулой

$$\alpha\mathbf{x}=(\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n).$$

Особую роль в векторном пространстве играет нулевой вектор $\mathbf{0}$, все координаты которого равны нулю. Таким образом, в векторном пространстве определены алгебраические операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число. В евклидовом векторном пространстве определена, кроме того, операция скалярного произведения двух векторов. Именно, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — два произвольных вектора, то в соответствие им ставится число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, называемое их *скалярным произведением* и определяемое формулой

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})=x^1y^1+\ldots+x^ny^n.$$

Если вектор $\mathbf{y}$ совпадает с вектором $\mathbf{x}$, то мы получаем *скалярный квадрат* $(\mathbf{x}, \mathbf{x})=\mathbf{x}^2$ этого вектора, который всегда неотрицателен и обращается в нуль только при $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. *Длина*, или *модуль*, вектора $\mathbf{x}$ определяется формулой

$$|\mathbf{x}|=+\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

В дальнейшем мы часто будем векторы называть также *точками* евклидова пространства R. За расстояние между двумя точками x и y принимается модуль разности векторов x и y, т. е. число $|x-y|$.

Установим теперь некоторые основные неравенства для скалярного произведения и расстояния в евклидовом пространстве.

Б) Для любых двух векторов x и y евклидова векторного пространства имеют место неравенства:

$$(x, y)^2 \leqslant x^2 y^2, \tag{1}$$

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \tag{2}$$

Далее, для любых трех точек a, b, c евклидова пространства имеет место неравенство

$$|a-c| \leqslant |a-b| + |b-c|. \tag{3}$$

Для доказательства первого неравенства рассмотрим вектор $\alpha x + y$, где α — произвольное действительное число, и составим скалярный квадрат этого вектора. Мы имеем:

$$(\alpha x + y)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha (x, y) + y^2.$$

Так как скалярный квадрат вектора не может быть отрицательным, то величина, стоящая в правой части последнего равенства, ни при каком значении α не может принимать отрицательного значения, и потому квадратное уравнение

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha (x, y) + y^2 = 0$$

относительно неизвестной величины α не может иметь двух различных действительных корней. Отсюда следует, что дискриминант этого квадратного уравнения, т. е. получаемое при его решении подкоренное выражение $(x, y)^2 - x^2 y^2$, неположителен, а это и значит, что выполнено неравенство (1).

Для доказательства неравенства (2) возведем в квадрат его левую часть; мы будем иметь:

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2(x, y) + y^2,$$

а это, в силу неравенства (1), дает:

$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Из этого непосредственно следует неравенство (2) (так как оба числа $|x|$, $|y|$ неотрицательны).

Наконец, для доказательства неравенства (3) достаточно в неравенстве (2) положить $x = a - b$, $y = b - c$.

Итак, предложение Б) доказано.

Открытые, замкнутые и ограниченные подмножества евклидова пространства

Напомним определения операций объединения и пересечения множеств — в данном случае множеств, расположенных в евклидовом пространстве R. Пусть

$$M_1, M_2, \ldots, M_k \tag{4}$$

— произвольная конечная система множеств пространства R. Определим множество S, считая, что точка x из R тогда и только тогда принадлежит S, когда она принадлежит хотя бы одному из множеств (4). Множество S называется *объединением* множеств (4). Определим, далее, множество P, считая, что точка x из R тогда и только тогда принадлежит множеству P, когда она принадлежит каждому из множеств (4). Множество P называется *пересечением* множеств (4).

Пусть M — произвольное множество из R. Определим множество D, считая, что точка x из R тогда и только тогда принадлежит множеству D, когда она не принадлежит множеству M. Множество D называется *дополнением* множества M. Очевидно, что дополнение множества D совпадает с M.

Пусть

$$D_1, D_2, \ldots, D_k \tag{5}$$

— система множеств, дополнительных к множествам (4), так что D_i является дополнением множества M_i. Легко усмотреть, что *дополнение к объединению множеств* (4) *является пересечением множеств* (5) и, наоборот, *дополнение к пересечению множеств* (4) *является объединением множеств* (5).

Перейдем теперь к установлению некоторых простейших топологических свойств множеств, расположенных в евклидовом пространстве. Эти свойства, в основном, связаны с определением понятий открытого и замкнутого множеств в евклидовом пространстве R.

В) Пусть a — произвольная точка евклидова пространства R и r — произвольное положительное число. Множество всех точек из R, расстояние которых до точки a меньше r, называется *шаром* радиуса r с центром в a. Всякий шар с центром в a называется *окрестностью* точки a (ниже — см. пример 3 — понятие окрестности будет расширено). Множество G точек пространства R называется *открытым*, если для всякой точки a из G существует ее окрестность, целиком содержащаяся в множестве G. Пусть M — произвольное множество из R. Точка a из R называется *предельной* для множества M, если каждая окрестность точки a содержит точку множества M, отличную от a. В этом случае каждая окрестность точки a обязательно содержит бесконечное множество точек из M. Множество F точек из R называется *замкнутым*, если каждая его предельная точка принадлежит ему. Оказывается, что дополнение к любому открытому множеству замкнуто, а дополнение к любому замкнутому множеству открыто.

Докажем предложение В). Покажем прежде всего, что если каждая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от a, то она содержит бесконечное множество точек множества M. Пусть U_1 — произвольная окрестность точки a и r_1 — ее радиус. Пусть далее x_1 — отличная от a точка множества M, содержащаяся в U_1. Так как $x_1 \neq a$, то $|x_1 - a| = r_2 > 0$. Шар U_2 радиуса r_2 с центром в точке a не содержит точки x_1, но он содержит некоторую точку x_2 множества M, отличную от a. Продолжая этот процесс дальше, мы получим бесконечную последовательность $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ попарно различных точек множества M, содержащихся в U_1.

Докажем последнее утверждение предложения В). Пусть G — некоторое множество из R и F — его дополнение. Допустим что G — открытое множество, и докажем, что F — замкнутое. Пусть a — предельная точка множества F; покажем, что она принадлежит множеству F, т. е. не принадлежит множеству G. Допустим противоположное, т. е. что точка a принадлежит G. Тогда, в силу предположенной открытости множества G, существует окрестность точки a, целиком содержащаяся в G и, следовательно, не содержащая точек из F, а это значит, что точка a не является предельной для F.

Допустим теперь, что множество F замкнуто, и докажем, что множество G открыто. Пусть a — произвольная точка из G. Так как она не принадлежит множеству F, то в силу замкнутости она не является его предельной точкой и потому существует окрестность точки a, не содержащая отличных от a точек из F; но a также не принадлежит F, и потому вся эта окрестность содержится в G. Тем самым доказано, что множество G открыто.

Таким образом, предложение В) доказано.

Очевидно, что все пространство R является одновременно открытым и замкнутым. Далее, каждое **конечное** множество F из R замкнуто. В самом деле, множество F вообще не имеет предельных точек и потому содержит их все, т. е. замкнуто.

В случае, когда размерность векторного пространства R равна единице, это пространство совпадает с множеством всех действительных чисел, и алгебраические операции над векторами превращаются в обычные операции над действительными числами, а модуль совпадает с модулем числа. Расстояние между двумя точками a и b в этом случае равно модулю $|a - b|$ их разности. Непосредственно видно, что в пространстве действительных чисел множество всех точек x, удовлетворяющих неравенству $x < \alpha$ или неравенству $x > \alpha$, где α — фиксированное число, является открытым. Дополнение к этому множеству, определяемое неравенством $x \geqslant \alpha$ или неравенством $x \leqslant \alpha$, замкнуто.

Г) Объединение и пересечение конечного числа открытых множеств евклидова пространства R открыты. Объединение и пересечение конечного числа замкнутых множеств пространства R замкнуты *).

Докажем это. Пусть

$$O_1, O_2, \ldots, O_k \tag{6}$$

— конечная совокупность открытых множеств пространства R. Докажем, что их объединение открыто. Пусть a — произвольная точка, принадлежащая этому объединению; тогда она принадлежит хотя бы одному из множеств (6), например, множеству O_i. Так как множество O_i открыто, то существует окрестность точки a, содержащаяся в O_i; но тогда эта окрестность содержится и в объединении множеств (6).

Докажем, что пересечение множеств (6) открыто. Пусть a — произвольная точка из этого пересечения; тогда она принадлежит каждому множеству O_i системы (6). Так как множество O_i открыто, то существует шар радиуса r_i с центром в a, содержащийся в O_i. Пусть r — минимальное из чисел $r_1, r_2, \ldots, r_k$; тогда шар радиуса r с центром в a содержится в каждом из множеств системы (6) и, следовательно, принадлежит их пересечению. Таким образом установлено, что пересечение множеств (6) открыто.

Переходя от открытых множеств (6) к их дополнениям, мы получим соответствующие результаты относительно замкнутых множеств (см. В)).

Таким образом, предложение Г) доказано.

Д) Пусть R — евклидово пространство,

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots \tag{7}$$

— некоторая бесконечная последовательность точек из R и M — некоторое множество точек из R. Заметим, что последовательность отличается от множества не только тем, что ее точки занумерованы, но также тем, что точки с различными номерами могут совпадать между собой. Поэтому множество всех точек, входящих в бесконечную последовательность, существенно отличается от самой последовательности; в частности, оно может быть конечным. Последовательность (7) называется *ограниченной*, если существует такое число r, что для каждой точки a_k последовательности (7) выполнено неравенство $|a_k| < r$. Точно так же, множество M называется *ограниченным*, если существует такое число r, что для каждой точки x из M выполнено неравенство $|x| < r$. Говорят, что последовательность (7) *сходится* к точке a из R, если имеет место соотношение

$$\lim_{k \to \infty} |a_k - a| = 0. \tag{8}$$

*) Нетрудно доказать, что всегда объединение любой системы (не обязательно конечной) открытых множеств открыто, а пересечение любой системы замкнутых множеств замкнуто. Нам эти факты не понадобятся.

Если при этом последовательность (7) содержит бесконечное множество различных точек, то точка a является предельной для множества всех точек последовательности (7) и притом единственной предельной точкой этого множества. Оказывается, что из ограниченной последовательности точек всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность точек. Из этого непосредственно следует, что всякое ограниченное бесконечное множество M имеет предельную точку.

Докажем предложение Д). Допустим, что имеет место соотношение (8) и что множество A всех точек последовательности (7) бесконечно. Из соотношения (8) следует, что каждый шар с центром a содержит все точки последовательности (7), за исключением конечного числа. Так как множество A бесконечно, то из сказанного следует, что каждая окрестность точки a содержит бесконечное множество точек из A. Следовательно, каждая окрестность точки a содержит точки, отличные от a, а это и значит, что точка a является предельной для A.

Покажем, что точка $b \neq a$ не может быть предельной для A. Расстояние от a до b обозначим через 2ρ; так как $a \neq b$, то $\rho > 0$. Шары P и Q с центрами в точках a и b радиуса ρ не пересекаются. Это следует из неравенства (3). Так как шар P, по доказанному, содержит все точки множества A, за исключением конечного числа, то шар Q может содержать лишь конечное число точек множества A и потому точка b не является предельной для множества A.

Допустим теперь, что последовательность (7) ограничена, и выберем из нее сходящуюся подпоследовательность. При доказательстве мы используем тот факт, что для числовых подпоследовательностей это возможно. Перейдем к координатной записи точек последовательности (7), положив:

$$a_k = (a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^n), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Так как последовательность (7) ограничена, то существует такое число r, что $|a_k| < r$, а отсюда следует, что

$$|a_k^i| < r, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, последовательность чисел

$$a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1, \ldots \tag{9}$$

ограничена и потому из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для того чтобы не менять обозначений, мы будем считать, что эта выбранная подпоследовательность есть сама последовательность (9), так что имеет место соотношение

$$\lim_{k \to \infty} a_k^1 = a^1,$$

где a^1 — некоторое число. Теперь из последовательности

$$a_1^2,\ a_2^2,\ \ldots,\ a_k^2,\ \ldots \tag{10}$$

ввиду ее ограниченности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для того чтобы не менять обозначений, мы вновь будем считать, что эта выбранная подпоследовательность есть сама последовательность (10). Продолжая этот процесс по всем номерам 1, 2, ..., n координат, мы выделим такую подпоследовательность

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_l,\ \ldots \tag{11}$$

последовательности (7), что для координат точек этой подпоследовательности имеют место состношения

$$\lim_{l\to\infty} b_l^i = a^i, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{12}$$

где a^i — некоторое число.

Положим $a = (a^1,\ \ldots,\ a^n)$. Из соотношения (12) непосредственно следует, что

$$\lim_{l\to\infty} |b_l - a| = 0.$$

Таким образом, из последовательности (7) выбрана сходящаяся подпоследовательность (11).

Покажем, наконец, что всякое бесконечное ограниченное множество M имеет предельную точку. Так как множество M бесконечно, то из него можно выбрать бесконечную последовательность

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots,$$

все точки которой попарно различны. В силу уже доказанного, из этой последовательности ввиду ее ограниченности можно выбрать бесконечную подпоследовательность

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_l,\ \ldots, \tag{13}$$

сходящуюся к некоторой точке a. Так как все точки последовательности (13) попарно различны, то точка a является предельной для множества всех точек последовательности (13) и, следовательно, предельной для множества M.

Итак, предложение Д) доказано.

В некоторых вопросах играют важную роль замкнутые ограниченные подмножества евклидовых пространств. Докажем одно характеристическое свойство таких подмножеств; оно называется *компактностью*.

Е) Множество M точек евклидова пространства R называется *компактным*, если каждое его бесконечное подмножество имеет предельную точку, принадлежащую множеству M. Оказывается, что множество M тогда и только тогда компактно, когда оно одновременно замкнуто и ограничено.

Докажем предложение Е).

Допустим сначала, что множество F замкнуто и ограничено, и пусть M — его произвольное бесконечное подмножество. В силу предложения Д) множество M имеет некоторую предельную точку a. Эта точка является предельной и для множества F. В силу замкнутости F, точка a принадлежит F. Таким образом, всякое бесконечное подмножество M множества F обязательно имеет предельную точку, принадлежащую F, так что F компактно.

Допустим теперь, что множество F компактно. Докажем, что оно ограничено. Допустим противоположное; тогда из F можно выбрать такую последовательность

$$a_1, \ldots, a_k, \ldots \tag{14}$$

попарно различных точек, что

$$|a_k| > k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть a — произвольная точка из R. В силу неравенства (2), мы имеем $|a_k| \leq |a_k - a| + |a|$, откуда

$$|a_k - a| \geq k - |a|.$$

Это значит, что расстояние от точки a до точки a_k неограниченно возрастает с ростом k, и потому любая окрестность точки a содержит лишь конечное число точек множества (14). Таким образом, бесконечное подмножество (14) множества F не имеет предельной точки, что противоречит компактности множества F.

Докажем, наконец, что компактное множество F замкнуто. Пусть c — его предельная точка. Так как каждая окрестность точки c содержит точку множества F, отличную от c, то из F можно выбрать последовательность

$$c_1, \ldots, c_l, \ldots \tag{15}$$

попарно различных точек, сходящуюся к c. В силу Д) единственной предельной точкой точек последовательности множества (15) является c, а так как, по предположению компактности, это множество должно иметь предельную точку, принадлежащую F, то точка c принадлежит F. Итак, каждая предельная точка c множества F принадлежит ему и, следовательно, множество F замкнуто.

Таким образом, предложение Е) доказано.

Непрерывные отображения

Пусть A и B — два произвольные множества. Говорят, что задано *отображение* f множества A в множество B (или, иначе, *функция* f на множестве A со значениями в множестве B), если каждой точке x

из A, поставлена в соответствие вполне определенная точка $y=f(x)$ множества B. Если C — некоторое множество точек из A, то образом $f(C)$ множества C при отображении f называется множество всех точек вида $y=f(x)$, где x — произвольная точка из C. Если D — некоторое множество точек из B, то прообразом $f^{-1}(D)$ множества D при отображении f называется совокупность всех таких точек x из A, что точка $f(x)$ принадлежит D.

Ж) Пусть R и S — два евклидовых векторных пространства, M — некоторое множество точек из R и f — отображение множества M в пространство S. Отображение (или, что то же самое, функция) f называется *непрерывным* в точке a множества M, если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $|x-a|<\delta$ (где x — точка из M) мы имеем $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Функция f считается непрерывной на всем множестве M, если она непрерывна в каждой точке a этого множества. Функция f называется *равномерно непрерывной*, если для всякого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $|x_1-x_2|<\delta$ (где x_1 и x_2 — точки из M) мы имеем $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. Очевидно, что равномерно непрерывная функция является непрерывной. Перейдем от векторных обозначений к скалярным. Именно, положим

$$x=(x^1, \ldots, x^p); \qquad f(x)=(f^1(x), \ldots, f^q(x)),$$

где p и q — размерности евклидовых пространств R и S соответственно. Тогда вместо одной векторной функции f векторного переменного x мы получим q скалярных функций от p скалярных переменных, именно:

$$f^j(x)=f^j(x^1, \ldots, x^p), \qquad j=1, \ldots, q. \tag{16}$$

Легко доказывается, что непрерывность векторной функции $f(x)$ вектора x равносильна непрерывности всех функций (16) по совокупности переменных $x^1, \ldots, x^p$. То же относится к равномерной непрерывности. Здесь это доказываться не будет.

З) Пусть R и S — два евклидовых векторных пространства и f — непрерывное отображение некоторого открытого множества G из R в пространство S. Оказывается, что прообраз $f^{-1}(H)$ любого открытого множества H пространства S является открытым множеством пространства R.

Докажем это. Пусть H — произвольное открытое множество из S и a — точка множества $f^{-1}(H)$. Так как H — открытое множество и точка $b=f(a)$ принадлежит ему, то существует окрестность V точки b, содержащаяся в H. Окрестность V есть шар некоторого положительного радиуса ε с центром в b. В силу непрерывности отображения f существует такое положительное число δ, что при $|x-a|<\delta$ (здесь x — точка из G) имеем $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Так как

a — точка открытого множества G, то существует шар с центром в a некоторого радиуса r, содержащийся в G. Пусть s — наименьшее из чисел δ и r; тогда шар радиуса s с центром в a, очевидно, содержится в множестве $f^{-1}(H)$. Следовательно, это множество открыто.

И) Пусть R и S — два евклидовых векторных пространства, F — замкнутое и ограниченное (т. е. компактное) множество из R и f — непрерывное отображение множества F в пространство S. Оказывается тогда, что отображение f равномерно непрерывно, а множество $f(F)$ является замкнутым и ограниченным (т. е. компактным). Из последнего вытекает, в частности, что непрерывная числовая функция f, определенная на компактном множестве F, имеет максимум и минимум.

Докажем прежде всего, что отображение f равномерно непрерывно. Допустим противоположное; тогда существует такое положительное число ε, что при любом положительном δ найдутся две точки a и x из F, для которых $|x-a|<\delta$, а $|f(x)-f(a)|\geqslant\varepsilon$. Пользуясь этим, можно построить бесконечную последовательность пар точек

$$a_1,\ x_1;\quad a_2,\ x_2;\ \ldots;\quad a_k,\ x_k;\ \ldots,$$

для которых выполнены условия

$$|f(x_k)-f(a_k)|\geqslant\varepsilon,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots; \tag{17}$$

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-a_k|=0. \tag{18}$$

Так как последовательность $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ содержится в замкнутом ограниченном множестве F, то из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке a из F. Для того чтобы не менять обозначений, будем считать, что сама последовательность $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ сходится к a.

Так как функция f непрерывна в точке a, то существует такое положительное число δ, что при $|x-a|<\delta$ мы имеем $|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Ввиду того, что последовательность $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ сходится к a и имеет место соотношение (18), найдется настолько большой номер k, что $|a_k-a|<\delta$, $|x_k-a|<\delta$ (см. (3)). Для такого k мы имеем

$$|f(x_k)-f(a_k)|<|f(x_k)-f(a)|+|f(a_k)-f(a)|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2},$$

что противоречит неравенству (17).

Докажем теперь, что множество $f(F)$ компактно. Пусть M — произвольное бесконечное множество точек из $f(F)$. Из множества M можно выбрать бесконечную последовательность попарно различных точек

$$b_1,\ \ldots,\ b_k,\ \ldots \tag{19}$$

Для каждой точки b_k этой последовательности выберем такую точку

a_k из F, что $f(a_k)=b_k$, $k=1, 2, \ldots$ Точки $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ попарно различны и потому имеют предельную точку a в множестве F. Покажем, что точка $b=f(a)$ является предельной для множества (19). Пусть V — произвольная окрестность точки b, т. е. шар некоторого радиуса $\varepsilon>0$ с центром в b. Так как функция f непрерывна в точке a, то существует такое положительное число δ, что при $|x-a|<\delta$ (здесь x — точка из F) $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Так как точка a является предельной для множества точек $a_1, \ldots, a_k, \ldots$, то в шаре U радиуса δ с центром a найдутся, по крайней мере, две различные точки a_k и a_l этого множества. Точки b_k и b_l принадлежат шару V, и так как они различны, то, по крайней мере, одна из них не совпадает с точкой b. Таким образом, произвольная окрестность V точки b содержит хотя бы одну точку множества (19), отличную от b. Следовательно, b является предельной точкой для множества (19), а потому и для множества M. Таким образом, множество $f(F)$ компактно.

Если размерность пространства S равна 1, то $f=f$ есть числовая функция. В этом случае множество $f(F)$ есть замкнутое ограниченное множество действительных чисел. Точные верхняя и нижняя грани множества $f(F)$ конечны и принадлежат ему. Точная верхняя грань множества $f(F)$ есть максимум функции f, а точная нижняя грань — ее минимум.

Таким образом, предложение И) доказано.

Примеры

Рассмотрим некоторые примеры непрерывных функций.

1. Пусть R и S — два евклидовых пространства. Каждой точке $x=(x^1, \ldots, x^p)$ пространства R поставим в соответствие точку $y=(y^1, \ldots, y^q)$ пространства S, положив

$$y^j=\sum_{i=1}^{p} a_i^j x^i + b^j, \qquad j=1, \ldots, q. \tag{20}$$

Здесь a_i^j — некоторые числа, составляющие матрицу $A=(a_i^j)$, а b^j — числа, составляющие вектор $b=(b^1, \ldots, b^q)$. Система скалярных соотношений (20) в векторной форме записывается в виде:

$$y=Ax+b. \tag{21}$$

Соотношение (21) определяет так называемое *аффинное отображение* пространства R в пространство S.

Докажем, что аффинное отображение непрерывно. Для краткости обозначим его одной буквой f. Пусть x_1 и x_2 — две точки из R, расстояние между которыми $|x_1-x_2|<\delta$. Оценим расстояние между точками $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ в пространстве S. Мы имеем:

$$y_1 - y_2 = A(x_1 - x_2),$$

или в скалярной форме

$$y_1^j - y_2^j = \sum_{i=1}^{p} a_i^j (x_1^i - x_2^i), \qquad j = 1, \ldots, q. \tag{22}$$

Пусть γ — максимальное из чисел $|a_i^j|$, так что $|a_i^j| \leqslant \gamma$ для всех i, j. Так как $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|x_1^i - x_2^i| < \delta$. Из этих неравенств, в силу соотношения (22), получаем:

$$|y_1^j - y_2^j| < p\gamma\delta, \qquad j = 1, \ldots, q.$$

Возводя это соотношение в квадрат, суммируя по j и извлекая затем квадратный корень, получим $|y_1 - y_2| < \delta p\gamma\sqrt{q}$. Таким образом, чтобы было выполнено неравенство $|y_1 - y_2| < \varepsilon$, достаточно взять $\delta < \frac{\varepsilon}{p\gamma\sqrt{q}}$. Мы видим, что аффинное отображение не только непрерывно, но и равномерно непрерывно.

Из доказанного следует (см. 3)), что если H — некоторое открытое множество пространства S, то его прообраз $f^{-1}(H)$ при аффинном отображении f есть открытое множество в R.

Если матрица A — квадратная (т. е. $p = q$) и невырожденная (т. е. детерминант ее отличен от нуля), то система соотношений (20) может быть разрешена относительно неизвестных $x^1, \ldots, x^p$, так что вектор x однозначно выражается через вектор y:

$$x = Cy + d.$$

Это значит, что аффинное отображение f имеет в этом случае обратное ему отображение f^{-1}, также являющееся аффинным. При этом открытые множества пространства R переходят в открытые множества пространства S; то же самое имеет место и для их дополнений, т. е. для замкнутых множеств. Если невырожденное аффинное отображение f пространства R на пространство S трактовать как преобразование координат в пространстве R, при котором меняется понятие о расстоянии, то мы видим, что *топологические свойства (открытость и замкнутость множеств) не зависят от системы координат, через которую определяется расстояние между точками.*

2. Пусть R — евклидово пространство и a — некоторый его вектор, отличный от нуля. Каждому вектору x из R поставим в соответствие число $y = f(x)$, положив

$$y = (a, x).$$

Функция f, очевидно, является аффинным отображением пространства R в пространство действительных чисел и потому непрерывна. Таким образом, прообраз любого открытого множества действительных чисел является открытым. Множество всех действительных чисел y, удовлетворяющих неравенству $y<\alpha$ или $y>\alpha$, открыто. Прообраз этого множества в пространстве R определяется неравенством $(a, x)<\alpha$ или $(a, x)>\alpha$. Эти неравенства определяют в пространстве R *открытые полупространства*, на которые пространство R разбивается гиперплоскостью $(a, x)=\alpha$. Дополнения к этим открытым полупространствам определяются неравенствами $(a, x)\geqslant\alpha$ и $(a, x)\leqslant\alpha$. Эти полупространства замкнуты, так как являются дополнениями к открытым.

Конечная система неравенств

$$(a_1, x)<\alpha_1, \ldots, (a_k, x)<\alpha_k,$$

где $a_1, \ldots, a_k$ — векторы, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — числа, определяет в пространстве R открытый выпуклый (вообще говоря, неограниченный) многогранник. Он является открытым множеством, поскольку получен как пересечение нескольких открытых полупространств. Точно так же конечная система неравенств

$$(a_1, x)\leqslant\alpha_1, \ldots, (a_k, x)\leqslant\alpha_k$$

определяет в пространстве R *выпуклый замкнутый многогранник*; он является замкнутым множеством как пересечение замкнутых полупространств.

3. Пусть R — евклидово пространство, а L и M — два его подмножества. *Расстоянием* между множествами L и M называется точная нижняя грань всех чисел $|x-y|$, где x — произвольная точка из L, а y — произвольная точка из M. Если множество L содержит лишь одну точку x, то мы получаем расстояние $f(x)$ точки x до множества M, которое является числовой функцией точки x пространства R.

Легко видеть, что расстояние $f(x)$ точки x до множества M обращается в нуль только тогда, когда точка x либо принадлежит множеству M, либо является предельной для него. Таким образом, в случае замкнутого множества M из соотношения $f(x)=0$ следует, что x принадлежит M.

Докажем, что расстояние $f(x)$ точки x до множества M есть непрерывная функция. Пусть x и y — две точки из R, расстояние между которыми меньше ε: $|x-y|<\varepsilon$, и a — произвольная точка из M; тогда мы имеем, в силу неравенства (3):

$$f(x)\leqslant|x-a|\leqslant|x-y|+|y-a|.$$

Так как это неравенство справедливо для любой точки a множества M, то оно останется справедливым, если мы заменим в нем правую часть ее точной нижней гранью (когда точка a пробегает все множество M):

$$f(x) \leqslant |x-y| + f(y) < \varepsilon + f(y).$$

Таким образом, $f(x)-f(y)<\varepsilon$. Точно так же доказывается, что $f(y)-f(x)<\varepsilon$. Из этих двух неравенств следует, что $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Таким образом, из неравенства $|x-y|<\varepsilon$ вытекает, что $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, а это значит, что функция $f(x)$ не только непрерывна, но и равномерно непрерывна.

Так как расстояние $f(x)$ точки x до множества M есть непрерывная функция, то неравенства $f(x)<\alpha$ и $f(x)>\alpha$ определяют в пространстве R открытые множества (см. З)). Дополнительные множества определяются неравенствами $f(x) \geqslant \alpha$ и $f(x) \leqslant \alpha$. Таким образом, определяемые этими неравенствами множества замкнуты. В частности, множество $\overline{M}$, определяемое неравенством $f(x) \leqslant 0$, замкнуто. Множество $\overline{M}$ получается из M присоединением к нему всех его предельных точек и называется *замыканием* множества M. Если множество M ограничено, то множество, определяемое неравенством $f(x) \leqslant \alpha$, не только замкнуто, но, как легко видеть, и ограничено.

Если замкнутое ограниченное множество F не пересекается с замкнутым множеством M, то расстояние между этими множествами положительно. Для доказательства обозначим вновь через $f(x)$ расстояние точки x до множества M. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то на замкнутом ограниченном множестве F она имеет минимум m. Легко видеть, что m и есть расстояние между множествами F и M. Покажем, что $m>0$. Пусть a — такая точка из F, что $f(a)=m$. Если бы было $m=0$, то точка a принадлежала бы множеству M (ввиду его замкнутости), а это невозможно, так как множества F и M не пересекаются.

Так как расстояние $f(x)$ точки x до произвольного множества M есть непрерывная функция, то, в частности, расстояние $|x-a|$ точки x до точки a является непрерывной функцией от x. Из этого следует, что всякий шар (см. В)) есть открытое множество. В предложении В) окрестностью точки a был назван произвольный шар с центром в точке a. В ряде случаев бывает удобно считать окрестностью точки a произвольное о т к р ы т о е множество, содержащее a. При таком расширении понятия окрестности определение предельной точки не меняется.

§ 33. Теоремы о неявных функциях

В этом параграфе доказываются известные теоремы анализа о существовании и дифференцируемости неявных функций. Эти теоремы имеют многочисленные применения и, в частности, употребляются в этой книге. Доказательство теоремы существования неявных функций проводится здесь тем же методом последовательных приближений (или сжатых отображений), который используется в § 20 и 21, а доказательство дифференцируемости неявных функций использует лемму Адамара (см. § 24, А)).

Таким образом, все содержание этого параграфа очень близко примыкает к методам четвертой главы и хорошо их иллюстрирует.

Мы будем рассматривать систему уравнений

$$f^i(t^1, \ldots, t^k, x^1, \ldots, x^n) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

относительно неизвестных $x^1, \ldots, x^n$, считая $t^1, \ldots, t^k$ независимыми переменными. В дальнейшем будем предполагать, что левые части уравнений (1), т. е. функции

$$f^i(t^1, \ldots, t^k, x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

определены и непрерывны на некотором открытом множестве Γ пространства R переменных $t^1, \ldots, t^k, x^1, \ldots, x^n$ вместе с их частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Полагая $\boldsymbol{t} = (t^1, \ldots, t^k)$; $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$;

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = (f^1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}), \ldots, f^n(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})),$$

мы можем записать систему уравнений (1) в векторной форме

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}. \tag{4}$$

Решением уравнения (4) будем называть всякую непрерывную векторную функцию $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ векторного аргумента $\boldsymbol{t}$, определенную на некотором открытом множестве G пространства T переменных $t^1, \ldots, t^k$, которая при подстановке в уравнение (4) превращает его в тождество

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})) = \boldsymbol{0}, \tag{5}$$

выполненное для всех точек $\boldsymbol{t}$ открытого множества G.

Теорема 27. *Предположим, что функциональный определитель*

$$\left| \frac{\partial f^i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})}{\partial x^j} \right|$$

отличен от нуля в каждой точке $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ *открытого множества* Γ. *Тогда для каждой точки* $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)$ *открытого множества* Γ, *удовлетворяющей условию*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}, \tag{6}$$

существует непрерывное решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ *уравнения* (4), *удовлетворяющее условию*

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0. \tag{7}$$

Далее, имеет место единственность. Именно, существует такое открытое множество U в пространстве R, содержащее точку (t_0, x_0), что каждая точка (t, x) множества U, удовлетворяющая уравнению (4), *удовлетворяет также уравнению $x = \varphi(t)$. Иными словами, вблизи точки (t_0, x_0) нет ни одной точки, удовлетворяющей уравнению* (4) *и не принадлежащей графику функции $x = \varphi(t)$.*

При доказательстве этой теоремы мы используем равномерную сходимость последовательности векторных функций векторного переменного. В § 20 и 21 рассматривались лишь последовательности функций скалярного переменного; поэтому мы повторим здесь относящиеся сюда понятия для случая векторного переменного (ср. § 21, В)).

А) Пусть F — замкнутое ограниченное множество точек пространства T. *Нормой* $\|\varphi\|$ непрерывной векторной функции $x = \varphi(t)$, заданной на множестве F, будем называть максимум ее модуля:

$$\|\varphi\| = \max |\varphi(t)|.$$

Пользуясь понятием нормы, можно формулировать определение равномерной сходимости последовательности

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_i, \ldots \tag{8}$$

непрерывных векторных функций векторного аргумента, заданных на множестве F: последовательность (8) *равномерно сходится* к непрерывной функции $\varphi(t)$, заданной на том же множестве F, если

$$\lim_{i \to \infty} \|\varphi - \varphi_i\| = 0.$$

Для того чтобы последовательность (8) равномерно сходилась к некоторой непрерывной функции, достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant a_i,$$

где числа $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots$ образуют сходящийся ряд.

Доказательство теоремы 27. Для того чтобы применить к уравнению (4) метод последовательных приближений, перепишем это уравнение в несколько измененном виде. Для этого положим

$$b^i_j = \frac{\partial}{\partial x^j} f^i(t_0, x_0), \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Так как функциональный определитель

$$\left| \frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j} \right|$$

отличен от нуля в каждой точке (t, x) открытого множества Γ, то матрица $B = (b^i_j)$ имеет обратную матрицу B^{-1}. Систему уравнений (1) перепишем теперь в виде:

$$\sum_j b^i_j x^j = \sum_j b^i_j x^j - f^i(t,\ x), \qquad i = 1,\ \ldots,\ n. \tag{10}$$

Правую часть соотношения (10) обозначим через $h^i(t,\ x)$. В силу соотношения (9) мы имеем, очевидно:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} h^i(t_0,\ x_0) = 0, \qquad i,\ j = 1,\ \ldots,\ n. \tag{11}$$

В векторной форме уравнение (10) можно записать в виде:

$$Bx = h(t,\ x). \tag{12}$$

Применяя к этому соотношению матрицу B^{-1}, получим эквивалентное ему соотношение

$$x = g(t,\ x), \tag{13}$$

где $g(t,\ x) = (g^1(t,\ x),\ \ldots,\ g^n(t,\ x)) = B^{-1}h(t,\ x)$. Из соотношений (11) следует:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} g^i(t_0,\ x_0) = 0. \tag{14}$$

Так как, кроме того, уравнение (13) эквивалентно уравнению (4), а точка $(t_0,\ x_0)$ удовлетворяет уравнению (4), то она удовлетворяет и уравнению (13), т. е.

$$g(t_0,\ x_0) = x_0. \tag{15}$$

К уравнению (13), удовлетворяющему условиям (14) и (15), мы и применим метод последовательных приближений. Именно, мы поставим в соответствие векторной каждой функции $x = \psi(t)$ векторного переменного t функцию $\psi^*(t)$, положив

$$\psi^*(t) = g(t,\ \psi(t)). \tag{16}$$

Мы будем писать (используя «операторные» обозначения)

$$\psi^* = A\psi. \tag{17}$$

Мы перейдем теперь к построению такого семейства Ω непрерывных функций $\psi(t)$, что оператор A переводит каждую функцию семейства Ω в функцию, также принадлежащую этому семейству, и является сжатым на семействе Ω.

Выберем два таких положительных числа q и a, что при

$$|t - t_0| \leqslant q, \qquad |x - x_0| \leqslant a \tag{18}$$

точка $(t,\ x)$ принадлежит открытому множеству Γ и для нее выполнены неравенства

$$\left|\frac{\partial}{\partial x^j} g^i(t,\ x)\right| \leqslant \frac{k}{n^2}, \qquad i,\ j = 1,\ \ldots,\ n, \tag{19}$$

где k — некоторое число, удовлетворяющее условию $0<k<1$. Это возможно, так как множество Γ открыто, а производная $\frac{\partial g^i(t, x)}{\partial x^j}$ непрерывна и обращается в нуль в точке (t_0, x_0) (см. (14)). В силу формулы (6) § 21 для любых двух точек (t, x) и (t, y) множества (18) выполнено неравенство

$$|g(t, x)-g(t, y)| \leqslant k|x-y| \tag{20}$$

(ср. (19)). Далее, так как функция $g(t, x)$ непрерывна, то существует настолько малое положительное число $r \leqslant q$, что

$$|g(t, x_0)-g(t_0, x_0)|<(1-k)a \text{ при } |t-t_0|<r. \tag{21}$$

Полагая в неравенстве (20) $y=x_0$, мы получаем из (20) и (21) (при $|x-x_0| \leqslant a$, $|t-t_0| \leqslant r$):

$$\begin{aligned}|g(t, x)-x_0| &= |g(t, x)-g(t_0, x_0)| \leqslant \\ &\leqslant |g(t, x)-g(t, x_0)|+|g(t, x_0)-g(t_0, x_0)| \leqslant \\ &\leqslant k|x-x_0|+(1-k)a.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|g(t, x)-x_0| \leqslant a \tag{22}$$

при условии, что

$$|t-t_0| \leqslant r, \qquad |x-x_0| \leqslant a. \tag{23}$$

Так как $r \leqslant q$, то для любых двух точек (t, x) и (t, y) множества (23) выполнены оба неравенства (20) и (22).

К семейству Ω причислим каждую определенную на замкнутом шаре $|t-t_0| \leqslant r$ непрерывную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую на нем условию $|\varphi(t)-x_0| \leqslant a$. Из неравенства (22) следует, что каждая функция семейства Ω переводится оператором A в функцию того же семейства, а из неравенства (20) следует, что оператор A является на семействе Ω сжатым:

$$\|A\psi-A\varphi\| \leqslant k\|\psi-\varphi\|$$

для любых двух функций φ, ψ семейства Ω.

Из этого следует (ср. стр. 167—168), что в семействе Ω существует единственная функция φ, уловлетворяющая условию

$$\varphi=A\varphi \tag{24}$$

или, иначе, тождеству

$$\varphi(t)=g(t, \varphi(t)), \tag{25}$$

которое эквивалентно тождеству (5).

Докажем теперь, что если точка (t, x) принадлежит множеству (23) и удовлетворяет уравнению (4) (или, что то же, уравнению (13)), то она удовлетворяет и уравнению

$$x = \varphi(t). \tag{26}$$

В самом деле, в силу (20) мы имеем:

$$|x - \varphi(t)| = |g(t, x) - g(t, \varphi(t))| \leqslant k\,|x - \varphi(t)|.$$

Но так как $k < 1$, то это возможно лишь в случае, если $x = \varphi(t)$. В частности, так как точка (t_0, x_0) удовлетворяет условию (6), то она удовлетворяет и условию (7).

Итак, мы построили решение $x = \varphi(t)$ уравнения (4), определенное на открытом множестве G, определяемом неравенством $|t - t_0| < r$, и открытое множество U, содержащее точку (t_0, x_0), определяемое неравенствами $|t - t_0| < r$, $|x - x_0| < a$, для которого имеет место единственность.

Таким образом, теорема 27 доказана.

Теорема 28. *Так же как в теореме 27, предположим, что функциональный определитель*

$$\left|\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}\right|$$

отличен от нуля в каждой точке (t, x) открытого множества Γ; кроме того, предположим, что частные производные

$$\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial t^p}, \qquad p = 1, \ldots, k; \; i = 1, \ldots, n,$$

также определены и непрерывны на всем множестве Γ. Оказывается тогда, что любое решение $x = \varphi(t) = (\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$ уравнения (4) имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial \varphi^i(t)}{\partial t^p}$, $p = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, n$, на всем открытом множестве G определения этого решения.

Доказательство. Пусть t_0 — произвольная точка открытого множества G, на котором определено решение $x = \varphi(t)$ уравнения (4) и $x_0 = \varphi(t_0)$. Покажем, что в некоторой окрестности точки t_0 частные производные $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^p}$ существуют и непрерывны.

Пусть a и q — такие положительные числа, что при

$$|t - t_0| \leqslant q, \qquad |x - x_0| \leqslant a \tag{27}$$

точка (t, x) принадлежит открытому множеству Γ, точка t принадлежит открытому множеству G, а функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию

$$|\varphi(t) - x_0| < a.$$

Для вычисления производной $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^p}$ обозначим через e_p единичный вектор k-мерного векторного пространства T, направленный по p-й оси, и положим $t_2 = t_1 + \tau e_p$, где t_1 — вектор пространства T, а τ — действительное число. Тогда мы имеем:

$$\frac{\partial \varphi^i(t_1)}{\partial t^p} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\varphi^i(t_2) - \varphi^i(t_1)}{\tau}. \tag{28}$$

Таким образом, функция

$$\psi^i(t_1, \tau) = \frac{\varphi^i(t_2) - \varphi^i(t_1)}{\tau} \tag{29}$$

является предварительным частным при вычислении производной $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^p}$.

Выберем настолько малое положительное число r, что при $|t_1 - t_0| \leqslant r$, $|\tau| < r$ векторы t_1 и t_2 удовлетворяют условию

$$|t_1 - t_0| < q, \qquad |t_2 - t_0| < q.$$

Множество (27) выпукло, и потому к разности

$$f^i(t_2, \varphi(t_2)) - f^i(t_1, \varphi(t_1)),$$

которая равна нулю, мы можем применить лемму Адамара. Именно, мы имеем:

$$f^i(t_2, \varphi(t_2)) - f^i(t_1, \varphi(t_1)) =$$
$$= \sum_{l=1}^{k} H_l^i(t_1, \tau)(t_2^l - t_1^l) + \sum_{j=1}^{n} K_j^i(t_1, \tau)(\varphi^j(t_2) - \varphi^j(t_1)) = 0, \tag{30}$$

где $H_l^i(t_1, \tau)$ и $K_j^i(t_1, \tau)$ определены и непрерывны при $|t_1 - t_0| < r$, $|\tau| < r$. Так как

$$K_j^i(t_0, 0) = \frac{\partial}{\partial x^j} f^i(t_0, x_0),$$

а функциональный определитель

$$\left| \frac{\partial}{\partial x^j} f^i(t_0, x_0) \right|$$

отличен от нуля, то при достаточно малом r определитель $|K_j^i(t_1, \tau)|$ отличен от нуля. Считая, что $\tau \neq 0$, и деля соотношение (30) на τ, получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} K_j^i(t_1, \tau)\psi^j(t_1, \tau) = -H_p^i(t_1, \tau). \tag{31}$$

Эта система уравнений относительно функций $\psi^j(t_1, \tau)$ разрешима, и мы получаем:

$$\psi^j(t_1, \tau) = \chi^j(t_1, \tau), \tag{32}$$

где функция $\chi^j(t_1, \tau)$ непрерывна и определена при условии $|t - t_0| < r$, $|\tau| < r$, не исключая значения $\tau = 0$, так как коэффициенты и правые части системы (31) определены для этих значений и определитель этой системы отличен от нуля. Соотношение (32), где слева стоит функция, определенная лишь при $\tau \neq 0$, а справа — функция, определенная и непрерывная при произвольном $|\tau| < r$, при переходе к пределу дает:

$$\lim_{\tau \to 0} \psi^j(t_1, \tau) = \chi^j(t_1, 0). \tag{33}$$

Соотношения (28), (29) и (33) показывают, что производная $\frac{\partial \varphi^j(t_1)}{\partial t^p}$ существует и непрерывна при $|t_1 - t_0| < r$.

Таким образом, теорема 28 доказана.

Примеры

1. Пусть R — пространство переменных $x^1, \ldots, x^n$, a — некоторая точка из R и

$$u^j(x) = u^j(x^1, \ldots, x^n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{34}$$

— система функций, определенных на некоторой окрестности точки a. Мы будем предполагать, что эти функции, так же как их частные производные $\frac{\partial u^j(x)}{\partial x^i}$, непрерывны и что определитель функциональной матрицы $\left(\frac{\partial u^j(x)}{\partial x^i}\right)$ отличен от нуля при $x = a$. Тогда в силу непрерывности он отличен от нуля и в некоторой окрестности точки a. Пользуясь функциями (34), мы можем в некоторой окрестности точки a вместо координат $x^1, \ldots, x^n$ точки x ввести новые координаты $y^1, \ldots, y^n$ той же точки, положив

$$y^j = u^j(x^1, \ldots, x^n), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{35}$$

или в векторной форме

$$y = u(x). \tag{36}$$

Действительно, в силу теоремы 27, систему скалярных уравнений (35) или, что то же самое, векторное уравнение (36) можно разрешить относительно x. Именно, можно получить векторное решение

$$x = v(y), \tag{37}$$

определенное в некоторой окрестности точки $b = u(a)$ переменного y, удовлетворяющее тождеству

$$y = u(v(y)) \tag{38}$$

по переменному y, причем $v(b) = a$. В силу теоремы 28 компоненты $v^1(y), \ldots, v^n(y)$ вектора $v(y)$ имеют непрерывные производные по переменным $y^1, \ldots, y^n$.

Докажем, что наряду с тождеством (38) имеет место тождество

$$x = v(u(x)) \tag{39}$$

по переменному x. Для этого рассмотрим уравнение

$$u(x) = u(z) \tag{40}$$

относительно неизвестного вектора $z = (z^1, \ldots, z^n)$. Мы имеем очевидное решение $z = x$ этого уравнения. Подставим теперь в тождество (38) вместо y функцию $u(x)$; тогда мы получим тождество по x:

$$u(x) = u(v(u(x))),$$

которое показывает, что решением уравнения (40) является функция $z = v(u(x))$. Но, в силу единственности, это решение должно совпадать с ранее указанным решением $z = x$, и потому мы имеем $x = v(u(x))$. Таким образом, тождество (39) имеет место.

Тождества (38) и (39) и показывают, что преобразования (36) и (37) являются взаимно обратными и могут служить для дифференцируемого преобразования координат $x^1, \ldots, x^n$ в координаты $y^1, \ldots, y^n$ и обратно в некоторой окрестности точки a пространства R.

2. Пусть R — пространство переменных $x^1, \ldots, x^n$, a — некоторая точка этого пространства и

$$u^j(x) = u^j(x^1, \ldots, x^n), \qquad j = 1, \ldots, k \tag{41}$$

— система функций, определенных на некоторой окрестности точки a. Мы будем предполагать, что функции (41), так же как их частные производные $\frac{\partial u^j(x)}{\partial x^i}$, непрерывны.

В функциональной матрице

$$\left(\frac{\partial u^j(x)}{\partial x^i}\right), \quad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, k, \tag{42}$$

будем считать, что индекс j указывает номер строки, а i — номер столбца, так что матрица (42) имеет k строк и n столбцов. Заметим, что j-я строка

$$\left(\frac{\partial u^j(x)}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial u^j(x)}{\partial x^n}\right)$$

представляет собой градиент функции $u^j(x)$. Если ранг этой матрицы в точке a равен k, то, в силу непрерывности, он равен k и в некоторой окрестности точки a. В этом случае функции (41) называются *независимыми*. В случае, если ранг матрицы (42) меньше k на некоторой окрестности точки a, функции (41) называются *зависимыми*.

Если $k<n$ и система функций (41) независима, то ее можно дополнить функциями $u^{k+1}(x), \ldots, u^n(x)$ до независимой системы функций

$$u^1(x), \ldots, u^k(x), \ldots, u^n(x). \qquad (43)$$

В самом деле, матрица (42) при $x=a$ постоянна и строки ее линейно независимы. Эту матрицу можно дополнить постоянными строками до квадратной невырожденной. Добавленные строки можно считать градиентами линейных функций $u^{k+1}(x), \ldots, u^n(x)$.

Докажем теперь нижеследующее важное предложение: *допустим, что функции* (41) *независимы, а функция* $w(x)$ *такова, что система функций*

$$u^1(x), \ldots, u^k(x), w(x) \qquad (44)$$

уже зависима. Тогда существует такая функция $W(y^1, \ldots, y^k)$ *с непрерывными производными, что выполнено тождество*

$$w(x) = W(u^1(x), \ldots, u^k(x)) \qquad (45)$$

по переменному x. *Иначе говоря, функция* $w(x)$ *выражается через функции* (41).

Для доказательства этого предложения дополним независимую систему (41) до независимой системы (43) и введем при помощи нее новые координаты по формуле (36) примера 1, положив

$$y = u(x).$$

Пусть $x = v(y)$ — обращение этого соотношения (см. (37)). Положим

$$W(y) = w(v(y)). \qquad (46)$$

Определенная таким образом функция $W(y) = W(y^1, \ldots, y^n)$ в действительности зависит только от переменных $y^1, \ldots, y^k$ (это мы докажем ниже) и является искомой функцией $W(y^1, \ldots, y^k)$. В самом деле, подставляя в соотношение (46) $y = u(x)$, мы, в силу тождества (39), получим:

$$W(u^1(x), \ldots, u^k(x)) = w(x),$$

что совпадает с доказываемым соотношением (45).

Остается доказать, что функция (46) не зависит от переменных $y^{k+1}, \ldots, y^n$. Для доказательства обозначим через y^r одну из этих переменных и докажем, что

$$\frac{\partial W(y)}{\partial y^r} = 0. \qquad (47)$$

Мы имеем:

$$\frac{\partial W(y)}{\partial y^r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w(x)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial v^i(y)}{\partial y^r}. \qquad (48)$$

Так как система (41) независима, а система (44) зависима, то градиент функции w линейно выражается через градиенты функций (41), т. е.

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x^i} = a_1 \frac{\partial u^1(x)}{\partial x^i} + \ldots + a_k \frac{\partial u^k(x)}{\partial x^i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{49}$$

где $a_1, \ldots, a_k$ — некоторые функции от x. Умножая соотношения (49) на $\frac{\partial v^i(y)}{\partial y^r}$ и суммируя по i, получаем:

$$\frac{\partial W(y)}{\partial y^r} = a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^1(x)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial v^i(y)}{\partial y^r} + \ldots + a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^k(x)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial v^i(y)}{\partial y^r}. \tag{50}$$

Но мы имеем, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^s(x)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial v^i(y)}{\partial y^r} = \frac{\partial y^s}{\partial y^r} = 0, \qquad s = 1, \ldots, k$$

(ибо $r > k$). Таким образом, правая часть соотношения (50) равна нулю и соотношение (47) доказано.

ДОБАВЛЕНИЕ II
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

В этом добавлении излагаются те результаты линейной алгебры, которые используются в некоторых, наименее элементарных параграфах книги. Следует отметить, что § 36 опирается только на результаты § 34 и совсем не использует результатов § 35.

§ 34. Минимальный аннулирующий многочлен

Собственные значения и собственные векторы

A) Каждой квадратной матрице

$$A = (a_j^i), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

порядка n, элементами которой являются действительные или комплексные числа, соответствует линейное преобразование A векторного координатного пространства R размерности n; именно: вектору

$$x = (x^1, \ldots, x^n)$$

пространства R ставится в соответствие вектор

$$Ax = y = (y^1, \ldots, y^n),$$

определяемый соотношением

$$y^i = \sum_j a_j^i x^j.$$

Нулевой матрице 0 (все элементы которой равны нулю) соответствует при этом нулевое преобразование $\mathbf{0}$, переводящее каждый вектор в нуль. Единичной матрице

$$E = (\delta_j^i) \qquad \left(\delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases}\right)$$

соответствует единичное, или тождественное преобразование E пространства R:

$$Ex = x.$$

Если в пространстве R введены новые координаты $x'^1, \ldots, x'^n$, связанные со старыми координатами $x^1, \ldots, x^n$ формулами перехода

$$x'^j = \sum s_i^j x^i,$$

или в матричной записи

$$\boldsymbol{x}' = S\boldsymbol{x},$$

то преобразованию $\boldsymbol{A}$ в новой системе координат будет соответствовать матрица

$$A' = S A S^{-1}. \tag{1}$$

Докажем соотношение (1). Мы имеем:

$$\boldsymbol{y}' = S\boldsymbol{y} = S A\boldsymbol{x} = S A S^{-1}\boldsymbol{x}'.$$

Б) Пусть $\boldsymbol{A}$ — линейное преобразование и A — матрица, соответствующая преобразованию $\boldsymbol{A}$ в некоторой системе координат. Отличный от нуля вектор $\boldsymbol{h}$ называется *собственным вектором* преобразования $\boldsymbol{A}$, а число λ — *собственным значением* этого преобразования, соответствующим вектору $\boldsymbol{h}$, если выполнено соотношение

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h}. \tag{2}$$

Детерминант матрицы $(a_j^i - z\delta_j^i)$:

$$D(z) = |a_j^i - z\delta_j^i| = |A - zE|$$

называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Оказывается, что коэффициенты многочлена $D(z)$ не зависят от выбора системы координат, а полностью определяются преобразованием $\boldsymbol{A}$. Поэтому многочлен $D(z)$ называется также характеристическим многочленом преобразования $\boldsymbol{A}$. Далее, число λ тогда и только тогда является собственным значением преобразования $\boldsymbol{A}$, когда оно есть корень многочлена $D(z)$.

Докажем независимость многочлена $D(z)$ от выбора системы координат. В новой системе координат преобразованию $\boldsymbol{A}$ соответствует матрица SAS^{-1}, где S — некоторая невырожденная матрица (см. (1)). Мы имеем:

$$|SAS^{-1} - zE| = |SAS^{-1} - zSES^{-1}| = |S(A - zE)S^{-1}| =$$
$$= |S|\cdot|A - zE|\cdot|S^{-1}| = |S|\cdot|A - zE|\cdot|S|^{-1} = |A - zE|.$$

Запишем теперь в координатной форме соотношение $(\boldsymbol{A} - \lambda E)\boldsymbol{h} = 0$, равносильное соотношению (2):

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j^i - \lambda\delta_j^i)\, h^j = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Эта система однородных уравнений тогда и только тогда допускает ненулёвое решение $h^1, \ldots, h^n$, когда детерминант $D(\lambda)$ этой системы равен нулю. Таким образом, каждый корень λ многочлена $D(z)$ является собственным значением преобразования A и обратно.

В) Если собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ преобразования $\boldsymbol{A}$ попарно различны, то соответствующие им собственные векторы $\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_k$ линейно независимы.

Доказательство индуктивное — по числу k. При $k=1$ это утверждение очевидно. Допустим, что оно верно для $k-1$ вектора, и докажем его для k векторов. Допустим, что $a_1\boldsymbol{h}_1 + \ldots + a_k\boldsymbol{h}_k = \boldsymbol{0}$. Применяя к этому соотношению преобразование A, получим:

$$a_1\lambda_1\boldsymbol{h}_1 + \ldots + a_k\lambda_k\boldsymbol{h}_k = \boldsymbol{0};$$

с другой стороны,

$$\lambda_k(a_1\boldsymbol{h}_1 + \ldots + a_k\boldsymbol{h}_k) = \boldsymbol{0}.$$

Составляя разность найденных соотношений, получаем:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)\boldsymbol{h}_1 + \ldots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\boldsymbol{h}_{k-1} = \boldsymbol{0}.$$

Отсюда, по предположению индукции, следует, что $a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$, и исходное соотношение сводится к $a_k\boldsymbol{h}_k = \boldsymbol{0}$, откуда $a_k = 0$.

Таким образом, если все корни характеристического многочлена $D(z)$ различны между собой, то мы можем принять за базис пространства R собственные векторы $\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_n$ преобразования $\boldsymbol{A}$. В этом базисе преобразованию $\boldsymbol{A}$ соответствует диагональная матрица. В общем случае приведение матрицы преобразования к диагональной форме невозможно, и возникает необходимость построения сравнительно сложной теории, к изложению которой мы и переходим.

Минимальный аннулирующий многочлен

Г) Квадратные матрицы порядка n по известным правилам могут складываться и перемножаться между собой, а также умножаться на числа; этим операциям над матрицами соответствуют те же операции над преобразованиями. Таким образом, если

$$f(z) = a_0z^m + a_1z^{m-1} + \ldots + a_m$$

— многочлен с действительными или комплексными коэффициентами относительно переменной z, то, подставляя вместо z в этот многочлен матрицу A, мы получаем матрицу

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \ldots + a_mE,$$

являющуюся многочленом от матрицы A. Аналогично определяется многочлен $f(\boldsymbol{A})$ от преобразования $\boldsymbol{A}$. Если $f(z) \not\equiv 0$, а матрица $f(A)$ является нулевой (в этом случае преобразование $f(\boldsymbol{A})$ также, очевидно, является нулевым), то многочлен $f(z)$ называется *аннулирующим* матрицу A и преобразование $\boldsymbol{A}$. Оказывается, что характеристический многочлен $D(z)$ матрицы A аннулирует матрицу A:

$$D(A) = 0.$$

Для доказательства рассмотрим n-мерное векторное пространство R с базисом

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$$

и рассмотрим соответствующую этому базису координатную систему, так что

$$\boldsymbol{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

где координата 1 стоит на j-м месте. Обозначим через $\boldsymbol{A}$ преобразование, которому в выбранном базисе соответствует матрица A. Тогда мы имеем:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j = \sum_s a_j^s \boldsymbol{e}_s$$

или, что то же,

$$\sum_s (a_j^s \boldsymbol{E} - \delta_j^s \boldsymbol{A}) \boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

Положим:

$$L_j^s(z) = a_j^s - \delta_j^s z.$$

Здесь $L_j^s(z)$ есть многочлен относительно z степени нуль или единица, а

$$(L_j^s(z))$$

— матрица, составленная из многочленов. Алгебраическое дополнение элемента $L_j^s(z)$ в этой матрице обозначим через $M_s^j(z)$, так что имеет место соотношение

$$\sum M_i^j(z) L_j^s(z) = \delta_i^s D(z). \tag{4}$$

Умножая соотношение (3) слева на многочлен $M_i^j(\boldsymbol{A})$ и суммируя полученное соотношение по j, получаем, согласно (4):

$$\sum_{s,j} M_i^j(\boldsymbol{A})(a_j^s \boldsymbol{E} - \delta_j^s \boldsymbol{A}) \boldsymbol{e}_s = \sum_{s,j} M_i^j(\boldsymbol{A}) L_j^s(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{e}_s = \sum_s \delta_i^s D(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{e}_s = \\ = D(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}.$$

Таким образом, преобразование $D(\boldsymbol{A})$ переводит все базисные векторы пространства R в нуль и потому является нулевым, а значит и соответствующая преобразованию $D(\boldsymbol{A})$ матрица $D(A)$ также является нулевой:

$$D(A) = 0.$$

Д) В множестве всех многочленов, аннулирующих матрицу A (или преобразование $\boldsymbol{A}$), имеется единственный, с точностью до числового множителя, многочлен $\Delta(z)$ минимальной степени; этот многочлен $\Delta(z)$ является делителем всех остальных многочленов, аннулирующих матрицу A; он называется *минимальным* многочленом, аннулирующим матрицу A. В дальнейшем будет предполагаться, что коэффициент при старшей степени многочлена $\Delta(z)$ равен единице. В случае, если матрица A действительна, многочлен $\Delta(z)$ действителен.

Для доказательства предложения Д) напомним, что если $f(z)$ и $g(z)$ — два произвольных многочлена, а $d(z)$ — их общий наибольший делитель, то имеет место тождество:

$$d(z) = p(z) f(z) + q(z) g(z), \tag{5}$$

где $p(z)$ и $q(z)$ — подходящим образом выбранные многочлены. Существование тождества (5) доказывается при помощи алгоритма деления многочленов. Из соотношения (5) следует, что если многочлены $f(z)$ и $g(z)$ аннулируют матрицу A, то их общий наибольший делитель $d(z)$ также аннулирует матрицу A. Из Г) следует, что многочлены, аннулирующие матрицу A, существуют. Пусть теперь $\Delta(z)$ — многочлен минимальной степени, аннулирующей матрицу A, и $f(z)$ — произвольный многочлен, также аннулирующий матрицу A. Если бы многочлен $f(z)$ не делился на многочлен $\Delta(z)$, то общий наибольший делитель этих многочленов имел бы степень, меньшую чем многочлен $\Delta(z)$, и также аннулировал бы матрицу A, а это по предположению невозможно. Пусть теперь матрица A действительна; тогда

$$0 = \overline{\Delta(A)} = \bar{\Delta}(\bar{A}) = \bar{\Delta}(A).$$

Таким образом, многочлен $\bar{\Delta}(z)$ аннулирует матрицу A и потому делится на $\Delta(z)$, а это возможно лишь при $\Delta(z) = \bar{\Delta}(z)$. Таким образом, предложение Д) доказано.

Е) Пусть $\Delta(z)$ — минимальный аннулирующий многочлен матрицы A. Число λ тогда и только тогда является собственным значением матрицы A, когда оно есть корень многочлена $\Delta(z)$.

Для доказательства обозначим через $\boldsymbol{A}$ преобразование n-мерного координатного векторного пространства, соответствующее матрице A. Заметим, что если $f(z)$ — произвольный многочлен, то

$$\text{из } \boldsymbol{A}\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h} \text{ следует } f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{h} = f(\lambda)\boldsymbol{h}. \tag{6}$$

В самом деле, мы имеем:

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{h} = \boldsymbol{A}\lambda\boldsymbol{h} = \lambda^2\boldsymbol{h}, \ldots, \quad \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{h} = \lambda^m\boldsymbol{h}.$$

Умножая эти соотношения на коэффициенты многочлена $f(z)$ и складывая их, получаем соотношение (6).

Допустим, что λ есть собственное значение матрицы A; тогда существует такой вектор $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$, что $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h}$, и из (6) следует $\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{h} = \Delta(\lambda)\boldsymbol{h}$; но так как $\Delta(\boldsymbol{A}) = 0$, то $\Delta(\lambda) = 0$. Обратно, пусть λ — корень многочлена $\Delta(z)$; тогда $\Delta(z)=(z-\lambda)\Gamma(z)$. Так как $\Delta(z)$ есть минимальный аннулирующий многочлен матрицы A, то многочлен $\Gamma(z)$ не является для нее аннулирующим и потому матрица $\Gamma(A)$, а следовательно, и преобразование $\Gamma(\boldsymbol{A})$, отличны от нуля. Таким образом, существует вектор $\boldsymbol{x}$, для которого $\Gamma(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}'\neq\boldsymbol{0}$, и мы имеем $\boldsymbol{0}=\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\Gamma(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{h}'$, и, следовательно, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}'=\lambda\boldsymbol{h}'$, так что λ есть собственное значение матрицы A.

Итак, предложение Е) доказано.

Координатное векторное пространство R, смотря по надобности, может рассматриваться как действительное, когда в нем берутся только векторы с действительными координатами, или как комплексное, когда в нем берутся векторы с комплексными координатами. Если $\boldsymbol{x}=(x^1, \ldots, x^n)$ есть вектор комплексного пространства R, то $\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ есть вектор, комплексно сопряженный с $\boldsymbol{x}$. Если S есть подпространство комплексного пространства R, то подпространство $\bar{S}$, составленное из всех векторов, комплексно сопряженных с векторами из S, считается комплексно сопряженным с подпространством S.

Комплексное (или действительное) пространство R считается разложенным в прямую сумму своих подпространств S_1 и S_2, если каждый вектор x из R может быть, и притом единственным способом, записан в виде суммы:

$$x=x_1+x_2,$$

где вектор x_i принадлежит подпространству S_i, $i=1, 2$.

Ж) Пусть $\Delta(z)=\Delta_1(z)\Delta_2(z)$ — разложение минимального аннулирующего матрицу A многочлена на два взаимно простых множителя. Обозначим через S_i ($i=1, 2$) линейное подпространство пространства R, состоящее из всех векторов x из R, удовлетворяющих условию $\Delta_i(\boldsymbol{A})x=0$, где $\boldsymbol{A}$ — преобразование с матрицей A. Оказывается, что пространство R распадается в прямую сумму своих подпространств S_1 и S_2. (Если матрица A комплексна, то в формулированном здесь утверждении пространство R следует считать комплексным.) Допустим теперь, что матрица A действительна; тогда следует отметить два важных случая. 1) Множители $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$ действительны; тогда пространство R и его подпространства S_1 и S_2 можно считать действительными. 2) Множители $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$ комплексно сопряжены между собой; тогда пространство R следует считать комплексным, а его подпространства S_1 и S_2 оказываются комплексно сопряженными.

Докажем предложение Ж). Так как множители $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$ взаимно просты, то имеет место тождество

$$1=p_1(z)\Delta_1(z)+p_2(z)\Delta_2(z), \tag{7}$$

где $p_1(z)$ и $p_2(z)$ — надлежащим образом подобранные многочлены (см. (5)). Заметим, что если множители $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$ действительны, то многочлены $p_1(z)$ и $p_2(z)$ могут быть выбраны действительными, так как они получаются при помощи алгоритма деления из многочленов $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$. Пусть теперь x — произвольный вектор из R; в силу (7) имеем:

$$x = p_1(A)\Delta_1(A)x + p_2(A)\Delta_2(A)x.$$

Полагая

$$x_1 = p_2(A)\Delta_2(A)x; \qquad x_2 = p_1(A)\Delta_1(A)x,$$

мы получаем разложение $x = x_1 + x_2$, причем

$$\Delta_1(A)x_1 = \Delta_1(A)p_2(A)\Delta_2(A)x = p_2(A)\Delta(A)x = 0,$$

$$\Delta_2(A)x_2 = \Delta_2(A)p_1(A)\Delta_1(A)x = p_1(A)\Delta(A)x = 0,$$

так что вектор x_i принадлежит подпространству S_i. Если теперь $x = x_1' + x_2'$ — какое-либо разложение вектора x в сумму, в которой x_i' принадлежит S_i ($i = 1, 2$), то в силу (7) мы имеем:

$$x_1' = p_1(A)\Delta_1(A)x_1' + p_2(A)\Delta_2(A)x_1' = p_2(A)\Delta_2(A)(x_1' + x_2') = x_1;$$

точно так же $x_2' = x_2$, и единственность разложения доказана.

Если матрица A действительна и множители $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$ действительны, то, исходя из действительного вектора x, мы получаем действительные векторы x_1 и x_2. Если же матрица A действительна, а множители $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$ комплексно сопряжены, то векторные подпространства S_1 и S_2 в силу самого своего определения комплексно сопряжены.

Таким образом, предложение Ж) доказано.

З) Пусть A — линейное преобразование n-мерного пространства R,

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$$

— совокупность всех собственных значений этого преобразования,

$$\Delta(z) = (z - \lambda_1)^{k_1}(z - \lambda_2)^{k_2}\ldots(z - \lambda_r)^{k_r}$$

— минимальный аннулирующий многочлен преобразования A и

$$D(z) = (-1)^n (z - \lambda_1)^{q_1}(z - \lambda_2)^{q_2}\ldots(z - \lambda_r)^{q_r} \qquad (8)$$

— характеристический многочлен преобразования A. Так как многочлен $D(z)$ делится на многочлен $\Delta(z)$, то

$$q_i \geqslant k_i, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

В силу предложения Ж) пространство R разлагается в прямую сумму своих подпространств $S_1, S_2, \ldots, S_r$, где S_i состоит из всех векторов x, удовлетворяющих условию

$$(A - \lambda_i E)^{k_i} x = 0.$$

Оказывается, что размерность пространства S_i равна q_i. Число q_i называется *кратностью* собственного значения λ_i.

Докажем, что размерность пространства S_i равна q_i. Пространство S_i *инвариантно* относительно преобразования A, т. е. AS_i содержится в S_i. Таким образом, если в пространстве S_i выбран некоторый базис, то преобразованию A, рассматриваемому на S_i, соответствует некоторая матрица A_i порядка p_i, где p_i — размерность пространства S_i. Если базис пространства R составить из базисов всех пространств S_i, то в полученном базисе преобразованию A будет соответствовать матрица A, состоящая из матриц $A_1, \ldots, A_r$, расположенных вдоль диагонали матрицы A. Из этого видно, что характеристический многочлен преобразования A пространства R будет равен произведению

$$D_1(z)\, D_2(z) \ \ldots \ D_r(z),$$

где $D_i(z)$ — характеристический многочлен преобразования A, рассматриваемого на подпространстве S_i. Так как $\Delta_i(z) = (z - \lambda_i)^{k_i}$ есть аннулирующий многочлен преобразования A на подпространстве S_i, то преобразование A на S_i имеет лишь одно собственное значение λ_i, и потому характеристический многочлен $D_i(z)$ имеет вид $(-1)^{p_i}(z - \lambda_i)^{p_i}$, ибо степень его равна порядку матрицы A_i, т. е. размерности p_i пространства S_i. Следовательно, мы имеем $D(z) = (-1)^n (z - \lambda_1)^{p_1} (z - \lambda_2)^{p_2} \ldots (z - \lambda_r)^{p_r}$, и потому $p_i = q_i$ (см. (8)). Таким образом, предложение 3) доказано.

§ 35. Функции матриц

В этом параграфе мы не будем делать различия между преобразованием A и соответствующей матрицей A, так как система координат не будет меняться. Кроме того, в этом параграфе будут использованы некоторые сведения из теории функций комплексного переменного (см., например, И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Физматгиз, 1960).

Матричные степенные ряды

А) Пусть

$$\Delta(z) = (z - \lambda_1)^{k_1} (z - \lambda_2)^{k_2} \ldots (z - \lambda_r)^{k_r}, \tag{1}$$

$$k_i > 0, \quad i = 1, \ldots, r, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_r = k$$

— минимальный аннулирующий многочлен матрицы A, причем

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \tag{2}$$

— его попарно различные корни. В силу предложения Е) § 34 числа (2) составляют совокупность всех собственных значений матрицы A.

Говорят, что *на спектре матрицы A задана функция W*, если каждому собственному значению λ_i матрицы A поставлена в соответствие последовательность чисел

$$W^{(0)}(\lambda_i), \quad W^{(1)}(\lambda_i), \ \ldots, \ W^{(k_i-1)}(\lambda_i), \qquad i=1, \ \ldots, \ r. \tag{3}$$

Если $W(z)$ — некоторая функция комплексного переменного z, голоморфная в точках λ_i, то, понимая под числами (3) значение самой функции и ее производных до порядка k_i-1 в точке λ_i, мы получаем функцию, заданную на спектре матрицы A. Если для двух функций комплексного переменного z значения (3) соответственно совпадают, то говорят, что эти две функции *совпадают на спектре матрицы* A. Оказывается, что два многочлена $f(z)$ и $g(z)$ тогда и только тогда совпадают на спектре матрицы A, когда $f(A)=g(A)$. Далее оказывается, что, каковы бы ни были произвольно заданные числа (3), всегда существует единственный многочлен $\varphi(z)$ степени $\leqslant k-1$, значения которого на спектре матрицы A совпадают с числами (3), т. е.

$$\varphi^{(j)}(\lambda_i)=W^{(j)}(\lambda_i), \qquad j=0, \ \ldots, \ k_i-1, \quad i=1, \ \ldots, \ r. \tag{4}$$

При этом коэффициенты многочлена $\varphi(z)$ являются линейными функциями величин (3) и потому непрерывно зависят от них.

Докажем эти утверждения. Положим $h(z)=f(z)-g(z)$. Если $f(A)=g(A)$, то $h(A)=0$. Далее, если значения многочленов $f(z)$ и $g(z)$ на спектре матрицы A совпадают, то функция $h(z)$ на спектре матрицы A обращается в нуль. Таким образом, чтобы доказать ту часть утверждения А), которая относится к многочленам $f(z)$ и $g(z)$, достаточно доказать, что многочлен $h(z)$ тогда и только тогда аннулирует матрицу A, когда он обращается в нуль на спектре этой матрицы. Докажем это. Допустим, что многочлен $h(z)$ аннулирует матрицу A; тогда в силу предложения Д) § 34 он делится на многочлен $\Delta(z)$ и потому имеет число λ_i своим корнем кратности не меньше k_i (см. (1)), а из этого следует, что он обращается в нуль на спектре матрицы A. Если многочлен $h(z)$ обращается в нуль на спектре матрицы A, то он имеет число λ_i своим корнем кратности не меньше k_i и потому делится на многочлен $\Delta(z)$ (см. (1)), откуда следует, что $h(A)=0$.

Докажем теперь ту часть предложения А), которая относится к функции $\varphi(z)$. Совокупность соотношений (4) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно коэффициентов многочлена $\varphi(z)$; система эта имеет k уравнений и k неизвестных. Для доказательства утверждения А) достаточно установить, что детерминант этой системы отличен от нуля, а для этого в свою очередь достаточно доказать, что в случае обращения в нуль правых частей этих уравнений имеется лишь нулевой многочлен $\varphi(z)$, удовлетворяющий условиям (4). В случае обращения в нуль правых частей уравнений (4) многочлен $\varphi(z)$ обращается в нуль на спектре матрицы A и потому в силу ранее доказанного делится на многочлен $\Delta(z)$; а так как он имеет степень не выше $k-1$, то он тождественно равен нулю.

Таким образом, предложение А) доказано.

Б) Пусть A — действительная матрица; тогда минимальный аннулирующий ее многочлен $\Delta(z)$ действителен (см. § 34, Д)) и потому наряду с каждым его корнем λ_i (см. (1)) имеется комплексно сопряженный ему корень $\bar{\lambda}_i$ той же кратности. Оказывается, что если числа (3) удовлетворяют условиям:

$$W^{(j)}(\bar{\lambda}_i) = \overline{W^{(j)}(\lambda_i)}, \qquad j=0, \ldots, k_i-1, \qquad i=1, \ldots, r, \tag{5}$$

то многочлен $\varphi(z)$, определенный соотношениями (4), действителен, и потому матрица $\varphi(A)$ также действительна.

Для доказательства предложения Б) обозначим коэффициенты многочлена $\varphi(z)$ через $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$. Систему уравнений (4) относительно неизвестных $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ можно, не вникая в подробности, записать теперь в виде:

$$\sum_{\beta=1}^{k} c_\beta^\alpha \varphi^\beta = d^\alpha, \qquad \alpha=1, \ldots, k. \tag{6}$$

Система эта в силу условий (5) обладает тем свойством, что наряду с каждым ее уравнением в ней имеется и комплексно сопряженное ему уравнение, т. е. уравнение

$$\sum_{\beta=1}^{k} \overline{c_\beta^\alpha} \varphi^\beta = \overline{d^\alpha}.$$

Перейдем теперь от равенств (6) к сопряженным им равенствам

$$\sum_{\beta=1}^{k} \overline{c_\beta^\alpha}\, \overline{\varphi^\beta} = \overline{d^\alpha}. \tag{7}$$

Совокупность соотношений (7) представляет собой систему линейных уравнений относительно неизвестных $\overline{\varphi^1}, \ldots, \overline{\varphi^k}$. Однако ввиду сформулированного свойства системы (6), система уравнений (7) совпадает с ней, отличаясь, быть может, лишь порядком нумерации уравнений. Так как система (6) имеет отличный от нуля детерминант, то два ее решения $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ и $\overline{\varphi^1}, \ldots, \overline{\varphi^k}$ совпадают между собой: $\varphi^\alpha = \overline{\varphi^\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, k$, а это и означает, что числа $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ действительны. Таким образом, предложение Б) доказано.

Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m + \ldots \tag{8}$$

— аналитическая функция комплексного переменного z, заданная рядом (8) с радиусом сходимости ρ, так что при $|z|<\rho$ ряд (8) сходится, а при $|z|>\rho$ он расходится.

Для дальнейшего напомним, что ряд

$$f'(z)=a_1+2a_2z+\ldots+ma_mz^{m-1}+\ldots,$$

получаемый из ряда (8) путем формального дифференцирования, имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (8), и сходится внутри круга сходимости к производной $f'(z)$ функции $f(z)$.

Может случиться, что, подставляя вместо z в ряд (8) матрицу A, мы получим сходящийся матричный ряд

$$f(A)=a_0E+a_1A+\ldots+a_mA^m+\ldots \tag{9}$$

(Матричный ряд называется сходящимся, если числовой ряд, составленный из элементов, стоящих в i-й строке и j-м столбце, сходится при любых $i, j=1, \ldots, n$.) В этом случае говорят, что функция $f(z)$ определена на матрице A.

Теорема 29. *Сохраним обозначения предложения* А). *Если все собственные значения матрицы A лежат внутри круга сходимости ряда (8), т. е.*

$$|\lambda_i|<\rho, \quad i=1, \ldots, r,$$

то матричный ряд (9) сходится, так что матрица $f(A)$ определена. Числа

$$f(\lambda_i), \quad i=1, \ldots, r, \tag{10}$$

среди которых, возможно, есть совпадающие, составляют совокупность всех собственных значений матрицы $f(A)$. Далее, если собственные значения λ_i матрицы A лежат и в круге сходимости ряда, определяющего некоторую функцию $g(z)$, так что матрица $g(A)$ определена, то для совпадения матриц $f(A)$ и $g(A)$ необходимо и достаточно, чтобы функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадали на спектре матрицы A.

Доказательство. Составим частичную сумму

$$f_m(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_mz^m$$

ряда (8); тогда при $|z|<\rho$ мы имеем:

$$f^{(j)}(z)=\lim_{m\to\infty}f_m^{(j)}(z).$$

Пусть, далее, $\varphi_m(z)$ — многочлен степени $\leqslant k-1$, совпадающий с многочленом $f_m(z)$ на спектре матрицы A (см. А)). Так как собственные значения (2) матрицы A удовлетворяют условию $|\lambda_i|<\rho$, $i=1, \ldots, r$, то мы имеем:

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m^{(j)}(\lambda_i)=f^{(j)}(\lambda_i), \quad j=0, \ldots, k_i-1, \quad i=1, \ldots, r.$$

Из этого в силу предложения А) следует, что последовательность многочленов $\varphi_m(z)$ покоэффициентно сходится к некоторому многочлену $\varphi(z)$ степени $\leqslant k-1$, причем многочлен $\varphi(z)$ и функция $f(z)$ совпадают на спектре матрицы A. Так как многочлены $\varphi_m(z)$ и $f_m(z)$ совпадают на спектре матрицы A, то мы имеем:

$$f_m(A)=\varphi_m(A);$$

при $m\to\infty$ правая часть стремится к $\varphi(A)$, а это значит, что и левая часть при $m\to\infty$ сходится. Таким образом, ряд (9) сходится к матрице $f(A)=\varphi(A)$.

Докажем теперь, что многочлен

$$\Gamma(z)=[z-f(\lambda_1)]^{k_1}[z-f(\lambda_2)]^{k_2}\ldots[z-f(\lambda_r)]^{k_r}$$

аннулирует матрицу $f(A)$. Для этого рассмотрим многочлен

$$\Phi_m(z)=[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_1)]^{k_1}[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_2)]^{k_2}\ldots$$
$$\ldots[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_r)]^{k_r} \qquad (11)$$

и покажем, что он аннулирует матрицу A. Многочлен $\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_i)$ обращается в нуль при $z=\lambda_i$ и потому он делится на двучлен $z-\lambda_i$. Таким образом, многочлен (11) может быть записан в виде:

$$\Phi_m(z)=\Psi_m(z)\Delta(z)$$

и потому многочлен $\Phi_m(z)$ аннулирует матрицу A, т. е.

$$[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_1)E]^{k_1}[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_2)E]^{k_2}\ldots$$
$$\ldots[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_r)E]^{k_r}=0.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $m\to\infty$, получаем:

$$[f(A)-f(\lambda_1)E]^{k_1}[f(A)-f(\lambda_2)E]^{k_2}\ldots[f(A)-f(\lambda_r)E]^{k_r}=0,$$

а это и значит, что многочлен $\Gamma(z)$ аннулирует матрицу $f(A)$.

Из доказанного, в частности, следует, что все собственные значения матрицы $f(A)$ содержатся среди чисел (10) (см. § 34, Е)). Докажем, что каждое число (10) является собственным значением матрицы $f(A)$. Пусть $\boldsymbol{h}_i$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_i, так что

$$A\boldsymbol{h}_i=\lambda_i\boldsymbol{h}_i.$$

В силу формулы (6) § 34 из этого следует:

$$f_m(A)\boldsymbol{h}_i=f_m(\lambda_i)\boldsymbol{h}_i.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $m\to\infty$, получаем:

$$f(A)\boldsymbol{h}_i=f(\lambda_i)\boldsymbol{h}_i.$$

Таким образом, число $f(\lambda_i)$ есть собственное значение матрицы $f(A)$.

Допустим теперь, что круг сходимости функции $g(z)$ также содержит все собственные значения матрицы A. Тогда в силу доказанного матрица $g(A)$ определена и существует многочлен $\psi(z)$ степени $\leqslant k-1$, совпадающий с функцией $g(z)$ на спектре матрицы A, причем $\psi(A)=g(A)$. Если теперь $f(A)=g(A)$, то $\varphi(A)=\psi(A)$, и в силу предложения А) многочлены $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ совпадают на спектре матрицы A, а следовательно, и функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на спектре матрицы A. Обратно, если функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на спектре матрицы A, то многочлены $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ также совпадают на спектре матрицы A, и потому в силу А) $\varphi(A)=\psi(A)$, но тогда и $f(A)=g(A)$. Таким образом, теорема 29 доказана.

Неявные функции матриц

Пусть $F(z, w)$ — функция двух комплексных переменных, заданная рядом

$$F(z, w)=a+bz+cw+dz^2+ezw+fw^2+\ldots \tag{12}$$

При перемене порядка сомножителей в членах этого ряда (например, при замене произведения $z^\alpha w^\beta$ на $w^\beta z^\alpha$) функция $F(z, w)$ не меняется. Поэтому при подстановке в ряд (12) матриц A и B вместо его аргументов z, w естественно ограничиться случаем, когда матрицы A и B перестановочны между собой. Если ряд (12) сходится при любых значениях переменных z, w, то можно доказать, что, подставляя в этот ряд вместо z и w любые перестановочные матрицы A и B, мы получим сходящийся матричный ряд, который определит некоторую матрицу, обозначаемую через $F(A, B)$. Однако доказывать сходимость этого ряда в общем случае мы не будем, так как ниже рассматриваются лишь такие частные случаи, в которых имеется конечное число членов, зависящих от z, так что фактически речь идет о сходящихся рядах одного комплексного переменного w.

В) Пусть $F(z, w)$ — аналитическая функция двух переменных, определенная рядом (12), сходящимся при всех значениях z, w, и A — заданная матрица. Пусть, далее, каждому собственному значению λ_i матрицы A поставлено в соответствие число μ_i, удовлетворяющее условиям

$$F(\lambda_i, \mu_i)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial w}F(\lambda_i, \mu_i)\neq 0, \qquad i=1, \ldots, r. \tag{13}$$

Тогда существует перестановочная с A матрица B, удовлетворяющая условию

$$F(A, B)=0. \tag{14}$$

Далее, если коэффициенты ряда (12) и матрица A действительны и если для каждых двух комплексно сопряженных собственных значений λ_l и $\lambda_j = \bar{\lambda}_l$ матрицы A соответствующие числа μ_l и μ_j также комплексно сопряжены: $\mu_l = \bar{\mu}_j$, то существует действительная перестановочная с A матрица B, удовлетворяющая условию (14).

Докажем предложение В). Из соотношений (13) в силу теоремы о неявных функциях комплексного переменного следует, что для любого $i = 1, \ldots, r$ существует функция $W(z) = W_i(z)$, определенная для значений z, близких к λ_i, и удовлетворяющая условиям

$$F(z, W(z)) = 0, \tag{15}$$

$$W(\lambda_i) = \mu_i, \qquad i = 1, \ldots, r. \tag{16}$$

Для нахождения производных $W^{(j)}(\lambda_i)$ функции $W(z)$ в точке $z = \lambda_i$ нужно последовательно дифференцировать соотношение (15) по z, подставляя в нем затем $z = \lambda_i$:

$$\frac{d^j}{dz^j} F(z, W(z))\,|_{z=\lambda_i} = 0. \tag{17}$$

Из этих соотношений можно последовательно определять числа

$$W^{(j)}(\lambda_i), \qquad j = 1, \ldots, \qquad k_i - 1, \; i = 1, \ldots, r. \tag{18}$$

Исходя из чисел (16), (18), построим многочлен $\varphi(z)$, удовлетворяющий условиям (4). Покажем, что матрица $B = \varphi(A)$, очевидно, перестановочная с A, удовлетворяет условию (14).

Для доказательства подставим в ряд (12) значение $w = \varphi(z)$. Мы получим тогда функцию $\Phi(z) = F(z, \varphi(z))$ переменного z. Для доказательства равенства (14) достаточно установить, что функция $\Phi(z)$ равна нулю на спектре матрицы A (см. теорему 29). При вычислении производных $\Phi^{(j)}(\lambda_i)$ функции $\Phi(z)$ в точке λ_i, $j = 0, 1, \ldots, k_i - 1$, мы можем многочлен $\varphi(z)$ заменить функцией $W(z)$, так как у этих функций производные порядков $0, 1, \ldots, k_i - 1$ в точке λ_i соответственно равны. Но при замене в $F(z, \varphi(z))$ многочлена $\varphi(z)$ функцией $W(z)$, определенной вблизи λ_i, мы получаем тождественный нуль (см. (15)). Таким образом, функция $\Phi(z)$ обращается в нуль на спектре матрицы A.

Докажем теперь, что если коэффициенты ряда (12) и матрица A действительны, а числа μ_i удовлетворяют условиям сопряженности, т. е.

$$W(\bar{\lambda}_i) = \overline{W(\lambda_i)}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

то многочлен $\varphi(z)$, а следовательно, и матрица $B = \varphi(A)$ действительны. В самом деле, при этих предположениях числа $W^{(j)}(\lambda_i)$, вычисляемые из условий (17), удовлетворяют условиям (5), и потому многочлен $\varphi(z)$ действителен (см. Б)).

Итак, предложение В) доказано.

Г) Аналитическая функция e^z комплексного переменного z определяется рядом

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^m}{m!} + \ldots, \tag{19}$$

который сходится при всех значениях переменного z. Как известно, для двух произвольных комплексных чисел z и w имеет место тождество $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, вытекающее из свойств ряда (19). Отсюда следует, что для двух перестановочных между собой квадратных матриц A и B имеет место тождество

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B. \tag{20}$$

Оказывается, что для любой невырожденной матрицы A существует перестановочная с A матрица B, удовлетворяющая условию

$$e^B = A. \tag{21}$$

Далее оказывается, что для любой действительной невырожденной матрицы A существует действительная матрица B_1, перестановочная с A и удовлетворяющая условию

$$e^{B_1} = A^2. \tag{22}$$

Для доказательства разрешимости уравнения (21) относительно B достаточно применить предложение В) к функции $F(z, w) = e^w - z$. В самом деле, так как матрица A невырождена, то все ее собственные значения λ_i отличны от нуля, и потому существуют числа μ_i, удовлетворяющие условию $e^{\mu_i} - \lambda_i = 0$ (см. первое из соотношений (13)), причем второе из соотношений (13) здесь, очевидно, выполнено.

Для доказательства существования действительной матрицы B_1, удовлетворяющей условию (22), достаточно к функции $F(z, w) = e^w - z^2$ применить вторую часть предложения В). В самом деле, если λ_i есть действительное, положительное или отрицательное число, то положим $\mu_i = \ln \lambda_i^2$, взяв действительную ветвь логарифма. Если же λ_i — комплексное число, то за $W(\lambda_i)$ и $W(\overline{\lambda}_i)$ можно принять комплексно сопряженные числа.

Итак, предложение Г) доказано.

§ 36. Жорданова форма матрицы

А) Последовательность векторов

$$h_1, \ldots, h_m \tag{1}$$

пространства R называется *серией* с собственным значением λ относительно преобразования A, если выполнены соотношения

$$h_1 \neq 0; \quad Ah_1 = \lambda h_1, \quad Ah_2 = \lambda h_2 + h_1, \ldots, \quad Ah_m = \lambda h_m + h_{m-1}.$$

Если матрица A преобразования $\boldsymbol{A}$ действительна, то последовательность

$$\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_m, \tag{2}$$

очевидно, образует серию с собственным значением $\bar{\lambda}$. Серии (1) и (2) будем называть *комплексно сопряженными*. Если число λ и векторы (1) действительны, то серия считается *действительной*.

Теорема 30. *Существует базис пространства R, состоящий из всех векторов одной или нескольких серий относительно преобразования $\boldsymbol{A}$. Если матрица A действительна, то серии, составляющие базис, можно выбрать так, чтобы серии с действительными собственными значениями были действительными, а серии с комплексными собственными значениями были попарно сопряжены.*

Доказательство. Пусть

$$\Delta(z) = (z - \lambda_1)^{k_1} \ldots (z - \lambda_r)^{k_r} \tag{3}$$

— минимальный аннулирующий матрицу A многочлен, где

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$$

— попарно различные собственные значения матрицы A. В силу предложения Ж) § 34 пространство R можно разбить в прямую сумму его подпространств $S_1, \ldots, S_r$, соответствующих множителям (3), так что пространство S_i состоит из всех векторов $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющих условию $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E})^{k_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Это значит, что аннулирующим многочленом преобразования $\boldsymbol{A}$, рассматриваемого на пространстве S_i, является многочлен $(z - \lambda_i)^{k_i}$. Легко видеть, что этот многочлен является минимальным.

Допустим, что матрица A действительна. Объединим сначала все множители из (3) с действительными λ_i в множитель $\Delta_1(z)$, а все остальные — в множитель $\Delta_2(z)$. Тогда $\Delta(z) = \Delta_1(z)\Delta_2(z)$ есть разложение на действительные взаимно простые множители, и соответствующее разложение пространства R в прямую сумму подпространств R_1 и R_2 можно считать действительным. Пространство R_1 разобьем теперь в прямую сумму действительных слагаемых, соответствующих действительным собственным значениям λ_i, и в этих действительных прямых слагаемых мы в дальнейшем построим базисы, состоящие из действительных серий. Пространство R_2 разобьем на попарно комплексно сопряженные прямые слагаемые, соответствующие комплексно сопряженным собственным значениям, и в этих комплексно сопряженных пространствах мы в дальнейшем построим базисы, состоящие из комплексно сопряженных серий; при этом достаточно построить базис из серий в одном из двух комплексно сопряженных пространств, а во втором взять комплексно сопряженный базис.

Итак, нам достаточно доказать, что если линейное преобразование A, действующее в векторном пространстве S, имеет минимальный аннулирующий многочлен $(z-\lambda)^k$, то в этом пространстве можно выбрать базис, состоящий из серий относительно преобразования A, причем из серий действительных, если пространство S, матрица A и число λ действительны.

Перейдем к доказательству этого утверждения. Для краткости положим $C = A - \lambda E$ и обозначим через T_i совокупность всех векторов x из S, удовлетворяющих условию

$$C^i x = 0.$$

Мы имеем тогда

$$S = T^k \supset T^{k-1} \supset \ldots \supset T^1 \supset T^0 = 0.$$

Пусть

$$h_i^1, \ldots, h_i^r \qquad (l = 1, \ldots, k)$$

— система векторов из T^l, линейно независимых относительно пространства T^{i-1}; это значит, что вектор

$$a_1 h_i^1 + \ldots + a_r h_i^r$$

может принадлежать пространству T^{i-1} лишь при условии

$$a_1 = \ldots = a_r = 0.$$

Покажем, что при фиксированных l и j векторы

$$h_{i-j}^\alpha = C^j h_i^\alpha \qquad (j < i) \tag{4}$$

принадлежат пространству T_{i-j} и линейно независимы относительно пространства T_{i-j-1}. Мы имеем:

$$C^{i-j} h_{i-j}^\alpha = C^i h_i^\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r),$$

и, следовательно, векторы (4) принадлежат пространству T_{i-j}. Допустим теперь, что вектор

$$a_1 h_{i-j}^1 + \ldots + a_r h_{i-j}^r = x$$

принадлежит пространству T_{i-j-1}. Тогда имеем:

$$0 = C^{i-j-1} x = C^{i-1} (a_1 h_i^1 + \ldots + a_r h_i^r),$$

а это значит, что вектор $a_1 h_i^1 + \ldots + a_r h_i^r$ принадлежит пространству T_{i-1} и потому числа $a_1, \ldots, a_r$ равны нулю.

Выберем теперь максимальную систему векторов

$$h_k^1, \ldots, h_k^{r_k} \tag{5}$$

пространства T_k, линейно независимых относительно пространства T_{k-1}. По доказанному векторы

$$h^{\alpha}_{k-1} = Ch^{\alpha}_{k} \qquad (\alpha = 1, \ldots, r_k) \tag{6}$$

принадлежат пространству T_{k-1} и линейно независимы относительно пространства T_{k-2}; таким образом, систему (6) можно дополнить до максимальной системы

$$h^{1}_{k-1}, \ldots, h^{r_{k-1}}_{k-1} \qquad (r_{k-1} \geqslant r_k) \tag{7}$$

векторов пространства T_{k-1}, линейно независимых относительно пространства T_{k-2}. Продолжая этот процесс дальше, мы построим в пространстве $T_l\,(l > 0)$ максимальную систему векторов

$$h^{1}_{l}, \ldots, h^{r_l}_{l}, \tag{8}$$

линейно независимых относительно пространства T_{l-1}, причем будут выполнены соотношения

$$h^{\alpha}_{l} = Ch^{\alpha}_{l+1} \qquad (\alpha = 1, \ldots, r_{l+1}; \quad r_l \geqslant r_{l+1}).$$

Докажем теперь, что совокупность $\sum_j$ всех векторов, принадлежащих всем системам (8), $l = j, j-1, \ldots, 1$, составляет базис пространства T_j. Доказательство будем вести индуктивно по числу j. Для $j = 1$ система $\sum_1$ совпадает с системой (8) при $j = 1$ и потому является базисом пространства $T_1\,(T_0 = \mathbf{0})$. Допустим, что наше утверждение доказано для системы $\sum_j$, и докажем его для системы $\sum_{j+1}$. Допустим, что имеет место соотношение

$$a_1 h^{1}_{j+1} + \ldots + a_{r_{j+1}} h^{r_{j+1}}_{j+1} + b_1 h^{1}_{j} + \ldots + b_{r_j} h^{r_j}_{j} + \ldots = \mathbf{0}. \tag{9}$$

Применяя к соотношению (9) преобразование B^j, получаем:

$$a_1 h^{1}_{1} + \ldots + a_{r_{j+1}} h^{r_{j+1}}_{1} = \mathbf{0},$$

а это возможно лишь при условии $a_1 = \ldots = a_{r_{j+1}} = 0$; таким образом, в соотношение (9) могут входить лишь векторы системы $\sum_j$ и, следовательно, по предположению индукции, соотношение (9) тривиально. Пусть теперь x — произвольный вектор пространства T_{j+1}. Так как система (8) при $l = j+1$ есть максимальная линейно независимая система относительно пространства T_j, то существует такой вектор

$$y = a_1 h^{1}_{j+1} + \ldots + a_{r_{j+1}} h^{r_{j+1}}_{j+1},$$

что вектор $x - y$ принадлежит пространству T_j и в силу предложения индукции выражается линейно через векторы системы $\sum_j$, а это значит, что вектор x выражается линейно через векторы системы $\sum_{j+1}$.

Итак, доказано, что система $\sum_k$ есть базис пространства $S=T_k$.

Если пространство S, матрица A и число λ действительны, то, выбирая векторы системы (5) действительными, мы получаем действительную систему (6), которую можно дополнить до действительной системы (7). Продолжая таким образом, мы получаем действительную систему $\sum_k$.

Покажем теперь, что система $\sum_k$ состоит из серий. Именно, покажем, что векторы h_1^α, h_2^α, ... образуют серию с собственным значением λ. Мы имеем:

$$0 = Ch_1^\alpha = (A - \lambda E)\, h_1^\alpha,$$

так что $Ah_1^\alpha = \lambda h_1^\alpha$; далее,

$$h_1^\alpha = Ch_2^\alpha = (A - \lambda E)\, h_2^\alpha,$$

так что $Ah_2^\alpha = \lambda h_2^\alpha + h_1^\alpha$, и т. д.

Итак, теорема 30 доказана.

В построенном согласно теореме 30 базисе преобразованию A соответствует уже не исходная матрица $A=(a_j^i)$, а некоторая новая матрица $B=(b_j^i)$, имеющая особо простую форму, называемую *жордановой*. Таким образом, теорема 30 является *теоремой о приведении матрицы к жордановой форме*. Разберем этот вопрос подробнее.

Б) Жордановой клеткой порядка m с собственным значением λ называется квадратная матрица (g_j^i) порядка m, определяемая соотношениями

$$g_i^i = \lambda, \quad i = 1, \ldots, m; \quad g_{i+1}^i = 1, \quad i = 1, \ldots, m-1;$$
$$g_j^i = 0 \text{ при } j - i < 0 \text{ и при } j - i > 1,$$

т. е. матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что для каждой квадратной матрицы A порядка n можно подобрать такую невырожденную квадратную матрицу S, что матрица $B = SAS^{-1}$, получаемая из матрицы A путем трансформации матрицей S, имеет жорданову форму, т. е. состоит из одной или нескольких жордановых клеток, расположенных по ее главной диагонали, в то время как все элементы ее, не входящие в жордановы клетки, равны нулю.

Докажем это. Пусть R — координатное векторное пространство размерности n и A — линейное преобразование, соответствующее (в некоторой системе координат) матрице A. Пусть теперь $f_1, \ldots, f_n$ — базис пространства R, составленный из серий (см. теорему 30). Мы предположим векторы $f_1, \ldots, f_n$ расположенными в таком порядке, что векторы каждой серии идут в последовательности $f_1, \ldots, f_n$ один за другим. Обозначим через $B = (b^i_j)$ матрицу преобразования A в базисе $f_1, \ldots, f_n$. Пусть

$$h_1 = f_1, \ \ldots, \ h_m = f_m$$

— первая серия, входящая в последовательность $f_1, \ldots, f_n$ и λ — соответствующее собственное значение. Тогда, как это непосредственно следует из определения серии, мы имеем:

$$b^i_i = \lambda, \quad i = 1, \ldots, m; \quad b^i_{i+1} = 1; \quad i = 1, \ldots, m-1;$$

$$b^i_j = 0 \text{ при } i+1 < j \leqslant m \text{ и при } i > j \leqslant m.$$

Таким образом, первой серии последовательности $f_1, \ldots, f_n$ соответствует первая жорданова клетка в матрице B. Точно так же второй серии базиса $f_1, \ldots, f_n$ будет соответствовать вторая жорданова клетка в матрице B, и т. д. Так как переход от матрицы A к матрице B осуществляется при помощи трансформации (см. § 34, А)), то $B = SAS^{-1}$.

Таким образом, предложение Б) доказано.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ