КЛАССИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ
МАТЕМАТИКА

И. Г. Петровский

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 517.91/4
ББК 22.161.1
П 30

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 08-01-07069

Петровский И. Г. **Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 208 с. — ISBN 978-5-9221-1144-7.

Книга представляет собой учебник по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений. Тщательно продуманное изложение дало возможность в небольшом объеме вместить обширный материал. Более детально и строго, чем в других руководствах, рассмотрены уравнения простых типов. Подробно изложены общие теоремы о разрешимости уравнений и систем уравнений с непрерывными правыми частями. Теория линейных уравнений сопровождается оригинальным изложением канонической формы систем. Книга включает в себя дополнение, содержащее теорию линейных и нелинейных уравнений с частными производными 1-го порядка. Большое количество задач значительно расширяет содержание книги.

Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебного пособия для физико-математических факультетов университетов.

ISBN 978-5-9221-1144-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть II.
Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Предисловие к первому изданию

Эти лекции я читал в 1936/37 уч. году в Саратовском государственном университете и (с небольшими изменениями) в Московском государственном университете. Я не стремился изложить возможно больше методов интегрирования, применимых для различных частных типов дифференциальных уравнений; на русском языке уже имеются курсы, где эти методы достаточно полно изложены. Я не старался также рассказать о всех отделах теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Из всей этой теории я выбрал лишь несколько вопросов, но их я старался изложить по возможности цельно и строго — так, как теперь излагается большинство математических дисциплин. Я не предполагал у моих слушателей знакомства с теорией аналитических функций и потому необходимые для моего курса сведения из этой теории или разъяснял или точно указывал, где их можно найти.

Я должен выразить благодарность А. И. Барабанову, записки которого легли в основу изложения первых 21 параграфов, В. В. Степанову, С. А. Гальперну и А. Д. Мышкис, которые просмотрели всю мою рукопись и сделали ряд ценных указаний.

1939 г. *И. Петровский*

Предисловие к третьему изданию

В третьем издании я заменил параграф о сопряженных уравнениях параграфом о нулях линейных однородных уравнений второго порядка. А. Д. Мышкис добавил ряд задач.

15 февраля 1949 г. *И. Петровский*

Часть I

ОДНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ 1-ГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Глава I

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Определения, примеры

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

между независимым переменным x, его функцией y и производными y', y'', ..., $y^{(n)}$. Функция $y = \varphi(x)$ [1] называется *решением* этого дифференциального уравнения, если после замены y на $\varphi(x)$, y' на $\varphi'(x)$, ..., $y^{(n)}$ на $\varphi^{(n)}(x)$ оно обращается в тождество. Всюду, где нет особой оговорки, мы будем считать, что рассматриваемые величины принимают только действительные значения.

Таким образом в обыкновенных дифференциальных уравнениях неизвестная функция зависит только от одного аргумента. В противоположность этому в уравнениях с частными производными неизвестные функции зависят от нескольких независимых переменных. В дальнейшем, говоря о дифференциальных уравнениях, мы будем иметь в виду всюду, кроме добавления, только обыкновенные дифференциальные уравнения.

К обыкновенным дифференциальным уравнениям приводят многие вопросы естествознания. В качестве иллюстрации рассмотрим два следующих примера.

---

[1] Я считаю всюду функции однозначными.

Пример 1. Допустим, что в каждый момент времени известна скорость точки, движущейся по оси Ox; пусть она равна $f(t)$, где $f(t)$ непрерывна и ограничена. Будем считать, кроме того, что известна абсцисса x_0 этой точки в некоторый определенный момент $t = t_0$. Требуется найти закон движения точки, т. е. зависимость абсциссы движущейся точки от времени.

Эта задача сводится к нахождению того решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t),$$

которое при $t = t_0$ обращается в x_0. Из интегрального исчисления известно, что такое решение дается формулой

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau.$$

Пример 2. Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна наличному количеству радия. Допустим, что в момент t_0 имелось R_0 *г* радия. Требуется определить количество R *г* радия в любой момент t.

Если коэффициент пропорциональности обозначить через c $(c > 0)$, то задача эта сводится к нахождению того решения дифференциального уравнения

$$\frac{dR}{dt} = -cR,$$

которое при $t = t_0$ обращается в R_0. Таким решением будет функция

$$R = R_0 e^{-c(t-t_0)}.$$

Из рассмотренных примеров видно, что одному и тому же дифференциальному уравнению могут удовлетворять очень многие функции. Именно поэтому для определения искомой функции задавалось не только дифференциальное уравнение, которому она должна удовлетворять, но также и ее значение (*начальное значение*) при каком-нибудь определенном значении аргумента. В рассмотренных нами примерах начальные значения определяли единственным образом соответствующие им решения дифференциальных уравнений.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является разыскание всех решений данного дифференци-

ального уравнения и изучение свойств этих решений. Нахождение решений дифференциального уравнения называют *интегрированием* этого уравнения.

§ 2. Геометрическая интерпретация. Обобщение задачи

Будем рассматривать дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где функция $f(x, y)$ определена в некоторой области G [1]) плоскости (x, y). Это уравнение задает в каждой точке области значение углового коэффициента касательной к проходящему через эту точку графику решения уравнения (1). Если в каждой точке (x, y) области G представить с помощью некоторого отрезка [2]) направление касательной, определяемое значением $f(x, y)$, то получится *поле направлений.* Тогда поставленную прежде задачу нахождения решения дифференциального уравнения можно сформулировать так: требуется найти кривую $y = \varphi(x)$, которая в каждой своей точке имеет заданную уравнением (1) касательную или, как часто говорят, заданное уравнением (1) направление.

С геометрической точки зрения в такой постановке задачи представляются мало естественными следующие обстоятельства:

1) Требуя, чтобы угловой коэффициент заданного в любой точке (x, y) области G направления равнялся $f(x, y)$, мы тем самым исключаем направления, параллельные оси Oy [3]).

---

[1]) *Областью* называется непустое множество G точек, обладающее следующими двумя свойствами: 1) каждая точка G есть *внутренняя*, т. е. она имеет окрестность, целиком принадлежащую G; 2) множество G связно, т. е. любые две его точки можно соединить состоящей из конечного числа звеньев ломаной, целиком лежащей внутри G.

Граничными точками области называются те точки, которые являются предельными для точек области, но не принадлежат области. Совокупность всех граничных точек называется *границей* области.

Замкнутой областью $\overline{G}$ называется область вместе с ее границей.

[2]) Оба направления по этому отрезку для нас безразличны.

[3]) Мы всюду рассматриваем только конечные величины.

2) Рассматривая только кривые, служащие графиками функций от x, мы тем самым исключаем из рассмотрения те линии, которые некоторыми перпендикулярами к оси x-ов пересекаются больше одного раза.

Поэтому мы несколько обобщим предыдущую постановку задачи. Именно мы будем допускать, что поле направлений в некоторых точках параллельно оси Oy. И в таких точках, где угловой коэффициент по отношению к оси Ox не имеет смысла, мы будем пользоваться угловым коэффициентом по отношению к оси Oy. Соответственно этому мы будем наряду с дифференциальным уравнением (1) рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x, y), \tag{1'}$$

где $f_1(x, y) = \dfrac{1}{f(x, y)}$, если $f(x, y) \neq 0$, используя второе уравнение там, где первое не имеет смысла, а второе имеет смысл. Задачу же интегрирования дифференциальных уравнений (1), (1′) мы поставим так: *в области G найти все линии*[1]*, имеющие в каждой точке направление, заданное уравнениями* (1) *и* (1′)[2]. Эти линии (кривые) мы будем называть *интегральными линиями* (кривыми) уравнений (1), (1′) или поля направлений, задаваемого этими уравнениями. Вместо множественного числа «уравнения (1), (1′)», мы часто будем

---

[1] Линией мы будем называть множество точек (x, y), даваемых уравнениями: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, когда t пробегает значения некоторого интервала (a, b); в частности может быть $a = -\infty$ и $b = +\infty$. Мы будем предполагать, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные и что всегда $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$. Каждая точка $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$ такой линии лежит на некотором куске ее, который служит графиком, или функциональной зависимости y от x, или функциональной зависимости x от y. Действительно, по крайней мере одно из двух чисел $\varphi'(t_0)$ и $\psi'(t_0)$ отлично от 0. Пусть, например, $\varphi'(t_0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности $\varphi'(t)$ она сохраняет знак на некотором интервале значений t от $t_0 - \varepsilon$ до $t_0 + \varepsilon$. Поэтому при этих значениях t можно разрешить относительно t уравнение $x = \varphi(t)$. Пусть после этого получим $t = \chi(x)$. Подставляя это значение t в уравнение $y = \psi(t)$, получим $y = \psi[\chi(x)]$, т. е. y есть функция от x.

[2] Иногда поле направлений бывает задано не только внутри G, но и на некоторой части ее границы или даже на всей границе. В таком случае может быть, что и интегральные линии проходят не только внутри G, но и по некоторой части ее границы.

употреблять единственное число: «уравнение (1), (1′)». Ясно, что график всякого решения уравнения (1) будет интегральной кривой уравнения (1), (1′), но не всякая интегральная кривая уравнения (1), (1′) будет графиком решения уравнения (1). В дальнейшем, если будет явно указано, что

$$f(x,\, y) = \frac{M(x,\, y)}{N(x,\, y)},$$

то мы наряду с уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,\, y)}{N(x,\, y)} \tag{2}$$

не будем выписывать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{N(x,\, y)}{M(x,\, y)} = f_1(x,\, y). \tag{2′}$$

Иногда же мы будем такие уравнения записывать в более симметричной относительно x и y форме так:

$$M\,dx - N\,dy = 0. \tag{3}$$

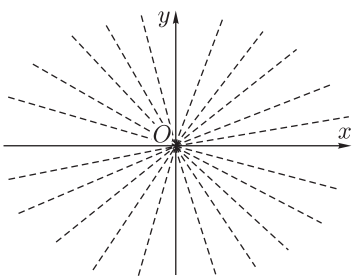
Пример 1. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{4}$$

задает поле направлений всюду за исключением начала координат. Схематически оно изображено на черт. 1. Все определяемые им направления проходят через начало координат. Ясно, что при любом k функции

$$y = kx \tag{5}$$

являются решениями уравнения (4). Совокупность же всех интегральных линий этого уравнения дается соотношением



Черт. 1

$$ax + by = 0, \tag{6}$$

где a и b — любые постоянные, не равные нулю одновременно. Ось Oy является его интегральной линией, но не служит графиком его решения.

Так как уравнение (4) не определяет поля направлений в начале координат, то линии (5) и (6) являются интегральными всюду за исключением, конечно, начала координат. Поэтому правильнее говорить, что интегральными линиями уравнения (4) являются не прямые, проходящие через начало координат, а полупрямые, выходящие из начала координат.

Пример 2. Уравнение

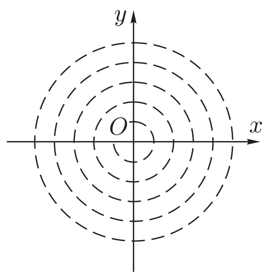
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{7}$$

задает поле направлений всюду, за исключением начала координат. Схематически оно изображено на черт. 2. Направления, задаваемые в точке (x, y) уравнениями (4) и (7), взаимно перпендикулярны. Ясно, что все окружности, имеющие центр в начале координат, будут интегральными кривыми уравнения (7). Решениями же этого уравнения будут функции

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2}$$

и

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R < x < R).$$



Черт. 2

Условимся в следующей терминологии:

1. Для краткости мы будем иногда вместо слов: «график решения проходит через точку (x_0, y_0)», говорить: «*решение проходит через точку* (x_0, y_0)».

2. Функцию $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ мы будем называть *общим решением* рассматриваемого дифференциального уравнения *в области* G, если при соответствующем выборе постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ эта функция обращается в любое решение этого уравнения, график которого лежит в G[1].

3. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$ интегральной кривой уравнения (1), (1′) мы будем называть *интегралом дифференциального уравнения* (1), (1′).

[1] Это определение, как и определение 4, не совпадает с обычным.

4. Уравнение

$$\Phi(x,\, y,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n) = 0$$

мы будем называть *общим интегралом* данного дифференциального уравнения в области G, если при соответствующем выборе постоянных C_1, C_2, …, C_n это уравнение дает любую интегральную кривую нашего уравнения, проходящую в области G.

Так, например, в первом из разобранных примеров соотношение (5) давало общее решение уравнения (4) во всей плоскости $(x,\, y)$ за исключением оси Oy, а уравнение (6) давало общий интеграл этого уравнения во всей плоскости $(x,\, y)$ за исключением начала координат. Во втором же примере уравнение

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2}$$

давало общее решение во всей полуплоскости $y > 0$, а уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{7'}$$

давало общий интеграл нашего дифференциального уравнения во всей плоскости $(x,\, y)$ за исключением начала координат. Что у уравнения (4), соответственно (7), нет других интегральных линий, кроме линий (6), соответственно (7′), будет доказано в § 5.

Задачи. 1. У какой области на плоскости нет границы? 2. Начертить интегральные линии уравнений:

$$\text{а) } \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{|xy|}, \quad \text{б) } \frac{dy}{dx} = \frac{|x+y|}{x+y}, \quad \text{в) } \frac{dy}{dx} = -\frac{x+|x|}{y+|y|},$$

$$\text{г) } \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0 \text{ при } y \neq x, \\ 1 \text{ при } y = x, \end{cases} \quad \text{д) } \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 1 \text{ при } y \neq x, \\ 0 \text{ при } y = x. \end{cases}$$

Указать те области, где эти уравнения определяют поле направлений.

3. Пусть дана линия $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a < t < b$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют указанным в примечании на стр. 13 условиям. Пусть $a < a' < b' < b$. Докажите тогда следующие утверждения:

а) отрезок $a' \leqslant t \leqslant b'$ можно разбить на конечное число таких примыкающих друг к другу отрезков, что соответствующие части рассматриваемой линии являются графиками либо однозначной непрерывно дифференцируемой функции $y = y(x)$, либо функции $x = x(y)$ с такими же свойствами;

б) существует такое постоянное $\varepsilon > 0$, что при всяком t' ($a' \leqslant t' \leqslant b'$) участок рассматриваемой линии, соответствующий отрезку $t' \leqslant t \leqslant t' + \varepsilon$, не имеет точек самопересечения;

в) отношение длины любого участка линии с концами, соответствующими $t = t_1$ и $t = t_2$ ($a' \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b'$) к $t_2 - t_1$, ограничено и превосходит некоторую положительную постоянную.

4. Являются ли независимыми требования:

а) чтобы поле направлений не содержало направлений, параллельных оси Oy;

б) чтобы все интегральные линии были графиками функций от x?

Глава II

ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 3. Уравнения вида $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Случай 1. $f(x)$ непрерывна при $a < x < b$. Как известно, одним из решений этого дифференциального уравнения будет функция

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi) d\xi$$

(x_0 и x принадлежат интервалу (a, b)); все же другие решения будут отличаться от него лишь аддитивной постоянной. Значит, все интегральные кривые получаются из одной сдвигом, параллельным оси Oy. Общим решением здесь будет функция

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi) d\xi + C.$$

Как только в полосе $a < x < b$ зададим точку (x_0, y_0), через которую должна проходить интегральная кривая, постоянная C определится единственным образом: $C = y_0$. Значит, через каждую точку (x_0, y_0) этой полосы проходит одна и только одна интегральная кривая, а именно

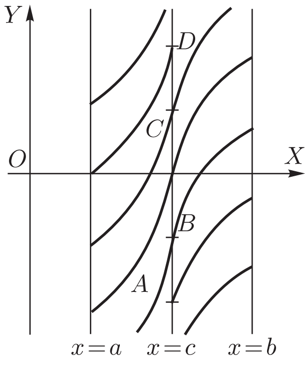
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi) d\xi.$$

Случай 2. $f(x) \to \infty$ при $x \to c$ $(a < c < b)$, оставаясь в остальных точках интервала (a, b) непрерывной. Зададим при $x = c$ поле направлений уравнением $\frac{dx}{dy} = 0$.

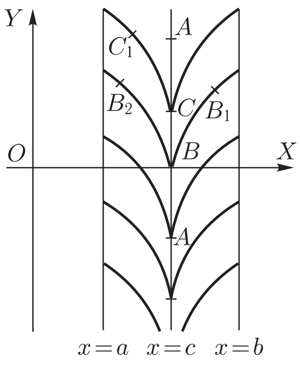
В этом случае при приближении к прямой $x = c$ поле направлений становится все круче и круче. Однако на открытых полосках $a < x < c$ и $c < x < b$ дело будет обстоять так же, как и в предыдущем случае: если точка (x_0, y_0) лежит, например, на первой из этих полос, то через нее проходит одна и только одна интегральная линия, лежащая в этой полосе. Она будет даваться уравнением

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

Если при $x \to c - 0$ интеграл $\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$ сходится, то эта линия при $x \to c - 0$ будет приближаться к некоторой определенной точке прямой $x = c$ (черт. 3). В противном случае линия $y = y(x)$ будет при $x \to c - 0$ асимптотически приближаться к прямой $x = c$ (черт. 4).



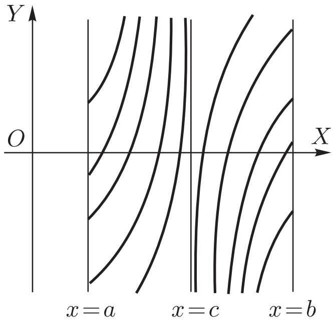
Черт. 3.



Черт. 3а.

Аналогичным образом можно исследовать поведение интегральных кривых на полоске $c < x < b$. Два из возможных здесь случаев изображены на прилагаемых чертежах 3 и 4, которые сделаны в предположении, что если интеграл

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi, \quad a < x_0 < c \tag{8}$$



Черт. 4

сходится (расходится) при $x \to c-0$, то также сходится (соответственно расходится) и интеграл

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi, \quad c < x_0 < b \qquad (9)$$

при $x \to c+0$ и что $f(x) \to +\infty$ при $x \to c$.

Прямая $x = c$ также есть интегральная линия.

Пусть мы рассматриваем все кривые только в полосе $a < x < b$. Тогда в случае сходимости интегралов (8) и (9) при $x \to c$ через одну и ту же точку $A(x_0, y_0)$ всегда проходит бесконечное множество интегральных кривых нашего уравнения. Действительно, пусть, например, $a < x_0 < c$. Тогда любая линия вида $ABCD$ (черт. 3) будет интегральной.

В случае, когда интегралы (8) и (9) сходятся при $x \to c \pm 0$, но

$$f(x) \xrightarrow[x\to c+0]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x\to c-0]{} -\infty,$$

поведение интегральных линий схематически изображено на черт. 3а. Тогда через каждую точку A прямой $x = c$ проходит бесконечное множество интегральных линий вида AA_1, ABB_1, ACC_1, ... Через каждую же точку, лежащую внутри полосы $a < x < c$ или $c < x < b$, например, через точку B_1, в этом случае проходит только одна интегральная линия B_1BA. Кривые вида B_1BB_2, имеющие излом в точке B, мы не считаем интегральными линиями в соответствии с замечанием [1]) на стр. 13.

В случае расходимости интегралов (8) и (9) через каждую точку полосы $a < x < b$ проходит одна и только одна интегральная линия.

Случай сходимости только одного из интегралов (8) и (9) мы предоставим разобрать читателю.

Задачи. 1. Какие случаи возможны, если $f(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$, $\varphi(c) = 0$ и $\varphi'(c)$ существует? Предполагается, что $\varphi(x)$ всюду непрерывна и $\varphi(x) \neq 0$ при $x \neq c$.

2. Представьте картину поведения интегральных линий уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + 1/e^x},$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x} \sin\frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = x^a \sin\frac{1}{x} \text{ при различных } a.$$

В частности, установите картину поведения этих интегральных линий при $x \to 0$.

§ 4. Уравнения вида $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$

Это уравнение в сущности отличается от предыдущего только тем, что x и y поменялись ролями. Если $f(y)$ непрерывна при $a < y < b$ и не обращается в нуль в этом интервале, то уравнение можно переписать в виде $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(y)}$. Отсюда видно, что тогда, во-первых, через каждую точку (x_0, y_0) полосы $a < y < b$ проходит единственная интегральная кривая

$$x = x_0 + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)},$$

и, во-вторых, все интегральные кривые получаются из одной сдвигом, параллельным оси Ox.

Пусть теперь $f(y)$, оставаясь непрерывной, обращается в 0 при каком-нибудь, притом единственном, значении $y = c$ из интервала (a, b). Тогда:

1) если $\int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{d\eta}{f(\eta)}$ при $y \to c \pm 0$ расходится, то через каждую точку полосы, расположенной между прямыми $y = a$ и $y = b$, проходит одна и только одна интегральная линия; прямая $y = c$, которая сама есть интегральная линия, является асимптотой всех интегральных кривых;

2) если $\int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{d\eta}{f(\eta)}$ при $y \to c \pm 0$ сходится и при переходе x через $x = c$ функция $f(x)$ не меняет знака, то через каждую точку указанной полосы проходит бесконечное множество интегральных линий;

3) если $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)}$ при $y \to c \pm 0$ сходится и при переходе x через $x = c$ функция $f(x)$ меняет знак, то через каждую точку прямой $y = c$ проходит бесконечное множество интегральных линий, в то время как через каждую точку полос $a < y < c$ и $c < y < b$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

Эти выводы следуют из § 3. Представление о геометрической картине для этого случая могут дать чертежи 3, 3а и 4, если в них поменять роли осей координат.

Задачи. 1. Какие случаи возможны, если $f'(c)$ существует?

2. Представьте картину поведения интегральных линий уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = |y|; \quad \frac{dy}{dx} = \sin y; \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{1}{y}.$$

3. Пусть $f(c) = 0$ и сколь угодно близко от $y = c$, как при $y < c$, так и при $y > c$ найдутся значения y, при которых $f(y) > 0$, и найдутся значения y, при которых $f(y) < 0$. Доказать, что тогда через любую точку $x = x_0$, $y = c$ проходит единственное решение $y \equiv c$ уравнения $y' = f(y)$. $f(y)$ — непрерывна.

§ 5. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальными уравнениями *с разделяющимися переменными* называются уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y). \tag{10}$$

Теорема. *Пусть при $a < x < b$, $c < y < d$ функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ непрерывны, причем $f_2(y)$ нигде не обращается в нуль. Тогда через каждую точку (x_0, y_0) прямоугольника Q*

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

проходит одно и только одно решение уравнения (10).

Доказательство. Допустим сначала, что существует функция $\varphi(x)$, которая удовлетворяет уравнению (10) и при $x = x_0$ обращается в y_0. Тогда имеем тождество

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f_1(x) f_2(\varphi(x)),$$

которое, поскольку $f_2(y) \neq 0$, можно представить так:

$$\frac{d\varphi(x)}{f_2(\varphi(x))} = f_1(x)dx.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по x в пределах от x_0 до x. Получим

$$\int\limits_{\varphi(x_0)=y_0}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi(\xi)}{f_2(\varphi(\xi))} = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(\xi)d\xi.$$

Обозначая через $F_2(y)$ какую-нибудь первообразную от $\dfrac{1}{f_2(y)}$ и через $F_1(x)$ какую-нибудь первообразную от $f_1(x)$, это равенство можно переписать так:

$$F_2(\varphi(x)) - F_2(y_0) = F_1(x) - F_1(x_0). \qquad (11)$$

В силу того что $F_2(y)$ есть монотонная функция $\left(\text{так как } F_2'(y) = \dfrac{1}{f_2(y)} \neq 0\right)$, последнее равенство можно однозначно разрешить относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = F_2^{-1}\left[F_2(y_0) + F_1(x) - F_1(x_0)\right] \text{ [1]}. \qquad (12)$$

Таким образом, допустив существование такого решения уравнения (10), у которого при $x = x_0$, $y = y_0$, мы представили это решение в форме (12) и тем самым установили, что такое решение *единственно*: все функции, входящие в правую часть этого равенства, были определены только на основании данного уравнения и начальных условий.

С другой стороны, легко проверить, что функция $\varphi(x)$, определяемая равенством (12), действительно дает решение уравнения (10), обращающееся в y_0 при $x = x_0$. В самом деле, дифференцируя равенство (11) по x, получаем

$$\frac{dF_2(\varphi(x))}{d\varphi(x)}\varphi'(x) = F_1'(x),$$

отсюда

$$\frac{1}{f_2(\varphi(x))}\varphi'(x) = f_1(x).$$

[1] Через F_2^{-1} обозначена функция, обратная F_2.

Значит, дифференциальное уравнение (10) удовлетворяется. Начальные же условия удовлетворяются потому, что

$$\varphi(x_0) = F_2^{-1}\left[F_2(y_0)\right] = y_0.$$

В заключение заметим, что в случае обращения $f_2(y)$ в одной какой-нибудь точке $y = y_1$ в нуль может нарушиться единственность. Это зависит от того, сходится или расходится интеграл

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f_2(\eta)}, \tag{13}$$

когда y приближается к y_1. В первом случае через некоторые точки прямоугольника Q проходит бесконечное множество интегральных кривых; все они касаются прямой $y = y_1$, на которой $f_2(y) = 0$; в случае же расходимости интеграла (13) при $y \to y_1 \pm 0$ проходящее через точку (x_0, y_0) решение всегда единственно [1]). При этом предполагается, конечно, что $f_1(x)$ не равно 0 тождественно. В противном случае через каждую точку Q всегда проходит одна и только одна интегральная кривая.

Задачи. 1. Представьте картину поведения интегральных кривых уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{\sin x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{y}{x}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\sin y}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{\sin y}{\sin x}}.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{\varphi(x)},$$

где функции $f(y)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и определены при всех неотрицательных значениях их аргументов; $\varphi(0) = f(0) = 0$.

---

[1]) Единственность может нарушиться только тогда, если какая-нибудь интегральная кривая $y = \varphi(x)$ коснется интегральной прямой $y = c$ в некоторой внутренней точке (x_1, y_1) прямоугольника Q. Но этого не может быть, если интеграл (13) расходится при $y \to y_1$. Действительно, в этом случае при $x \to x_1$ левая часть равенства (11) бесконечно растет, тогда как правая остается ограниченной.

А. Пусть в области $G(0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty)$ $\varphi(x)f(y) < 0$. Исследовать поведение интегральных кривых этого уравнения при $x \to 0$ и при $y \to 0$ в зависимости от сходимости или расходимости интегралов

$$\int\limits_0^1 \frac{dy}{f(y)}, \quad \int\limits_1^\infty \frac{dy}{f(y)}, \quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{\varphi(x)}, \quad \int\limits_1^\infty \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Б. Пусть в области $G(0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty)$ $\varphi(x)f(y) > 0$. Показать, что тогда всякая интегральная линия, проходящая через какую-нибудь точку области G при своем продолжении в сторону уменьшения x неограниченно приближается к началу координат. Если дополнительно потребовать, чтобы $\varphi'(0) \neq 0$ и $f'(0) \neq 0$, а $\varphi''(t)$ и $f''(t)$ были непрерывны на некотором интервале $0 \leqslant t < \varepsilon$, то каждая интегральная линия подходит к началу координат по определенному направлению. Если $\varphi'(0) \neq f'(0)$, то все они касаются при $x = 0$ одной из координальных осей (какой?). Если же $\varphi'(0) = f'(0)$, то интегральные линии подходят к началу координат по всем направлениям (как прямые $y = kx$).

§ 6. Однородные уравнения

Однородными дифференциальными уравнениями называют уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{14}$$

Если функция $f(u)$ определена при $a < u < b$, то функция $f\left(\frac{y}{x}\right)$ будет определена в углах, образованных такими точками $(x,\, y)$, для которых $a < \dfrac{y}{x} < b$. Области, составленные этими двумя углами, мы будем обозначать через G.

Теорема. *Если функция $f(u)$ непрерывна при $a < u < b$ и всюду на этом интервале $f(u) \neq u$, то через каждую точку $(x_0,\, y_0)$ из G проходит одна и только одна интегральная кривая.*

Доказательство. Положим $y = ux$; тогда уравнение (14) перепишется так:

$$xu' + u = f(u).$$

Отсюда получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}, \tag{15}$$

к которому применима предыдущая теорема, чем и доказывается наше утверждение.

Из уравнения (15) находим

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u}$$

и, следовательно,

$$\ln|x| = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) + C, \tag{16}$$

где $\Phi(u)$ есть некоторая первообразная от $\dfrac{1}{f(u) - u}$. Из формулы (16) видно, что все интегральные кривые однородного дифференциального уравнения между собой подобны, и центром подобия служит начало координат. Действительно, при подходящем выборе постоянного C_1, замена x и y соответственно на $C_1 x$ и $C_1 y$ переводит кривую

$$\ln|x| = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

в любую кривую семейства (16).

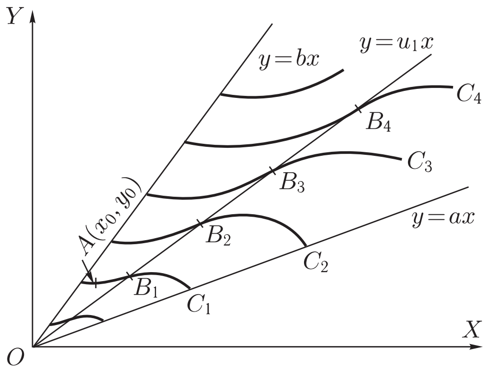
Исключительный случай $f(u) \equiv u$ мы имели в примере 1, из § 2. Если же $f(u) = u$ в отдельных точках $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то через некоторые точки (x_0, y_0) из G может проходить много интегральных кривых. Это будет, если интеграл $\int\limits_c^u \dfrac{d\xi}{f(\xi) - \xi}$ сходится, когда u приближается к одному из чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n$, например, к u_1.

На чертеже 5 схематически изображено возможное поведение интегральных кривых в этом случае. Через точку A будут, например, проходить интегральные линии $AB_1\mathrm{C}_1$, $AB_1B_2C_2$, $AB_1B_3C_3$, … Все они касаются прямой

$$y = u_1 x.$$

Задачи. 1. Представьте картину поведения интегральных кривых уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x/y}, \quad \frac{dy}{dx} = e^{y/x}, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$



Черт. 5

2. Докажите, что если все интегральные кривые некоторого уравнения подобны между собой с центром подобия в начале координат, то это дифференциальное уравнение однородно.

§ 7. Линейные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x). \tag{17}$$

Теорема. *Пусть функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны в интервале $a < x < b$. Тогда через каждую точку (x_0, y_0) полосы, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$, проходит одна и только одна интегральная кривая этого уравнения, определенная при всех x на интервале (a, b).*

Доказательство. Разберем прежде всего более простой случай — *линейное однородное* уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y. \tag{18}$$

Это уравнение получается из предыдущего при $b(x) \equiv 0$ и является уравнением с разделяющимися переменными. Поэтому, замечая, что $\int\limits_c^y \frac{d\eta}{\eta}$ расходится при $y \to 0$, заключаем, что уравнение (18) имеет единственное решение, проходящее через точку (x_0, y_0). Легко видеть, что это решение дается формулой

$$y(x) = y_0 e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}.$$

Вернемся теперь к первоначальному уравнению (17). Применим так называемый *метод вариации постоянных*. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$y(x) = z e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}, \tag{19}$$

где z не постоянно равно y_0, как прежде, а есть некоторая функция от x. Легкими вычислениями можно показать, что для того, чтобы (19) было решением уравнения (17), необходимо и достаточно, чтобы $z(x)$ было дифференцируемо и удовлетворяло уравнению

$$\frac{dz}{dx} = b(x) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}.$$

Чтобы $y(x_0) = y_0$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $z(x_0)$ также равнялось y_0. Поэтому из последнего уравнения находим

$$z(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} b(s) e^{-\int\limits_{x_0}^{s} a(\xi)d\xi} ds.$$

Следовательно, функция

$$y = z(x) e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} = y_0 e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} + \int\limits_{x_0}^{x} b(s) e^{\int\limits_{s}^{x} a(\xi)d\xi} ds$$

будет единственным решением уравнения (17), которое обращается в y_0 при $x = x_0$.

Задачи. 1. Покажите, что уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^n$$

(уравнение Бернулли), если $n \neq 1$, при помощи подстановки $z = y^{1-n}$ приводится к линейному уравнению относительно z. Как решать уравнение Бернулли, если $n = 1$?

§ 8. Уравнения в полных дифференциалах

Мы уже говорили (§ 2), что часто бывает удобно записывать дифференциальные уравнения в следующей форме:

$$M(x,\,y)dx + N(x,\,y)dy = 0 \tag{20}$$

(N в этом уравнении и N в уравнении (3) обратны по знаку). Может случиться, что левая часть этого уравнения представляет полный дифференциал некоторой функции переменных x и y. В таком случае дифференциальное уравнение (20) называется *уравнением в полных дифференциалах*.

Предположим, что функции $M(x,\,y)$ и $N(x,\,y)$ имеют непрерывные первые производные. Тогда, как известно из курса анализа, необходимым и достаточным для того чтобы левая часть уравнения (20) была полным дифференциалом, является условие, чтобы

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{21}$$

если только область G, в которой заданы M и N, *односвязна*; это означает, что все точки, лежащие внутри любой замкнутой ломаной, расположенной в G, также должны принадлежать G.

Для таких уравнений имеет место следующая

Теорема. *Пусть в прямоугольнике Q*

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

функции $M(x,\,y)$ и $N(x,\,y)$ непрерывны вместе с их частными производными первого порядка, причем всюду в Q выполняется условие (21) *и $N(x,\,y)$ не обращается в нуль.*

Тогда через каждую точку $(x_0,\,y_0)$ прямоугольника Q проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (20) [1]).

Доказательство. Как было только что указано, в прямоугольнике Q существует функция $z(x,\,y)$, полный дифферен-

[1]) Так как из уравнения (20) следует, что при сделанных относительно M и N предположениях $\frac{dy}{dx}$ никогда не обращается в 0 в прямоугольнике Q, то все проходящие внутри Q интегральные кривые уравнения (20) должны быть графиками функций от x.

циал которой равен левой части (20) (неизменность знака N при этом несущественна). Покажем, что уравнение

$$z(x,\, y) = z(x_0,\, y_0) \tag{22}$$

определяет некоторую функцию

$$y = \varphi(x),$$

которая при $x = x_0$ обращается в y_0 и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$M(x,\, y) + N(x,\, y)y' = 0, \tag{23}$$

эквивалентному уравнению (20).

В самом деле, так как по предположению $\dfrac{\partial z}{\partial y} \equiv N(x,\, y)$ нигде не обращается в 0 и непрерывна, то к уравнению (22) применима теорема о существовании неявной функции, причем решение $y = \varphi(x)$ единственно и представляет непрерывную и дифференцируемую функцию x, которая обращается в y_0 при $x = x_0$. Поэтому, дифференцируя равенство (22) по x (при этом y рассматривается как функция от x), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}y' = 0,$$

но

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv M, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv N.$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (23).

Докажем теперь, что уравнение (23) не имеет никакого другого решения, которое обращается в y_0 при $x = x_0$. Действительно, допустим, что кроме только что найденного решения $\varphi(x)$ есть еще решение $\varphi_1(x)$ уравнения (23), которое при $x = x_0$ также обращается в y_0. Подставим эту функцию вместо y в $z(x,\, y)$ и выполним дифференцирование по x. Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dz\,(x,\, \varphi_1(x))}{dx} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=\varphi_1(x)} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=\varphi_1(x)} \cdot \varphi_1'(x) = \\ &= M\,(x,\, \varphi_1(x)) + N\,(x,\, \varphi_1(x))\, \varphi_1'(x). \end{aligned}$$

Так как мы предполагаем, что $\varphi_1(x)$ удовлетворяет уравнению (23), то полученное выражение тождественно равно нулю. Поэтому $z\,(x,\, \varphi_1(x))$ постоянно сохраняет то значение, которое оно принимает при $x = x_0$, т. е.

$$z\,(x,\, \varphi(x)) = z(x_0,\, y_0).$$

Но по теореме о неявной функции отсюда следует, что

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi(x),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Пусть поле направлений задано уравнением

$$d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) \equiv x\,dx + y\,dy = 0$$

на полосе G между двумя квадратами, у которых центром служит начало координат, стороны параллельны координатным осям и равны соответственно 2 и 4. Только что доказанную теорему нельзя применить сразу ко всей полоске G потому, что $N(x,\,y) \equiv y$ обращается в 0 на оси Ox. Но эту теорему можно применять отдельно к прямоугольникам:

$$\begin{array}{lcc} Q_1 & -2 < x < 2 & 1 < y < 2, \\ Q_2 & -2 < x < 2 & -2 < y < -1, \\ Q_3 & 1 < x < 2 & -2 < y < 2, \\ Q_4 & -2 < x < -1 & -2 < y < 2. \end{array}$$

В последних двух случаях надо применять предыдущую теорему, поменяв в ее формулировке роли x и y. Тогда, соединяя вместе результаты, полученные отдельно в каждом случае, мы получим, что через каждую точку области G проходит одна и только одна интегральная кривая нашего уравнения.

Такой кривой будет проходящая через эту точку окружность с центром в начале координат или часть этой окружности.

Задачи. 1. Будет ли во всей только что рассмотренной в примере области

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$$

полным дифференциалом некоторой функции?

2. Тот же вопрос для

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}.$$

§ 9. Интегрирующий множитель

В тех случаях, когда уравнение (20) есть уравнение в полных дифференциалах, разыскание функции $z(x,\,y)$, с помощью которой составляется равенство (22), сводится, как известно из курса анализа, к выполнению двух квадратур. В противоположном случае, когда тождество (21) не выполнено, иногда удается сравнительно легко привести дифференциальное уравнение (20) к виду уравнения в полных дифференциалах. Это приведение выполняется с помощью *интегрирующего множителя* $\mu(x, y)$ — такой функции от x и y, после умножения на которую левая часть уравнения (20) обращается в полный дифференциал. Если функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ и $\mu(x, y)$ имеют непрерывные производные, то интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ должен удовлетворять условию

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

или в раскрытом виде

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{24}$$

Последнее есть линейное дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка. Для приведения левой части (20) к виду полного дифференциала нам достаточно знать какое-нибудь одно частное решение уравнения (24) [1]); вообще уравнение (24) может иметь бесконечное множество таких решений (ср. дополнение). Следовательно, одно и то же обыкновенное дифференциальное уравнение может иметь бесконечное множество интегрирующих множителей.

Допустим, что уравнение (20) имеет интегрирующий множитель $\mu(x, y)$, после умножения на который его левая часть обращается в полный дифференциал некоторой функции $z(x, y)$. Тогда, как легко видеть,

$$\mu f\left(z(x, y)\right),$$

где $f(z)$ есть любая непрерывная функция от z, *будет также интегрирующим множителем уравнения* (20).

Действительно,

$$\mu f(z)(M\,dx + N\,dy) = f(z)dz = dF(z),$$

где $F(z)$ есть какая-нибудь примитивная от $f(z)$.

Докажем следующую теорему, которая является до некоторой степени обратной только что высказанной.

[1]) Очевидно, тривиальное решение уравнения (24), равное тождественно 0, не представляет интереса.

Теорема. *Будем предполагать, что в уравнении* (20) $M(x, y)$ *и* $N(x, y)$ *непрерывны и* $N(x, y)$ *нигде на прямоугольнике* Q *не обращается в* 0. *Пусть для этого уравнения* (20) *существуют два непрерывных интегрирующих множителя* $\mu_1(x, y)$ *и* $\mu_2(x, y)$, *которые нигде в* Q *не обращаются в нуль и, следовательно, сохраняют там знак. Обозначим соответствующие им функции через* $z_1(x, y)$ *и* $z_2(x, y)$ *так, что*

$$dz_1 = \mu_1(M\,dx + N\,dy), \tag{25}$$

$$dz_2 = \mu_2(M\,dx + N\,dy). \tag{26}$$

Мы утверждаем, что для каждой точки (x_0, y_0) *прямоугольника* Q *можно указать такую окрестность, где частное* $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ *есть функция только от* z_1.

Замечание 1. Вместо $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ в формулировке теоремы можно, конечно, взять $\frac{\mu_1}{\mu_2}$. В силу полной равноправности z_1 и z_2 отсюда следует, что оба эти отношения суть также функции от z_2.

Доказательство. 1. Покажем прежде всего для всякой точки (x_0, y_0) прямоугольника Q, что куски линий

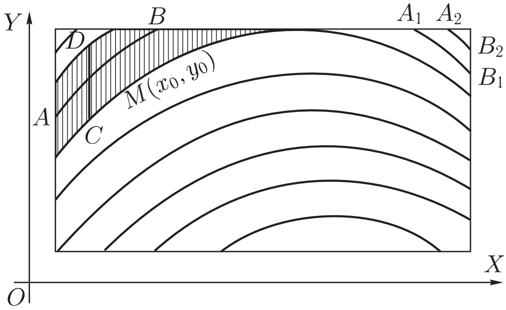
$$z_1(x, y) = z_1(x_0, y_0), \tag{27}$$

$$z_2(x, y) = z_2(x_0, y_0), \tag{28}$$

на которых лежит точка (x_0, y_0), совпадают. Действительно, из (25) и (26) следует, что

$$dz_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} dz_1. \tag{29}$$

Так как $\mu_1(x, y)$ и $\mu_2(x, y)$ нигде внутри Q не обращаются в 0, то из (29) следует, что dz_1 и dz_2 могут обращаться в 0 только одновременно. Возьмем теперь кусок линии (27), на котором лежит точка (x_0, y_0). При движении точки (x, y) по нему $dz_1 = 0$. На основании (29) отсюда следует, что на этом куске и $dz_2 = 0$. Следовательно, на этом куске $z_2(x, y)$ сохраняет такое же значение, как в точке (x_0, y_0), и рассматриваемый кусок линии (27) принадлежит линии (28). Совершенно так же показывается для всякой точки (x_0, y_0) прямоугольника Q, что тот кусок линии (28), на котором лежит точка (x_0, y_0), принадлежит линии (27).



Черт. 6

Заметим, что если бы линии (27) и (28) состояли из нескольких кусков, то не все эти куски должны совпадать между собой. Такой пример изображен на нашем чертеже 6. Линия

$$z_1(x, y) = z_1(x_0, y_0)$$

может состоять из кусков AB и A_1B_1, а линия

$$z_2(x, y) = z_2(x_0, y_0)$$

— из кусков AB и A_2B_2.

2. Возьмем теперь внутри прямоугольника Q какой-нибудь вертикальный отрезок CD (черт. 6), заключающий внутри себя точку $M(x_0, y_0)$. Обозначим через G ту область, которая покрывается пересекающими этот отрезок кусками линий (27), когда точка (x_0, y_0) движется по CD. Эта область на нашем чертеже заштрихована. Мы утверждаем, что на ней μ_2/μ_1 есть функция от z_1. Для доказательства этого воспользуемся тождеством

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = \mu_1 N.$$

Так как N и μ_1 по предположению нигде не обращаются в 0, то на различных линиях семейства (27), проходящих в G, z принимает различные значения. Поэтому, задавая z_1, мы тем самым вполне определяем некоторую линию семейства (27) в области G. А так как эта линия является в то же время линией семейства (28), на которой, следовательно, $z_2(x, y)$ принимает постоянное значение, то $z_2(x, y)$ на области G есть некоторая функция только от $z_1(x, y)$. Пусть

$$z_2(x, y) = \varphi\left(z_1(x, y)\right).$$

Отсюда следует, что

$$dz_2 = \varphi'(z_1)dz_1; \tag{30}$$

что $\varphi'(z_1)$ существует, видно из того, что существуют $\dfrac{\partial z_2}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial z_1}{\partial y}$, и $\dfrac{\partial z_1}{\partial y} \neq 0$. Сравнивая равенства (29) и (30), находим

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \varphi'(z_1). \tag{31}$$

Следовательно, отношение $\dfrac{\mu_2}{\mu_1}$ действительно есть функция только от z_1.

Если бы оказалось, что $\varphi'(z_1)$ есть монотонная функция от z_1, то из уравнения (31) можно было бы определить z_1 как функцию от x и y.

Замечание 2. Чертеж 6 наглядно показывает, что z_2 может не быть функцией от z_1 на всем прямоугольнике Q. Действительно, если z_1 на отрезках AB и A_1B_1 принимает одно и то же значение, то z_2 на них может принимать различные значения.

Замечание 3. *Если на прямоугольнике Q функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ имеют непрерывные частные производные 1-го порядка, $\dfrac{\partial z_1}{\partial y}$ нигде не обращается в 0, а якобиан*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

то в достаточно малой окрестности любой точки (x_0, y_0) прямоугольника Q всегда z_2 есть функция от z_1.

Действительно, при сделанных предположениях элементы второй строчки только что написанного якобиана пропорциональны элементам его первой строчки. Поэтому

$$dz_2 = \frac{\dfrac{\partial z_2}{\partial y}}{\dfrac{\partial z_1}{\partial y}} dz_1,$$

и предыдущие рассуждения применимы. Чертеж 6 опять иллюстрирует тот случай, когда z_2 может не быть функцией от z_1 на всем прямоугольнике Q.

На этом мы закончим изложение элементарных приемов нахождения решений дифференциальных уравнений 1-го порядка. Другие элементарные методы интеграции дифференциальных уравнений изложены, например, в курсах В. В. Степанова и Гурса.

В основном эти методы сводят различные дифференциальные уравнения к уже разобранным нами типам.

Глава III

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Дифференциальных уравнений, интегралы которых находятся элементарными приемами, немного. Уже интегрирование дифференциальных уравнений типа Рикатти, т. е. уравнений вида $\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x)$, как показал Лиувилль [1]), не сводится к квадратурам. Поэтому большое значение приобретают приемы приближенного решения дифференциальных уравнений, применимые к очень широким классам дифференциальных уравнений. Но прежде чем приступить к приближенному нахождению решений, надо быть уверенными в том, что они существуют, т. е. существует то, что будем приближенно вычислять. Начало настоящей главы и посвящено таким теоремам существования. К тому же доказательства этих теорем часто указывают и методы приближенного нахождения решений (см., например, § 10, 14, 15 и 18).

§ 10. Ломаные Эйлера

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\, y). \tag{1}$$

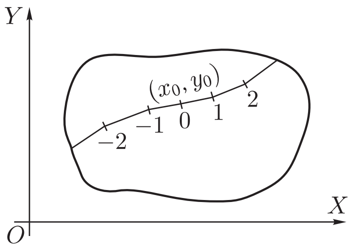
Область задания функции $f(x,\, y)$ назовем G. Как мы уже знаем, уравнение (1) определяет в G поле направлений, которые должны иметь интегральные линии.

Возьмем в области G какую-нибудь точку $(x_0,\, y_0)$. Ей будет соответствовать проходящая через эту точку прямая с угловым коэффициентом $f(x_0,\, y_0)$. На этой прямой в области G возьмем точку $(x_1,\, y_1)$ (на черт. 7 обозначена цифрой 1). Через точку $(x_1,\, y_1)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $f(x_1,\, y_1)$, на которой мы отметим принадлежащую G

---

[1]) *Journal de mathématiques*, t. 6 (1841).

точку (x_2, y_2) (на черт. 7 обозначена цифрой 2). Затем на прямой, соответствующей точке (x_2, y_2), отмечаем точку (x_3, y_3) и т. д. Пусть при этом $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ (это построение можно выполнять и в сторону убывающих значений x). Получим ломаные линии, которые называют *ломаными Эйлера*. Естественно ожидать, что каждая из ломаных Эйлера с достаточно короткими звеньями дает некоторое представление об интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0), и что при уменьшении длин звеньев ломаные Эйлера будут приближаться к этой интегральной кривой; при этом предполагается, конечно, что такая интегральная кривая существует. Мы, в самом деле, покажем ниже, что при непрерывности $f(x, y)$ можно выбрать такую последовательность ломаных Эйлера, которая будет сходиться к интегральной кривой. Однако при этом вообще не будет единственности, т. е. могут существовать различные последовательности ломаных Эйлера, которые будут сходиться к различным интегральным кривым, проходящим через одну и ту же точку (x_0, y_0). М. А. Лаврентьев построил пример такого дифференциального уравнения вида (1), у которого, хотя $f(x, y)$ непрерывна, однако в любой окрестности каждой точки области G через эту точку проходит не одна, а по крайней мере две интегральных кривых [1]). Для того чтобы через точку (x_0, y_0) проходила только одна интегральная кривая, необходимы дополнительные предположения о функции $f(x, y)$.



Черт. 7

Доказательство существования проходящей через точку (x_0, y_0) интегральной кривой дифференциального уравнения (1), которое мы здесь излагаем, основано на теореме Арцеля и принадлежит в основном Пеано. Очевидно, каждая из таких кривых будет служить *графиком* некоторого *решения* дифференциального уравнения (1).

[1]) Sur une équation différentielle du premièr ordre. Math. Zeitschrift, B. 23 (1925), стр. 197–209.

Задача. Пусть функция $f(x,\,y)$ задана на полосе II

$$a \leqslant x \leqslant a', \quad -\infty < y < \infty, \quad a < a',$$

где она непрерывна и ограничена. Показать, что совокупность всех ломаных Эйлера для уравнения (1), выходящих из точки $(a,\,b)$, покрывает множество E, ограниченное сверху линией $y = \varphi_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant a'$, выпуклость которой обращена вниз, снизу линией $y = \varphi_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant a'$, выпуклость которой обращена вверх, а справа прямой $x = a'$. При этом

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = b, \quad \varphi_1'(a) = \varphi_2'(a) = f(a,\,b);$$

в каждой точке x правые и левые производные $\varphi_1(x)$ не меньше $f\left(x, \varphi_1(x)\right)$, а правые и левые производные $\varphi_2(x)$ не больше $f\left(x,\, \varphi_2(x)\right)$. Сами линии $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ могут частично или целиком принадлежать E.

§ 11. Теорема Арцеля

Пусть на интервале $(a,\,b)$ [1]) *дано семейство* $\{f(x)\}$, *состоящее из бесконечного множества функций* $f(x)$, *равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных. Тогда из этого семейства можно выбрать равномерно сходящуюся бесконечную последовательность функций.*

Равномерная ограниченность здесь означает, что существует такая постоянная M, что

$$|f(x)| < M,$$

где $f(x)$ — любая функция семейства и x — любое число из интервала $(a,\,b)$. Выражение «*функции семейства равностепенно непрерывны*» означает следующее: *каково бы ни было наперед заданное число* $\varepsilon > 0$, *найдется такое число* $\eta > 0$, *зависящее только от* ε, *что для всякой функции* $f(x)$ *рассматриваемого семейства будет*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

при любых x'' *и* x' *из интервала* $(a,\,b)$, *если только*

$$|x'' - x'| < \eta.$$

---

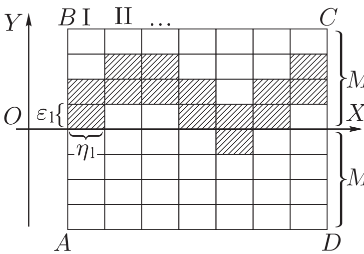
[1]) Безразлично, *замкнут* этот интервал или *открыт*, т. е. присоединены к нему его концы или нет.

Доказательство. [1]) В силу равномерной ограниченности семейства все графики принадлежащих ему функций будут расположены в прямоугольнике $ABCD$ (черт. 8) со сторонами $2M$ и $b - a$.

Составим бесконечную последовательность чисел

$$\varepsilon_1 = \frac{M}{2^{\alpha+1}},\ \varepsilon_2 = \frac{M}{2^{\alpha+2}},\ \ldots,\ \varepsilon_k = \frac{M}{2^{\alpha+k}},\ \ldots,$$

где α — какое-нибудь целое положительное число или 0. По определению равностепенной непрерывности каждому числу ε_k будет соответствовать $\eta_k = \eta(\varepsilon_k)$.



Черт. 8

Разобьем вертикальную сторону прямоугольника $ABCD$ на отрезки длиной ε_1, горизонтальную же сторону этого прямоугольника разобьем на отрезки, длина каждого из которых не превышает η_1. Через полученные точки проведем прямые, параллельные координатным осям. Таким образом, весь прямоугольник $ABCD$ разобьется на меньшие прямоугольники. Вертикальные полосы, составленные из таких прямоугольников, будем обозначать римскими цифрами: I, II, ... Так как

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon_1$$

при

$$|x'' - x'| < \eta_1,$$

то график каждой функции семейства $\{f(x)\}$ может проходить не больше чем по двум соседним прямоугольникам каждой такой полосы, в частности I полосы. Но таких пар прямоугольников из I полосы есть только конечное число; следовательно, по крайней мере по одной такой паре проходит бесконечное множество графиков функций рассматриваемого

[1]) Это доказательство мне сообщил Л. А. Люстерник.

семейства. Эта пара прямоугольников на нашем чертеже 8 (где положено $a = 1$) заштрихована. Будем теперь рассматривать только те функции, графики которых в I полосе проходят только по заштрихованным прямоугольникам. Таких функций, как мы уже говорили, бесконечное множество. Во II полосе, как легко видеть, все их графики могут проходить только по четырем прямоугольникам этой полосы, график же каждой такой функции может проходить только по двум соседним из них.

Следовательно, существуют два таких прямоугольника на II полосе, по которым проходит бесконечное множество графиков функций данного семейства и притом таких, которые и на I полосе проходят только по заштрихованным прямоугольникам. Эти прямоугольники II полосы у нас также заштрихованы. Рассуждая и дальше таким же образом, мы найдем целую полосу, расположенную над всем интервалом (a, b), шириной $2\varepsilon_1$, по которой проходит бесконечное множество графиков семейства $\{f(x)\}$. Эта полоска s_1 у нас заштрихована. Возьмем из этих графиков один какой-нибудь; пусть это будет график функции $f_1^*(x)$. Семейство оставшихся функций, графики которых проходят по s_1, обозначим через $\{f_1(x)\}$.

С семейством функций $\{f_1(x)\}$ проделаем то же, что мы проделали с семейством $\{f(x)\}$, с той только разницей, что теперь вместо ε_1 возьмем ε_2 и вместо η_1 возьмем η_2. Тогда получим вложенную в s_1 полоску s_2 шириной $2\varepsilon_2$, по которой проходят графики бесконечного множества функций из семейства $\{f_1(x)\}$. Одну из этих функций обозначим через $f_2^*(x)$, а семейство всех остальных таких функций обозначим через $\{f_2(x)\}$. Продолжая эти рассуждения, мы получим, таким образом, бесконечную последовательность функций

$$f_1^*(x),\ f_2^*(x),\ \ldots$$

Графики всех этих функций, начиная с $f_k^*(x)$, лежат в полоске s_k шириной $M/2^{k+\alpha-1}$. Следовательно, эта последовательность равномерно сходится, что и требовалось доказать.

Задачи. 1. Покажите на примерах, что как условие равномерной ограниченности, так и условие равностепенной непрерывности являются существенными в формулировке теоремы Арцеля: если отказаться хотя бы от одного из них, то утверждение может быть неверным.

2. Сформулируйте и докажите теорему Арцеля для функций нескольких независимых переменных.

3. Останется ли верной теорема Арцеля, если в ее формулировке допустить, что рассматриваемые функции заданы на бесконечном интервале?

4. Покажите, что в формулировке теоремы Арцеля вместо равномерной ограниченности рассматриваемых функций на всем рассматриваемом интервале достаточно потребовать ограниченность всего семейства рассматриваемых функций в одной только точке.

§ 12. Доказательство существования решения дифференциального уравнения (1) методом Пеано

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ ограничена и непрерывна в области G, то через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит по крайней мере одна интегральная кривая уравнения* (1).

Доказательство. Пусть

$$|f(x, y)| < M.$$

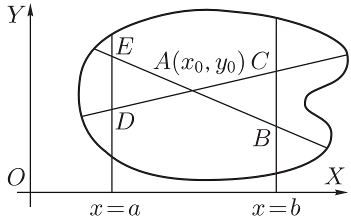
Через точку (x_0, y_0) области G проведем прямые с угловыми коэффициентами M и $-M$. Проведем далее две прямые $x = a$ и $x = b$ $(a < x_0 < b)$, параллельные оси Oy, так, чтобы образуемые ими два равнобедренных треугольника с общей вершиной в точке (x_0, y_0) целиком лежали внутри области G.

Построим теперь указанным в § 10 способом бесконечную последовательность ломаных Эйлера: L_1, L_2, ..., L_k, ..., проходящих через точку (x_0, y_0), таким образом, чтобы наибольшее из звеньев линии L_k стремилось к 0, когда $k \to \infty$. Каждая из этих ломаных параллелью оси Oy будет пересекаться только в одной точке и будет поэтому графиком некоторой непрерывной функции от x. Пусть L_k будет графиком функции $\varphi_k(x)$. Функции

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x), \ldots \tag{32}$$

обладают следующими свойствами:

1) Они определены на одном и том же конечном замкнутом интервале $[a, b]$ [1]. В самом деле функция $\varphi_k(x)$ могла бы не быть определенной на всем этом интервале только тогда, если бы соответствующая ей ломаная Эйлера вышла из области G где-нибудь над замкнутым интервалом $[a, b]$. Но этого не может быть потому, что ломаные Эйлера не могут выйти из треугольников ABC и ADE через стороны BE или DC, так как угловые коэффициенты их звеньев по абсолютному значению не больше M.



Черт. 9

2) Они равномерно ограничены, так как все их графики располагаются в треугольниках ABC и ADE.

3) Оценивая разность

$$\varphi_k(x'') - \varphi_k(x') = \int_{x'}^{x''} \varphi_k'(\xi)d\xi$$

по абсолютной величине, имеем

$$|\varphi_k(x'') - \varphi_k(x')| \leqslant M|x'' - x'|.$$

Отсюда следует, что семейство (32) равностепенно непрерывно. Поэтому на основании теоремы Арцеля из семейства функций (32) можно выбрать равномерно сходящуюся на всем замкнутом интервале $[a, b]$ подпоследовательность. Пусть это будут функции

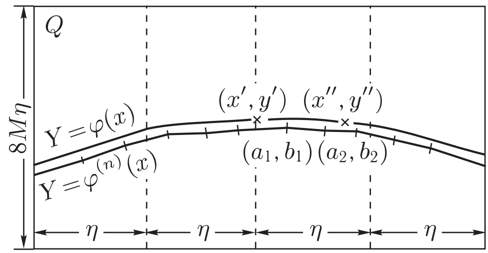
$$\varphi^{(1)}(x),\ \varphi^{(2)}(x),\ \ldots,\ \varphi^{(k)}(x), \ldots$$

Предельную функцию обозначим через $\varphi(x)$.

Ясно, что начальное условие $\varphi(x_0) = y_0$ удовлетворяется.

Докажем теперь, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет данному дифференциальному уравнению (1) внутри интервала (x_0, b) [аналогичные рассуждения применимы к интервалу (a, x_0)].

[1] Мы обозначаем замкнутый интервал квадратными скобками, сохраняя круглые скобки для обозначения открытых интервалов.



Черт. 10

Для этого возьмем внутри интервала (x_0, b) произвольную точку x' и покажем, что при любом положительном ε

$$\left|\frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'} - f\left(x',\, \varphi(x')\right)\right| < \varepsilon, \tag{33}$$

если только $|x''-x'|$ достаточно мала. Для того же чтобы доказать (33), достаточно показать, что при достаточно большом k

$$\left|\frac{\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')}{x''-x'} - f\left(x',\, \varphi(x')\right)\right| < \varepsilon, \tag{34}$$

как только x'' взято достаточно близко к x', так как при $k \to \to \infty$

$$\varphi^{(k)}(x') \to \varphi(x') \quad \text{и} \quad \varphi^{(k)}(x'') \to \varphi(x'').$$

В силу непрерывности $f(x,\, y)$ в области G любому $\varepsilon > 0$ будет соответствовать такое $\eta > 0$, что всегда

$$f(x',\, y') - \varepsilon < f(x,\, y) < f(x',\, y') + \varepsilon \quad \left(y' = \varphi(x')\right),$$

как только

$$|x - x'| < 2\eta, \quad |y - y'| < 4M\eta.$$

Совокупность точек $(x,\, y)$ области G, удовлетворяющих последним неравенствам, образует прямоугольник Q (черт. 10). Выберем теперь K настолько большим, чтобы для всех $k > K$ на интервале $(a,\, b)$ было

$$\left|\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)\right| < M\eta$$

и чтобы вес звенья линии L_k были короче η. Тогда все ломаные Эйлера, $y = \varphi^{(k)}(x)$, при $k > K$ и $|x - x'| < 2\eta$ будут целиком содержаться в Q.

С другой стороны,

$$\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x') = \int\limits_{x'}^{x''} \frac{d\varphi^{(k)}(x)}{dx} dx.$$

Согласно предыдущему, здесь $\dfrac{d\varphi^{(k)}(x)}{dx}$ заключено между

$$f(x',\, y') - \varepsilon \text{ и } f(x',\, y') + \varepsilon, \text{ если } |x'' - x'| < \eta\, ^{1)}.$$

Отсюда, считая для определенности, что $x'' > x'$, получим

$$[f(x',\, y') - \varepsilon]\,(x'' - x') < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x') < \\ < [f(x',\, y') + \varepsilon]\,(x'' - x'),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Предыдущие рассуждения, будучи проведены для интервала $(x_0,\, b)$ и $x' = x_0$, показывают, что «правая» производная от $\varphi(x)$ при $x = x_0$, т. е.

$$\lim_{\substack{x'' \to x_0 \\ x'' > x_0}} \frac{\varphi(x'') - \varphi(x_0)}{x'' - x_0},$$

равна $f\,(x_0, \varphi(x_0))$.

Точно так же предыдущие рассуждения, будучи проведены для интервала $(x_0,\, b)$ и $x' = b$, показывают, что «левая» производная от $\varphi(x)$ при $x = b$, т. е.

$$\lim_{\substack{x'' \to b \\ x'' < b}} \frac{\varphi(x'') - \varphi(b)}{x'' - b},$$

равна $f\,(b, \varphi(b))$. Аналогичные утверждения получаются для концов интервала $(a,\, x_0)$.

Замечание 2. Изложенными рассуждениями мы построили функцию $\varphi(x)$, которая при $x = x_0$ обращается в y_0 и удовлетворяет уравнению (1) только на замкнутом интервале $[a,\, b]$. Рассмотрим один из концов, например правый, постро-

---

1) Мы взяли прямоугольник Q, для которого $|x - x'| < 2\eta$, а не просто η, затем, чтобы иметь возможность оценить угловой коэффициент крайнего левого (правого) звена ломаной Эйлера, проходящей между прямыми $x = x' - \eta$ и $x = x' + \eta$, если ее начальная точка лежит левее (соответственно, правее) точки $(x',\, y')$. Начало этого звена может не находиться в этой полоске, но при достаточной малости этого звена оно обязательно находится в полосе между прямыми $x = x' - 2\eta$ и $x = x' + 2\eta$.

енного куска линии $y = \varphi(x)$. Так как по построению он лежит внутри G, то наши предыдущие рассуждения можно повторить, взяв вместо (x_0, y_0) этот конец и строя вправо от него ломаные Эйлера. Таким образом, мы получим продолжение построенного куска интегральной кривой.

Можно опять повторить предыдущие рассуждения, взяв вместо (x_0, y_0) правый коней построенного куска и снова строя вправо от него ломаные Эйлера и т. д. Таким образом, можно получить интегральные кривые, которые подходят как угодно близко к границе G, если G ограничена. Действительно, если бы в получающейся цепочке треугольников типа ABC или ADE существовало бесконечное множество треугольников с боковой стороной, большей некоторого $\varepsilon > 0$, то мы таким образом получили бы интегральную кривую уравнения (1) над как угодно большим интервалом оси Ox, что невозможно при ограниченности G. Стороны же треугольников типа ABC или ADE могут подходить как угодно близко к границе G.

Замечание 3. Теорема остается справедливой, если требовать от $f(x, y)$ только непрерывность в G, так как всякая такая функция ограничена на любой области G', содержащейся в G вместе со своим замыканием. Исходя из этого, читатель без труда сможет перенести замечание 2 и на этот случай.

Задачи. 1. Пусть область G представляет собою полоску $a < x < a'$, причем f непрерывна и ограничена на G. Может быть, что через некоторую точку (x_0, y_0) этой области проходит более чем одна интегральная линия уравнения (1). Тогда найдутся две интегральные линии $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ этого уравнения (наибольшее и наименьшее решения (Montel)), причем $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0$, $\varphi_2(x) \leqslant \varphi_1(x)$, $a < x < a'$, и вся часть полоски G между линиями $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ целиком заполнена интегральными кривыми, проходящими через (x_0, y_0), а вне этой части нет ни одной интегральной линии, проходящей через эту точку.

2. Докажите теорему о существовании решения уравнения следующим образом (метод Перрона). Назовем *верхней* функцией на интервале (x_0, b) (см. черт. 9) всякую непрерывно дифференцируемую [1] функцию $y = \varphi(x)$, для которой

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x) > f\left(x, \varphi(x)\right), \quad x_0 \leqslant x \leqslant b.$$

[1] То есть имеющую непрерывную производную.

Тогда: а) верхние функции существуют, б) нижняя грань всех верхних функций является интегральной линией уравнения (1), проходящей через точку (x_0, y_0) (именно наибольшим решением, см. задачу 1). Аналогично можно было бы определить *нижние* функции и взять их верхнюю грань. То же можно сделать и для $x < x_0$.

3. Пусть на области G заданы две ограниченные функции $f(x, y)$ и $F(x, y)$, причем всюду

$$F(x, y) \geqslant f(x, y).$$

Предполагается, что функция $F(x, y)$, соответственно $f(x, y)$, полунепрерывна сверху, соответственно снизу. Это значит, что

$$F(x, y) = \limsup_{\substack{t \to x \\ s \to y}} F(t, s),$$

соответственно

$$f(x, y) = \liminf_{\substack{t \to x \\ s \to y}} f(t, s).$$

Тогда через любую точку (x_0, y_0) рассматриваемой области проходит, по крайней мере, одна линия $y = \varphi(x)$, для любой точки которой все предельные значения при $\Delta x \to 0$ дроби

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

заключены между $F(x, y)$ и $f(x, y)$. Вообще говоря, через каждую точку (x_0, y_0) проходит много таких кривых, среди них существует наибольшая и наименьшая в смысле, указанном в задаче 1.

§ 13. Теорема Осгуда о единственности

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ для любой пары точек (x, y_1) и (x, y_2) области G удовлетворяет условию*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant \varphi\left(|y_2 - y_1|\right), \tag{35}$$

где $\varphi(u) > 0$ при $0 < u \leqslant a$ непрерывна и такова, что $\int\limits_{\varepsilon}^{a} \frac{du}{\varphi(u)} \to \infty$, когда $\varepsilon \to 0$, то через каждую точку (x_0, y_0)

области G проходит не больше одной интегральной кривой уравнения (1).

Такими функциями $\varphi(u)$ могут быть в частности следующие функции:

$$Ku,\ Ku|\ln u|,\ Ku|\ln u|\cdot\ln|\ln u|,$$
$$Ku|\ln u|\cdot\ln|\ln u|\cdot\ln\ln|\ln u|$$

и т. д. Здесь всюду K означает некоторую положительную постоянную.

Особенно часто применяют теорему о единственности, полагая $\varphi(u)\equiv Ku$. В этом случае условие (35) перепишется так:

$$|f(x,\,y_2)-f(x,\,y_1)|\leqslant K|y_2-y_1|. \tag{36}$$

Условие (36) называется условием Липшица по y. В частности, если область G выпукла по y [1]), то этому условию удовлетворяют функции, всюду имеющие ограниченную частную производную по y. Действительно, применяя в этом случае теорему Лагранжа, мы получим

$$|f(x,\,y_2)-f(x,\,y_1)| = \\ = \left|f'_y\,(x,\,y_1+\theta(y_2-y_1))\right|\,|y_2-y_1|\leqslant K|y_2-y_1|.$$

Здесь K означает верхнюю грань значений $|f'_y|$.

Доказательство. Пусть существуют два таких решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, что

$$y_1(x_0)=y_2(x_0)=y_0.$$

Будем считать $x_0=0$, так как мы всегда можем достичь этого заменой x на $x+x_0$. Положим

$$y_2(x)-y_1(x)=z(x).$$

Так как $y_2(x)\not\equiv y_1(x)$, то найдется такое x_1, что $z(x_1)\neq 0$. Можно всегда считать $z(x_1)>0$, так как противоположный случай сведется к этому, если вместо разности $y_2(x)-y_1(x)$ мы обозначим через $z(x)$ разность $y_1(x)-y_2(x)$. Точно так же,

[1]) Мы называем область G выпуклой по y, если параллельный оси y-ов отрезок AB, соединяющий две какие-нибудь точки A и B этой области, целиком лежит внутри этой области.

не ограничивая общности, можно считать, что $x_1 > 0$, так как противоположный случай сводится к этому заменой x на $-x$. Заметим далее, что

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y_2 - y_1)}{dx} = \\ = f(x,\, y_2) - f(x,\, y_1) \leqslant \varphi\left(|y_2 - y_1|\right) < 2\varphi\left(|y_2 - y_1|\right), \quad (37)$$

если

$$|y_2 - y_1| > 0.$$

Построим теперь решение $y(x)$ уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 2\varphi(y),$$

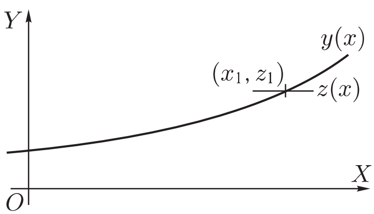
которое при $x = x_1$ обращается в $z(x_1) = z_1$. Такое решение существует и единственно (см. § 4). График этого решения будет асимптотически приближаться к отрицательной части оси Ox, нигде ее не пересекая.

В точке $(x_1,\, z_1)$ кривые $z(x)$ и $y(x)$ пересекутся. Из неравенства

$$z'(x_1) < 2\varphi(z_1) = 2\varphi\left(y(x_1)\right) = y'(x_1)$$

непосредственно следует существование такого интервала $(x_1 - \varepsilon,\, x_1)$, $\varepsilon > 0$, на котором

$$z(x) > y(x).$$



Черт. 11

Но это же неравенство имеет место при всяком ε, если $0 < \varepsilon \leqslant x_1$, так как в противном случае, беря для ε его наибольшее возможное значение, мы немедленно пришли бы к противоречию. Действительно, тогда при $x = x_1 - \varepsilon = x_2$ мы имели бы

$$z'(x_2) \geqslant y'(x_2) = 2\varphi\left(y(x_2)\right) = 2\varphi\left(z(x_2)\right),$$

так как правее точки x_2

$$z(x) > y(x).$$

С другой стороны, проводя такие же рассуждения, какие привели нас к (37), мы получим

$$z'(x_2) < 2\varphi\left(z(x_2)\right),$$

что противоречит предыдущему.

Значит, при всяком x, если только $0 \leqslant x < x_1$,

$$z(x) > y(x) > 0;$$

в частности $z(0) > 0$, а это противоречит нашему первоначальному предположению.

Задачи. 1. Если $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = 0$, то функция $f(x, y)$, удовлетворяющая условию (35), обязана быть постоянной по y, если область G выпукла по y. Так будет, в частности, если $\varphi(u) = u^p$, $p > 1$.

2. Если в качестве $\varphi(u)$ брать функции, графики которых обращены выпуклостью вверх, то расходимость $\int\limits_0^\varepsilon \frac{du}{\varphi(u)}$ является не только достаточным, но и необходимым условием для справедливости теоремы настоящего параграфа.

3. Если $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0)$ существует, то $\int\limits_0^\varepsilon \frac{du}{\varphi(u)} = \infty$, то есть функция $\varphi(u)$ удовлетворяет условиям теоремы настоящего параграфа.

4. Если в теореме настоящего параграфа за $\varphi(u)$ брать функции Ku, $Ku|\ln u|$ и т. д., то мы будем получать все более слабые ограничения на функции $f(x, y)$, то есть все более сильные теоремы. Докажите, что нельзя получить «самой сильной» теоремы этого рода. Иначе говоря, докажите, что если $\varphi(u)$ удовлетворяет упомянутым в формулировке теоремы условиям, то всегда существует функция $\varphi_1(u)$, удовлетворяющая тем же условиям, для которой

$$\frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)} \xrightarrow[u\to 0]{} \infty.$$

5. Как известно из анализа, если функция $f(x, y)$, заданная в некоторой области G, непрерывна по каждому из пере-

менных x и y в отдельности, то она может не быть непрерывной по совокупности $(x,\, y)$. Докажите, что если f непрерывна по x и удовлетворяет условию (35), где $\varphi(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$, то f непрерывна в области G по совокупности $(x,\, y)$. Справедливо ли это утверждение для функции, заданной на квадрате, круге, треугольнике вместе с их границами?

6. Пусть на некотором интервале $(x_0,\, b)$ заданы функции $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$, причем

$$y(x_0) = z(x_0) = u(x_0) = y_0,$$

где точка $(x_0,\, y_0)$ лежит в некоторой области G, на которой определена непрерывная функция $f(x,\, y)$. Пусть всюду на интервале $(x_0,\, b)$

$$y'(x) = f(x,\, y); \quad z'(x) > f(x,\, z); \quad u'(x) \geqslant f(x,\, y).$$

Тогда при $x > x_0$ всюду $z(x) > y(x)$. Если дополнительно потребовать, чтобы в каждой своей точке $y(x)$ было единственным решением уравнения (1), то при $x > x_0$ всюду

$$u(x) \geqslant y(x).$$

Можно ли утверждать справедливость этого соотношения, если не требовать, чтобы в каждой своей точке $y(x)$ было единственным решением уравнения (1)?

7. Пусть $Y_n(x)$ есть наибольшее решение уравнения (1) с непрерывной правой частью при начальных условиях: $x = x_0$, $Y_n(x_0) = y_0 + \alpha_n$, где все $\alpha_n > 0$ и $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а точка $(x_0,\, y_0)$ лежит внутри G. Пусть $y = Y(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ есть наибольшее решение уравнения (1), проходящее через точку $(x_0,\, y_0)$, причем кривая $y = Y(x)$ целиком лежит внутри G. Тогда при достаточно большом n будет существовать $Y_n(x)$ на всем отрезке $[x_0,\, x_1]$ и при $n \to \infty$ $Y_n(x)$ будет равномерно на этом отрезке сходиться к $y(x)$. Ср. задачу 1 к § 12.

8. Пусть $y_n(x)$ есть решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\, y) + \varphi_n(x,\, y),$$

где $\varphi_n(x,\, y) > 0$ и верхняя грань значений $\varphi_n(x,\, y)$ на G стремится к 0 при $n \to \infty$, с начальными условиями $y(x_0) = y_0$.

Точка $(x_0, y_0) \in G$, $f(x, y)$ и $\varphi_n(x, y)$ считаются непрерывными. Пусть $y = Y(x)$ определено, как в предыдущей задаче. Тогда $y_n(x)$ будет равномерно на отрезке $[x_0, x_1]$ при $n \to \infty$ сходиться к $Y(x)$.

§ 14. Дополнение о ломаных Эйлера

Теорема. *Если существует только одно проходящее через точку (x_0, y_0) решение $\varphi(x)$ уравнения (1) с непрерывной правой частью, то всякая последовательность выходящих из точки (x_0, y_0) ломаных Эйлера* (точнее последовательность функций, графиками которых служат эти ломаные), *у которых длина наибольшего из звеньев стремится к 0, равномерно приближается на замкнутом интервале $[a, b]$, о котором шла речь в § 12, к этому единственному решению.*

Доказательство. Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что при любом положительном ε существует только конечное число ломаных Эйлера из рассматриваемой последовательности, не расположенных целиком между линиями $y = \varphi(x) + \varepsilon$ и $y = \varphi(x) - \varepsilon$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Это же последнее утверждение легко доказать от противного. В самом деле, допустив противное, мы получим бесконечную последовательность проходящих через точку (x_0, y_0) ломаных Эйлера, у которых длина наибольшего из звеньев стремится к 0 с возрастанием номера и ни одна из которых не лежит целиком между линиями $y = \varphi(x) \pm \varepsilon$. Тогда, применяя к этой последовательности рассуждения, проведенные в § 12, мы найдем последовательность ломаных Эйлера, которая равномерно сходится к интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0) и отличной от линии $y = \varphi(x)$. А этого быть не может в силу предполагаемой единственности интегральной кривой уравнения (1), проходящей через точку (x_0, y_0).

§ 15. Метод последовательных приближений

Теорема. *Пусть в замкнутой области $\overline{G}$ на плоскости (x, y) функция $f(x, y)$ ограничена, непрерывна по x и удо-*

влетворяет условию Липшица по y

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant K|y_2 - y_1|$$ [1].

Тогда для любой внутренней точки (x_0, y_0) *из* G *можно указать такой заключающий внутри себя* x_0 *замкнутый интервал* $[a, b]$ *на оси* Ox, *на котором существует единственное решение дифференциального уравнения* (1), *обращающееся в* y_0 *при* $x = x_0$. [2]

Заметим прежде всего, что если заранее предположить существование такого решения, то, интегрируя тождество

$$y'(\xi) = f(\xi, y(\xi))$$

в пределах от x_0 до x, мы получим

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{38}$$

При этом под знаком интеграла стоит непрерывная функция от ξ, так как $y(\xi)$ была дифференцируема, а потому и непрерывна.

Соотношения вида (38), где неизвестная функция $y(\xi)$ входит под знак интеграла, называются *интегральными уравнениями*. Таким образом, всякое решение уравнения (1), об-

---

[1] Так как функция f непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица по y в области G, то она непрерывна по совокупности x и y в этой области. Действительно,

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = [f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1)] + [f(x_2, y_1) - f(x_1, y_1)].$$

По условию Липшица, первая из разностей, стоящих в правой части этого равенства, по абсолютной величине не больше $K|y_2 - y_1|$. Поэтому она делается как угодно малой, если точка (x_2, y_2) достаточно близка к (x_1, y_1). А вторая из этих разностей делается при этом как угодно малой, в силу предполагаемой непрерывности функции $f(x, y)$ по x в точке (x_1, y_1).

[2] Так как для всякой точки (x_0, y_0), лежащей внутри открытой области G, всегда можно указать такую замкнутую область G^*, которая лежит строго внутри G и содержит внутри себя точку (x_0, y_0), то наша теорема останется верной, если в ее формулировке замкнутую область $\overline{G}$ заменить открытой областью. Мы потребовали замкнутости G исключительно для большего удобства в проведении доказательства (ср. примечание 1 к § 16). Условие ограниченности f введено тоже для удобства доказательства; теорема остается справедливой, если не требовать этой ограниченности.

ращающееся в y_0 при $x = x_0$, удовлетворяет интегральному уравнению (38). Обратно, всякое непрерывное решение $y(x)$ интегрального уравнения (38) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальному условию $y(x_0) = y_0$. Последнее видно непосредственно. То же обстоятельство, что всякая непрерывная[1] функция, удовлетворяющая уравнению (38), обязательно удовлетворяет и уравнению (1), легко доказывается дифференцированием обеих частей уравнения (38) по x. Что дифференцирование здесь законно, видно из следующих соображений. Допустим, что в обе части уравнения (38) вместо y поставлено некоторое непрерывное решение этого уравнения. Тогда правая часть полученного тождества имеет производную по x. Следовательно, и левая его часть, т. е. функция $y(x)$, также имеет производную по x.

Поэтому вместо того чтобы доказывать, что на некотором замкнутом интервале $[a, b]$ $(a < x_0 < b)$ существует одно и только одно обращающееся в y_0 при $x = x_0$ решение дифференциального уравнения (1), мы будем доказывать, что на этом интервале существует одно и только одно непрерывное решение интегрального уравнения (38).

Пусть M есть верхняя грань значений $f(x, y)$. Проведем через точку (x_0, y_0) две прямые DC и BE соответственно с угловыми коэффициентами $+M$ и $-M$. Проведем далее две прямые, параллельные оси Oy, так, чтобы они образовали вместе с прямыми DC и BE два равнобедренных треугольника, целиком лежащих в $\overline{G}$ (черт. 9). Пусть уравнением прямой ED будет $x = a$, а уравнением прямой CB будет $x = b$. Несколько позже нам придется предположить, что числа a и b достаточно близки к x_0.

Возьмем теперь на замкнутом интервале $[a, b]$ совершенно произвольно непрерывную функцию $\varphi_0(x)$, лишь бы только ее график не выходил из области $\overline{G}$. Подставим ее в правую часть уравнения (38). После этого правая часть будет некоторой вполне определенной функцией от x. Обозначим ее через $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(\xi, \varphi_0(\xi)\right) d\xi.$$

[1] Мы говорим здесь о непрерывных решениях интегрального уравнения (38) только затем, чтобы избежать трудностей, возникающих при интегрировании разрывных функций.

Ясно, что *эта функция определена при $a \leqslant x \leqslant b$, непрерывна и обращается в y_0 при $x = x_0$*. Легко показать, что *ее график не выходит из треугольников EAD и ABC при $a \leqslant x \leqslant b$*. Для этого достаточно заметить, что

$$|f(\xi, \varphi_0(\xi))| \leqslant M$$

и потому

$$|\varphi_1(x) - y_0| \leqslant M|x - x_0|.$$

Положим далее

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi))\, d\xi.$$

В силу отмеченных выше свойств функции $\varphi_1(x)$ интеграл в правой части равенства существует. Функция $\varphi_2(x)$ также определена на $[a, b]$ и обладает всеми теми свойствами, которые мы отметили у $\varphi_1(x)$. Поэтому можно построить функции

$$\left.\begin{aligned} \varphi_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_2(\xi))\, d\xi, \\ \varphi_4(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_3(\xi))\, d\xi, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))\, d\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (38')$$

Этот процесс построения функций $\varphi_n(x)$, которые мы будем называть *последовательными приближениями решения*, можно продолжать без конца. Таким образом, мы получим бесконечную последовательность функций

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \qquad (39)$$

Установим теперь, что на замкнутом интервале $[a, b]$ эта последовательность сходится равномерно к непрерывному решению уравнения (38). Действительно, $\varphi_n(x)$ можно представить так:

$$\varphi_n(x) = \varphi_1(x) + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] + \\ + [\varphi_3(x) - \varphi_2(x)] + \ldots + [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)]\,.$$

Поэтому для доказательства равномерной сходимости последовательности (39) достаточно показать равномерную сходимость бесконечного ряда

$$\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + \ldots + (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \ldots \tag{40}$$

Для этого оценим разность $\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)$. Используя неравенство Липшица, можно написать

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi_n(\xi)) - f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))]\, d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi_n(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi)|\, d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant K \max_{a \leqslant \xi \leqslant b} |\varphi_n(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi)|\, (b-a). \tag{40$'$}$$

Поэтому, если постоянное c таково, что $|\varphi_1(x)| \leqslant c$ и $|\varphi_2(x)| \leqslant c$, и если положить $K(b-a) = m$, то по абсолютной величине члены ряда (40) не будут превосходить соответствующих членов ряда

$$c + 2c + 2cm + 2cm^2 + 2cm^3 + \ldots,$$

который сходится, если $m < 1$. Будем считать интеграл (a, b) настолько малым, что $K(b-a) = m < 1$. Тогда ряд (40) сходится равномерно, и его сумма $\varphi(x)$ есть непрерывная на замкнутом интервале $[a, b]$ функция. Ее график не выходит из треугольников EAD и ABC. Следовательно, интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))\, d\xi$ имеет смысл. Так как

$$\left| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))]\, d\xi \right| \leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi)|\, d\xi \right|,$$

то в равенствах (38$'$) можно переходить к пределу при $n \to \infty$ не только слева, но и справа, а потому функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (38).

Для того чтобы доказать, что интегральное уравнение (38) имеет единственное, непрерывное на замкнутом интервале $[a, b]$ и потому ограниченное решение, будем рассуждать от противного. Пусть имеются два таких решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Тогда

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi,\, \varphi(\xi))\, d\xi$$

и

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi,\, \psi(\xi))\, d\xi.$$

Отсюда

$$|\psi(x) - \varphi(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(\xi,\, \psi(\xi)) - f(\xi,\, \varphi(\xi))]\, d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant K(b-a) \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\psi(x) - \varphi(x)|\,.$$

Поэтому

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |\psi(x) - \varphi(x)| \leqslant K(b-a) \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\psi(x) - \varphi(x)|\,.$$

Так как $K(b-a) < 1$, то это может быть лишь при условии, что $\max|\psi(x) - \varphi(x)| = 0$, т. е. что $\psi(x)$ совпадает с $\varphi(x)$.

Замечание 1. Как бы мы ни выбирали исходную при построении последовательности (39) функцию $\varphi_0(x)$, лишь бы только она была непрерывна и ее график проходил бы по $\overline{G}$, последовательность (39) всегда будет сходиться на интервале $[a,\, b]$ к одной и той же функции. Действительно, по доказанному прежде, эта последовательность будет при любой такой функции $\varphi_0(x)$ сходиться к непрерывному и ограниченному решению уравнения (38), а такое решение, как мы только что доказали, единственно.

Замечание 2. Сделанные в конце § 12 замечания остаются в силе и теперь.

Замечание 3. Производя несколько точнее оценки $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$, можно показать, что ряд (40) сходится не только на интервале $[a,\, b]$. Действительно, аналогично неравенствам (40′) получаем

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_0(\xi))]\, d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} 2MK\, dx \right| = \frac{K|x - x_0|}{1} \cdot 2M;$$
$$|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| \leqslant \left| K \int\limits_{x_0}^{x} |\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)|\, d\xi \right| = \frac{K(x - x_0)^2}{2} \cdot 2M.$$

Вообще,

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leqslant \frac{|x - x_0|^k}{k!} \cdot 2MK \tag{40''}$$

на любом интервале (A, B), для которого графики $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ при $A < x < B$ не выходят из $\overline{G}$. Ряд же

$$\frac{|x - x_0|}{1} 2MK + \frac{|x - x_0|^2}{2} 2MK + \ldots + \frac{|x - x_0|^k}{k!} 2MK + \ldots$$

сходится при всех значениях $|x - x_0|$. Поэтому и ряд (40) равномерно сходится на всяком конечном интервале, где функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ существуют. В частности, поставленное выше условие $K(b - a) < 1$ становится несущественным.

Пользуясь соотношением

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) + [\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)] + [\varphi_{n+2}(x) - \varphi_{n+1}(x)] + \ldots$$

и применяя оценки (40″), получим

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leqslant 2MK|x - x_0|^n \left[\frac{1}{n!} + \frac{|x - x_0|}{(n+1)!} + \frac{|x - x_0|^2}{(n+2)!} + \ldots \right].$$

Это дает возможность оценить отклонение n-го приближения от точного, еще неизвестного, решения.

Задача. Пусть $f(x, y)$ и $\varphi_0(x)$ обладают k непрерывными производными. Тогда $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$ обладают $(k + 1)$-ой непрерывной производной и последовательность производных от $\varphi_n(x)$ до $(k + 1)$-го порядка включительно равномерно сходится к соответствующей производной от $\varphi(x)$ на всяком интервале, где существуют все $\varphi_n(x)$, начиная с некоторого n.

§ 16. Принцип сжатых отображений

Изложенный в предыдущем параграфе метод последовательных приближений находит применение не только при доказательстве существования решений дифференциальных уравнений, но и во многих других вопросах анализа. Поэтому интересно выяснить возможно широкие условия его применимости. Тогда не придется в каждом отдельном случае заново проводить весь этот метод, а достаточно будет только убедиться, что выполнены условия его применимости.

Принцип сжатых отображений. (Теорема Тихонова–Каччиополи.) *Пусть имеется непустое семейство* $\{\varphi\}$ *функций, определенных на одном и том же множестве* (безразлично, каком) $\mathfrak{M}$ *и обладающих следующими свойствами*:

1. *Каждая функция* φ *ограничена* (быть может, своей константой)

$$|\varphi| \leqslant M_\varphi.$$

2. *Предел всякой равномерно сходящейся последовательности функций семейства также есть функция этого семейства.*

3. *На данном семействе* $\{\varphi\}$ *определен оператор* $A(\varphi)$, *который каждую функцию этого семейства переводит в функцию того же семейства.*

4. *Для любой пары функций* φ_1 *и* φ_2 *семейства*

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| \leqslant m \operatorname{borne\,sup} |\varphi_2 - \varphi_1|,$$

где $0 \leqslant m < 1$. Здесь под $\operatorname{borne\,sup} |\varphi_2 - \varphi_1|$ (borne supèrieure) мы понимаем верхнюю грань значений $|\varphi_2 - \varphi_1|$ на множестве $\mathfrak{M}$.

Тогда уравнение

$$\varphi = A(\varphi) \tag{41}$$

имеет одно и только одно решение среди функций рассматриваемого семейства.

Прежде чем переходить к доказательству сформулированной теоремы, укажем несколько примеров ее применения.

Пример 1. Покажем прежде всего, как применить принцип сжатых отображений к доказательству существования и единственности непрерывного решения интегрального уравнения (38) или, что все равно, к доказательству существования и единственности принимающего при $x = x_0$ значение y_0 решения дифференциального уравнения (1).

За множество $\mathfrak{M}$ примем замкнутый конечный интервал $a \leqslant x \leqslant b$, о котором речь шла в предыдущем параграфе. За семейство функций $\{\varphi\}$ примем семейство непрерывных функций, графики которых проходят в замкнутой области $\overline{G}$, о которой говорилось в предыдущем параграфе, между прямыми $x = a$ и $x = b$ (черт. 9). Такие функции удовлетворяют, очевидно, условиям 1 и 2 теоремы Тихонова–Каччиопполи [1]. Положим далее

$$A(\varphi) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\,(\xi,\, \varphi(\xi))\, d\xi.$$

В предыдущем параграфе мы видели, что этот оператор удовлетворяет условию 3 и условию 4, если интервал $(a,\, b)$ достаточно мал. Значит, на основании принципа сжатых отображений уравнение (38) имеет одно и только одно решение в классе функций $\{\varphi\}$, а следовательно, вообще только одно непрерывное решение при $a \leqslant x \leqslant b$.

Пример 2. Интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{a}^{b} K(x,\, \xi)\varphi(\xi) d\xi,$$

где $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, функция $K(x,\, \xi)$ (ядро) непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и $a \leqslant \xi \leqslant b$, при достаточно малом λ (λ — некоторое постоянное) имеет одно и только одно непрерывное на замкнутом интервале $a \leqslant x \leqslant b$ решение $\varphi(x)$.

Чтобы применить здесь принцип сжатых отображений за множество $\mathfrak{M}$ примем замкнутый интервал $[a,\, b]$, за семейство $\{\varphi\}$ — семейство всех непрерывных на этом интервале функций. Тогда, очевидно, условия 1 и 2 теоремы Тихонова–Каччиопполи выполнены. Оператор A определим так:

$$A(\varphi) \equiv f(x) + \lambda \int\limits_{a}^{b} K(x,\, \xi)\varphi(\xi) d\xi.$$

[1] Мы рассматриваем здесь замкнутую область $\overline{G}$ только затем, чтобы удовлетворить условию 2.

Для него, очевидно, выполняется условие 3. Так как

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| = \left|\lambda \int_a^b K(x, \xi)\,[\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)]\,d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| M \max_{a \leqslant \xi \leqslant b} |\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)|\,(b-a),$$

то условие 4 выполняется, если $(b-a)|\lambda|M < 1$. Здесь M есть верхняя грань значений $|K(x, \xi)|$.

Пример 3. Уравнение

$$x = f(x)$$

имеет единственное решение, если $f(x)$ определена и дифференцируема при всех действительных x и если всюду $|f'(x)| \leqslant m < 1$.

Чтобы применить здесь принцип сжатых отображений, будем считать множество $\mathfrak{M}$ состоящим из одной точки. Тогда каждая функция принимает на $\mathfrak{M}$ только одно значение. Следовательно, семейство функций $\{\varphi\}$ будет состоять из всех действительных чисел. Поэтому, очевидно, условия 1 и 2 теоремы Тихонова–Каччиопполи будут выполнены. За оператор A примем функцию f. По условию она определена при всех действительных значениях аргумента x; каждое действительное число она переводит в некоторое действительное же число; следовательно, условие 3 выполнено. Условие 4 выполнено потому, что

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))|\,|x_2 - x_1| \leqslant m|x_2 - x_1|.$$

Пример 4. *Теорема о неявной функции.* Пусть функция $f(x, y)$ определена при $a \leqslant x \leqslant b$ и любых действительных значениях y, непрерывна по x и имеет всюду ограниченную производную по y, которая всегда превосходит некоторое постоянное $m > 0$. Тогда уравнение

$$f(x, y) = 0 \tag{42}$$

имеет на замкнутом интервале $a \leqslant x \leqslant b$ одно и только одно непрерывное решение $y(x)$.

Чтобы применить принцип сжатых отображений, за множество $\mathfrak{M}$ примем замкнутый интервал $[a, b]$, за семейство $\{\varphi\}$ — семейство всех непрерывных на этом интервале функций. Тогда, очевидно, условия 1 и 2 теоремы Тихонова–Каччиопполи будут выполнены. Положим далее

$$A(\varphi) \equiv \varphi - \frac{1}{M} f(x, \varphi),$$

где M есть верхняя грань значений $f'_y(x, y)$. Такой оператор, очевидно, удовлетворяет условию 3. С другой стороны, так как

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| = \left|\varphi_2 - \frac{1}{M} f(x, \varphi_2) - \left(\varphi_1 - \frac{1}{M} f(x, \varphi_1)\right)\right| =$$
$$= \left|(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{f'_\varphi\,(x, \varphi_1 + \theta(\varphi_2 - \varphi_1))}{M}(\varphi_2 - \varphi_1)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi_2 - \varphi_1| \left(1 - \frac{m}{M}\right),$$

то и условие 4 выполнено. Значит, уравнение

$$\varphi = \varphi - \frac{1}{M} f(x, \varphi)$$

или, что все равно, уравнение (42) имеет одно и только одно непрерывное решение.

Доказательство принципа сжатых отображений. Возьмем какую-либо функцию φ_0 данного семейства и построим функцию

$$\varphi_1 = A(\varphi_0),$$

которую мы будем называть «первым приближением» искомого уравнения (41). По свойству 3 оператора φ_1 принадлежит $\{\varphi\}$, и потому можно построить «второе приближение», положив

$$\varphi_2 = A(\varphi_1).$$

Функция φ_2 также принадлежит семейству $\{\varphi\}$. Следовательно, этот процесс можно продолжить бесконечно. Таким образом, получим последовательность функций

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots, \tag{43}$$

где $\varphi_n = A(\varphi_{n-1})$ при любом $n \geqslant 1$. Докажем, что последовательность (43) сходится равномерно. Для этого рассмотрим ряд (ср. § 15)

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots \tag{44}$$

Если $|\varphi_0| \leqslant M_0$ и $|\varphi_1| \leqslant M_1$ (свойство 1), то

$$|\varphi_1 - \varphi_0| \leqslant M_0 + M_1 = M.$$

Применяя свойство 4 оператора $A(\varphi)$, мы найдем

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| = |A(\varphi_n) - A(\varphi_{n-1})| \leqslant m \operatorname{borne\,sup} |\varphi_n - \varphi_{n-1}|.$$

Поэтому члены ряда (44) по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда с постоянными положительными членами:

$$M_0 + M + Mm + Mm^2 + \ldots$$

Поэтому последовательность (43), члены которой являются частичными суммами ряда (44), равномерно сходится к некоторой функции φ. По свойству 2 эта предельная функция принадлежит семейству $\{\varphi\}$, и потому оператор $A(\varphi)$ имеет смысл. Заметим далее, что

$$|A(\varphi) - A(\varphi_{n-1})| \leqslant m \operatorname{borne\,sup} |\varphi - \varphi_{n-1}|.$$

А так как $|\varphi - \varphi_{n-1}| \to 0$ равномерно при $n \to \infty$, то $A(\varphi_{n-1})$ при этом равномерно сходится к $A(\varphi)$. Поэтому в равенстве $\varphi_n = A(\varphi_{n-1})$ можно перейти к пределу при $n \to \infty$, и тогда мы получим

$$\varphi = A(\varphi).$$

Если бы уравнение (41) имело в семействе $\{\varphi\}$ два решения φ_1 и φ_2, то было бы

$$|\varphi_2 - \varphi_1| = |A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| \leqslant m \operatorname{borne\,sup} |\varphi_2 - \varphi_1|$$

и, следовательно,

$$\operatorname{borne\,sup} |\varphi_2 - \varphi_1| \leqslant m \operatorname{borne\,sup} |\varphi_2 - \varphi_1|,$$

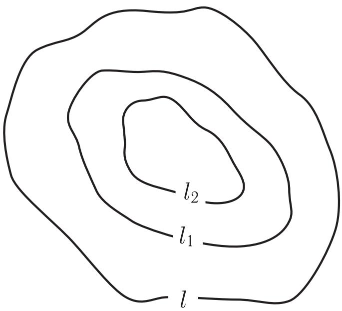
что возможно только при $\varphi_2 \equiv \varphi_1$, так как $m < 1$.

§ 17. Геометрическая интерпретация принципа сжатых отображений

Будем рассматривать функции семейства $\{\varphi\}$ как точки некоторого множества Φ. За «расстояние» между «точками» φ_1 и φ_2 будем принимать $\operatorname{borne\,sup} |\varphi_2 - \varphi_1|$. Тогда условие 2 можно интерпретировать так, что всякая «предельная точка» для бесконечной последовательности «точек» множества Φ принадлежит Φ, т. е. что множество Φ замкнуто. Условие 3 состоит в том, что оператор A переводит «точку» φ, принадлежащую Φ, в некоторую «точку», также принадлежащую Φ. Наконец, условие 4 состоит в том, что если оператор A

переводит «точку» φ_1 в «точку» φ_1^* и «точку» φ_2 в «точку» φ_2^*, то расстояние между φ_1^* и φ_2^* не больше m-й ($m < 1$) части «расстояния» между «точками» φ_1 и φ_2. Найти решение уравнения (41) в классе функций $\{\varphi\}$ — это значит найти такую «точку» множества Φ, которая остается неподвижной при действии оператора A.

Необходимость существования такой «точки» делается геометрически очевидной, если допустить, что множество Φ ограничено. Тогда существует верхняя грань «расстояний» между ее «точками». Эту верхнюю грань мы будем называть *диаметром* множества Φ. Пусть этот диаметр равен d. Изобразим тогда множество Φ в виде некоторой замкнутой области (черт. 12), которая ограничена линией l. После действия на все «точки» этого множества оператора A мы получим множество Φ_1, которое, согласно условию 3, целиком заключено в Φ. На нашем чертеже Φ_1 ограничено линией l_1. По условию 4 диаметр Φ_1 не больше md. Подействуем теперь оператором A на «точки» множества Φ_1. Получим после этого множество Φ_2, целиком заключенное в Φ_1, потому что уже при действии этого оператора на Φ получаются только «точки» Φ_1, при действии же этого оператора на Φ_1, т. е. на часть Φ, конечно, ничего не может получиться кроме «точек» из Φ_1. По условию 4 диаметр Φ_2 не больше чем m^2d. На нашем чертеже Φ_2 ограничено линией l_2. Продолжая этот процесс, мы получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга замкнутых множеств Φ, Φ_1, Φ_2, Φ_3, ..., диаметры которых стремятся к 0. Поэтому общая часть всех этих множеств будет состоять только из одной точки, которая, очевидно, будет оставаться неподвижной при действии оператора A.



Черт. 12

Двух «точек», которые оставались бы неподвижными при действии оператора A, быть не может потому, что тогда «расстояние» между ними оставалось бы неизменным и положительным после операции A, а это противоречит условию 4.

Задачи. 1. Пусть F — замкнутая ограниченная часть n-мерного пространства отображается на себе посредством оператора φ так, что всегда

$$\rho\,[\varphi(A),\,\varphi(B)] < \rho[A,\,B]. \tag{$*$}$$

Здесь $\rho[A,\,B]$ расстояние между точками A и B. Докажите, что при этом ровно одна точка остается неподвижной. Верно ли это для незамкнутых ограниченных множеств? Для замкнутых ограниченных множеств? Для замкнутых неограниченных множеств?

2. Докажите, что если неравенство $(*)$ заменить неравенством

$$\rho\,[\varphi(A),\,\varphi(B)] \leqslant m\rho[A,\,B], \quad 0 \leqslant m < 1,$$

то теорема о существовании неподвижной точки верна для любых замкнутых множеств (даже неограниченных). Верна ли она для незамкнутых ограниченных множеств?

3. Пусть неравенство $(*)$ заменено неравенством

$$\rho\,[\varphi(A),\,\varphi(B)] \leqslant \rho[A,\,B].$$

Докажите, что тогда теорема о существовании неподвижной точки верна для случая, когда F — отрезок прямой или контур равнобедренного прямоугольного треугольника, и неверна, если F — окружность. Если ρ означает наименьшее расстояние, измеримое по контуру, то теорема не будет верна и для контура прямоугольного равнобедренного треугольника.

§ 18. Теорема Коши о дифференциальном уравнении $dy/dx = f(x,\,y)$ с голоморфной правой частью

Если функция $f(x,\,y)$ голоморфна в окрестности точки $(x_0,\,y_0)$, то существует, и при том только одно, решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\,y), \tag{45}$$

голоморфное в окрестности точки x_0 и удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Функция $F(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ называется *голоморфной* по всем своим аргументам в окрестности

$$|x_i - x_i^0| < r \quad (i = 1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой окрестности она разлагается в степенной ряд по

$$(x_1 - x_1^0), \ldots, (x_n - x_n^0).$$

Как ее аргументы, так и сама функция могут принимать при этом не только действительные значения, но и комплексные. Производной от голоморфной функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ по комплексному аргументу x_k называется функция, представляемая рядом, который получается почленным дифференцированием ряда, представляющего $F(x_1, \ldots, x_n)$. Так полученный ряд имеет, по крайней мере, такой же радиус сходимости, как и ряд, которым представляется $F(x_1, \ldots, x_n)$ (Г. М. Фихтенгольц, Курс диф. и инт. исчисления, т. II, стр. 471, Гостехиздат 1948). Если $F(x_1, \ldots, x_n)$ и $x_1, \ldots, x_n$ принимают только действительные значения, то определенная так производная совпадает с обычной. Все обычные правила дифференцирования суммы, произведения, функции от функции и т. д. при этом сохраняются. Во всех рассуждениях настоящего параграфа совершенно безразлично, принимают ли рассматриваемые величины только действительные значения или они принимают также и комплексные значения.

Исторически доказательство теоремы Коши было первым доказательством существования и единственности решения, принимающего при $x = x_0$ заданное значение y_0, для дифференциального уравнения довольно общего вида. Ограничиться только этим доказательством нельзя было потому, что требование голоморфности рассматриваемых функций часто бывает весьма искусственным. Очень многие вопросы физики приводят к дифференциальным уравнениям, правые части которых неголоморфны.

Доказательство теоремы Коши. Предварительно заметим, что без ограничения общности можно считать $x_0 = y_0 = 0$, так как общий случай можно привести к этому, полагая $x - x_0 = x^*$ и $y - y_0 = y^*$.

Допустим сначала, что данное уравнение имеет голоморфное решение, обращающееся в 0 при $x = 0$. Пусть оно представляется рядом

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$$

Тогда, очевидно, должно быть $C_0 = y(0) = 0$. Подставляя этот ряд в уравнение (45) вместо y, дифференцируя полученное тождество по x один, два, три и т. д. раз и сравнивая значения обеих частей полученных тождеств при $x = y = 0$, замечаем, что коэффициенты C_i будут последовательно вычисляться следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 = y'(0) = f(0,\,0),\\
&2C_2 = y''(0) = f_x(0,\,0) + f_y(0,\,0)y'(0) =\\
&\qquad = f_x(0,\,0) + f_y(0,\,0)C_1,\\
&2\cdot 3\cdot C_3 = y'''(0) = f_{xx}(0,\,0)+\\
&\ + 2f_{xy}(0,\,0)y'(0) + f_{yy}(0,\,0)y'^2(0) + f_y(0,\,0)y''(0) =\\
&= f_{xx}(0,\,0) + 2f_{xy}(0,\,0)C_1 + f_{yy}(0,\,0)C_1^2 + f_y(0,\,0)2C_2
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

и т. д.

Отсюда видно, что коэффициенты C_i определяются однозначно и, следовательно, голоморфных решений нашего уравнения, обращающихся в 0 при $x = 0$, не может быть больше одного. Кроме того, для дальнейшего важно отметить, что коэффициент C_i разложения в ряд по степеням x решения $y(x)$ выражается через коэффициенты разложения в ряд по степеням x и y функции $f(x,\,y)$ и C_1, C_2, …, C_{i-1}, и при том только при помощи действий сложения и умножения.

Чтобы доказать существование решения уравнения (45), составим формально ряд по степеням x с коэффициентами C_i, определяемыми равенствами (46). Если этот ряд, который мы будем обозначать римской цифрой I, будет сходиться, то он и будет, очевидно, представлять требуемое решение. Действительно, тогда при подстановке вместо y в уравнение (45) этого ряда и при разложении правой части в степенной ряд по x коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях будут одинаковыми. Для доказательства сходимости составим вспомогательное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = F(x,\,z), \tag{47}$$

правая часть которого также голоморфна в окрестности $(0,\,0)$, причем все коэффициенты разложения $F(x,\,z)$ положительны и не меньше по абсолютной величине соответствующих коэффициентов в разложении $f(x,\,y)$. Уравнение (47) называется *мажорирующим* для уравнения (45), а функция $F(x,\,z)$ называется *мажорирующей* для $f(x,\,y)$. Если $f(x,\,y)$ голоморфна в окрестности $(0,\,0)$

$$|x| < r, \quad |y| < r,$$

можно, например, положить

$$F(x, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r'}\right)\left(1 - \frac{z}{r'}\right)},$$

где $0 < r' < r$, а M — некоторая положительная постоянная (см., например, Гурса, Курс анализа, том I, часть II, § 183, изд. 1933 г.). Если нам удастся получить голоморфное решение $z(x)$ этого уравнения, которое при $x = 0$ принимает значение, равное нулю, то отсюда будет следовать сходимость ряда I. Действительно, как мы уже отмечали выше в аналогичном случае, коэффициент C_i^* при i-й степени разложения $z(x)$ по степеням x получается только при помощи действий сложения и умножения над коэффициентами разложения $F(x, z)$ по степеням x и z и $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_{i-1}^*$. Поэтому

$$C_i^* \geqslant |C_i|.$$

Очевидно, при построении $z(x)$ достаточно рассматривать только действительные значения x. Если же x действительно, то уравнение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r'}\right)\left(1 - \frac{z}{r'}\right)}$$

легко интегрируется разделением переменных:

$$\int_0^z \left(1 - \frac{u}{r'}\right) du = \int_0^x \frac{M\, d\xi}{1 - \frac{\xi}{r'}}.$$

Отсюда

$$z - \frac{z^2}{2r'} = -r' M \ln\left(1 - \frac{x}{r'}\right).$$

Это квадратное уравнение имеет решение

$$z(x) = r' - r'\sqrt{1 + 2M \ln\left(1 - \frac{x}{r'}\right)},$$

которое обращается в нуль при $x = 0$ и является голоморфной функцией от x при

$$|x| < r'\left(1 - e^{-\frac{1}{2M}}\right).$$

Следовательно, утверждение о сходимости при достаточно малом $|x|$, формально построенного для $y(x)$ ряда, доказано. Его сумма и будет голоморфным решением дифференциального уравнения (45).

Следствие. *Если правая часть дифференциального уравнения* (1) *голоморфна и действительна при действительных значениях x и y, изменяющихся в некоторой области*[1]*, то все действительные решения этого уравнения, графики которых проходят в этой области, голоморфны.* В самом деле, раз правая часть этого уравнения голоморфна в некоторой области, то для каждой точки (x_0, y_0) этой области существует окрестность, где она удовлетворяет условиям Липшица по y. А тогда в этой окрестности есть только одно решение, которое при $x = x_0$ обращается в y_0. Следовательно, оно совпадает с только что построенным голоморфным.

Замечание. Если правая часть уравнения (45) линейна относительно y, то для области существования решения этого уравнения можно дать лучшие оценки, чем в общем случае. В самом деле, пусть наше уравнение имеет вид (17), где $a(x)$ и $b(x)$ — голоморфные функции от x при $|x| < r$. Тогда за мажорирующее уравнение можно принять уравнение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}(z+1);$$

здесь коэффициент при $(z+1)$ является общей мажорантой для $a(x)$ и $b(x)$. Это последнее уравнение имеет голоморфное при $|x| < r$ решение

$$z = \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-Mr} - 1,$$

обращающееся в 0 при $x = 0$.

Отсюда так же, как это прежде было сделано для общего случая, можно показать, что наше линейное уравнение имеет голоморфное при $|x| < r$ решение, обращающееся в 0 при $x = 0$.

§ 19. О степени гладкости решений дифференциальных уравнений

Теорема. *Если $f(x, y)$ имеет непрерывные производные по x и y до p-го $(p \geqslant 0)$ порядка, то всякое решение уравнения* (1) *имеет непрерывные производные по x до*

[1] Функция называется голоморфной в некоторой области G, если она голоморфна в некоторой окрестности каждой точки G.

$(p+1)$*-го порядка.* Под производной 0-го порядка понимается сама функция.

Доказательство. Пусть $y(x)$ есть какое-нибудь решение дифференциального уравнения (1). Тогда должно иметь место тождество

$$y'(x) = f\left(x,\, y(x)\right). \tag{48}$$

Раз функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), то она всюду имеет производную по x и потому непрерывна. Поэтому если $f(x,\, y)$ непрерывна по x и y, то правая часть (48) непрерывна по x. Значит, $y'(x)$ также непрерывна.

Допустим теперь, что $p \geqslant 1$. Тогда правая часть (48) имеет непрерывную производную по x. Значит, и левая часть этого тождества имеет непрерывную производную по x. Значит, функция $y(x)$ имеет непрерывную производную 2-го порядка. Продифференцировав (48) по x, мы получим

$$y''(x) = f'_x\left(x,\, y(x)\right) + f'_y\left(x,\, y(x)\right) y'(x).$$

Применяя к этому тождеству те же рассуждения, какие мы применили к тождеству (48), если $p \geqslant 2$, мы найдем, что $y(x)$ имеет непрерывную производную 3-го порядка и т. д.

§ 20. Зависимость решения от начальных данных

До сих пор мы исследовали решение дифференциального уравнения, когда фиксируется некоторая точка $(x_0,\, y_0)$, через которую должно проходить это решение. Если изменять x_0 и y_0, то будет меняться и решение. Здесь возникает важный в приложениях вопрос, *как* будет при этом меняться решение. Этот вопрос имеет и большое принципиальное значение, как на это указал Адамар. Действительно, если какая-нибудь физическая задача приводит к нахождению удовлетворяющего некоторым начальным условиям решения дифференциального уравнения, то эти начальные условия обычно находятся измерением из опыта. Но за абсолютную точность измерения ручаться нельзя. И найденное из условия, чтобы оно обращалось в y_0 при $x = x_0$, решение дифференциального уравнения представляло бы очень мало интереса для приложений, если бы даже незначительные погрешности в измерении y_0 могли привести к сильному изменению решения дифференциального уравнения. Мы покажем, что при некоторых предположениях решение дифференциального уравнения зависит непрерывным образом от начальных данных.

Теорема. *Если функция $f(x, y)$, заданная на области G, непрерывна, ограничена, и если через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит только одно решение дифференциального уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

то это решение непрерывно зависит от точки (x_0, y_0) [1]*.*

Доказательство. Пусть M — верхняя граница значений $|f(x, y)|$. Рассмотрим прямоугольник

$$|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant 2Ma,$$

лежащий целиком в области G.

Пусть $y_0(x)$ — решение уравнения (1), проходящее через точку (x_0, y_0), а $y_k(x)$ — решение этого уравнения, проходящее через точку (x_k, y_k), достаточно близкую к (x_0, y_0). Тогда функции $y_0(x)$ и $y_k(x)$ будут определены на всем интервале $|x - x_0| \leqslant a$. Покажем, что при всяком положительном ε на всем этом интервале будет

$$|y_k(x) - y_0(x)| < \varepsilon,$$

если точка (x_k, y_k) достаточно близка к точке (x_0, y_0). В самом деле, допустим, что это утверждение неверно. Тогда существует такое положительное ε и такая бесконечная последовательность точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, сходящихся к точке (x_0, y_0), что при всяком $k \geqslant 1$ и при некотором x_k из интервала $|x - x_0| \leqslant a$ будет

$$|y_k(x_k) - y_0(x_k)| \geqslant \varepsilon. \tag{$*$}$$

Последовательность функций $y_k(x_k)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ равностепенно непрерывна, так как производная каждой функции

[1] В § 22 непрерывная зависимость решения от начальных данных доказывается независимо от доказательства только что сформулированной теоремы при более сильных предположениях. Читатель может пропустить приведенное ниже доказательство.

нигде не превышает по абсолютной величине M, и, следовательно, всегда

$$|y_k(x'') - y_k(x')| \leqslant M|x'' - x'|.$$

Поэтому из последовательности функций $y_k(x)$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $y_1^*(x)$, $y_2^*(x)$, ..., $y_k^*(x)$, ... Рассуждая так же, как в § 12, мы найдем, что эта последовательность сходится к решению уравнения (1), проходящему через точку (x_0, y_0), то есть к решению $y_0(x)$, так как мы предполагаем, что такое решение единственно. Но равномерная сходимость последовательности $y_k^*(x)$ к $y_0(x)$ на интервале $|x - x_0| \leqslant a$ противоречит неравенству $(*)$. Таким образом, предположение $(*)$ привело нас к противоречию.

Итак, показано, что на интервале $|x - x_0| \leqslant a$ решение $y_k(x)$ уравнения (1), проходящее через точку (x_k, y_k), делается как угодно близким к решению $y_0(x)$, если точка (x_k, y_k) достаточно близка к (x_0, y_0).

Построим прямоугольник Q_1

$$|x - x_0'| \leqslant a_1, \quad |y - y_0'| \leqslant 2Ma_1,$$

целиком лежащий в области G; здесь

$$x_0' = x_0 \pm a, \quad y_0' = y_0(x_0 \pm a).$$

По доказанному выше, если точка (x_k, y_k) достаточно близка к точке (x_0, y_0), то точка $(x_0', y_0(x_k'))$ делается как угодно близкой к точке (x_0', y_0'). Поэтому, применяя к решениям $y_0(x)$ и $y_k(x)$ на интервале $|x - x_0'| \leqslant a_1$ все те рассуждения, какие мы провели прежде для интервала $|x - x_0| \leqslant a$, мы найдем, что и на интервале $|x - x_0'| \leqslant a_1$ при каком угодно положительном ε будет

$$|y_k(x) - y_0(x)| < \varepsilon,$$

если точка (x_k, y_k) будет достаточно близка к точке (x_0, y_0).

Пусть (α, β) есть такой интервал, что кривая $y = y_0(x)$ при $\alpha < x < \beta$ проходит строго внутри области G. Строя тогда достаточно большие прямоугольники Q_k, лежащие целиком в области G и определяемые неравенствами

$$|x - x^{(k)}| \leqslant a_k, \quad |y - y^{(k)}| \leqslant 2Ma_k,$$

где

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} \pm a_{k-1}, \quad y^{(k)} = y_0(x^{(k)}),$$

и повторяя для них те же рассуждения, какие мы провели для Q_1, мы докажем непрерывную зависимость решения дифференциального уравнения (1) от начальных данных, близких к (x_0, y_0) на интервале $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$ при как угодно малом $\varepsilon > 0$. Для этого понадобится использовать только конечное число прямоугольников. (Почему?). Отсюда и следует наша теорема.

Замечание. Если функция $f(x, y)$, заданная на области G, непрерывна, ограничена и если через *некоторую* внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит только одно решение уравнения (1), то к этому решению равномерно сходится всякое решение этого уравнения, проходящее через точку (x_0', y_0'), когда $x_0' \to x_0$ и $y_0' \to y_0$. Действительно, по существу только это использовалось при доказательстве нашей теоремы.

Иногда бывает важно не только установить непрерывную зависимость решения от начальных данных, но доказать существование производных от решения по начальным данным.

Для этого прежде всего заметим следующее. Пусть начальные данные будут: $y = y_0$ при $x = x_0$. Обозначим соответствующее им решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

через $y(x, x_0, y_0)$ и введем новую функцию z, положив

$$z = y(x, x_0, y_0) - y_0,$$

и новую независимую переменную t, положив

$$t = x - x_0.$$

Тогда значениям $x = x_0$, $y = y_0$ будут соответствовать значения $t = 0$, $z = 0$. Функция z запишется так:

$$z = y(t + x_0, x_0, y_0) - y_0,$$

а дифференциальное уравнение (1) преобразуется в уравнение

$$\frac{dz}{dt} = f(t + x_0, z + y_0). \tag{**}$$

Следовательно, исследование зависимости решения дифференциального уравнения (1) от начальных данных свелось к исследованию зависимости решений дифференциального уравнения (**) от параметров, входящих в правую часть этого уравнения. Этой задачей занимался Пуанкаре. При решении ее мы будем опираться на лемму Адамара, которую мы и докажем в первую очередь.

Задача. Рассмотрим уравнение

$$y'(x) = y(x-h),$$

где h постоянно. Такие уравнения называются *гистеро-дифференциальными*. Будем рассматривать решения этого уравнения, определенные при всех действительных x. Легко видеть, что знание такого решения на каком-нибудь интервале длины h определяет его всюду. Докажите, что если $h > 0$, то для любых $A > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $|y(x)| < \delta$ при $-h < x < 0$, то $|y(x)| < \varepsilon$ при $0 \leqslant x \leqslant A$.

Если же $h < 0$, то для любого $A > 0$ существует последовательность решений $y_n(x)$, равномерно сходящаяся к 0 при $-\infty < x < 0$ вместе со своими производными любого порядка, для которой, однако, при $0 < x < A$ будет $\sup\limits_x |y_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. При доказательстве последнего утверждения в качестве решений гистеро-дифференциального уравнения берите функции вида $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$, где α и β — соответственно подобранные постоянные.

§ 21. Лемма Адамара

Пусть функция $F(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ имеет в некоторой выпуклой по $x_1, \ldots, x_n$ области[1] *G пространства $(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n$ до некоторого порядка $p > 0$ включительно.*

Тогда можно найти n таких функций

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_m) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

имеющих непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ до порядка $p-1$ включительно[2]*, что*

$$F(y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_m) - F(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_m)(y_i - x_i).$$

[1] Мы называем область G выпуклой по $x_1, \ldots, x_n$, если, каковы бы ни были точки $(x_1^*, \ldots, x_n^*; z_1, \ldots, z_m)$ и $(x_1^{**}, \ldots, x_n^{**}; z_1, \ldots, z_m)$, принадлежащие G, весь отрезок прямой, соединяющий эти точки, также принадлежит G.

[2] Под производной 0-го порядка всюду понимается сама функция.

Доказательство. [1]) Исходим из очевидного равенства

$$F(y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_m) - F(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) =$$
$$= \int_0^1 F'_t\,(x_1 + t[y_1 - x_1], \ldots, x_n + t[y_n - x_n]; z_1, \ldots, z_m)\,dt,$$

справедливого в силу предполагаемой выпуклости по $x_1, \ldots, x_n$ области G. Выражая F'_t через производные от F по

$$x_1 + t[y_1 - x_1],\ x_2 + t[y_2 - x_2],\ \ldots,\ x_n + t[y_n - x_n],$$

которые мы будем обозначать соответственно через F_1, F_2, …, F_n, мы получим

$$F(y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_m) - F(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)\int_0^1 F_i\,(x_1 + t[y_1 - x_1], \ldots, x_n +$$
$$+ t[y_n - x_n]; z_1, \ldots, z_m)\,dt.$$

Стоящие в правой части этого равенства интегралы, очевидно, можно принять за функции φ_i, о которых говорилось в лемме Адамара; они обладают всеми свойствами, требуемыми этой леммой.

§ 22. Теорема о зависимости решения от параметров

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu_1, \ldots, \mu_n). \tag{49}$$

Пусть $\overline{G}_{xy}$ есть некоторая замкнутая область на плоскости (x, y). Через $\overline{G}$ обозначим множество таких точек $(x, y, \mu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_n)$, что

a) точки (x, y) принадлежат $\overline{G}_{xy}$,

b) $|\mu_i| < \mu_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где μ_i^0 — некоторые положительные постоянные.

Тогда:

---

[1]) Это доказательство принадлежит М. А. Крейнесу.

1) *Если* $f(x, y, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ *непрерывна на* $\overline{G}$ *по всем своим аргументам, ограничена и удовлетворяет там условию Липшица по* y:

$$|f(x, y_2, \mu_1, \ldots, \mu_n) - f(x, y_1, \mu_1, \ldots, \mu_n)| \leqslant K|y_2 - y_1|$$

(K не зависит от переменных x, y и μ), *то для каждой точки* (x_0, y_0), *лежащей внутри* $\overline{G}_{xy}$, *можно на оси* Ox *указать такой замкнутый интервал* $[a, b]$, *заключающий внутри себя точку* x_0, *на котором обращающееся в* y_0 *при* $x = x_0$ *решение дифференциального уравнения* (49) *непрерывно по совокупности переменных* x, μ_1, μ_2, ..., μ_n.

2) *Если* f *и ее производные до* p*-го порядка по* y *и всем* μ *внутри* $\overline{G}$ *непрерывны по совокупности* x, y, μ_1, ..., μ_n *и ограничены, то решение*

$$y(x, \mu_1, \ldots, \mu_n)$$

будет иметь по параметрам μ *непрерывные по совокупности* x, μ_1, ..., μ_n *производные также до* p*-го порядка, когда* x *принадлежит замкнутому интервалу* $[a, b]$, *о котором говорилось в предыдущем пункте, а* $|\mu_i| < \mu_i^0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$; *при этом* $p \geqslant 1$.

При доказательстве как первого, так и второго из высказанных предложений мы ограничимся случаем уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu), \tag{50}$$

правая часть которого содержит только один параметр. В общем случае рассуждения проводятся аналогично.

1. Будем искать обращающееся в y_0 при $x = x_0$ решение уравнения (50) методом последовательных приближений. Последние здесь будут иметь такой вид:

$$\varphi_1(x, \mu) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi,\, \varphi_0(\xi),\, \mu\right) d\xi,$$

$$\varphi_2(x, \mu) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi,\, \varphi_1(\xi, \mu),\, \mu\right) d\xi$$

и т. д.

Легко видеть, что все функции $\varphi_i(x, \mu)$ непрерывны по обоим аргументам, когда x изменяется в некотором замкнутом интервале $[a, b]$ (о котором говорилось в § 15) и когда $\mu < \mu_0$.

Повторяя те же рассуждения, что и в § 15, мы убедимся, что последовательность $\varphi_i(x,\,\mu)$ сходится равномерно по x и μ, если x изменяется в замкнутом интервале $[a,\,b]$, содержащем внутри себя точку x_0, и если $|\mu| < \mu_0$. Следовательно, предельная функция $\varphi(x,\,\mu)$ — единственное решение, проходящее через точку $(x_0,\,y_0)$ — непрерывна по совокупности переменных x и μ при $a \leqslant x \leqslant b$ и $|\mu| < \mu_0$.

2. Если в соответствии с пунктом 2 теоремы допустить, что f имеет непрерывные производные 1-го порядка по y и μ, то решение $\varphi(x,\,\mu)$ имеет непрерывную производную по μ при тех же значениях x и μ, что и в предыдущем пункте.

В самом деле, пусть функции $\varphi(x,\,\mu)$ и $\varphi(x, \mu+\Delta\mu)$ обращаются в y_0 при $x = x_0$ и пусть первая из них удовлетворяет уравнению (50), а вторая — уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\,y,\,\mu+\Delta\mu). \tag{51}$$

Подставив их в соответствующие им дифференциальные уравнения (50) и (51) и вычитая получившиеся тождества, имеем

$$\frac{d\left[\varphi(x,\,\mu+\Delta\mu)-\varphi(x,\,\mu)\right]}{dx} = \\ = f\left(x,\,\varphi(x,\,\mu+\Delta\mu),\,\mu+\Delta\mu\right) - f\left(x,\,\varphi(x,\,\mu),\,\mu\right).$$

Применяя к правой части лемму Адамара и положив $\varphi(x,\,\mu+\Delta\mu)-\varphi(x,\,\mu) = \Delta\varphi$, перепишем последнее равенство так:

$$\frac{d\Delta\varphi}{dx} = \Delta\varphi\,\Phi_1 + \Delta\mu\,\Phi_2,$$

где Φ_1 и Φ_2 — непрерывные функции от x, $\varphi(x,\,\mu)$, $\varphi(x,\,\mu+ +\Delta\mu)$, μ и $\mu+\Delta\mu$ и, следовательно, согласно первой части теоремы непрерывны по x и $\Delta\mu$. Разделим последнее равенство на $\Delta\mu$; тогда для определения $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ мы получаем линейное уравнение

$$\frac{d\left(\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\right)}{dx} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\Phi_1 + \Phi_2. \tag{52}$$

Значение символа $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ до сих пор было определено только при $\Delta\mu \neq 0$. Определим его при $\Delta\mu = 0$ так, чтобы оно удовлетворяло уравнению (52) и при $x = x_0$ обращалось в 0. Правая часть уравнения (52) непрерывна по x и $\Delta\mu$ (которые входят в Φ_1 и Φ_2) и имеет ограниченную производную по $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$. Последнее следует из того, что, как было показано в предыдущем параграфе, Φ_1 равно интегралу от значений $\frac{\partial f}{\partial y}$, а $\frac{\partial f}{\partial y}$ ограничена. $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = 0$ для всякого $\Delta\mu$ при $x = x_0$. Поэтому из доказанного в пункте настоящего параграфа следует, что решение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ уравнения (52) непрерывно по $\Delta\mu$ при всех достаточно малых по абсолютному значению $\Delta\mu$. Поэтому при $\Delta\mu \to 0$ величина $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ стремится к определенному пределу. А это означает существование производной по μ от $\varphi(x,\, \mu)$.

Кроме того, так как при $\Delta\mu \to 0$

$$\Phi_1 \to \frac{\partial f}{\partial\varphi}, \quad \Phi_2 \to \frac{\partial f}{\partial\mu},$$

то производная $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{\partial f}{\partial\mu}. \tag{53}$$

Поэтому, применяя к этому уравнению теорему, доказанную в пункте 1 настоящего параграфа, мы найдем, что $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ непрерывна по совокупности переменных x и μ.

3. Если f имеет непрерывные производные по y и μ до p-го порядка, где $p \geqslant 2$, то, применяя к уравнению (53) те же рассуждения, которые мы употребили для уравнения (50) в пункте 2 настоящего параграфа, и взяв $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ вместо φ, мы найдем, что $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}$ существует и непрерывна по совокупности x и μ. Продолжая эти рассуждения, мы таким образом полностью докажем сформулированную в начале этого параграфа теорему.

Замечание. Подобно тому, как это мы сделали в § 20, можно было бы доказать непрерывную зависимость от $\mu_1, \ldots, \mu_n$ решения дифференциального уравнения (49) или дифференцируемость его по этим параметрам при значениях x не только из интервала $[a,\, b]$, но и на большем интервале.

Следствие. Применяя только что доказанную для уравнения (50) теорему к уравнению (∗∗) в § 20, мы найдем следующее.

Если правая часть уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

имеет по x и y непрерывные производные до p-го порядка, то функция $y(x, x_0, y_0)$, которая удовлетворяет этому уравнению и при $x = x_0$ обращается в y_0, имеет непрерывные производные по x_0 и y_0 также до p-го порядка $(p \geqslant 1)$.

Задачи. 1. Дано уравнение $y' = \sin(x, y)$. Начальное условие $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Найдите (при любом x) $\dfrac{\partial y}{\partial x_0}$ и $\dfrac{\partial y}{\partial y_0}$, используя уравнение (53).

2. Дано уравнение $y' = x^2 + y^2$. Начальное условие $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Найдите с точностью до 0,0001, чему равно $\dfrac{\partial y}{\partial y_0}$ при $x = 1$. При вычислении $y(x)$ можно, например, пользоваться методом последовательных приближений.

3. Если f в уравнении (1) непрерывно дифференцируемо, то докажите, что

$$\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial x_0} + f(x_0, y_0)\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial y_0} \equiv 0.$$

4. Пусть M и N в уравнении (20) непрерывно дифференцируемы и $M^2(x_0, y_0) + N^2(x_0, y_0) \neq 0$, (x_0, y_0) — точка в области G. Тогда в некоторой окрестности (x_0, y_0) уравнение (20) имеет непрерывный интегрирующий множитель.

§ 23. Особые точки

Определение. Пусть точка P лежит внутри области G, где мы рассматриваем дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dx}{dy} = f_1(x, y) \tag{54}$$

(ср. § 2), или на ее границе, где уравнение (54) также может быть задано.

1. Если можно указать такую окрестность $\mathfrak{A}$ точки P [1]), где $f(x, y)$ непрерывна по x и имеет ограниченную производ-

[1]) Под окрестностью точки P мы всюду понимаем *полную* окрестность точки P, а не только ту ее часть, которая принадлежит G. Такую окрестность можно представлять себе в виде достаточно малого кружка с центром в точке P.

ную по y или где $f_1(x, y)$ непрерывна по y и имеет ограниченную производную по x, то точку P мы будем называть *обыкновенной точкой* уравнения (54). Через каждую точку окрестности $\mathfrak{A}$ в этой окрестности проходит одна и только одна интегральная кривая [1]).

2. Всякую не обыкновенную точку области G, а также всякую точку ее границы мы будем называть *особой точкой*.

3. Если у точки P нет никакой окрестности $\mathfrak{A}$, через каждую точку которой проходила бы в этой окрестности одна и только одна интегральная кривая и в которой, по крайней мере, одна из функций $f(x, y)$ и $f_1(x, y)$ была бы непрерывной, то такую точку мы будем называть *существенно особой* точкой. Отсюда видно прежде всего, что всякая точка, лежащая на границе $\overline{G}$, является существенно особой для уравнения (54). Но бывают и другие особые и существенно особые точки. Мы приведем несколько таких примеров.

1. Всякая точка оси x-ов для уравнения

$$y' = \begin{cases} y\ln|y| & \text{при } |y| > 0, \\ 0 & \text{при } \ y = 0 \end{cases} \tag{55}$$

является особой, но не существенно особой.

2. Начало координат для уравнений (4) и (7) является существенно особой точкой.

Изолированные особые точки (т. е. такие особые точки, в некоторой окрестности которых нет других особых точек) в приложениях чаще всего встречаются при исследовании уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — функции, имеющие непрерывные частные производные по x и y высоких порядков. Легко видеть, что для таких уравнений все внутренние точки рассматриваемой области, где $M(x, y) \neq 0$ или $N(x, y) \neq 0$, являются обыкновенными точками. Рассмотрим теперь какую-нибудь внутреннюю точку (x_0, y_0), где и $M(x, y) = 0$ и $N(x, y) = 0$.

[1]) Чтобы сохранилось это последнее свойство обыкновенной точки, можно было бы, конечно, потребовать меньше того, чтобы она в окрестности точки P имела ограниченную производную. Достаточно было бы, например, потребовать, чтобы она удовлетворяла только условию Липшица. Но я хотел дать такое определение обыкновенных точек, которое позволило бы легко их разыскивать.

Для упрощения записи будем предполагать, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Разлагая тогда $M(x, y)$ и $N(x, y)$ по степеням x и y и ограничиваясь при этом членами второго порядка, получим в окрестности точки (0, 0)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M'_x(0,\,0)x + M'_y(0,\,0)y + O(x^2+y^2)}{N'_x(0,\,0)x + N'_y(0,\,0)y + O(x^2+y^2)}\ ^{1)}. \tag{56}$$

Это уравнение не определяет $\dfrac{dy}{dx}$ при $x = 0$ и $y = 0$. Но если

$$\begin{vmatrix} M'_x(0,\,0) & M'_y(0,\,0) \\ N'_x(0,\,0) & N'_y(0,\,0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то, как бы мы ни задали $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ в начале координат, это начало координат будет точкой разрыва для значений $\dfrac{dy}{dx}$ и потому особой точкой для нашего дифференциального уравнения.

Перрон [2] показал, что на характер поведения интегральных кривых около изолированной особой точки (у нас начала координат) стоящие в числителе и знаменателе члены $O(x^2+y^2)$ не оказывают никакого влияния, если только действительные части обоих корней уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - M'_y(0,\,0) & -M'_x(0,\,0) \\ -N'_y(0,\,0) & \lambda - N'_x(0,\,0) \end{vmatrix} = 0$$

отличны от 0. Поэтому, чтобы составить себе представление об этом поведении, изучим поведение около начала координат интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy},$$

для которого

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

[1] $O(x^2+y^2)$ означает величину, отношение которой к x^2+y^2 остается ограниченным.

[2] Math. Zeitschrift. Bd. 15 (1922) и Bd. 16 (1923). Ср. также статьи Бендиксона и Фроммера, напечатанные в IX выпуске «Успехов математических наук», 1941.

Можно показать, что линейным неособым преобразованием

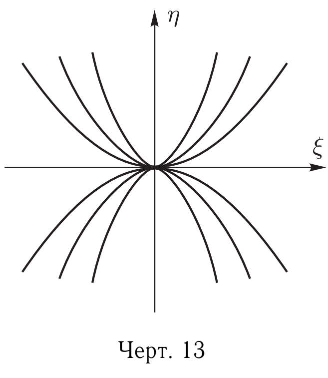
$$\begin{cases} x = k_{11}\xi + k_{12}\eta, \\ y = k_{21}\xi + k_{22}\eta, \end{cases} \tag{57}$$

где k_{ij} действительны, это уравнение приводится к одному из следующих трех типов (см. дальше, § 49):

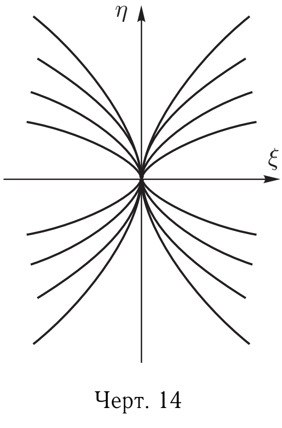
$$\begin{cases} 1)\ \dfrac{d\eta}{d\xi} = k\dfrac{\eta}{\xi} \quad (k \neq 0), \\ 2)\ \dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{\xi+\eta}{\xi}, \\ 3)\ \dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{\xi+k\eta}{k\xi-\eta}. \end{cases} \tag{58}$$

Рассмотрим подробно каждый из этих трех случаев. Заметим предварительно следующее. Если оси Ox и Oy были взаимно перпендикулярными, то оси $O\xi$ и $O\eta$ не будут уже, вообще говоря, образовывать между собой прямой угол. Но мы для упрощения выполнения чертежей будем изображать $O\xi$ и $O\eta$ взаимно перпендикулярными.

1-й случай. Общим интегралом служит уравнение $a\eta + |b\xi|^k = 0$. Поведение интегральных кривых в этом случае схематически изображено на чертежах 13, 14 и 1.



Черт. 13



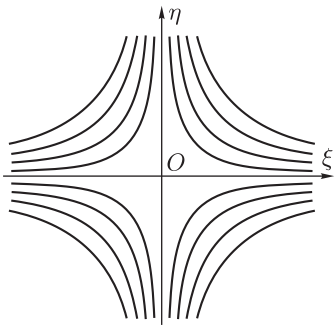
Черт. 14

Черт. 13 относится к случаю, когда $k > 1$. Тогда все интегральные линии касаются в O оси $O\xi$, за исключением только обеих половин оси $O\eta$. Сами оси $O\xi$ и $O\eta$ являются интегральными линиями всюду, за исключением, конечно, самой точки O, где уравнение (58_1) не определяет никакого направления.

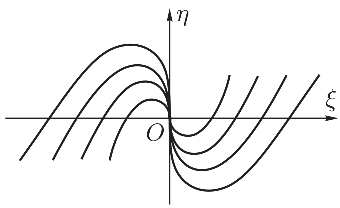
Случай, когда $k = 1$, нами был разобран во введении (черт. 1).

В случае $0 < k < 1$ (черт. 14) все интегральные линии касаются оси $O\eta$ за исключением только обеих половин оси $O\xi$.

Во всех случаях, когда $k > 0$, всякая интегральная линия подходит к O по определенному направлению, т. е. имеет в O определенную касательную. Вообще, когда всякая интегральная линия, имеющая точки, достаточно близкие к O, приближается к O как угодно близко и притом по определенному направлению, то точку O называют *узлом*. Значит, при $k > 0$ точка O есть узел для интегральных линий уравнения (58_1).



Черт. 15



Черт. 16

Поведение интегральных линий $\eta\xi^{-k} = c$, когда $k < 0$, изображено на черт. 15. В этом случае к точке O подходят как угодно близко только четыре интегральных линии: две полуоси $O\xi$ и две полуоси $O\eta$. Всякая же другая интегральная линия, приблизившись достаточно близко к точке O, потом начинает от нее удаляться. Такие точки называются *седлами*. Именно такой вид имеют линии уровня перевала между двумя горами (седла).

2-й случай. Общим интегралом служит уравнение $b\eta = \xi(a + b\ln|\xi|)$ (черт. 16). Все интегральные линии касаются в точке O оси $O\eta$. Из координатных осей только ось $O\eta$ является интегральной линией. Точка O в этом случае есть также узел, как и при $k > 0$ в первом случае.

3-й СЛУЧАЙ. Уравнение (58_3) легче всего проинтегрировать, если перейти к полярным координатам. Положим

$$\xi = \rho\cos\varphi,$$
$$\eta = \rho\sin\varphi.$$

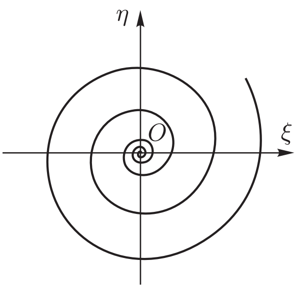
Тогда после вычислений получим

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = k\rho \tag{59}$$

и, следовательно,

$$\rho = ce^{k\varphi}.$$

Если $k > 0$, все интегральные кривые приближаются к O, бесконечно навиваясь на эту точку, когда $\varphi \to -\infty$ (черт. 17). Если $k < 0$, то же происходит, когда $\varphi \to +\infty$. В этих случаях точку O называют *фокусом*. Если же $k = 0$, семейство интегральных кривых уравнения (58_3) состоит из кругов с центром в O. Вообще, если некоторая окрестность точки O целиком заполнена замкнутыми интегральными линиями, содержащими внутри себя O, то такую точку называют *центром*. Центр может легко перейти в фокус, если к числителю и знаменателю правой части уравнения (56) приписать члены какого угодно высокого порядка; следовательно, в этом случае поведение интегральных кривых вблизи O не определяется членами 1-го порядка. Позже, в § 49, мы увидим, что k обращается в 0 только тогда, когда действительная часть корней λ детерминанта



Черт. 17

$$\begin{vmatrix} \lambda - b & -a \\ -d & \lambda - c \end{vmatrix}$$

обращается в 0. Ни в каких же других из рассмотренных выше случаев эта действительная часть не обращается в 0.

Изложенная в этом параграфе классификация особых точек принадлежит Пуанкаре.

Задачи. Представьте поведение интегральных кривых вблизи особых точек для уравнений

$$y' = \frac{y}{x^2}; \quad y' = \frac{x}{y^2}; \quad y' = \frac{x^2}{y^2}; \quad y' = \frac{y^2}{x^2}.$$

§ 24. Особые линии

Определения. 1. Линию, все точки которой являются особыми для уравнения (54), будем называть *особой*.

2. Линию, все точки которой являются существенно особыми для уравнения (54), будем называть *существенно особой*.

3. Если особая (соответственно существенно особая) линия является в то же время интегральной для уравнения (54), то ее будем называть *особой* (соответственно *существенно особой*) *интегральной* линией этого уравнения.

Примеры. Примером особой, но не существенно особой и не интегральной линии может служить линия $y = C$ для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{\varphi(x)},$$

если функции $f(y)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, превосходят всегда некоторую положительную постоянную и ни в каком интервале не имеют ограниченной производной (ср. § 5).

Примером существенно особой, но не интегральной линии может служить всякая неинтегральная линия уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\, y),$$

где $f(x,\, y)$ — функция, построенная М. А. Лаврентьевым (ср. § 10).

Ось x-ов является особой, но не существенно особой, интегральной линией для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} y \ln|y|, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Та же ось x-ов является существенно особой интегральной линией для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} y \ln^2|y|, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Всякая линия, являющаяся частью границы области G, где определена одна из функций $f(x, y)$ и $f_1(x, y)$ в уравнении (54), является существенно особой линией для этого уравнения. Может случиться, что эта линия является также интегральной, если уравнение (54) задано и на границе G.

§ 25. О поведении интегральных кривых в целом

Иногда бывает важно построить схему поведения интегральных кривых во всей области задания поля направлений «в целом», не заботясь при этом о сохранении масштаба. На чертежах 13–17 мы строили подобные схемы для поведения интегральных кривых в окрестности изолированной особой точки. Если все точки односвязной области G, где задана правая часть дифференциального уравнения (1), обыкновенные, то семейство интегральных линий можно схематически изобразить семейством отрезков параллельных прямых, так как в этом случае через каждую точку области G проходит одна интегральная линия и никакие две интегральные линии не пересекаются.

Для уравнения же более общего вида (54), которое к тому же имеет особые точки или линии, структура интегральных кривых может быть значительно сложнее [1]. Одной из самых фундаментальных задач теории дифференциальных уравнений является задача — найти по возможности более простой способ построения схемы поведения семейства интегральных линий заданного дифференциального уравнения на всей области его определения — изучение поведения интегральных кривых этого уравнения «в целом». Эта задача еще очень далека от своего разрешения даже для уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ суть многочлены выше 2-й степени. В связи с ней скажем несколько слов о так называемых «предельных циклах».

[1] Ср. И. Бендиксон. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Успехи математических наук, выпуск IX, стр. 191, 1941 г.

Рассмотрим для примера дифференциальное уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho - 1, \tag{60}$$

где ρ и φ — полярные координаты на плоскости (x, y) [1]. Общим интегралом этого уравнения будет

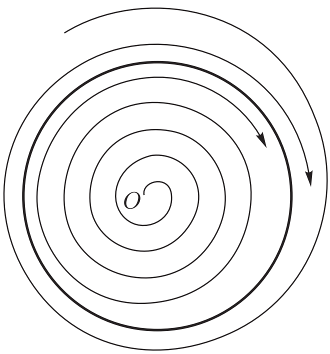
$$\rho = 1 + Ce^{\varphi},$$

где C — произвольная постоянная; чтобы ρ было неотрицательным, надо, чтобы φ принимало значения не большие чем $-\ln|C|$, если $C < 0$. Семейство интегральных кривых будет состоять (черт. 18) из

1) окружности $\rho = 1$ $(C = 0)$,

2) спиралей, выходящих из начала координат O, которые изнутри приближаются к этой окружности при $\varphi \to -\infty$ $(C < 0)$.

3) бесконечных спиралей, которые приближаются извне к окружности $\rho = 1$, когда $\varphi \to -\infty$ $(C > 0)$.



Черт. 18

Окружность $\rho = 1$ называется *предельным циклом* для уравнения (60). Вообще *замкнутая интегральная линия L называется предельным циклом, если ее можно заключить в такую полосу, все точки которой обыкновенные и которая целиком заполнена интегральными кривыми, асимптотически приближающимися к L*. Разыскание предельных циклов представляет большой интерес для физики. Никаких общих приемов для этого до сих пор не найдено.

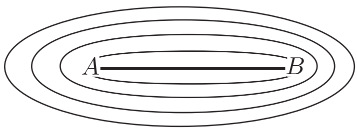
Заметим, что все точки окружности $\rho = 1$ являются обыкновенными для уравнения (60). В этом можно убедиться, если от полярных координат перейти к декартовым. Значит, малый

[1] Значит,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)\sqrt{x^2+y^2} - y}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2} - x}.$$

кусок предельного цикла ничем не отличается от всякой другой интегральной линии.

Задачи. 1. Покажите, что, для того чтобы поле направлений в области G можно было представить уравнениями (2) и (2′), где M и N непрерывны и не обращаются в 0 одновременно, необходимо и достаточно, чтобы каждую точку области G можно было снабдить таким ортом (то есть единичным вектором), который всюду совпадает с направлением поля и непрерывно зависит от точки поля. Направление поля в каждой точке мы задаем отрезком прямой, оба направления которой для нас безразличны. Здесь же требуется в каждой точке выбрать одно из этих направлений и это направление должно непрерывно зависеть от точки. Постройте пример непрерывного поля направлений, заданного на плоскости между двумя концентрическими окружностями, которое нельзя представить уравнениями (2), (2′) с непрерывными M и N, не обращающимися одновременно в 0.



Черт. 19

2. Постройте пример поля направлений на плоском кольце, которое нельзя представить на всем этом кольце уравнением (20) с непрерывными M и N, причем M и N не обращаются в 0 одновременно, и которое тем не менее непрерывно на всем кольце. Здесь, как обычно, поле направлений задается в каждой точке отрезком прямой, оба направления которой мы не выделяем. Когда мы говорим здесь, что поле направлений непрерывно на кольце, это значит, что эта прямая изменяется непрерывно. Можно ли построить аналогичный пример для односвязной области на плоскости?

3. Интегральные линии уравнения (2), (2′) представлены на прилагаемом чертеже 19.

Докажите, что если M и N непрерывны, они всюду на отрезке AB обязательно равны 0.

4. Докажите, что в изолированную особую точку уравнения (2), (2′) может входить по определенному направлению только четное число интегральных линий. Если какая-нибудь интегральная линия подходит к этой точке бесконечно нави-

вающейся спиралью, то и всякая другая интегральная линия подходит к этой точке также бесконечно навивающейся спиралью. Может ли входить в изолированную особую точку ровно две такие спирали?

5. Начертите схему поведения на всей плоскости интегральных линий уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + x^2 + y^2 - 1.$$

Покажите, что оно имеет фокус в начале координат и предельный цикл:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Указание. Сравните наклон интегральных линий этого уравнения с наклоном в той же точке интегральных линий уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

6. Начертите схему поведения на всей плоскости интегральных линий уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y - x} + (y - x)^2 + (x - 1)^2 + \frac{2}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{3}.$$

Докажите, что оно имеет две особые точки: седло $(0, 0)$ и фокус $(1, 1)$.

Указание. Сравните наклон интегральной линии этого уравнения с наклоном в той же точке интегральной линии уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y - x},$$

которое интегрируется в квадратурах после подстановки $x = \xi + 1$, $y = \eta + 1$.

7. Если замкнутую интегральную линию L, все точки которой обыкновенные, можно заключить в полосу, не содержащую других замкнутых интегральных линий, то L — предельный цикл.

8. Если к некоторой замкнутой интегральной линии L без существенно особых точек асимптотически приближаются извне и изнутри две интегральные линии, то L — предельный цикл.

9. Постройте пример замкнутой интегральной линии L без особых точек, не являющейся предельным циклом, причем никакая окрестность L не заполнена сплошь замкнутыми интегральными линиями.

10. Если внутри и на самой замкнутой кривой L с непрерывно вращающейся касательной нет существенно особых точек поля, то в точках на линии L направление поля, по крайней мере, два раза совпадает с направлением касательной к L и, по крайней мере, два раза с направлением нормали к L.

§ 26. Уравнения, неразрешенные относительно производной

Примером таких уравнений может служить уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0. \tag{61}$$

Как легко видеть, оно эквивалентно уравнениям

$$\frac{dy}{dx} = +1 \tag{62_1}$$

и

$$\frac{dy}{dx} = -1. \tag{62_2}$$

Первое из этих уравнений представляет поле направлений, наклоненных к Ox под углом 45°, а второе — поле направлений, наклоненных к Ox под углом 135°. Уравнению же (61) соответствует поле направлений, полученное наложением полей (62_1) и (62_2). Через каждую точку плоскости $(x,\, y)$ проходит одна и только одна интегральная линия первого из уравнений (62) — прямая, наклоненная к Ox под углом в 45°, и одна и только одна интегральная линия второго из уравнений (62) — прямая, наклоненная к Ox под углом в 135°. Значит, через каждую точку плоскости $(x,\, y)$ проходят две и только две интегральные линии уравнения (61) (черт. 20) [1].

Можно доказать следующую общую теорему.

[1] В анализе (см., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчислений, т. I, стр. 283, Гостехиздат, 1947) доказывается, что если на некотором интервале $(a,\, b)$ функция $\Phi(x)$ всюду имеет производную, равную $\varphi(x)$, и если $\varphi(x)$ в двух точках x_1 и x_2 $(a < x_1 < x_2 < b)$ принимает значения y_1 и y_2, то на интервале $(x_1,\, x_2)$ функция $\varphi(x)$ принимает все промежуточные значения между y_1 и y_2. Поэтому не существует функции $y(x)$, которая при всяком x имела бы производную, принимающую только значения, равные ± 1, причем в одних точках эта производная равнялась бы $+1$, а в других -1.

Теорема. *Пусть дано уравнение*

$$F(x,\,y,\,y') = 0, \tag{63}$$

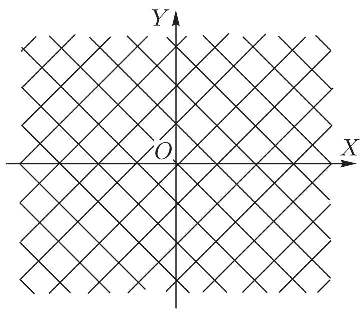
где функция $F(x,\,y,\,y')$ обладает следующими тремя свойствами:

1. *Функция $F(x,\,y,\,y')$ определена на замкнутой и ограниченной области $\overline{G}$ в пространстве $(x,\,y,\,y')$, где она непрерывна.*

2. *Для некоторой точки $(x_0,\,y_0)$, лежащей на плоскости $(x,\,y)$, это уравнение* (63) *имеет конечное число m и только m различных решений относительно y'. Пусть этими решениями будут числа*

$$b_1,\; b_2,\; \ldots,\; b_m \quad (m > 0).$$

3. *Каждая из точек $(x_0,\,y_0,\,b_i)$, $i = 1,\,\ldots,\,m$, лежит внутри G, и в некоторой окрестности R_i* [1] *каждой из этих точек функция $F(x,\,y,\,y')$ имеет непрерывную производную по y и непрерывную производную по y', которая по абсолютной величине всюду в R_i превосходит некоторое постоянное положительное число.*



Черт. 20

Тогда существует такая окрестность $\mathfrak{U}$ точки $(x_0,\,y_0)$, расположенная в плоскости $(x,\,y)$, в которой через каждую точку проходит m и только m решений уравнения (63).

Доказательство. При сделанных предположениях согласно теореме о неявной функции у каждой из точек $(x_0,\,y_0,b_i)$ в пространстве $(x,\,y,\,y')$ существует такая окрестность R_i, в которой уравнение (63) имеет одно и только одно решение вида

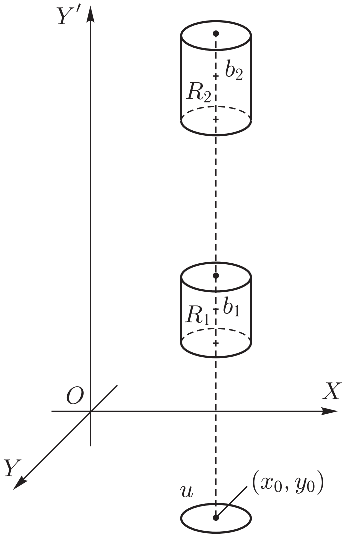
$$y' = f_i(x,\,y), \quad i = 1,\,\ldots,\,m; \tag{64}$$

[1] Под окрестностью R_i мы понимаем полную окрестность точки $(x_0,\,y_0,\,b_i)$ в пространстве $(x,\,y,\,y')$.

функции $f_i(x, y)$ непрерывны по x и имеют производную по y, равную

$$-\frac{F'_y(x, y, f_i)}{F'_{f_i}(x, y, f_i)}.$$

В силу сделанных нами предположений о функции F эти дроби ограничены. Все окрестности R_i $(i = 1, \ldots, m)$ можно представлять себе в виде цилиндров с образующими, параллельными оси Oy', и с основаниями, проектирующимися на одну и ту же лежащую в плоскости (x, y) окрестность точки (x_0, y_0) (на черт. 21, $m = 2$). Эту окрестность $\mathfrak{U}$ можно выбрать настолько малой, чтобы ни над ней, ни под ней не было ни одной точки (x, y, y') поверхности (63), не принадлежащей какой-нибудь из поверхностей (64). Действительно, если такие точки существуют, то по предыдущему они лежат вне цилиндров R_i $(i = 1, \ldots, m)$. Поэтому, если бы такие точки существовали при как угодно малой $\mathfrak{U}$, то в силу ограниченности и замкнутости $\overline{G}$ и непрерывности функции $F(x, y, y')$ они были бы и на прямой



Черт. 21

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

вне цилиндров R_i; значит, уравнение $F(x_0, y_0, y') = 0$ имело бы больше чем m решений относительно y', что противоречит нашему предположению.

Итак, мы нашли, что при сделанных относительно $F(x, y, y')$ предположениях у точки (x_0, y_0) на плоскости (x, y) существует такая окрестность $\mathfrak{U}$, в которой уравнение (63) имеет m и только m различных решений (64). Функции $f_i(x, y)$ непрерывны по x и имеют ограниченную производную по y. Поэтому для каждой точки P из $\mathfrak{U}$ каждое из уравнений (64) имеет в области $\mathfrak{U}$ одну и только одну интегральную линию, проходящую через точку P. Так как все y' в области

$\mathfrak{U}$ различны, то все эти интегральные кривые различны и между собой не касаются. А потому через каждую точку области $\mathfrak{U}$ проходит m и только m интегральных кривых уравнения (63) [1]), что и требовалось доказать.

Очевидно, ни одно из направлений поля, задаваемого уравнением (63), не параллельно оси Oy. Следовательно, ни одна из интегральных кривых этого уравнения не имеет касательных, параллельных оси y-ов. Чтобы не исключать направлений, параллельных оси y-ов, аналогично тому, как это делалось для уравнений, разрешенных относительно производных, мы будем иногда наряду с уравнением

$$F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{65}$$

рассматривать уравнение

$$F_1\left(x,\, y,\, \frac{dx}{dy}\right) = 0. \tag{65'}$$

При этом функция $F_1\left(x,\, y,\, \frac{dx}{dy}\right)$ выбрана так, что уравнения (65) и (65′) нигде не противоречат одно другому. Иногда нам будет удобнее объединять уравнения (65) и (65′) в одно, написанное в дифференциалах (см. дальше пример 1). Точно так же и здесь (ср. § 2) мы будем наряду с решениями уравнений вида (65) рассматривать интегральные кривые уравнения (65), (65′).

Определения. Пусть функция $F(x,\, y,\, y')$ [соответственно $F_1(x,\, y,\, x')$] определена на некоторой области $G_{xyy'}$, (соответственно $G_{xyx'}$) в пространстве $(x,\, y,\, y')$ [соответственно $(x,\, y,\, x')$] и на некоторой части ее границы. Пусть точка $P(x_0,\, y_0)$ лежит внутри той области G_{xy} плоскости $(x,\, y)$, где уравнения (65), (65′) определяют некоторые направления, или на границе этой области.

1. Будем тогда называть точку P *обыкновенной точкой* уравнений (65), (65′), если для нее выполняются следующие условия:

а) У точки $P(x_0,\, y_0)$ на плоскости $(x,\, y)$ есть такая замкнутая окрестность $\overline{\mathfrak{U}}_{xy}$, что множество $\overline{G}^*_{xyy'}$ (либо $\overline{G}^*_{xyx'}$) точек, в которых определена функция $F(x,\, y,\, y')$ [соответственно $F_1(x,\, y, x')$] и проекции которых на плоскость $(x,\, y)$ не выходят из этой окрестности, образует ограниченную и

[1]) Ср. примечание на стр. 90.

замкнутую область, а функция $F(x, y, y')$ [соответственно $F_1(x, y, x')$] на этом множестве непрерывна. Чтобы множество $\overline{G}^*_{xyy'}$ (соответственно $\overline{G}^*_{xyx'}$) не получалось неограниченным от того, что рассматриваются как угодно большие значения y' (соответственно x'), условимся, например, пользоваться уравнением (65) [соответственно (65′)] только тогда, когда $|y'|$ (соответственно $|x'|$) не больше некоторой константы, которая не должна равняться по абсолютной величине никакому корню y' (соответственно x') уравнения $F(x_0, y_0, y') = 0$ [соответственно $F_1(x_0, y_0, x') = 0$].

b) Число направлений интегральных кривых, задаваемых уравнениями (65) и (65′) в точке $P(x_0, y_0)$, конечно.

c) Для каждого из направлений, задаваемых (65) [соответственно (65′)], для функции $F(x, y, y')$ [соответственно $F_1(x, y, x')$] в точке (x_0, y_0) выполняется условие 3 только что доказанной теоремы [соответственно для $F_1(x, y, x')$ выполняется условие 3 только что доказанной теоремы, в формулировке которой нужно только поменять роли x и y, y' и x'].

2. В противном случае будем называть эту точку *особой*.

3. Точка $P(x_0, y_0)$ называется *существенно особой* для уравнений (65) и (65′), если для нее нельзя указать такой окрестности $\mathfrak{U}$ в плоскости (x, y), через каждую точку которой проходило бы в этой окрестности одно и то же постоянное для этой окрестности конечное число интегральных кривых, равное числу направлений, задаваемых в точке P уравнениями (65) и (65′).

4. Пользуясь этими определениями, мы определяем потом *особые и существенно особые линии и особые и существенно особые интегральные линии* совершенно так же, как при помощи понятия об особой и существенно особой точке такие линии определялись в § 24.

Примеры особых и существенно особых точек, линий и интегральных линий, которые мы привели в параграфах 23 и 24, пригодны и теперь. Кроме того, мы разберем еще следующие два примера.

Пример 1.

$$y'^2(1 - x^2) - x^2 = 0, \tag{66$_1$}$$

$$(1 - x^2) - x^2 x'^2 = 0 \tag{66$_2$}$$

или в более симметричном виде

$$(1 - x^2)dy^2 - x^2\,dx^2 = 0. \tag{67}$$

Уравнение (66) определяет поле направлений только на полосе $|x| \leqslant 1$. Левая часть уравнения (66_1) непрерывна всюду на этой полосе и имеет непрерывные производные по y и y'. Производная по y' от нее равна

$$2y'(1 - x^2).$$

Отсюда видно, что эта производная обращается в нуль, 1) если $x = \pm 1$ и 2) если $y' = 0$. В силу уравнения (66_1) последнее происходит только на прямой $x = 0$. Производная по x' от левой части (66_2) обращается в 0 на этих же прямых. Значит, уравнение (66) имеет три особые линии

$$x = +1, \quad x = -1, \quad x = 0.$$

Так как прямые $x = \pm 1$ являются границей той области, где уравнения задают некоторые направления, то они являются существенно особыми линиями. Из уравнения (66_2) видно, далее, что они являются интегральными линиями.

Покажем, что прямая $x = 0$ является также существенно особой (но неинтегральной) линией. Заметим прежде всего следующее. Из уравнения (66) следует, что

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

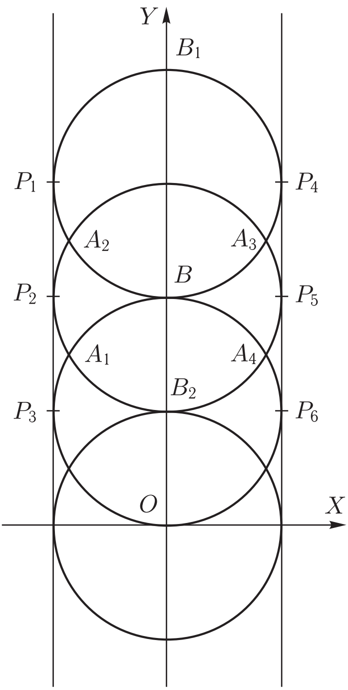
Отсюда следует, что интегральными линиями уравнения (66) будут окружности радиуса 1, центры которых лежат на оси y-ов. Все они касаются прямых $x = \pm 1$.

Теперь уже легко видеть, что прямая $x = 0$ является особой. Действительно, на этой прямой из уравнения (66_1) мы находим для y' только *одно* значение 0, уравнение же (66_2) не дает для x' здесь никакого значения. Но ни у какой точки B, лежащей на оси y-ов, нельзя указать такой окрестности, через каждую точку которой проходила бы в этой окрестности одна и только одна интегральная линия; действительно, уже через эту самую точку B, очевидно, проходят в этой окрестности четыре интегральные линии: A_1BA_4, A_2BA_3, A_2BA_4 и A_1BA_3 (черт. 22). Значит, ось y-ов будет существенно особой, но, очевидно, неинтегральной линией. У каждой же точки полосы $-1 < x < +1$, если только эта точка не лежит на оси y-ов, есть такая окрестность, через каждую точку которой в этой окрестности проходят две и только две интегральные линии.

Заметим, что, кроме указанных уже интегральных линий, у нашего уравнения будут еще интегральные линии вида

$$P_1B_1P_4P_5B_2P_2P_1, \quad P_1B_1P_4BP_3OP_6BP_1$$

и др.



Черт. 22

Пример 2. *Уравнение Клеро*. Уравнением Клеро называется уравнение вида

$$F(x,\, y,\, y') \equiv \\ \equiv y - xy' - f(y') = 0. \quad (68)$$

Мы будем предполагать, что $f(y')$ определена на замкнутом интервале $a \leqslant y' \leqslant b$, непрерывна вместе со своими первыми двумя производными, и что на этом интервале $f''(y')$ всюду сохраняет знак, например, отрицательна.

Тогда при всяких x и y уравнение (68) имеет не больше двух корней относительно y' (почему?). Поэтому, как легко видеть, для этого уравнения будет обыкновенной всякая точка $(x_0,\, y_0)$, если только

1. Уравнение

$$y_0 - x_0y' - f(y') = 0 \quad (68')$$

не удовлетворяется ни при $y' = a$, ни при $y' = b$, но оно удовлетворяется по крайней мере при одном значении y' из интервала $(a,\, b)$.

2.
$$F'_{y'}(x_0,\, y_0,\, y') = -x_0 - f'(y') \neq 0,$$

где y' есть один из корней уравнения (68').

Точки, не удовлетворяющие второму из этих условий, образуют некоторую линию. Если принять y' за параметр и обозначить его через p, уравнение этой линии можно написать так:

$$y = xp + f(p), \quad x = -f'(p) \quad (69)$$

или

$$y = -f'(p) \cdot p + f(p), \quad x = -f'(p). \tag{70}$$

Эти уравнения определяют y как функцию от x. В этом можно убедиться, если второе из этих уравнений разрешить относительно p, что возможно, так как $f''(p)$ сохраняет знак, и найденное значение p подставить в первое из них. Легко видеть, что линия (70) является интегральной. Действительно, из уравнений (70) находим

$$dy = [-f''(p) \cdot p - f'(p) + f'(p)]\, dp = -pf''(p)dp,$$
$$dx = -f''(p)dp.$$

Следовательно,

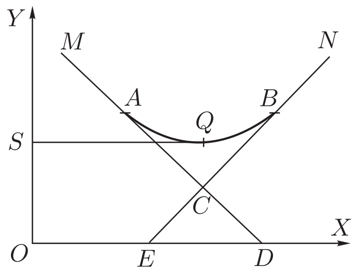
$$\frac{dy}{dx} = p$$

и потому для линии (70) или, что все равно, для линии (69) уравнение (68) удовлетворяется.

Так как $\dfrac{dy}{dx} = p$, то при возрастании p величина $\dfrac{dy}{dx}$ также возрастает. Уравнение (70) показывает, что если

$$f''(p) < 0,$$

то $\dfrac{dx}{dp} > 0$. Поэтому выпуклость кривой (70) обращена вниз (черт. 23, кривая (70) изображается линией AQB).



Черт. 23

Легко проверить, что при любом постоянном c $(a \leqslant c \leqslant b)$ прямая

$$y = cx + f(c)$$

является интегральной. Эта прямая, очевидно, касается линии (70) в точке

$$y = -f'(c) \cdot c + f(c), \quad x = -f'(c).$$

Поэтому уравнение (68′) имеет столько корней относительно y', сколько касательных к дуге AQB можно провести через точку $(x_0,\, y_0)$.

Проведем касательные прямые $MACD$ и $NBCE$ в концах A и B линии (70). Они вместе с кривой (70) разобьют всю плоскость $(x,\, y)$ на следующие 5 областей:

$$MACE, \quad NBCD, \quad AQBCA, \quad ECD, \quad MAQBN.$$

Через каждую точку, лежащую внутри углов $MACE$ и $NBCD$, проходит одна и только одна касательная к дуге AB, и потому для этих точек уравнение (68′) имеет один и только один корень относительно y' и притом отличный от a и b. Эти точки поэтому являются обыкновенными точками уравнения (68). Значит, для каждой такой точки можно указать окрестность, в которой через каждую точку проходит столько интегральных линий этого уравнения, сколько оно имеет в этой точке корней относительно y', т. е. одна; этой единственной интегральной линией будет отрезок касательной к дуге AB, проведенной через эту точку. Точно так же мы найдем, что каждая точка, лежащая внутри области $AQBCA$, также является обыкновенной точкой уравнения (68); для нее можно указать такую окрестность, через каждую точку которой проходят две и только две интегральные линии; они будут отрезками касательных к AB, проведенных через эту точку. Через каждую же внутреннюю точку областей $MAQBN$ и ECD не проходит ни одна интегральная линия уравнения (68). Эти точки не входят в нашу классификацию обыкновенных и особых точек.

Из всех точек плоскости $(x,\, y)$, в которых уравнение (68) имеет корни относительно y', условию 1, стр. 96, не будут удовлетворять только точки прямых $MACD$, $NBCE$, а условию 2 — точки линии AQB; эти линии будут особыми интегральными линиями. Легко видеть, что все эти линии будут не только особыми, но даже существенно особыми и притом интегральными линиями для уравнения (68).

Заметим в заключение, что кроме тех интегральных линий, о которых уже шла речь, уравнение (68) будет иметь еще интегральные линии такого типа, как линия $SQBN$; они составлены из кусков дуги AB и кусков касательных к ней.

Задачи. 1. Какой вид имеют интегральные линии уравнений

$$\sin y' = 0, \quad \sin y' = x.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$F(x,\, y') = 0.$$

Если кривая $F(x, z) = 0$ при $x = x_0$, $z = z_0$ имеет вертикальную касательную, не пересекающую кривую, то через любую точку (x_0, y) проходит интегральная кривая рассматриваемого уравнения, имеющая там точку возврата. Что соответствует в этом смысле точкам максимума кривой $F(x, z) = 0$? Точкам возврата? Точкам самопересечения? Вертикальным асимптотам? Разберите уравнения

$$(x^2 + y'^2)^2 = a^2(x^2 - y'^2),$$
$$x(1 + y'^6) = y'^4.$$

§ 27. Огибающие

Допустим, что нам известно для некоторого дифференциального уравнения семейство

$$F(x, y, C) = 0 \tag{71}$$

интегральных линий, которое покрывает некоторую замкнутую область $\overline{G}$ плоскости (x, y) так, что через каждую точку такой области проходит по крайней мере одна линия этого семейства. Требуется найти такую проходящую по $\overline{G}$ линию L, которая в *каждой своей точке касается некоторой линии семейства* (71) *и каждого куска которой касается бесконечное множество линий этого семейства* [1]. Такая линия L называется *огибающей семейства* (71). Очевидно, огибающая семейства интегральных линий будет также интегральной линией уравнения (63), так как в каждой ее точке она касается некоторой интегральной кривой и, следовательно, имеет направление поля. Относительно функции $F(x, y, C)$ нам придется предположить, что она *имеет непрерывные производные по всем своим аргументам*, и сделать еще некоторые другие предположения, о которых будет сказано несколько позже и которые в нашем тексте напечатаны курсивом.

Допустим, что искомая линия существует. Так как она в каждой своей точке (x, y) касается некоторой линии L_C [значок C указывает то значение параметра C, при котором уравнение этой линии получается из общего уравнения (71)], то координаты ее точек удовлетворяют уравнению $F(x, y, C(x, y)) = 0$, где теперь C уже не постоянно, но

[1] Предполагаются различными те линии семейства (71), которым соответствуют различные C.

в каждой точке линии L принимает свое значение (именно равное тому C, которое соответствует линии L_C). Будем рассматривать только такой кусок линии L, где *y есть дифференцируемая функция от x* (точно так же можно исследовать куски, где x есть дифференцируемая функция от y). Тогда можно считать C в предыдущем уравнении зависящем только от x и переписать это уравнение в следующем виде:

$$F(x,\, y,\, C(x)) = 0. \tag{72}$$

Допустим, что *функция $C(x)$ дифференцируема* и нам известна. Найдем тогда из уравнения (72) значение y' для удовлетворяющей этому уравнению функции y от x. Продифференцируем для этого уравнение (72) по x, считая y функцией от x. Получим

$$F'_x + F'_y y' + F'_C C'_x = 0.$$

С другой стороны, если бы мы нашли y' для проходящей через ту же точку $(x,\, y)$ линии L_C семейства (71), мы получили бы

$$F'_x + F'_y y' = 0.$$

Чтобы определяемые из обоих уравнений значения y' (определить y' из этих уравнений можно, *если $F'_y \neq 0$*) были одинаковы [т. е. чтобы в этой точке линия (71) и линия (72) имели общую касательную], необходимо, чтобы было $F'_C C'_x = 0$.

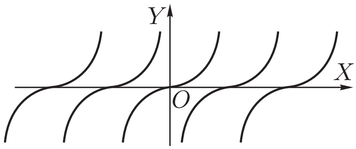
Чтобы это произведение было равно 0, надо, чтобы по крайней мере один из его множителей обращался в 0. Если $C'_x = 0$ на некотором интервале, это будет значить, что C постоянно, и мы получим таким образом кусок некоторой линии семейства (71). Поэтому для огибающей должно быть

$$F'_C = 0. \tag{73}$$

Легко видеть и обратное: именно, что, если при сохранении всех сделанных допущений относительно $F(x,\, y,\, C)$ уравнения (72) и (73) определяют $y(x)$ и $C(x)$, как дифференцируемые функции от x, причем $C(x)$ *ни в каком интервале рассматриваемых значений x не постоянна*, то $y = y(x)$ будет огибающей семейства (71).

Замечания 1. Так как в постановке задачи x и y были совершенно равноправны, то в ее решении роли x и y можно поменять.

Замечания 2. Огибающая семейства интегральных линий некоторого дифференциального уравнения 1-го порядка всегда является существенно особой интегральной линией для этого уравнения, так как из каждой ее точки по одному направлению выходят по крайней мере две интегральные линии.



Черт. 24

Пример 1. На всей плоскости $(x,\, y)$ дано семейство кривых

$$F(x,\, y,\, C) \equiv y - (x + C)^3 = 0. \tag{74}$$

Оно состоит из кубических парабол, полученных из одной $y = x^3$ сдвигом, параллельным оси Ox.

Приравнивая F'_C нулю, получим $-3(x + C)^2 = 0$. Отсюда $C = -x$. Подставляя это в уравнение семейства, получим линию $y = 0$, которая, очевидно, является огибающей семейства (74) (черт. 24).

Замечание. Если бы мы написали уравнение нашего семейства в виде

$$F(x,\, y,\, C) \equiv y^{1/2} - (x + C) = 0,$$

то было бы $F'_C = -1$ и наш метод не дал бы огибающей, которая на самом деле существует. Это происходит потому, что теперь F'_y не существует при $y = 0$.

Пример 2. На всей плоскости $(x,\, y)$ задано семейство кривых

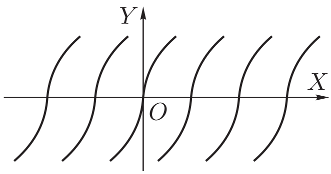
$$F(x,\, y,\, C) \equiv y^5 - (x + C)^3 = 0. \tag{75}$$

Приравнивая нулю F'_C, получим $-3(x + C)^2 = 0$.

Отсюда $C = -x$. Подставляя это в уравнение (75), получим $y = 0$.

Но легко видеть, что ось x-ов не является огибающей семейства (75) (черт. 25). Это происходит только потому, что при $y = 0$

$$F'_y = 5y^4 = 0.$$



Черт. 25

Пример 3. Семейство кругов

$$F(x,\,y,\,C) \equiv x^2 + (y+C)^2 - 1 = 0 \tag{76}$$

покрывает полоску между прямыми $x = \pm 1$. Приравнивая нулю $F'_C(x,\,y,\,C)$, получим $2(y+C) = 0$.

Отсюда $C = -y$. Подставляя это вместо C в уравнение семейства, получим $x = \pm 1$.

Каждая из этих прямых является огибающей семейства (76) (см. черт. 22).

Пример 4. Уравнение

$$y - C^3x^2 + 2C^2x - C = 0,$$

которое при $C \neq 0$ можно переписать так:

$$y - C^3\left(x - \frac{1}{C}\right)^2 = 0,$$

определяет семейство парабол, оси которых параллельны Oy, а вершины находятся на Ox. Очевидно, для них Ox является огибающей, хотя она в то же время принадлежит самому рассматриваемому семейству: она получается из уравнения этого семейства при $C = 0$.

Часть II

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава IV

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

§ 28. Сведение любой системы к системе уравнений 1-го порядка

Пусть дана система

$$\Phi_i\left(x,\, y_1 \frac{dy_1}{dx},\, \ldots,\, \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}},\, \ldots;\, y_n,\, \frac{dy_n}{dx},\, \ldots,\, \frac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}\right) = 0, \quad (77)$$
$$i = 1,\, \ldots,\, n.$$

В каждое уравнение этой системы входят: независимое переменное x, его n искомых функций y_1, y_2, …, y_n и их производные по x; при этом производные от y_i входят до некоторого порядка m_i.

Чтобы свести эту систему к системе уравнений 1-го порядка, положим $y_i = y_i^{(0)}$,

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx} = y_i^{(k+1)}, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, m_i - 2. \quad (78)$$

Тогда систему (77) можно переписать так:

$$\Phi_i\left(x,\, y_1^{(0)},\, y_1^{(1)},\, \ldots,\, y_1^{(m_1-1)},\, \frac{dy_1^{(m_1-1)}}{dx};\, \ldots;\right.$$
$$\left. y_n^{(0)},\, y_n^{(1)},\, \ldots,\, y_n^{(m_n-1)},\, \frac{dy_n^{(m_n-1)}}{dx}\right) = 0, \quad (79)$$
$$i = 1,\, \ldots,\, n.$$

Таким образом, имея n функций $y_i(x)$ $(i = 1,\, \ldots,\, n)$, удовлетворяющих системе (77), мы получим систему функций

$y_i^{(k)}(x)$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений 1-го порядка, состоящей из уравнений (78) и (79).

Обратно, если мы имеем систему функций $y_i^{(k)}(x)$, удовлетворяющих уравнениям (78) и (79), то легко показать, что функции $y_i^{(0)}(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют системе (77). Действительно, полагая в уравнении (78) k последовательно равным $0, 1, \ldots, m_i - 2$, мы найдем, что

$$y_i^{(k+1)} = \frac{d^{k+1} y_i^{(0)}}{dx^{k+1}},$$

а потому уравнения (79) эквивалентны уравнениям (77).

В дальнейшем мы будем заниматься, главным образом, только системами дифференциальных уравнений 1-го порядка, и притом разрешенными относительно производных.

Задача. Докажите, что систему дифференциальных уравнений 1-го порядка вида

$$f_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при помощи последовательных дифференцирований и исключений лишних переменных, «вообще говоря», можно привести к одному дифференциальному уравнению n-го порядка с одной неизвестною функцией, причем так, что, решив это уравнение, мы другие неизвестные функции найдем без дальнейших интегрирований. «Вообще говоря», это значит, что допускается возможность разрешения всех нужных систем конечных (не дифференциальных) уравнений, в которых число уравнений равно числу неизвестных. Функции f_i предполагаются обладающими производными всех нужных порядков.

§ 29. Геометрическая интерпретация. Определения

Пусть мы имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{80}$$

где функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определены в некоторой области G пространства $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Систему функций

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x), \tag{81}$$

удовлетворяющих уравнениям (80), мы будем называть *решением* этой системы. Уравнения

$$y_i = y_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{82}$$

определяют в пространстве $(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ кривую. Эта кривая называется *интегральной кривой* системы (80). Вместо того чтобы говорить, что $y_i(x_0) = y_i^0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, мы будем часто говорить, что кривая (82) или *решение* (81) «*проходит*» *через точку* $(x_0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_n^0)$.

Тот факт, что функции $y_i(x)$ удовлетворяют при $x = x_0$ системе (80), можно геометрически интерпретировать так: касательной прямой к интегральной линии (82) в точке $(x_0,\ y_1(x_0),\ \ldots,\ y_n(x_0))$, является прямая L:

$$\frac{y_i - y_i(x_0)}{x - x_0} = f_i\left(x_0,\ y_1(x_0),\ \ldots,\ y_n(x_0)\right);$$

здесь x и y_i означают текущие координаты точки, лежащей на прямой L. Поэтому задачу нахождения решения системы (80) можно геометрически интерпретировать следующим образом.

В некоторой области G пространства $(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ задано «поле направлений», т. е. в каждой точке этой области задано некоторое направление, которое можно представлять себе подобно тому, как это мы делали в первой части курса для одного дифференциального уравнения, в виде небольшого отрезка прямой, проходящей через эту точку (оба направления этого отрезка для нас безразличны). Найти интегральную кривую системы (80) — это значит найти такую линию, у которой касательная в каждой точке имеет заданное направление.

Систему функций

$$y_i = y_i(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_m), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

мы будем называть *общим решением* системы (80) в области G, если, выбирая соответствующим образом постоянные C_1, C_2, …, C_m, мы сможем получить любое решение, проходящее в этой области. Чаще всего бывает $m = n$.

Если поле направлений задается системой (80), то ни одно из этих направлений не лежит в плоскости, параллельной плоскости $x = 0$. Это ограничение часто бывает совершенно искусственным. Можно рассматривать любое поле направлений и искать кривые, у которых направление касательной в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке. Такие линии мы будем называть *интегральными линиями* *этого поля*. Их уравнения, вообще говоря, уже нельзя написать в форме (82) уравнений, разрешенных относительно y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ потому, что плоскости, перпендикулярные к оси Ox, их могут пересекать несколько раз и даже содержать целые их куски. Дифференциальные уравнения таких линий (или, что все равно, соответствующего им поля направлений) можно написать, считая x и y_i вдоль этих линий достаточно гладкими, например, непрерывными вместе с их производными функциями некоторого параметра t, например, длины дуги интегральной кривой или времени, нужного для передвижения по интегральной кривой от какой-то фиксированной на ней точки до произвольной точки $(x, y_1, \ldots, y_n)$; на отдельных участках кривой за параметр можно брать какую-нибудь из координат y_i или x. Тогда получим

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} = f_i^*(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)p(t, x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \dfrac{dx}{dt} = f^*(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)p(t, x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{83}$$

Здесь $p(t, x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ никогда не должно обращаться в 0, а функции f_i^* и f^* не должны все обращаться в 0 в одной и той же точке $(x_1, y_1, \ldots, y_n)$. Поле направлений в пространстве $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, задаваемое уравнениями (83), можно задать еще следующими уравнениями:

$$\frac{dy_1}{f_1^*(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n^*(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{f^*(x, y_1, \ldots, y_n)}. \tag{84}$$

Если $f_k^*(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ отлично от 0 в некоторой области G, то эти уравнения можно там разрешить относительно $\dfrac{dy_i}{dy_k}$ $(i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ и $\dfrac{dx}{dy_k}$; значит, здесь за параметр можно взять y_k. Если в области G функция $f^*(x, y_1, \ldots, y_n)$ всюду отличается от 0, то уравнения (84) можно разрешить относительно $\dfrac{dy_i}{dx}$; здесь x играет роль параметра.

Система уравнений

$$\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

называется *интегралом системы* (84), если определяемая ими кривая является интегральной для этой системы.

Система уравнений

$$\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n, C_1, \ldots, C_m) = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

называется *общим интегралом системы* (84) в некоторой области G пространства $(x, y_1, \ldots, y_n)$, если, выбирая соответствующим образом постоянные C_1, C_2, ..., C_m, можно получить любую интегральную линию этой системы, проходящую в G.

Так как система (83) есть частный случай системы вида (80), где только число неизвестных на 1 больше, то мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением систем вида (80). Для таких систем справедливы многие теоремы, совершенно аналогичные доказанным в главе III первой части нашего курса; доказываются эти теоремы такими же методами, как и там. Поэтому мы не будем все эти теоремы заново подробно доказывать. Мы докажем только теорему Осгуда и принцип сжатых отображений, остальные же теоремы только сформулируем.

Задачи. 1. Составьте систему двух дифференциальных уравнений 1-го порядка с искомыми функциями y и z вида (80) так, чтобы ее интегральными линиями были все винтовые линии с правой нарезкой, данным шагом h и осью Ox. Как можно обобщить эту задачу на случай большего числа измерений?

2. Каково необходимое и достаточное условие того, чтобы поле направлений в области G можно было представить уравнениями (84), где все знаменатели непрерывны и не обращаются в 0 одновременно?

§ 30. Формулировка основных теорем

Теорема существования (Пеано). *Если функции $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ непрерывны в некоторой области G пространства $(x, y_1, \ldots, y_n)$, то через каждую внутреннюю точку этой области проходит по крайней мере одна интегральная линия системы* (80).

Для доказательства этой теоремы сначала строятся ломаные Эйлера так же, как это делалось в § 10. А потом переходят к пределу, используя теорему Арцеля.

Теорема единственности (Осгуд). *Пусть функции $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ в области G удовлетворяют соотношениям*

$$|f_i(x, y_1^{**}, \ldots, y_n^{**}) - f_i(x, y_1^{*}, \ldots, y_n^{*})| \leqslant \leqslant \varphi\left(\sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu^{**} - y_\nu^{*}|\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (85)$$

где $\varphi(\eta)$ — непрерывная функция, которая:

1) *принимает положительные значения при положительных η,*

2) $\displaystyle\int_\varepsilon^c \frac{d\eta}{\varphi(\eta)} \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} \infty \quad (c > 0).$

Тогда существует не больше одной интегральной линии системы (80)*, проходящей через любую заданную внутреннюю точку области G.* В частности, можно считать

$$\varphi(\eta) \equiv K\eta,$$

где K — некоторая положительная постоянная. Тогда условие (85) принимает вид

$$|f_i(x, y_1^{**}, \ldots, y_n^{**}) - f_i(x, y_1^{*}, \ldots, y_n^{*})| \leqslant K \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu^{**} - y_\nu^{*}|.$$

Это условие называется *условием Липшица* по $y_1, \ldots, y_n$ для функций f_i. Если принять это условие и считать функции f_i непрерывными по всем аргументам, то теоремы существования и единственности можно доказать методом последовательных приближений (см. § 31–32).

Теорема Осгуда о единственности доказывается для систем дифференциальных уравнений несколько сложнее, чем для одного дифференциального уравнения. Поэтому мы изложим подробно это доказательство.

Мы будем опять вести доказательство от противного. Допустим, что существуют два таких решения

$$y_1^*(x),\ y_2^*(x),\ \ldots,\ y_n^*(x)$$

и

$$y_1^{**}(x),\ y_2^{**}(x),\ \ldots,\ y_n^{**}(x)$$

системы (80), что

$$y_i^*(x_0) = y_i^{**}(x_0), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как мы предполагаем, что решения $y_i^*(x)$ и $y_i^{**}(x)$ различны, то найдется такое x_1, что

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i^{**}(x_1) - y_i^*(x_1)| > 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать $x_1 > x_0$, так как противоположный случай сводится к этому заменой x на $-x$.

Несмотря на то, что функции $y_i^*(x)$ и $y_i^{**}(x)$, а следовательно, и разности $y_i^{**}(x) - y_i^*(x)$ всюду имеют производные, абсолютные величины этих разностей могут в некоторых точках не иметь производных. Так будет во всех точках, где

$$y_i^{**}(x) - y_i^*(x) = 0, \quad \text{но} \quad \frac{d}{dx}\,[y_i^{**}(x) - y_i^*(x)] \neq 0.$$

Поэтому вместо производных от этих разностей мы будем рассматривать их «правые» или «левые» производные. Правой (соответственно левой) производной от функции $z(x)$ в точке x называется предел дроби

$$\frac{z(x+h) - z(x)}{h},$$

взятый при условии, что $h \to 0$, принимая только положительные (соответственно отрицательные) значения. Правую (соответственно левую) производную от функции $z(x)$ в точке x мы будем обозначать через $D_{\text{пр}} z(x)$ [соответственно $D_{\text{л}} z(x)$]. Если для нас неважно, о какой именно из этих двух производных идет речь, то мы будем опускать значки у D. Легко видеть, что если функция $z(x)$ имеет всюду производную, то существуют также $D_{\text{пр}}|z(x)|$ и $D_{\text{л}}|z(x)|$, причем всегда

$$|D_{\text{пр}}\,|z(x)|| = |D_{\text{л}}\,|z(x)|| = |z'(x)|$$

или, как мы будем писать для краткости,

$$|D\,|z(x)|| = |z'(x)|\,.$$

Принимая это все во внимание, из тождеств

$$\frac{dy_i^*(x)}{dx} = f_i\left(x,\, y_1^*(x),\, \ldots,\, y_n^*(x)\right),$$
$$\frac{dy_i^{**}(x)}{dx} = f_i\left(x,\, y_1^{**}(x),\, \ldots,\, y_n^{**}(x)\right), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

мы, на основании (85), получаем

$$|D\,|y_i^{**}(x)-y_i^{*}(x)||\equiv$$
$$\equiv |f_i\,(x,\,y_1^{**}(x),\,\ldots,\,y_n^{**}(x))-f_i\,(x,\,y_1^{*}(x),\,\ldots,\,y_n^{*}(x))|\leqslant$$
$$\leqslant \varphi\left(\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu^{**}(x)-y_\nu^{*}(x)|\right).$$

Отсюда получаем

$$\left|D\sum_{i=1}^{n}|y_i^{**}(x)-y_i^{*}(x)|\right|\leqslant n\varphi\left(\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu^{**}(x)-y_\nu^{*}(x)|\right)<$$
$$<(n+1)\varphi\left(\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu^{**}(x)-y_\nu^{*}(x)|\right). \quad (85')$$

Последний переход можно сделать только, если

$$\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu^{**}(x)-y_\nu^{*}(x)|>0.$$

В частности, в силу сделанного выше предположения, его можно сделать при $x=x_1$.

Положим

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i^{**}(x)-y_i^{*}(x)|=z(x) \quad \text{и} \quad z(x_1)=z_1.$$

Построим график того решения уравнения

$$\frac{dy}{dx}=(n+1)\varphi(y),$$

которое при $x=x_1$ обращается в z_1.

Такое решение существует и единственно (§ 4). Этот график будет асимптотически приближаться к отрицательной части оси Ox, нигде ее не пересекая. В точке $(x_1,\,z_1)$ кривые $z(x)$ и $y(x)$ пересекутся. Из неравенства

$$|D_{\text{л}}z(x_1)|<(n+1)\varphi(z_1)=(n+1)\varphi\,(y(x_1))=y'(x_1)$$

непосредственно следует существование такого интервала $(x_1-\varepsilon,\,x_1)$, $\varepsilon>0$, на котором

$$z(x)>y(x).$$

Но мы утверждаем, что это же неравенство имеет место при всяком $\varepsilon > 0$, но не большем $x_1 - x_0$, так как в противном случае, беря для ε его наибольшее возможное значение, мы немедленно пришли бы к противоречию. Действительно, тогда при $x = x_1 - \varepsilon = x_2$, с одной стороны, мы имели бы

$$D_{\text{пр}} z(x_2) \geqslant y'(x_2) = (n+1)\varphi\left(y(x_2)\right) = (n+1)\varphi\left(z(x_2)\right),$$

так как правее точки x_2

$$z(x) > y(x).$$

А с другой стороны, проводя такие же рассуждения, какие привели нас к (85′), мы получим, так как $\varphi\left(z(x_2)\right) > 0$,

$$Dz(x_2) < (n+1)\varphi\left(z(x_2)\right),$$

что противоречит предыдущему. Значит, при всех $x \geqslant x_0$, но меньших x_1,

$$z(x) > y(x) > 0;$$

в частности $z(x_0) > 0$, а это противоречит нашему первоначальному предположению.

Следствие для систем уравнений высших порядков. Пусть мы имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^{m_i} y_i}{dx^{m_i}} = f_i\left(x,\, y_1,\, \ldots,\, \frac{d^{m_1-1} y_1}{dx^{m_1-1}},\, \ldots,\, y_n,\, \ldots,\, \frac{d^{m_n-1} y_n}{dx^{m_n-1}}\right), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{86}$$

разрешенных относительно старших производных от каждой неизвестной функции. *Если функции f_i непрерывны в некоторой окрестности точки*

$$\left(x_0,\, y_1^0,\, \ldots,\, \left(\frac{d^{m_1-1} y_1}{dx^{m_1-1}}\right)^0,\, \ldots,\, y_n^0,\, \ldots,\, \left(\frac{d^{m_n-1} y_n}{dx^{m_n-1}}\right)^0\right)$$

и удовлетворяют в ней по всем своим аргументам, начиная со второго, условию Липшица, то на некотором интервале (a, b), окружающем точку x_0, существует одна и только одна система функций

$$y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x),$$

удовлетворяющих системе (86) *и принимающих при* $x = x_0$ *вместе с их соответствующими производными значения*

$$y_1^0, \ \ldots, \ \left(\frac{d^{m_1-1}y_1}{dx^{m_1-1}}\right)^0, \ \ldots, \ y_n^0, \ \ldots, \ \left(\frac{d^{m_n-1}y_n}{dx^{m_n-1}}\right)^0.$$

Это следствие непосредственно получается из выше сформулированных теорем, если принять во внимание § 28. Полученное на интервале (a, b) решение можно продолжить в обе стороны так, как это мы делали в § 12.

Теорема Коши. *Если функции* $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ *голоморфны по всем своим аргументам в области* G, *то через каждую внутреннюю точку этой области проходит одно и только одно голоморфное* (т. е. состоящее из голоморфных функций) *по* x *решение системы* (80).

Следствие. *Все действительные решения системы* (80), *у которой правые части голоморфны по всем своим аргументам и принимают действительные значения при действительных значениях всех их аргументов, голоморфны.*

Теорема о гладкости решений. *Если функции* $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ *имеют непрерывные производные по* x *и* y_k *до* p*-го порядка* $(p \geqslant 0)$, *то все решения системы* (80) *имеют непрерывные производные по* x *до* $(p+1)$*-го порядка.*

Теорема о зависимости решений от параметров. *Пусть дана система*

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_m), \quad i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n; \tag{87}$$

если функции f_i *и все их частные производные до* p*-го* $(p \geqslant 1)$ *порядка по всем* y_i *и* μ_k *непрерывны по всем их аргументам и ограничены, когда точка* $(x, y_1, \ldots, y_n)$ *находится в области* G, *а*

$$|\mu_k| < C, \quad k = 1, \ \ldots, \ m,$$

где C — *некоторое положительное число, то для каждой внутренней точки* $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *области* G *можно указать такой интервал* (a, b), *заключающий внутри себя точку* x_0, *что при всех рассматриваемых* μ_k *на нем существует одна и только одна система функций*

$$y_i = \varphi_i(x, \mu_1, \ldots, \mu_m), \quad i = 1, \ \ldots, \ n,$$

которые удовлетворяют системе (87), *имеют непрерывные производные до p-го порядка по всем μ_k и при $x = x_0$ обращаются соответственно в y_i^0* ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$). *Эта теорема остается верной и для $p = 0$, если функции f_i удовлетворяют условию Липшица по y_ν с коэффициентом, не зависящим от μ.*

Следствие. *Если правые части системы* (80) *имеют по x и всем y_i непрерывные производные до p-го порядка, то функции $y_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$* ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$), *которые удовлетворяют системе* (80) *и при $x = x_0$ обращаются соответственно в y_i^0, имеют непрерывные производные по x_0 и y_i^0 до p-го порядка* ($p \geqslant 1$). Это утверждение остается в силе и для $p = 0$, если функции f_i таковы, что они обеспечивают единственность решения, проходящего через точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ (ср. теорему § 20 и замечание к ней).

§ 31. Принцип сжатых отображений для систем операторных уравнений

Пусть имеется непустое семейство S «линий» φ, каждая из которых описывается n функциями

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

определенными на одном и том же множестве $\mathfrak{M}$. Линии φ обладают следующими свойствами:

1. *Каждая функция φ_i ограничена* (*быть может, своей константой*).

2. *Предел всякой равномерно сходящейся последовательности линий φ, принадлежащих S, есть также линия, принадлежащая S.*

Мы говорим, что последовательность линий

$$\varphi^{(k)} = (\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \ldots, \varphi_n^{(k)}), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

сходится равномерно к линии

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

если каждая из последовательностей функций $\varphi_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$, равномерно сходится к функции φ_i.

3. *Пусть для рассматриваемого множества S линий φ определен оператор A, переводящий каждую линию $\varphi =$*

$= (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *из множества* S *в линию* $A\varphi = (A\varphi, \ldots, A\varphi_n)$ *из того же множества.*

4. *Для всяких двух линий* $\varphi^* = (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*)$ *и* $\varphi^{**} = (\varphi_1^{**}, \ldots, \varphi_n^{**})$ *из* S *при всяком* $i |A_i\varphi^* - A_i\varphi^{**}| \leqslant \leqslant m\,[\text{borne}\sup|\varphi_1^* - \varphi_1^{**}| + \ldots + \text{borne}\sup|\varphi_n^* - \varphi_n^{**}|]$, *где* m — *некоторое неотрицательное постоянное число, меньшее чем* $\dfrac{1}{n}$.

Тогда в семействе S *существует одна и только одна линия*

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

такая, что

$$\varphi = A\varphi$$

или, в более развернутой записи,

$$\varphi_i = A_i\varphi, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{88}$$

Доказательство. Выберем в S какую-нибудь линию

$$\varphi^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0).$$

Проделаем над ней операцию A. Положим

$$\varphi^{(1)} = A\varphi^0.$$

По свойству 3 $\varphi^{(1)} \in S$ [1] и потому над линией

$$\varphi^{(1)} = (\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}),$$

которую мы будем называть «первым приближением» решения системы (88), можно производить операцию A. Произведя ее, получим «второе приближение»:

$$\varphi^{(2)} = A\varphi^{(1)}.$$

Опять по свойству 3 линия $\varphi^{(2)} \in S$. Этот процесс, очевидно, можно продолжать бесконечно. Таким образом мы получим бесконечную последовательность систем функций

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= (\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \ldots, \varphi_n^{(0)}),\\ \varphi^{(1)} &= (\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}),\\ \varphi^{(2)} &= (\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \ldots, \varphi_n^{(2)}),\\ &\ldots \end{aligned}$$

[1] Запись $\varphi \in S$ означает, что φ принадлежит семейству S.

Покажем, что при $k \to \infty$ последовательность линий $\varphi^{(k)}$ сходится равномерно на множестве $\mathfrak{M}$. Для этого, очевидно, достаточно (ср. § 15) показать, что при каждом i ряд

$$\varphi_i^{(0)} + (\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(0)}) + (\varphi_i^{(2)} - \varphi_i^{(1)}) + \ldots \tag{89}$$

сходится на $\mathfrak{M}$ равномерно. Если

$$|\varphi_i^{(0)}| \leqslant M_i^{(0)} \quad \text{и} \quad |\varphi_i^{(1)}| \leqslant M_i^{(1)}$$

(свойство 1), то

$$|\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(0)}| \leqslant M_i^{(1)} + M_i^{(0)} = M_i.$$

Пользуясь же свойством 4, мы найдем при всех $k \geqslant 1$

$$|\varphi_i^{(k+1)} - \varphi_i^{(k)}| = |A_i\varphi^{(k)} - A_i\varphi^{(k-1)}| \leqslant \\ \leqslant m \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{borne\,sup} |\varphi_\nu^{(k)} - \varphi_\nu^{(k-1)}|.$$

Следовательно,

$$\operatorname{borne\,sup} |\varphi_i^{(k+1)} - \varphi_i^{(k)}| \leqslant m \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{borne\,sup} |\varphi_\nu^{(k)} - \varphi_\nu^{(k-1)}|$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{borne\,sup} |\varphi_i^{(k+1)} - \varphi_i^{(k)}| \leqslant mn \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{borne\,sup} |\varphi_\nu^{(k)} - \varphi_\nu^{(k-1)}|.$$

Поэтому члены ряда (89) по абсолютной величине не больше соответствующих членов следующего ряда с постоянными неотрицательными членами:

$$M + M + mnM + m^2n^2M + m^3n^3M + \ldots$$

Здесь $M = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i$. Так как мы предполагаем, что $m < \dfrac{1}{n}$, то этот последний ряд сходится, а потому равномерно на множестве $\mathfrak{M}$ сходится и ряд (89) при $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, а следовательно, также равномерно сходятся на этом множестве и последовательности $\varphi_i^{(k)}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Положим

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_i^{(k)} = \varphi_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

По условию 2

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in S.$$

Следовательно, оператор $A\varphi$ имеет смысл. Покажем, что

$$A_i\varphi = \varphi_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Для этого заметим, что по свойству 4

$$|A_i\varphi^{(k)} - A_i\varphi| \leqslant m \sum_{i=1}^{n} \operatorname{borne\,sup} |\varphi_i^{(k)} - \varphi_i|.$$

А так как при $k \to \infty$ $\varphi_i^{(k)}$ равномерно сходятся к φ_i, то, следовательно, в обеих частях равенств

$$\varphi_i^{(k+1)} = A_i\varphi^{(k)}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

можно переходить к пределу, а потому уравнения (88) удовлетворяются.

Покажем теперь, что существует только одна система таких удовлетворяющих уравнениям (88) функций φ_1, φ_2, ..., φ_n, что $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \in S$. Действительно, допустим, что существуют два таких решения.

Первое решение: $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$.

Второе решение: $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$.

Тогда должны иметь место равенства

$$\begin{aligned} \varphi_i &= A_i\varphi, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\\ \psi_i &= A_i\psi, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}$$

Вычитая почленно соответствующие равенства, получим

$$|\varphi_i - \psi_i| = |A_i\varphi - A_i\psi| \leqslant \\ \leqslant m\,[\operatorname{borne\,sup} |\varphi_1 - \psi_1| + \ldots + \operatorname{borne\,sup} |\varphi_n - \psi_n|]$$

(свойство 4). Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{borne\,sup} |\varphi_i - \psi_i| \leqslant mn \sum_{i=1}^{n} \operatorname{borne\,sup} |\varphi_i - \psi_i|.$$

Так как $mn < 1$, то последнее соотношение может иметь место только, когда

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{borne\,sup} |\varphi_i - \psi_i| = 0$$

и, следовательно,

$$\varphi_i \equiv \psi_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Замечание 1. В формулировке теоремы условие 4 можно ослабить: именно, можно требовать, чтобы для любых $\varphi^* = (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*) \in S$ и $\varphi^{**} = (\varphi_1^{**}, \ldots, \varphi_n^{**}) \in S$ было

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{borne\,sup} |A_i\varphi^* - A_i\varphi^{**}| \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \operatorname{borne\,sup} |\varphi_i^* - \varphi_i^{**}|,$$

где C — некоторое неотрицательное постоянное число, меньшее чем 1.

Доказательство теоремы при этом ослабленном условии 4 почти не отличается от приведенного.

Замечание 2. Положения настоящего параграфа можно интерпретировать геометрически совершенно так же, как это делалось в § 17 для $n = 1$, если только под «точкой» понимать линию φ, а под «расстоянием» двух «точек» $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ понимать

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{borne\,sup} |\varphi_i - \psi_i|.$$

§ 32. Приложение принципа сжатых отображений к системе дифференциальных уравнений

Теорема. *Пусть в некоторой замкнутой области* $\overline{G}$ *пространства* $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *функции* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *ограничены, непрерывны по* x *и удовлетворяют условию Липшица по* y_k. *Тогда для любой внутренней точки* $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ *области* $\overline{G}$ *можно указать такой заключающий внутри себя точку* x_0 *замкнутый интервал* $[a, b]$, *на котором существует единственное решение системы* (80), *проходящее через точку*

$$(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0).$$

Доказательство. 1. Заметим прежде всего, что если заранее предположить существование такого решения, то, интегрируя от x_0 до x тождества [1]

$$\frac{dy_i(\xi)}{d\xi} = f_i\left(\xi,\, y_1(\xi),\, \ldots,\, y_n(\xi)\right), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

мы получим

$$y_i(x) = y_i^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_i\left(\xi,\, y_1(\xi),\, \ldots,\, y_n(\xi)\right) d\xi, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{90}$$

Таким образом, всякое проходящее через точку $(x_0,\, y_1^0,\, \ldots$ $\ldots,\, y_n^0)$ решение системы (80) удовлетворяет также системе интегральных уравнений (90).

Обратно, допустим, что существуют n непрерывных [2] функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, удовлетворяющих системе (90). Подставим в обе части каждого из уравнений (90) эти функции и продифференцируем обе части каждого из полученных тождеств [3]. Мы получим, что функции $y_i(x)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (80). С другой стороны, очевидно, что если функции $y_i(x)$ удовлетворяют уравнениям (90), то

$$y_i(x_0) = y_i^0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Поэтому вместо того чтобы доказывать, что на некотором замкнутом интервале $[a,\, b]$ существует одно и только одно проходящее через точку $(x_0,\, y_1^0,\, \ldots,\, y_n^0)$ решение системы (80), достаточно доказать, что на этом интервале существует одно и только одно непрерывное решение системы интегральных уравнений (90).

2. Для доказательства же этого последнего утверждения мы применим принцип сжатых отображений. Именно, мы будем считать, что функции φ_1, φ_2, …, φ_n определены на замкнутом интервале $a \leqslant x \leqslant b$ $(a < x_0 < b)$ так, что

1) все эти функции непрерывны и

---

[1] Возможность интегрирования получается аналогично § 15.

[2] Мы говорим здесь о непрерывных решениях только затем, чтобы избежать трудностей, возникающих при интегрировании разрывных функций.

[3] Возможность дифференцирования получается аналогично § 15.

2) линии $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$:

$$y_i = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

не выходят из некоторой замкнутой области $\overline{G}$, где определены функции f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда, очевидно, удовлетворяются первые два из условий применимости принципа сжатых отображений. Замкнутость $\overline{G}$ нужна для того, чтобы выполнялось условие 2. Положим далее

$$A_i\varphi \equiv y^{i0} + \int\limits_{x_0}^{x} f_i\,(\xi, \varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi))\,d\xi, \tag{91}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Покажем, что определенные таким образом операторы удовлетворяют условию 3, если интервал $[a, b]$ достаточно мал.

Пусть M есть верхняя грань значений $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Проведем через точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ $2n$ плоскостей

$$y_i - y_i^0 = \pm M(x - x^0), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{92}$$

Построим, далее, две плоскости

$$x = a \quad \text{и} \quad x = b \quad (a < x_0 < b)$$

так, чтобы эти плоскости вместе с плоскостями (92) образовывали две пирамиды P_1 и P_2 с вершиной в точке $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, целиком лежащие в $\overline{G}$. Несколько позже нам придется предположить, что числа a и b достаточно близки к x_0. Возьмем теперь совершенно произвольно n непрерывных на $[a, b]$ функций

$$\varphi_1^{(0)}(x), \varphi_2^{(0)}(x), \ldots, \varphi_n^{(0)}(x), \tag{93}$$

лишь бы только линия

$$\varphi_i = \varphi_i^{(0)}(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

целиком лежала в $\overline{G}$. Подставим функции (93) в правые части уравнений (90). После этого эти правые части будут некоторыми вполне определенными непрерывными функциями от x на интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Положим

$$\varphi_i^{(1)}(x) = y_i^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_i\left(\xi, \varphi_1^{(0)}(\xi), \ldots, \varphi_n^{(0)}(\xi)\right) d\xi, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ясно,что эти функции определены опять на интервале $a \leqslant x \leqslant \leqslant b$ и

$$\varphi_i^{(1)}(x_0) = y_i^0.$$

Мы утверждаем далее, что линия

$$y_i = \varphi_i^{(1)}(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

не выходит из пирамид P_1 и P_2 и, следовательно, не выходит из $\overline{G}$. Действительно,

$$\left| f_i\left(x,\, \varphi_1^{(0)}(x),\, \ldots,\, \varphi_n^{(0)}(x)\right)\right| \leqslant M,$$

и потому

$$\left|\varphi_i^{(1)}(x) - y_i^0\right| \leqslant M|x - x_0|, \quad i = 1,\ \ldots,\ n.$$

Покажем, наконец, что если функции f_i удовлетворяют по y_1, y_2, …, y_n условию Липшица и если интервал $[a,\, b]$ достаточно мал, то для определенного равенствами (91) оператора $A\varphi$ выполняется и последнее, четвертое, условие применимости принципа сжатых отображений. Действительно,

$$\left|\left(y_i^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_i\left(\xi,\, \varphi_1^{**}(\xi),\, \ldots,\, \varphi_n^{**}(\xi)\right) d\xi\right) - \right.$$

$$\left. - \left(y_i^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_i\left(\xi,\, \varphi_1^{*}(\xi),\, \ldots,\, \varphi_n^{*}(\xi)\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{x_0}^{x} \left[f_i\left(\xi,\, \varphi_1^{**}(\xi),\, \ldots,\, \varphi_n^{**}(\xi)\right) - f_i\left(\xi,\, \varphi_1^{*}(\xi),\, \ldots,\, \varphi_n^{*}(\xi)\right)\right] d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x} K\left[|\varphi_1^{**}(\xi) - \varphi_1^{*}(\xi)| + \ldots + |\varphi_n^{**}(\xi) - \varphi_n^{*}(\xi)|\right] d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant K(b-a)\sum_{\nu=1}^{n} \max|\varphi_\nu^{**} - \varphi_\nu^{*}| = m\sum_{\nu=1}^{n} \max|\varphi_\nu^{**} - \varphi_\nu^{*}|,$$

где

$$m = K(b-a).$$

Следовательно, если $b - a$ достаточно мало, то $m < \dfrac{1}{n}$.

Сделанные в конце § 12 замечания и теперь сохраняют силу.

Аналогично замечанию 3 к § 15 легко показать, что последовательность приближений равномерно сходится не только на выбранном выше интервале $[a, b]$, но и на любом интервале, где все эти приближения существуют.

Мы не будем заниматься изучением особых точек, линий, поверхностей для систем дифференциальных уравнений, как это делалось для одного уравнения в первой части курса, а перейдем к изучению систем линейных уравнений.

Глава V

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 33. Определения. Следствия из общей теории систем дифференциальных уравнений

Линейной системой дифференциальных уравнений называется система уравнений, в которые неизвестные функции и их производные входят линейно. Прежде было показано, что всякая система дифференциальных уравнений эквивалентна некоторой системе, содержащей только производные 1-го порядка; поэтому мы будем заниматься, главным образом, системами уравнений 1-го порядка; при этом ограничимся случаем, когда эти системы разрешены относительно производных. Общий вид такой системы будет следующий:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + f_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{94}$$

Мы будем иногда для краткости писать

$$L_i(y) \equiv \frac{dy_i}{dx} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j.$$

Тогда система (94) запишется так:

$$L_i(y) = f_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{95}$$

Мы будем предполагать в дальнейшем всюду, что $a_{ij}(x)$ и $f_i(x)$ *непрерывны* на некотором интервале $a < x < b$. Может быть, что этот интервал не ограничен с одной какой-нибудь или с обеих сторон. Правые части таких систем имеют ограниченные производные по всем y_i и потому удовлетворяют условию Липшица на всяком замкнутом интервале $[a_1,\ b_1]$, целиком лежащем внутри $[a,\ b]$. Поэтому из доказанной нами в § 31–32 теоремы следует, что через каждую точку $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ в полосе $a < x < b$ пространства $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ проходит одна и только одна интегральная кривая системы (94).

Действительно, при любых конечных a и b эту теорему можно непосредственно применить ко всякому параллелепипеду:

$$a + \varepsilon \leqslant x \leqslant b - \varepsilon, \quad -M \leqslant y_i \leqslant M, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где ε — как угодно малое положительное число, а M — как угодно большое положительное число. А отсюда прямо уже эта теорема следует и для всей полосы:

$$a < x < b.$$

Легко показать, что *ни одна из функций* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, *удовлетворяющих системе* (94), *никогда не возрастает бесконечно, если* x *приближается к какой-нибудь внутренней точке интервала* (a, b), и что, следовательно, если какое-нибудь решение этой системы задано не на всем интервале (a, b), то его всегда можно продолжить на весь этот интервал.

Действительно, помножим i-е из уравнений (94) на $2y_i$, и полученные уравнения просуммируем по i от 1 до n. Тогда получим

$$\frac{d\sum\limits_i y_i^2}{dx} = 2\sum_{ij} a_{ij} y_i y_j + 2\sum_i f_i y_i \leqslant \sum_{ij} |a_{ij}|(y_i^2 + y_j^2) + \sum_i (f_i^2 + y_i^2).$$

Пусть $[a_1, b_1]$ есть произвольный внутренний к (a, b) интервал $(a_1 < x_0 < b_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} |a_{ij}(x)| \leqslant M \quad & \text{при } i, j = 1, \ldots, n, \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1, \\ |f_i(x)| \leqslant M \quad & \text{при } i = 1, \ldots, n, \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1, \\ y_i(x_0) = y_i^0 \quad & \text{при } i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Из предыдущего соотношения следует

$$\frac{d\sum\limits_i y_i^2}{dx} \leqslant M\sum_{ij}(y_i^2 + y_j^2) + nM^2 + \sum_i y_i^2 =$$

$$= (2Mn + 1)\sum_i y_i^2 + nM^2 \leqslant M_1 \sum_i y_i^2 + M_1,$$

где M_1 — некоторая константа. Поэтому $\sum\limits_i y_i^2(x)$ при $x \geqslant x_0$ не больше такой функции $z(x)$, которая при $x = x_0$ обращается в $\sum\limits_i (y_i^0)^2$, а при $x \geqslant x_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dz}{dx} = M_1(z+1), \text{ [1]}$$

т. е. при $x \geqslant x_0$

$$\sum_i y_i^2(x) \leqslant \left(\sum_i (y_i^0)^2 + 1\right) e^{M_1(x-x_0)} - 1.$$

Аналогичные оценки получаются при $x < x_0$.

Если все $f_i(x) \equiv 0$, то мы будем называть систему (94) *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

Задачи. 1. Если на слое $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$, задана система (80), причем все f_i непрерывны по x и удовлетворяют условию Липшица по всем y, то решение, удовлетворяющее любым начальным условиям на этом слое, можно продолжить на весь отрезок $[a, b]$.

2. Если все $a_{ij}(x)$ и $f_i(x)$ разлагаются в ряды Маклорена с радиусом сходимости, не меньшим $R > 0$, то и всякое решение уравнения (94) разлагается в ряд Маклорена с радиусом сходимости, не меньшим R. Это утверждение доказывается так же, как аналогичное утверждение доказывалось в замечании к § 18. Для всех $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ и $y_i(x)$ выберите одну и ту же мажорирующую функцию.

---

[1] Легче всего в этом можно убедиться, если заметить, что

$$\frac{d\left(e^{-M_1x}\sum y_i^2\right)}{dx} = M_1e^{-M_1x}\sum y_i^2 + e^{-M_1x}\frac{d\sum y_i^2}{dx} \leqslant M_1e^{-M_1x},$$

а

$$\frac{d(e^{-M_1x}z)}{dx} = -M_1e^{-M_1x}z + e^{-M_1x}\frac{dz}{dx} = M_1e^{-M_1x}.$$

§ 34. Основные теоремы для однородных систем 1-го порядка

Пусть мы имеем m решений однородной линейной системы

$$\left.\begin{array}{ll} y_1^{(1)}(x),\ y_2^{(1)}(x),\ \ldots,\ y_n^{(1)}(x) & [\text{первое решение,} \\ & \text{коротко } y^{(1)}(x)], \\ y_1^{(2)}(x),\ y_2^{(2)}(x),\ \ldots,\ y_n^{(2)}(x) & [\text{второе решение,} \\ & \text{коротко } y^{(2)}(x)], \\ \ldots & \\ y_1^{(m)}(x),\ y_2^{(m)}(x),\ \ldots,\ y_n^{(m)}(x) & [m\text{-е решение,} \\ & \text{коротко } y^{(m)}(x)]. \end{array}\right\} \qquad (96)$$

Их *линейной комбинацией* мы будем называть систему функций

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y_1^{(k)}(x),\ \sum_{k=1}^{m} C_k y_2^{(k)}(x),\ \ldots,\ \sum_{k=1}^{m} C_k y_n^{(k)}(x),$$

где C_1, C_2, …, C_m — некоторые постоянные. В частности, если все $C_i = 1$, мы будем говорить о сумме решений; если $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ и $m = 2$, мы будем говорить о разности решений $y^{(1)}(x)$ и $y^{(2)}(x)$.

Теорема 1. *Линейная комбинация решений однородной линейной системы также является ее решением.*

Доказательство. Пусть мы имеем m решений (96) однородной линейной системы

$$L_i(y) \equiv \frac{dy_i}{dx} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (97)$$

Подставим в нее $\sum\limits_{k=1}^{m} C_k y_i^{(k)}(x)$ вместо y_i. Тогда получим

$$L_s\left(\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x)\right) \equiv \sum_{k=1}^{m} C_k L_s\left(y^{(k)}(x)\right), \quad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Так как функции (96), по предположению, удовлетворяют системе (97), то при всяком k

$$L_s\left(y^{(k)}(x)\right) \equiv 0,$$

а следовательно,

$$L_s\left(\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x)\right) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Определение. *Функции* (96) *называются линейно зависимыми между собой, если существуют такие постоянные* $C_1, C_2, \ldots, C_m$*, среди которых есть по крайней мере одно отличное от* 0*, что при всяком* i *имеют место следующие тождества*:

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y_i^{(k)}(x) \equiv 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x), & y_2^{(1)}(x), & \ldots, & y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x), & y_2^{(2)}(x), & \ldots, & y_n^{(2)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)}(x), & y_2^{(n)}(x), & \ldots, & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского для системы функций

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{(1)}(x),\ y_2^{(1)}(x),\ \ldots,\ y_n^{(1)}(x), \\ y_1^{(2)}(x),\ y_2^{(2)}(x),\ \ldots,\ y_n^{(2)}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)}(x),\ y_2^{(n)}(x),\ \ldots,\ y_n^{(n)}(x). \end{array}\right\} \qquad (98)$$

Коротко мы будем обозначать этот определитель через $W(x)$.

Теорема 2. *Если функции* (98) *линейно зависимы, то их определитель Вронского тождественно равен* 0.

Эта теорема является непосредственным следствием известной теоремы алгебры.

Теорема 3. *Если определитель Вронского* $W(x)$ *для системы функций* (98)*, каждая строчка которой является решением системы* (97)*, равен* 0 *хотя бы в одной точке* $x = x_0$*, то функции* (98) *линейно зависимы.*

Доказательство. *Если* $W(x_0) = 0$, то система линейных однородных уравнений

$$
\begin{gathered}
C_1 y_1^{(1)}(x_0) + C_2 y_1^{(2)}(x_0) + \ldots + C_n y_1^{(n)}(x_0) = 0,\\
C_1 y_2^{(1)}(x_0) + C_2 y_2^{(2)}(x_0) + \ldots + C_n y_2^{(n)}(x_0) = 0,\\
\ldots\\
C_1 y_n^{(1)}(x_0) + C_2 y_n^{(2)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n)}(x_0) = 0
\end{gathered}
$$

имеет, по крайней мере, одно нетривиальное, т. е. не состоящее из одних нулей, решение относительно C_1, C_2, ..., C_n. Пусть это будут числа

$$C_1^*,\ C_2^*,\ \ldots,\ C_n^*.$$

Составим тогда n функций:

$$y_i^*(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* y_i^{(k)}(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

По теореме 1 эти функции $y_i^*(x)$ удовлетворяют системе (97). При $x = x_0$ они все обращаются в нули. Но по теореме о единственности есть только одна система удовлетворяющих системе (97) функций, которые все при $x = x_0$ обращаются в нули; это, очевидно, будут функции, тождественно равные нулю. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^* y_i^{(k)}(x) \equiv 0, \quad \text{при } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если определитель Вронского, составленный для решений* (98) *системы* (97)*, равен* 0 *в одной точке, то он тождественно равен* 0.

Действительно, если этот определитель равен 0 в одной точке, то по только что доказанной теореме решения (98) линейно зависимы, и по теореме 2 определитель Вронского тождественно равен 0.

Определение. *Система n линейно независимых решений системы* (97) *называется ее фундаментальной системой решений.*

Теорема 4. *Фундаментальные системы решений существуют.*

Доказательство. *Возьмем* n^2 таких чисел $b_i^{(k)}$, что

$$\begin{vmatrix} b_1^{(1)}, & b_2^{(1)}, & \ldots, & b_n^{(1)} \\ b_1^{(2)}, & b_2^{(2)}, & \ldots, & b_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^{(n)}, & b_2^{(n)}, & \ldots, & b_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Этому условию мы удовлетворим, например, если положим

$$b_i^{(k)} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k, \\ 1 \text{ при } i = k. \end{cases}$$

Составим теперь $m = n$ решений (96) системы (97), которые удовлетворяют условиям

$$y_i^{(k)}(x_0) = b_i^{(k)}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

где x_0 есть какое-нибудь число из интервала (a, b). Тогда детерминант Вронского для этих решений отличен от 0 при $x = x_0$, и потому на основании теоремы 2 эти решения линейно независимы.

Теорема 5. *Если функции* (98) *составляют n линейно независимых решений системы* (97), *то всякое решение этой системы можно представить как линейную комбинацию этих решений с соответствующим образом подобранными постоянными коэффициентами, т. е. в виде*

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_i^{(k)}(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пользуясь определениями общего решения и фундаментальной системы, теорему 5 можно еще сформулировать так:

Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений есть линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами из решений, составляющих фундаментальную систему.

Доказательство теоремы 5. Возьмем какое-нибудь решение системы (97)

$$y_1(x), \ y_2(x), \ \ldots, \ y_n(x).$$

Пусть при некотором значении x, равном x_0, эти функции соответственно принимают значения

$$y_1^0, \ y_2^0, \ \ldots, \ y_n^0.$$

Составим относительно неизвестных $C_1, \ldots, C_n$ n уравнений:

$$y_i^0 = \sum_{k=1}^{n} C_k y_i^{(k)}(x_0), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{99}$$

Раз функции (98) составляют n линейно независимых решений, то по предыдущим теоремам их детерминант Вронского нигде не обращается в 0. В частности, он не обращается в 0 при $x = x_0$, и поэтому система (99) может быть разрешена относительно C_1, C_2, C_3, …, C_n. Пусть таким образом получатся числа

$$C_1^*,\ C_2^*,\ \ldots,\ C_n^*.$$

Составим тогда n функций

$$y_i^*(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* y_i^{(k)}(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

По теореме 1 они удовлетворяют системе (97). С другой стороны, при $x = x_0$ эти функции принимают такие же значения, как и функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$. Значит, по теореме о единственности

$$y_i(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} C_k y_i^{(k)}(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если функции (98) не являются решением системы вида (97) с непрерывными коэффициентами, то для них нельзя высказать утверждения, подобного сделанному в теореме 3. Это показывает следующий пример. Для функций

$$\begin{matrix} x & 0 \\ x^2 & 0 \end{matrix}$$

детерминант Вронского тождественно равен 0, и тем не менее они линейно независимы по строкам.

Задача. Найдите все решения системы

$$xy_1' = 2y_1 - y_2, \quad xy_2' = 2y_1 - y_2.$$

Покажите, что всякое ее решение может единственным образом продолжить на всю действительную ось x-ов, если требовать, чтобы у функций, составляющих решение, существовали производные при $x = 0$. Покажите, что у всяких двух линейно независимых решений определитель Вронского равен Cx, где $C \neq 0$. Как согласовать с теоремой 3 то обстоятельство, что здесь определитель Вронского равен нулю только в одной точке?

§ 35. Теорема Лиувилля

Если функции (98) *представляют n решений однородной линейной системы* (97)*, то между значениями в точках x и x_0 их детерминанта Вронского W существует следующая зависимость*:

$$W(x) = W(x_0) e^{\int\limits_{x_0}^{x} [a_{11}(\xi) + a_{22}(\xi) + \ldots + a_{nn}(\xi)]\, d\xi}. \tag{100}$$

Доказательство. По правилу дифференцирования определителей имеем

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{dy_1^{(1)}}{dx}, & y_2^{(1)}, & \ldots, & y_n^{(1)} \\ \dfrac{dy_1^{(2)}}{dx}, & y_2^{(2)}, & \ldots, & y_n^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{dy_1^{(n)}}{dx}, & y_2^{(n)}, & \ldots, & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^{(1)}, & \dfrac{dy_2^{(1)}}{dx}, & \ldots, & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)}, & \dfrac{dy_2^{(2)}}{dx}, & \ldots, & y_n^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)}, & \dfrac{dy_2^{(n)}}{dx}, & \ldots, & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \ldots, & \dfrac{dy_n^{(1)}}{dx} \\ y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \ldots, & \dfrac{dy_n^{(2)}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \ldots, & \dfrac{dy_n^{(n)}}{dx} \end{vmatrix}.$$

Подставляя всюду в правую часть вместо

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx} \quad (i,\, k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

их выражения через $y_1^{(k)}$, $y_2^{(k)}$, …, $y_n^{(k)}$ при помощи уравнений (97) и пользуясь тем, что определитель не изменяется, если к элементам какого-либо его столбца прибавить величины, пропорциональные элементам других столбцов, мы получим

$$W'(x)=\begin{vmatrix} a_{11}y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \ldots, & y_n^{(1)}\\ a_{11}y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \ldots, & y_n^{(2)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{11}y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \ldots, & y_n^{(n)}\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \ldots, & a_{nn}y_n^{(1)}\\ y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \ldots, & a_{nn}y_n^{(2)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \ldots, & a_{nn}y_n^{(n)}\end{vmatrix}$$

или

$$W'(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)W(x).$$

Интегрируя это последнее дифференциальное уравнение, мы и получим (100).

Следствие. Из уравнения (100) мы еще раз видим, что если определитель Вронского, составленный для системы (98) решений системы (97), обращается в 0 в одной точке, то он равен 0 тождественно.

§ 36. Составление однородной линейной системы дифференциальных уравнений вида (97) по данной фундаментальной системе ее решений

Заметим прежде всего, что не всякие n^2 функций $y_i^{(k)}(x)$, имеющих непрерывные первые производные, являются фундаментальной системой решений некоторой системы вида (97) с непрерывными коэффициентами. По теореме 3 для этого необходимо, чтобы их детерминант нигде не обращался в 0. Покажем, что это условие является в то же время и достаточным, если эти функции непрерывны вместе с их производными.

Действительно, составим тогда следующие n линейных однородных дифференциальных уравнений относительно функций $y_1(x)$, …, $y_n(x)$:

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_n, & \dfrac{dy_i}{dx}\\ y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \ldots, & y_n^{(1)}, & \dfrac{dy_i^{(1)}}{dx}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \ldots, & y_n^{(n)}, & \dfrac{dy_i^{(n)}}{dx}\end{vmatrix}=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (101)$$

Легко видеть, что этим уравнениям удовлетворяют функции, выписанные в строчках (98). Кроме того, так как, по предположению, определитель, составленный из функций (98), нигде не обращается в 0, то все эти уравнения можно разрешить относительно

$$\frac{dy_i}{dx} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Полученная система и будет обладать всеми требуемыми свойствами.

Покажем еще, что существует только одна система вида (97), имеющая данную фундаментальную систему. Действительно, по теореме 5 из § 34 все решения такой системы определяются ее фундаментальной системой. Но заданием всех интегральных кривых системы (97) эта система, очевидно, вполне определяется, так как тем самым вполне определяется соответствующее ей поле направлений.

§ 37. Следствия для дифференциального уравнения n-го порядка

На основании сказанного в § 28 линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y \tag{102}$$

эквивалентно линейной однородной системе:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_0}{dx} &= y_1,\\
\frac{dy_1}{dx} &= y_2,\\
&\ldots\\
\frac{dy_{n-2}}{dx} &= y_{n-1},\\
\frac{dy_{n-1}}{dx} &= a_0(x)y_0 + a_1(x)y_1 + a_2(x)y_2 + \ldots +\\
&\qquad + a_{n-1}(x)y_{n-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Здесь через y_0 обозначено прежнее y, y_k означает k-ю производную от y.

1. Из § 33 мы заключаем поэтому, что *если коэффициенты $a_i(x)$ непрерывны на интервале $a < x < b$, то для каждого x_0 из этого интервала и любой системы чисел*

$y_0^0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0$ *существует одно и только одно решение уравнения* (102), *у которого при* $x = x_0$ *производная* i*-го порядка* ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) *обращается в* y_i^0. *Это решение существует на всем интервале* (a, b).

2. Очевидно, *если функции*

$$y^{(1)}(x),\ y^{(2)}(x),\ \ldots,\ y^{(m)}(x)$$

удовлетворяют уравнению (102), *то любая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами*

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x) \tag{104}$$

также удовлетворяет этому уравнению.

3. Заметим, далее, следующее. Пусть мы имеем m решений системы (103)

$$y_0^{(k)}(x),\ y_1^{(k)}(x),\ \ldots,\ y_{n-1}^{(k)}(x), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Если существуют такие постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_m$, что при всех x на интервале (a, b)

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y_0^{(k)}(x) \equiv 0, \tag{105}$$

то обязательно будут иметь место и следующие тождества:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k y_j^{(k)}(x) \equiv 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Поэтому мы будем называть *линейно зависимыми* решения $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(m)}(x)$ уравнения (102), если существуют такие постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_m$, среди которых по крайней мере одно отлично от 0, что имеет место следующее тождество:

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x) \equiv 0.$$

4. Если принять во внимание, что $y_i(x)$ есть производная i-го порядка от $y(x)$, то детерминант Вронского для системы

(103) теперь можно записать так:

$$\begin{vmatrix} y^{(1)}, & \dfrac{dy^{(1)}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{n-1}y^{(1)}}{dx^{n-1}} \\ y^{(2)}, & \dfrac{dy^{(2)}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{n-1}y^{(2)}}{dx^{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(n)}, & \dfrac{dy^{(n)}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{n-1}y^{(n)}}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}. \tag{106}$$

Теоремы 2, 3, 4 и 5 § 34, *а также следствие из теоремы 3 полностью сохраняются для уравнения* (102)*, если в них под линейной комбинацией решений подразумевать суммы вида* (104)*, а детерминантом Вронского называть детерминант* (106).

5. На главной диагонали в правой части системы (103) стоит только один коэффициент, который может отличаться от 0; это будет коэффициент a_{n-1}. Поэтому *формула Лиувилля теперь примет такой вид*:

$$W(x) = W(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x} a_{n-1}(\xi)d\xi}.$$

Замечание. Если определитель (106) для функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, о которых не сказано, что они удовлетворяют уравнению вида (102) с непрерывными коэффициентами, тождественно равен 0, то отсюда не следует, что эти функции линейно зависимы, т. е. что для них имеет место тождество вида (105), причем по крайней мере одно из C_i отлично от 0. Это показывает следующий пример. Пусть

$$y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|^n \quad \text{при } 0 < x \leqslant \frac{1}{2},$$
$$y_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^n, \quad y_2(x) = 0 \quad \text{при } \frac{1}{2} \leqslant x < 1;$$

n — произвольное число, большее 1. Легко видеть, что эти функции линейно независимы и тем не менее их определитель Вронского тождественно равен 0.

Задачи. Показать, что если

$$y_{i+1}^{(k)}(x) = \frac{d^i y^{(k)}}{dx^i}, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то построенная в § 36 система эквивалентна одному уравнению n-го порядка.

2. Пусть $a < a_1 < b_1 < b$ и решение $y(x)$ уравнения (102) имеет на $[a_1,\, b_1]$ бесконечное множество нулей. Доказать, что тогда на $(a,\, b)$ $y(x) \equiv 0$.

3. Решите уравнение

$$y'' + xy = 0,$$

разложив y в ряд Маклорена. Докажите сходимость этого ряда. Ср. задачу 2 к § 33.

4. Каков радиус сходимости рядов по степеням x, представляющих решения уравнения

$$(1 + x^2)y'' + y \sin x = 0.$$

Ср. задачу 2 к § 33.

§ 38. Понижение порядка линейного однородного дифференциального уравнения

Допустим, что мы знаем m линейно независимых решений уравнения (102) с непрерывными коэффициентами на интервале $(a,\, b)$

$$y^{(1)}(x),\ y^{(2)}(x),\ \ldots,\ y^{(m)}(x). \tag{107}$$

Пусть x_0 есть какая-нибудь точка этого интервала, где $y^{(1)}(x) \neq 0$. Так как $y^{(1)}(x)$ непрерывна, то тогда существует некоторый интервал $(a_1,\, b_1)$, заключающий внутри себя точку x_0, в котором

$$\left|y^{(1)}(x)\right| > 0.$$

Сделаем замену неизвестной функции в уравнении (102), положив

$$y(x) = y^{(1)}(x) z(x).$$

Легко видеть тогда, что функция $z(x)$ будет удовлетворять уравнению вида

$$\frac{d^n z}{dx^n} = a^*_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + a^*_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \ldots + a^*_1(x)\frac{dz}{dx} + a^*_0(x)z,$$

где коэффициенты $a^*_i(x)$ непрерывны на интервале $(a_1,\, b_1)$. Так как уравнению (102) удовлетворяла функция $y_1(x)$, то последнему уравнению должна удовлетворять функция

$$z(x) \equiv 1;$$

поэтому должно быть $a_0^*(x) \equiv 0$. Положим теперь

$$\frac{dz}{dx} = y^*.$$

Тогда функция y^* будет удовлетворять линейному однородному уравнению $(n-1)$-го порядка с непрерывными коэффициентами

$$\frac{d^{n-1}y^*}{dx^{n-1}} = a_{n-1}^*(x)\frac{d^{n-2}y^*}{dx^{n-2}} + a_{n-2}^*\frac{d^{n-3}y^*}{dx^{n-3}} + \ldots + a_1^*(x)y^*. \quad (108)$$

Этому уравнению должны удовлетворять на интервале (a_1, b_1) функции

$$y_i^*(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y^{(i+1)}(x)}{y^{(1)}(x)}\right), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1. \quad (108')$$

Покажем, что они линейно независимы. Действительно, допустим, что существуют такие постоянные C_1, C_2, …, C_{m-1}, среди которых по крайней мере одно не равно 0, что на интервале (a_1, b_1) имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^{m-1} C_i \frac{d}{dx}\left(\frac{y^{(i+1)}(x)}{y^{(1)}(x)}\right) \equiv 0.$$

Тогда на этом интервале должно быть

$$\sum_{i=1}^{m-1} C_i y^{(i+1)}(x) + Cy^{(1)}(x) \equiv 0,$$

где C — некоторая новая постоянная. Следовательно, функции (107) линейно зависимы на интервале (a_1, b_1). Отсюда по теоремам 2 и 3 из § 34 следует, что эти функции зависимы на всем интервале (a, b). Но это противоречит исходному предположению о том, что функции $y_i(x)$ линейно независимы на (a, b).

Имея $m-1$ линейно независимых решений уравнения (108), мы можем с ним проделать все то, что мы только что проделали с уравнением (102) [1]. Тогда получим на некотором

---

[1] По теореме единственности решение линейного однородного уравнения n-го порядка с непрерывными коэффициентами, равное 0 в некоторой точке вместе со всеми своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно, тождественно равно нулю. Поэтому ни одна из функций (107), а также и (108′) не может быть

интервале (a_2, b_2), заключенном в (a_1, b_1), некоторое уравнение $(m-2)$-го порядка. Рассуждая таким же образом дальше, мы, наконец, придем к линейному однородному уравнению $(n-m)$-го порядка на некотором интервале (a_m, b_m).

Задачи. 1. Покажите, что в условиях данного параграфа любой интервал $(\overline{a}, \overline{b})$, где $a < \overline{a} < \overline{b} < b$, распадается на конечное число открытых интервалов, на каждом из которых порядок уравнения понижается до $(n-m)$-го.

2. Найти общее решение уравнения

$$(x^4 + 3x^3 - 2x)y'' - (x^3 + 4)y' - 6xy = 0;$$

известно, что одним из его решений служит многочлен по x.

§ 39. О нулях решений линейных однородных уравнений 2-го порядка

В этом параграфе мы будем рассматривать уравнения вида

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = 0 \qquad (109)$$

с непрерывными и ограниченными $a(x)$, $a'(x)$, $b(x)$. Нас будет интересовать имеющий большое значение в приложениях вопрос о том, как часто решение такого уравнения может обращаться в 0. Подстановкой

$$y(x) = z(x)e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}$$

уравнение (109) приводится к виду

$$z'' + B(x) \cdot z = 0, \qquad (110)$$

где

$$B = -\frac{a^2}{4} - \frac{a'}{2} + b$$

и, следовательно, непрерывно и ограничено.

В силу ограниченности $a(x)$ функции $z(x)$ и $y(x)$ обращаются в 0 одновременно.

Основной является следующая *теорема Штурма. Пусть даны два уравнения*

$$z_1''(x) + B_1(x) \cdot z_1(x) = 0 \quad \text{и} \quad z_2''(x) + B_2(x) \cdot z_2(x) = 0,$$

тождественно равной 0 ни на каком подинтервале, лежащем внутри (a, b).

причем на всем рассматриваемом замкнутом интервале $a \leqslant x \leqslant b$ функции $B_1(x)$ и $B_2(x)$ непрерывны и

$$B_2(x) \geqslant B_1(x). \tag{111}$$

Тогда между каждыми двумя соседними[1] *нулями x_1 и x_2, $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, не тождественно равного нулю решения $z_1(x)$ первого из этих уравнений заключен, по крайней мере, один нуль любого решения $z_2(x)$ второго уравнения, если $z_2(x)$ не обращается в 0 при $x = x_1$ и $x = x_2$.* Короче, в таких случаях говорят, что решения второго уравнения колеблются не реже, чем решения первого.

Доказательство. Подставим оба сравниваемых решения $z_1(x)$ и $z_2(x)$ в соответствующие уравнения. Первое из полученных тождеств умножим на $z_2(x)$, а второе на $z_1(x)$, и вычтем почленно из первого тождества второе. Получим

$$z_1''(x) \cdot z_2(x) - z_1(x) \cdot z_2''(x) = [B_2(x) - B_1(x)]\, z_1(x) z_2(x). \tag{112}$$

Так как

$$z_1''(x) z_2(x) - z_1(x) z_2''(x) = \left[z_1'(x) z_2(x) - z_1(x) z_2'(x)\right]_x',$$

то, интегрируя тождество (112) от x_1 до x_2 и пользуясь тем, что по условию

$$z_1(x_1) = z_1(x_2) = 0,$$

получим

$$z_1'(x_2) z_2(x_2) - z_1'(x_1) z_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [B_2(x) - B_1(x)]\, z_1(x) z_2(x) dx. \tag{113}$$

Так как мы предполагаем, что x_1 и x_2 являются соседними нулями $z_1(x)$, то между x_2 и x_1 функция $z_1(x)$ сохраняет знак. Так как $z_1(x)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению и, следовательно, $-z_1(x)$ также является решением того уравнения, то, не ограничивая общности, мы можем предположить, что $z_1(x)$ положительно между x_1 и x_2. Так как ни $z_1'(x_1)$, ни $z_1'(x_2)$ не могут быть нулями, иначе $z_1(x)$ тождественно равнялось бы 0, то из положительности $z_1(x)$

[1] Нетрудно показать, что если бы $z_i(x)$ имело бесконечно много нулей на замкнутом интервале $[a, b]$, то на нем обязательно нашлась бы точка, в которой обратилось бы в 0 как $z_1(x)$, так и $z_1'(x)$, и потому было бы $z_1(x) \equiv 0$. Ср. задачу 2 к § 37.

на интервале (x_1, x_2) следует, что $z_1'(x_1) > 0$, а $z_1'(x_2) < 0$. Согласно (111)

$$B_1(x) - B_2(x) \leqslant 0.$$

Поэтому, если бы доказываемая нами теорема была неверна, существовало бы решение $z_2(x)$, которое не обращается в 0 на открытом интервале (x_1, x_2) и, по крайней мере, на одном из его концов. Без ограничения общности мы можем считать его на этом интервале всюду неотрицательным. Но тогда левая часть равенства (113) была бы отрицательной, а правая не отрицательной. Таким образом мы пришли к противоречию, допустив, что наша теорема неверна.

Следствия. 1. *Никакое решение уравнения* (110) *не может обратиться на каком-нибудь конечном интервале* (a, b) *в* 0 *больше одного раза, если всюду на этом интервале* $B(x) \leqslant 0$.

В самом деле, если бы какое-нибудь решение $z(x)$ этого уравнения обратилось в 0 при $x = x_1$ и $x = x_2$, $a < x_1 < x_2 < b$, то по доказанной только что теореме на замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ должно было бы обратиться в 0, по крайней мере, один раз *всякое* решение уравнения $z''(x) \equiv 0$, что, очевидно, неверно.

2. *Если* x_1 *и* x_2 *— два последовательных нуля какого-нибудь решения уравнения* (109), *то всякое другое решение этого уравнения имеет на интервале* (x_1, x_2) *ровно один нуль, если отношение этих двух решений не постоянно.* Для доказательства этого утверждения надо воспользоваться теоремой Штурма, считая $B_1(x) \equiv B_2(x)$.

Задачи. 1. Сравнивая решение уравнения

$$z'' + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) z = 0$$

(уравнение Бесселя) с решениями уравнения $y'' + y = 0$ или уравнения $y'' + (1 - \varepsilon^2)y = 0$, показать, что при $0 \leqslant n < \frac{1}{2}$ расстояние между соседними нулями $z(x)$ меньше π и при достаточно больших x как угодно близко к π.

2. Показать, что при неограниченном возрастании x последовательные нули всякого решения уравнения

$$y'' + xy = 0$$

неограниченно сближаются.

3. Покажите, что если хотя бы в одной точке интервала (x_1, x_2) соотношение (111) выполнялось со знаком $>$ и если

$$z_1(x_1) = z_2(x_1) = 0,$$

то следующий за x_1 корень $z_2(x)$ лежит левее x_2.

§ 40. Система неоднородных линейных уравнений 1-го порядка

Теорема. *Пусть функции*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$$

составляют одно какое-нибудь частное решение неоднородной системы (94). *Тогда всякое решение этой системы можно представить в виде*:

$$y_i(x) = v_i(x) + \varphi_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где функции $v_i(x)$ удовлетворяют однородной системе (97). *Обратно, всякая система функций $y_i(x)$ такого вида удовлетворяет системе* (94).

Доказательство прямого утверждения.

$$L_i(v) \equiv L_i(y) - L_i(\varphi) = f_i(x) - f_i(x) = 0,$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается обратное.

Следствие. *Всякое решение неоднородной линейной системы можно представить в виде*:

$$y_i = \varphi_i + \sum_k C_k y_i^{(k)}, \quad i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где функции $y_i^{(k)}$ образуют фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы, а C_k — некоторые однозначно определяемые для этого решения постоянные. Обратно, при произвольных $C_1, \ldots, C_n$ функции $y_i + \sum\limits_k C_k y_i^{(k)}$ удовлетворяют системе (94).

Иначе то же самое можно несколько короче сказать так: *общее решение неоднородной линейной системы есть сумма частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы*. Значит, задача нахождения общего решения неоднородной линейной системы сводится нахождению одного частного решения этой системы, если фундаментальная система решений соответствующей однородной системы нам известна. Для решения этой задачи применим, как и в случае одного линейного уравнения 1-го порядка (ср. § 7), *метод вариации постоянных*.

Метод вариации постоянных. Пусть функции $y_i^{(k)}(x)$ образуют фундаментальную систему решений системы (97). Попытаемся удовлетворить системе (94), положив

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_i^{(k)}(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{114}$$

где $C_k(x)$ не обязательно постоянны, как было прежде, а суть какие-то дифференцируемые функции от x. Подставляя эти выражения y_i в (94), мы найдем, что должны выполняться следующие равенства:

$$\sum_k C_k'(x) y_i^{(k)}(x) + \sum_k C_k(x) y_i^{(k)\prime}(x) - \sum_j \sum_k a_{ij}(x) C_k(x) y_j^{(k)}(x) =$$
$$= \sum_k C_k' y_i^{(k)}(x) + \sum_k C_k(x) \left[y_i^{(k)\prime} - \sum_j a_{ij}(x) y_j^{(k)}(x) \right] =$$
$$= \sum_k C_k' y_i^{(k)}(x) = f_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Уравнения

$$\sum_k C_k'(x) y_i^{(k)}(x) = f_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{115}$$

образуют линейную неоднородную систему относительно неизвестных $C_k'(x)$. Детерминант, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, является детерминантом Вронского для функций $y_i^{(k)}(x)$ и потому отличен от 0. Значит, из системы (115) можно единственным образом определить $C_k'(x)$. Пусть

$$C_k'(x) = \psi_k(x).$$

Отсюда интегрированием получаем

$$C_k(x) = \int \psi_k(x) dx + C_k = \Psi_k(x) + C_k, \tag{115$'$}$$

где C_k — произвольные постоянные. Так как нам достаточно найти только одно частное решение системы (94), то эти постоянные можно считать, например, нулями. Тогда получим для искомого частного решения выражение

$$y_i(x) = \sum_k \Psi_k(x) y_i^{(k)}(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Если же оставить C_k произвольными, то после подстановки (115′) в (114) получим общее решение нашей системы (94).

Задача. Пусть функции $y_i^{(k)}(x,\,\xi)$, $(i,\,k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, при всяком фиксированном k удовлетворяют по x системе (97), и при $x = \xi$ удовлетворяют следующим условиям:

$$y_i^{(k)}(\xi,\,\xi) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = k, \\ 0, \text{ если } i \neq k. \end{cases}$$

Требуется доказать, что функции

$$y_i(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \sum_k f_k(\xi) y_i^{(k)}(x,\,\xi)\,d\xi$$

удовлетворяют системе (94); x_0 — здесь любое значение x из того интервала, где мы рассматриваем наши уравнения (94) (Коши).

§ 41. Следствие для линейного неоднородного уравнения n-го порядка

Неоднородное линейное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + \\ + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y + f(x)$$

эквивалентно линейной системе

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dx} &= y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ &\ldots \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} &= y_{n-1}, \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= a_0(x)y_0 + a_1(x)y_1 + a_2(x)y_2 + \ldots + a_{n-1}(x)y_{n-1} + f(x). \end{aligned}$$

Система (115) теперь обращается в систему

$$
\begin{gathered}
C_1'(x)y^{(1)}(x)+C_2'(x)y^{(2)}(x)+\ldots+C_n'(x)y^{(n)}(x)=0,\\
C_1'(x)\frac{dy^{(1)}}{dx}+C_2'(x)\frac{dy^{(2)}}{dx}+\ldots+C_n'(x)\frac{dy^{(n)}}{dx}=0,\\
\ldots\\
C_1'(x)\frac{d^{n-1}y^{(1)}}{dx^{n-1}}+C_2'(x)\frac{d^{n-1}y^{(2)}}{dx^{n-1}}+\ldots+C_n'\frac{d^{n-1}y^{(n)}}{dx^{n-1}}=f(x).
\end{gathered}
$$

Из функций y_i теперь, очевидно, представляет интерес только $y_0(x)\equiv y(x)$, и потому найденные $C_i(x)$ надо подставлять только в равенство

$$y_0(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_0^{(k)}(x).$$

Глава VI

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 42. Предварительные замечания

В настоящей главе мы будем рассматривать линейные системы дифференциальных уравнений, у которых неизвестные функции, свободные члены и коэффициенты комплексны; независимое же переменное будем считать действительным. Пусть

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) + i\varphi^{**}(x),$$

где $\varphi^*(x)$ и $\varphi^{**}(x)$ — действительны. Тогда, по определению,

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi^*(x+\Delta x) - \varphi^*(x)}{\Delta x} + \\ + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi^{**}(x+\Delta x) - \varphi^{**}(x)}{\Delta x} = \varphi^{*\prime}(x) + i\varphi^{**\prime}(x).$$

Здесь, конечно, предполагается, что $\varphi^{*\prime}(x)$ и $\varphi^{**\prime}(x)$ существуют. Отсюда видно, что при комплексных C_j и $\varphi_j(x)$

$$\Big[\sum C_i\varphi_j(x)\Big]'_x = \sum C_j\varphi_j'(x)$$

точно так же, как и при действительных C_j и $\varphi_j(x)$. Аналогично можно показать, что и для производной произведения комплексных функций сохраняется обычное правило.

Основной теоремой настоящей главы является теорема о том, что всякую линейную систему с постоянными коэффициентами неособым линейным преобразованием с постоянными коэффициентами можно привести к «каноническому виду».

Линейное преобразование называется *неособым*, если детерминант, составленный из его коэффициентов, отличен от 0. Очевидно, что результат последовательного применения двух неособых преобразований есть неособое преобразование.

Каноническим видом системы мы называем следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + f_1^*(x),\\
\frac{dz_2}{dx} &= \alpha_1 z_1 + \lambda_1 z_2 + f_2^*(x),\\
\frac{dz_3}{dx} &= \alpha_2 z_2 + \lambda_1 z_3 + f_3^*(x),\\
&\ldots\\
\frac{dz_{n_1}}{dx} &= \alpha_{n_1-1} z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} + f_{n_1}^*(x),\\
\frac{dz_{n_1+1}}{dx} &= \lambda_2 z_{n_1+1} + f_{n_1+1}^*(x),\\
\frac{dz_{n_1+2}}{dx} &= \beta_1 z_{n_1+1} + \lambda_2 z_{n_1+2} + f_{n_1+2}^*(x),\\
\frac{dz_{n_1+3}}{dx} &= \beta_2 z_{n_1+2} + \lambda_2 z_{n_1+3} + f_{n_1+3}^*(x),\\
&\ldots\\
\frac{dz_{n_1+n_2}}{dx} &= \beta_{n_2-1} z_{n_1+n_2-1} + \lambda_2 z_{n_1+n_2} + f_{n_1+n_2}^*(x),\\
&\ldots\\
\frac{dz_{n-n_k+1}}{dx} &= \lambda_k z_{n-n_k+1} + f_{n-n_k+1}^*(x),\\
\frac{dz_{n-n_k+2}}{dx} &= \omega_1 z_{n-n_k+1} + \lambda_k z_{n-n_k+2} + f_{n-n_k+2}^*(x),\\
\frac{dz_{n-n_k+3}}{dx} &= \omega_2 z_{n-n_k+2} + \lambda_k z_{n-n_k+3} + f_{n-n_k+3}^*(x),\\
&\ldots\\
\frac{dz_n}{dx} &= \omega_{n_k-1} z_{n-1} + \lambda_k z_n + f_n^*(x).
\end{aligned} \tag{116}$$

Здесь λ_i, α_i, β_i, …, ω_i — некоторые постоянные комплексные числа; α_i, β_i, …, ω_i можно выбирать произвольно, лишь бы только они не равнялись 0; в частности, можно считать их произвольно малыми по абсолютной величине. Числа же λ_i вполне определяются данной системой.

После приведения системы к каноническому виду ее легко проинтегрировать. Действительно, в первое уравнение канонической системы входит только одна неизвестная функция $z_1(x)$. Определив ее из этого уравнения и подставив во второе уравнение, мы опять получим линейное уравнение только с одной неизвестной функцией $z_2(x)$ и т. д. Ср. § 46.

Задача. Докажите, что формула Лагранжа конечных приращений для комплексных функций действительного переменного уже не обязана выполняться. Однако для дифференцируемой на $a \leqslant x \leqslant b$ функции $f(x)$ справедлива формула

$$\lambda\,[f(b) - f(a)] = \mu f'(\xi),$$

где $a < \xi < b$, а λ и μ — некоторые действительные числа, вообще говоря, зависящие от a, b, f, причем $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

§ 43. Теорема о приведении к каноническому виду

Теорема. *Пусть дана линейная система уравнений с постоянными коэффициентами*

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1} a_{ij} y_j + f_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{117}$$

Всегда существует линейное преобразование

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} z_j,$$

у которого коэффициенты C_{ij} постоянны, детерминант $|C_{ij}| \neq 0$ и которое приводит систему (117) *к каноническому виду* (116). Функции $f_i^*(x)$ в новой системе суть линейные комбинации с постоянными коэффициентами из функций $f_i(x)$.

Доказательство. При $n = 1$ теорема, очевидно, верна. Допустим, что она верна для числа уравнений, равного $n-1$; докажем, что она верна и для числа уравнений, равного n.

Помножим i-е уравнение системы (117) на k_i, где k_i — некоторые постоянные, которые точнее будут определены позже. Полученные уравнения просуммируем. Получим

$$\frac{d\sum\limits_i k_i y_i}{dx} = \sum_{ij} a_{ij} k_i y_i + \sum_i k_i f_i(x).$$

Определим теперь k_i так, чтобы тождественно по y_j было

$$\sum_{ij} a_{ij} k_i y_j \equiv \lambda \sum_i k_i y_i \equiv \lambda \sum_j k_j y_j,$$

где λ — некоторая постоянная, действительная или комплексная. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых y_j в обеих частях этого равенства были одинаковы, т. е. чтобы было

$$\lambda k_j = \sum_i a_{ij} k_i, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Таким образом, для определения k_i мы получили систему n линейных однородных уравнений с n неизвестными. Чтобы эта система имела нетривиальное решение, которое только и будет для нас представлять интерес, необходимо и достаточно, чтобы детерминант, составленный из ее коэффициентов, был равен 0. Это условие можно записать так:

$$|\lambda E - \|a_{ij}\|| = 0. \tag{118}$$

E — здесь единичная матрица. Уравнение (118) называется *«вековым уравнением»* и играет важную роль во многих вопросах математики, физики и астрономии. Матрица же $\lambda E - \|a_{ij}\|$ называется *характеристической матрицей системы* (117).

Пусть λ_1 — один из корней уравнения (118). Обозначим через k_{1i} $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ какую-нибудь систему чисел, не состоящую из одних нулей, которая удовлетворяет системе уравнений

$$\lambda_1 k_{1j} = \sum_i a_{ij} k_{1i}.$$

Для определенности положим, что $k_{11} \neq 0$. Очевидно, это нисколько не ограничивает общности, так как мы всегда можем достигнуть этого изменением нумерации у y_i, что сводится к неособому преобразованию. Положим далее

$$z_1 = \sum_j k_{1j} y_j. \tag{119}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 + f_1^*(x),$$

где $f_1^*(x) = \sum\limits_i k_{1i} f_i(x)$. Напишем это уравнение вместо первого уравнения системы (117). Все же остальные уравнения этой системы перепишем, заменив в них y_1 его выражением, полученным из (119). Это выражение можно найти, так как, по предположению, $k_{11} \neq 0$. Полученную систему будем обозначать через (117*). Она будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 + f_1^*(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}^* z_1 + a_{22}^* y_2 + a_{23}^* y_3 + \ldots + a_{2n}^* y_n + f_2(x), \\ \dfrac{dy_3}{dx} = a_{31}^* z_1 + a_{32}^* y_2 + a_{33}^* y_3 + \ldots + a_{3n}^* y_n + f_3(x), \\ \quad \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}^* z_1 + a_{n2}^* y_2 + a_{n3}^* y_3 + \ldots + a_{nn}^* y_n + f_n(x). \end{cases} \tag{117*}$$

Мы допускаем, что доказываемая теорема верна для $(n-1)$-го уравнения. Применим ее к системе, полученной из (117*) выбрасыванием первого уравнения. При этом будем $z_1(x)$ рассматривать как некоторую известную функцию наравне с $f_i(x)$. Тогда существует такое линейное неособое преобразование:

$$y_i(x) = \sum_{j=2}^{n} k_{ij} y_j^*(x), \quad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

которое приводит систему (117*) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + f_1^*(x), \\ \frac{dy_2^*}{dx} &= b_2 z_1 + \lambda_2 y_2^* + \widetilde{f}_2(x), \\ \frac{dy_3^*}{dx} &= b_3 z_1 + \alpha_1 y_2^* + \lambda_2 y_3^* + \widetilde{f}_3(x), \\ \frac{dy_4^*}{dx} &= b_4 z_1 + \alpha_2 y_3^* + \lambda_2 y_4^* + \widetilde{f}_4(x), \\ &\ldots \\ \frac{dy_{n_1+1}^*}{dx} &= b_{n_1+1} z_1 + \alpha_{n_1-1} y_{n_1}^* + \lambda_2 y_{n_1+1}^* + \widetilde{f}_{n_1+1}(x), \\ \frac{dy_{n_1+2}^*}{dx} &= b_{n_1+2} z_1 + \lambda_3 y_{n_1+2}^* + \widetilde{f}_{n_1+2}(x), \\ \frac{dy_{n_1+3}^*}{dx} &= b_{n_1+3} z_1 + \beta_1 y_{n_1+2}^* + \lambda_3 y_{n_1+3}^* + \widetilde{f}_{n_1+3}(x), \\ \frac{dy_{n_1+4}^*}{dx} &= b_{n_1+4} z_1 + \beta_2 y_{n_1+3}^* + \lambda_3 y_{n_1+4}^* + \widetilde{f}_{n_1+4}(x), \\ &\ldots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy^*_{n_1+n_2+1}}{dx} &= b_{n_1+n_2+1}z_1 + \beta_{n_2-1}y^*_{n_1+n_2} + \lambda_3 y^*_{n_1+n_2+1} + \widetilde{f}_{n_1+n_2+1}(x),\\
&\ldots\\
\frac{dy^*_{n-n_k+1}}{dx} &= b_{n-n_k+1}z_1 + \lambda_{k+1}y^*_{n-n_k+1} + \widetilde{f}_{n-n_k+1}(x),\\
\frac{dy^*_{n-n_k+2}}{dx} &= b_{n-n_k+2}z_1 + \omega_1 y^*_{n-n_k+1} + \lambda_{k+1}y^*_{n-n_k+2} + \widetilde{f}_{n-n_k+2}(x),\\
\frac{dy^*_{n-n_k+3}}{dx} &= b_{n-n_k+3}z_1 + \omega_2 y^*_{n-n_k+2} + \lambda_{k+1}y^*_{n-n_k+3} + \widetilde{f}_{n-n_k+3}(x),\\
&\ldots\\
\frac{dy_n}{dx} &= b_n z_1 + \omega_{n_k-1}y^*_{n-1} + \lambda_{k+1}y^*_n + \widetilde{f}_n(x).
\end{aligned}
\tag{117**}
$$

Чтобы привести систему к каноническому виду, нам остается теперь только освободиться от некоторых b_i. Так как все группы уравнений от 2-го до (n_1+1)-го, от (n_1+2)-го до (n_1+n_2+1)-го, ..., от $(n-n_k+1)$-го до n-го находятся в совершенно одинаковом положении, то мы покажем только, как освободиться от некоторых из b_2, b_3, ..., b_{n_1+1}. Нам придется при этом различать два случая: 1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 2) $\lambda_1 = \lambda_2$.

1-й случай, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Положим $z_2 = y_2^* + Kz_1$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\frac{dz_2}{dx} = \frac{dy_2^*}{dx} + K\frac{dz_1}{dx} &= b_2 z_1 + \lambda_2 y_2^* + K\lambda_1 z_1 + f_2^*(x) =\\
&= b_2 z_1 + \lambda_2 z_2 - K\lambda_2 z_1 + K\lambda_1 z_1 + f_2^*(x) =\\
&= \lambda_2 z_2 + [b_2 + K(\lambda_1 - \lambda_2)]\, z_1 + f_2^*(x).
\end{aligned}
$$

Здесь $f_2^*(x)$ есть некоторая линейная комбинация из $f_1^*(x)$ и $\widetilde{f}_2(x)$. Выберем K так, чтобы было

$$b_2 + K(\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$

Это возможно, так как, по предположению, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда получим

$$\frac{dz_2}{dx} = \lambda_2 z_2 + f_2^*(x).$$

Значит, во втором уравнении мы уже освободились от b_2.

Перейдем теперь к третьему. Перепишем его сначала, подставив вместо y_2^* его выражение через z_1 и z_2. Получим

$$\frac{dy_3^*}{dx} = (b_3 - \alpha_1 K)z_1 + \alpha_1 z_2 + \lambda_2 y_3^* + \widetilde{f}_3(x).$$

Положим теперь $z_3 = y_3^* + K_1 z_1$. Тогда

$$\frac{dz_3}{dx} = \frac{dy_3^*}{dx} + K_1\frac{dz_1}{dx} = b_3 z_1 + \alpha_1 y_2^* + \lambda_2 y_3^* + K_1\lambda_1 z_1 + f_3^*(x) =$$
$$= (b_3 - \alpha_1 K + K_1\lambda_1 - K_1\lambda_2)z_1 + \alpha_1 z_2 + \lambda_2 z_3 + f_3^*(x).$$

Здесь $f_3^*(x)$ есть некоторая линейная комбинация из $f_1^*(x)$ и $\widetilde{f}_3(x)$. Выберем K_1 так, чтобы было $b_3 - K\alpha_1 = K_1(\lambda_2 - \lambda_1)$. Так как $\lambda_2 \neq \lambda_1$, то это возможно. Тогда получим

$$\frac{dz_3}{dx} = \alpha_1 z_2 + \lambda_2 z_3 + f_3^*(x).$$

Совершенно так же можно уничтожить b_i и в других уравнениях первой группы.

2-й случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2$. Положим

$$y_{n_1+1}^* = z_{n_1+1}, \quad b_{n_1+1} z_1 + \alpha_{n_1-1} y_{n_1}^* = \alpha_{n_1}^* z_{n_1},$$

где $\alpha_{n_1}^*$ — любое число, отличное от 0. Последнее уравнение можно разрешить относительно $y_{n_1}^*$ и $z_{n_1}^*$, так как $\alpha_{n_1} \neq 0$ и $\alpha_{n_1-1} \neq 0$. Тогда (n_1+1)-е и n_1-е уравнения можно переписать так:

$$\frac{dz_{n_1+1}}{dx} = \alpha_{n_1}^* z_{n_1} + \lambda_2 z_{n_1+1} + f_{n_1+1}^*(x),$$
$$\frac{dz_{n_1}}{dx} = \frac{b_{n_1+1}}{\alpha_{n_1}^*}\frac{dz_1}{dx} + \frac{\alpha_{n_1-1}}{\alpha_{n_1}^*}\frac{dy_{n_1}^*}{dx} = \frac{b_{n_1+1}}{\alpha_{n_1}^*}\lambda_1 z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1} z_1}{\alpha_{n_1}^*} +$$
$$+ \frac{\alpha_{n_1-1}\alpha_{n_1-2}}{\alpha_{n_1}^*} y_{n_1-1}^* + \frac{\alpha_{n_1-1}}{\alpha_{n_1}^*}\lambda_2 y_{n_1}^* + f_{n_1}^*(x) =$$
$$= \frac{b_{n_1+1}\lambda_1}{\alpha_{n_1}^*} z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1}}{\alpha_{n_1}^*} z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1}\alpha_{n_1-2}}{\alpha_{n_1}^*} y_{n_1-1}^* +$$
$$+ \lambda_2 \frac{\alpha_{n_1}^* z_{n_1} - b_{n_1+1} z_1}{\alpha_{n_1}^*} + f_{n_1}^*(x) =$$
$$= \frac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1}}{\alpha_{n_1}^*} z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1}\alpha_{n_1-2}}{\alpha_{n_1}^*} y_{n_1-1}^* + \lambda_2 z_{n_1} + f_{n_1}^*(x).$$

Положим $\alpha_{n_1-1}^* z_{n_1-1} = \dfrac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1}}{\alpha_{n_1}^*} z_1 + \dfrac{\alpha_{n_1-1}\alpha_{n_1-2}}{\alpha_{n_1}^*} y_{n_1-1}^*$, где $\alpha_{n_1-1}^*$ — любое число, отличное от 0. Тогда n_1-е уравнение перепишется так:

$$\frac{dz_{n_1}}{dx} = \alpha_{n_1-1}^* z_{n_1-1} + \lambda_2 z_{n_1} + f_{n_1}^*(x).$$

Аналогично мы поступаем и с другими уравнениями первой группы. Таким образом мы избавимся от b_{n_1+1}, b_{n_1}, ...,

b_4, b_3. От b_2 нам не удастся избавиться, если оно не равно 0, но это при $\lambda_1 = \lambda_2$ и не требуется для приведения системы к каноническому виду. Однако, если $b_2 \neq 0$, то подстановкой $z_1 = Kz_1^*$ его можно сделать каким угодно отличным от 0 числом. Через $f_i^*(x)$ мы всюду здесь обозначали некоторые линейные комбинации $\widetilde{f}_i(x)$ и $f_1^*(x)$.

Пусть кроме λ_2 есть еще какое-нибудь λ, например λ_3, равное λ_1. Тогда таким же способом мы сможем освободиться от b_{n_1+3}, b_{n_1+4}, …, $b_{n_1+n_2+1}$. Чтобы не вводить новых обозначений, мы будем считать, что уже в уравнениях (117**)

$$b_3 = b_4 = \ldots = b_{n_1+1} = b_{n_1+3} = b_{n_1+4} = \ldots = b_{n_1+n_2+1} = 0.$$

Но b_2 и b_{n_1+2} могут быть отличными от 0. Если $b_2 = 0$, то можно поменять местами группы уравнений, соответствующие λ_2 и λ_3, и тогда для приведения системы к каноническому виду не надо будет освобождаться от b_{n_1+2}, если оно $\neq 0$. Если же $b_2 \neq 0$ и $b_{n_1+2} \neq 0$, то, предполагая, что $n_1 \geqslant n_2$, чего всегда можно достигнуть переменой мест групп уравнений, соответствующих λ_2 и λ_3, положим $z_{n_1+2} = y_{n_1+2}^* + K_1 y_2^*$. Тогда получим

$$\begin{aligned}\frac{dz_{n_1+2}}{dx} = \frac{dy_{n_1+2}^*}{dx} + K_1\frac{dy_2^*}{dx} &= \\ &= b_{n_1+2}z_1 + \lambda_3 y_{n_1+2}^* + K_1 b_2 z_1 + K_1\lambda_2 y_2^* + f_{n_1+2}^*(x) = \\ &= b_{n_1+2}z_1 + \lambda_3 z_{n_1+2} - \lambda_3 K_1 y_2^* + K_1 b_2 z_1 + K_1\lambda_2 y_2^* + f_{n_1+2}^*(x).\end{aligned}$$

Так как, по предположению, $b_2 \neq 0$, то K_1 можно выбрать так, чтобы $K_1 b_2 = -b_{n_1+2}$. В силу того, что $\lambda_2 = \lambda_3$, мы получим тогда

$$\frac{dz_{n_1+2}}{dx} = \lambda_3 z_{n_1+2} + f_{n_1+2}^*(x).$$

Подставляя же $z_{n_1+2} - K_1 y_2^*$ вместо $y_{n_i+2}^*$ в следующее уравнение, мы получим

$$\frac{dy_{n_1+3}^*}{dx} = -\beta_1 \cdot K_1 y_2^* + \beta_1 z_{n_1+2} + \lambda_3 y_{n_1+3}^* + \widetilde{f}_{n_1+3}(x).$$

В этом уравнении можно освободиться от члена с y_2^* подстановкой $z_{n_1+3} = y_{n_1+3}^* + K_2 y_2^*$. Продолжая подобные преобразования, мы придем, наконец, к канонической системе.

Заметим в заключение, что все линейные преобразования, какими мы пользовались для приведения системы к каноническому виду, были всегда однозначно обратимыми, т. е. новые переменные всегда связывались со старыми такими линейными соотношениями, что из них вполне однозначно выражались как новые переменные через старые, так и старые через новые. Поэтому и преобразование y_i в z_i будет также линейным и обратимым, а потому неособым.

Описанный только что способ приведения системы дифференциальных уравнений (117) к каноническому виду на практике очень громоздок. Поэтому желательно найти методы, которые быстрее давали бы строение канонической системы: числа λ_i и числа уравнений, соответствующих каждому λ_i. Целью ближайших параграфов является указание таких методов.

§ 44. Инварианты линейного преобразования

Пусть линейная система с постоянными коэффициентами

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

получается из системы

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

линейным неособым преобразованием

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} y_j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$ [1]

Тогда имеют место две следующие теоремы.

Теорема 1. *Положим*

$$\|a_{ij}\| = A, \quad \|b_{ij}\| = B, \quad \|k_{ij}\| = K.$$

Через E обозначим единичную матрицу n-го порядка. Тогда

$$\lambda E - B = K(\lambda E - A)K^{-1}. \tag{120}$$

[1] Чтобы не усложнять записи, мы говорим в этом параграфе всюду только об однородных системах, но доказываемые в этом параграфе теоремы справедливы, конечно, и для неоднородных систем.

Доказательство. Подставим в систему B вместо z_i их выражения через y_1, …, y_n. Получим

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\frac{dy_j}{dx} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\sum_{s=1}^{n} k_{js}y_s.$$

Пользуясь системой (A), мы получим отсюда

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\sum_{s=1}^{n} a_{js}y_s = \sum_{j,\,s=1}^{n} k_{ij}a_{js}y_s = \sum_{s,\,j=1}^{n} b_{ij}k_{js}y_s.$$

Так как эти соотношения должны выполняться тождественно по y_s, то должно быть при всех i и s

$$\sum_{j} k_{ij}a_{js} = \sum_{j} b_{ij}k_{js};$$

а это значит, что

$$KA = BK \quad \text{или} \quad B = KAK^{-1}.$$

Это последнее равенство в точности эквивалентно (120) потому, что

$$E = KEK^{-1}.$$

Теорема 2. *Общие наибольшие делители всех миноров l-го порядка ($l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) λ-матриц* [1] *$\lambda E - A$ и $\lambda E - B$ совпадают с точностью до постоянных множителей* [2].

Отсюда непосредственно следует, между прочим, что детерминанты матриц $\lambda E - A$ и $\lambda E - B$ *должны уже просто совпадать.*

Доказательство. Так как переход от (A) к (B) обратим, то нам достаточно показать, что общие наибольшие делители у миноров l-го порядка не убывают [3] при переходе от (A) к (B). Отсюда уже будет следовать, что они также и не возрастают, так как в противном случае при переходе от (B) к (A) они убывали бы.

[1] λ-матрицами называются матрицы, у которых элементы являются многочленами от λ.

[2] Эти наибольшие делители миноров l-го порядка находят, как у многочленов от λ.

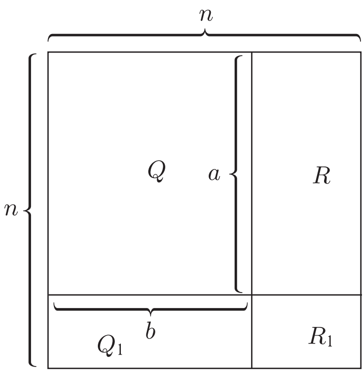
[3] То есть что общий наибольший делитель всех миноров l-го порядка матрицы $\lambda E - A$ является также делителем всех миноров l-го порядка матрицы $\lambda E - B$.

На основании предыдущей теоремы нам достаточно показать, что эти общие делители у матрицы $\lambda E - A$ не убывают при умножении ее слева или справа на какую-нибудь матрицу K. Докажем, например, это для умножения на K слева. Для этого заметим следующее. Все миноры l-го порядка у матрицы $K(\lambda E - A)$ суть суммы произведений на элементы матрицы K некоторых миноров l-го порядка λ-матрицы $\lambda E - A$. Поэтому все общие множители этих последних будут также общими множителями миноров l-го порядка у матрицы $K(\lambda E - A)$, а отсюда уже прямо следует, что общий наибольший делитель всех миноров l-го порядка у матрицы $K(\lambda E - A)$ делится на общий наибольший делитель всех миноров l-го порядка матрицы $\lambda E - A$, что и требовалось доказать.

Задача. Докажите, что каждая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, то есть, если вместо λ подставить эту матрицу в характеристическое уравнение, то получится нулевая матрица (Сильвестр).

§ 45. Элементарные делители

Лемма. Если квадратная матрица P порядка n содержит сплошь заполненный нулями прямоугольник Q, у которого сумма высоты a и ширины b больше n, то детерминант этой матрицы равен 0. [1]



Черт. 26

Доказательство. Мы всегда можем, не меняя абсолютной величины интересующего нас детерминанта, переместить прямоугольник Q в левый верхний угол матрицы P. Схематически тогда строение матрицы P изображается чертежом 26. По теореме Лапласа детерминант матрицы P равен алгебраической сумме произведений детерминантов b-го порядка D, составленных из эле-

[1] На эту лемму мне указал С. Л. Соболев.

ментов, находящихся в прямоугольниках Q_1 и Q, на соответствующие им детерминанты, составленные из элементов, находящихся в прямоугольниках R и R_1. Так как $n - a < b$, то всякий детерминант D будет содержать по крайней мере одну строчку, составленную сплошь из нулей, и потому будет равен 0. Следовательно, и весь детерминант матрицы P будет равен 0.

Применим только что доказанную лемму к нахождению общего наибольшего делителя всех миноров l-го порядка матрицы

$$M = \left\| \begin{array}{cccc} \boxed{M_1} & & & \\ & \boxed{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{M_k} \end{array} \right\|,$$

где

$$M_s = \left\| \begin{array}{ccc:ccc} \lambda - \lambda_s & & & & & \\ \varepsilon_{sl} & \lambda - \lambda_s & & & & \\ & \varepsilon_{s2} & \lambda - \lambda_s & & & \\ \hdashline & & & \lambda - \lambda_s & & \\ & & & \varepsilon_{s,\,n_s-2} & \lambda - \lambda_s & \\ & & & & \varepsilon_{s,\,n_s-1} & \lambda - \lambda_s \end{array} \right\|.$$

Здесь всюду элементы вне квадратов M_1, M_2, …, M_k, а также все не выписанные явно элементы матрицы M_s равны 0, числа ε_{s1}, ε_{s2}, …, ε_{sn_s-1} все отличны от 0; некоторые из чисел λ_1, λ_2, …, λ_k могут быть между собой равными. Матрица M с точностью до обозначений околодиагональных элементов является характеристической матрицей для приведенной к каноническому виду (116) системы дифференциальных уравнений (117).

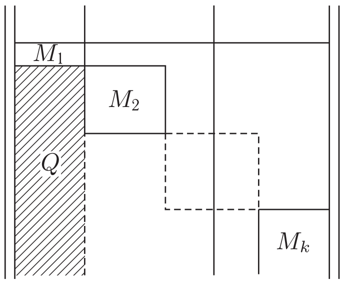
Проделаем сначала все вычисления для $l = n = \sum\limits_{s=1}^{n} n_s$, т. е. найдем сначала детерминант матрицы M. Очевидно, он будет равен произведению детерминантов всех матриц M_s, т. е.

$$|M| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}.$$

Так как по теореме предыдущего параграфа этот детерминант должен совпадать с детерминантом матрицы $\lambda E - \|a_{ij}\|$, то отсюда получается следующее

Следствие. *Все числа* λ_1, λ_2, ..., λ_k *в уравнениях* (116) *должны быть корнями характеристической матрицы системы* (117).

Перейдем теперь к нахождению общего наибольшего делителя всех миноров $(n-1)$-го порядка матрицы M. Для этого нам будет удобнее прежде всего явно выписать, какие значения принимают λ_1, λ_2, ..., λ_k. Пусть это будут различные между собой числа



Черт. 27

$$\lambda^{(1)},\ \lambda^{(2)},\ \ldots,\ \lambda^{(m)} \quad (m \leqslant k).$$

Заметим далее следующее: общий делитель всех миноров l-го порядка должен также быть делителем детерминанта всей матрицы M. Поэтому общий наибольший делитель всех миноров l-го порядка матрицы M, который мы будем обозначать через $D_l(\lambda)$, должен иметь с точностью до постоянного множителя следующий вид:

$$D_l(\lambda) = (\lambda - \lambda^{(1)})^{p_1}(\lambda - \lambda^{(2)})^{p_2}\ldots(\lambda - \lambda^{(m)})^{p_m},$$

где p_i — некоторые неотрицательные целые числа. Выбросим теперь из матрицы M какую-нибудь строчку и какой-нибудь столбец, которые пересекаются вне квадратов M_s, например так, как это схематически показано на черт. 27. Тогда останется матрица $(n-1)$-го порядка M', имеющая заполненный одними нулями прямоугольник Q, у которого сумма длины и высоты равна n (этот прямоугольник на нашем чертеже заштрихован). Поэтому согласно предыдущей лемме детерминант матрицы M' равен 0. Следовательно, при нахождении общего наибольшего делителя $D_{n-1}(\lambda)$ всех миноров $(n-1)$-го порядка у матрицы M нам достаточно рассматривать определители только таких матриц M', которые получились из M вычеркиванием строк и столбцов, пересекающихся внутри одного из квадратов M_s, например M_{s_1}. Очевидно, для получения детерминанта такой матрицы M' надо детерминант матрицы M'_{s_1}, полученной из M_{s_1} вычеркиванием одной строчки и одного столбца, помножить на детерминанты всех остальных матриц M_s. При нахождении общего наибольшего делителя всех миноров $(n-1)$-го порядка $|M'|$ для нас, очевидно, наибольший интерес будут представлять миноры, содержащие возможно низшие степени

$$(\lambda - \lambda^{(1)}),\ \ldots,\ (\lambda - \lambda^{(m)}).$$

Чтобы получить возможно низшую степень $\lambda - \lambda_{s_1}$ у $|M'_{s_1}|$, нам, очевидно, надо будет вычеркнуть у M_{s_1} первую строчку и последний столбец. После этого полученный определитель будет равен произведению

$$\varepsilon_{s_1 1}\varepsilon_{s_1 2}\ldots\varepsilon_{s_1 n_s - 1},$$

которое отлично от 0 потому, что все $\varepsilon_{s_1 i}$ отличны от 0. Тогда $(\lambda - \lambda_{s_1})$ будет входить в минор $|M'|$ в степени, на n_{s_1} единиц меньшей, чем в $|M|$. Поэтому наименьшая степень $(\lambda - \lambda^{(i)})$, которая будет входить во все миноры $|M'|$, равна

$$(\lambda - \lambda^{(i)})^{m_i - m_i^{(1)}},$$

где через m_i обозначена сумма порядков всех матриц M_s, у которых на диагонали стоит $\lambda - \lambda^{(i)}$, а через $m_i^{(1)}$ обозначен наибольший из этих порядков. Поэтому

$$D_{n-1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda - \lambda^{(i)})^{m_i - m_i^{(1)}}.$$

Совершенно так же мы найдем, что

$$D_{n-2}(\lambda) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda - \lambda^{(i)})^{m_i - m_i^{(1)} - m_i^{(2)}},$$

где $m_i^{(2)}$ есть следующий по величине за $m_i^{(1)}$ порядок матриц M_s, у которых на диагонали стоит $\lambda - \lambda^{(i)}$, и т. д. Степени

$$(\lambda - \lambda^{(i)})^{m_i^{(j)}}$$

называются *элементарными делителями λ-матрицы M*.

Так как общие наибольшие делители у всех миноров матрицы M, соответствующей каноническому виду системы дифференциальных уравнений, и у матрицы $\lambda E - \|a_{ij}\|$, соответствующей системе (117), по 2-й теореме § 44 с точностью до постоянного множителя одинаковы, то и элементарные делители у этих матриц также одинаковы; при этом, если какой-нибудь элементарный делитель у матрицы $\lambda E - \|a_{ij}\|$ встречается несколько раз, то столько же раз он встречается и у матрицы M. Поэтому знание элементарных делителей матрицы $\lambda E - \|a_{ij}\|$ и кратности каждого из них дает возможность указать, к какому каноническому виду она может быть приведена. При этом остаются только неопределенными околодиагональные члены у квадратов M_s. Как мы видели в § 43, их можно выбирать как угодно, лишь бы только они были отличными от 0.

§ 46. Отыскание фундаментальной системы решений для однородной системы уравнений

Лемма. Пусть мы имеем m линейно независимых строк, содержащих функции

$$\begin{array}{l} z_1^{(1)},\ z_2^{(1)},\ \ldots,\ z_n^{(1)}, \\ z_1^{(2)},\ z_2^{(2)},\ \ldots,\ z_n^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1^{(m)},\ z_2^{(m)},\ \ldots,\ z_n^{(m)}. \end{array}$$

Тогда функции

$$y_i^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} z_j^{(s)}, \quad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{121}$$

также образуют m линейно независимых между собой строк, если

$$|k_{ij}| \neq 0.$$

Доказательство. Допустим противное, именно, что существуют такие постоянные C_1, C_2, ..., C_m, среди которых есть отличные от 0, что

$$\sum_{s=1}^{m} C_s y_i^{(s)}(x) \equiv 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Помножим уравнение (121) на C_s и просуммируем по s от 1 до m. Получим

$$\sum_{s=1}^{m} C_s y_i^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \sum_{s=1}^{m} C_s z_j^{(s)}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Отсюда видно, что если

$$\sum_s C_s y_i^{(s)} \equiv 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то

$$\sum_s C_s z_j^{(s)} \equiv 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В предыдущем параграфе мы видели, что элементарному делителю $(\lambda - \lambda_s)^{p_s}$ матрицы $\lambda E - \|a_{ij}\|$ соответствует в канонической системе следующая группа однородных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_{k+1}}{dx} &= \lambda_s z_{k+1},\\
\frac{dz_{k+2}}{dx} &= \varepsilon_1 z_{k+1} + \lambda_s z_{k+2},\\
\frac{dz_{k+3}}{dx} &= \varepsilon_2 z_{k+2} + \lambda_s z_{k+3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_{k+p_s-1}}{dx} &= \varepsilon_{p_s-2} z_{k+p_s-2} + \lambda_s z_{k+p_s-1},\\
\frac{dz_{k+p_s}}{dx} &= \varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1} + \lambda_s z_{k+p_s},
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_{p_s-1}$ — некоторые отличные от нуля числа. Сделаем здесь замену неизвестных, положив

$$z_{k+l} = z_{k+l}^* e^{\lambda_s x}.$$

Если λ_s комплексно и равно $\lambda_s^* + i\lambda_s^{**}$, где λ_s^* и λ_s^{**} действительны, то мы будем понимать под $e^{\lambda_s x}$ выражение

$$e^{\lambda_s^* x}(\cos \lambda_s^{**} x + i \sin \lambda_s^{**} x)$$

(формула Эйлера). Производная по x от этого выражения равна

$$\begin{aligned}
\lambda_s^* e^{\lambda_s^* x}(\cos \lambda_s^{**} x + i \sin \lambda_s^{**} x) &= \\
= e^{\lambda_s^* x}(-\lambda_s^{**} \sin \lambda_s^{**} x + i\lambda_s^{**} \cos \lambda_s^{**}) &= \\
= (\lambda_s^* + i\lambda_s^{**}) e^{\lambda_s^* x}(\cos \lambda_s^{**} x + i \sin \lambda_s^{**} x) &= \lambda_s e^{\lambda_s x}.
\end{aligned}$$

Поэтому, после указанной подстановки, получим

$$\begin{gathered}
\frac{dz_{k+1}^*}{dx} = 0,\\
\frac{dz_{k+2}^*}{dx} = \varepsilon_1 z_{k+1}^*,\\
\frac{dz_{k+3}^*}{dx} = \varepsilon_2 z_{k+2}^*,\\
\ldots\\
\frac{dz_{k+p_s-1}^*}{dx} = \varepsilon_{p_s-2} z_{k+p_s-2}^*,\\
\frac{dz_{k+p_s}^*}{dx} = \varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1}^*.
\end{gathered}$$

Из первого из этих уравнений находим

$$z_{k+1}^* = C_1 = C_0^{(1)}.$$

Подставляя это во второе и интегрируя его, находим:

$$z_{k+2}^* = C_1\varepsilon_1 x + C_2 = C_1^{(2)}x + C_0^{(2)}.$$

Подставляя это в третье уравнение и интегрируя его, находим:

$$z_{k+3}^* = \frac{C_1\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}x^2 + C_2\varepsilon_2 x + C_3 = C_2^{(3)}x^2 + C_1^{(3)}x + C_0^{(3)},$$

и т. д. Наконец,

$$z_{k+p_s}^* = C_{p-1}^{(p_s)}x^{p_s-1} + C_{p_s-2}^{(p_s)}x^{p_s-2} + \ldots + C_1^{(p_s)}x + C_0^{(p_s)}.$$

Через C с различными индексами мы здесь всюду обозначали некоторые постоянные, действительные или комплексные.

Возвращаясь отсюда к z_{k+1}, z_{k+2}, …, z_{k+p_s}, мы получим

$$\left.\begin{aligned}
z_{k+1} &= e^{\lambda_s x}C_0^{(1)},\\
z_{k+2} &= e^{\lambda_s x}(C_1^{(2)}x + C_0^{(2)}),\\
z_{k+3} &= e^{\lambda_s x}(C_2^{(3)}x^2 + C_1^{(3)}x + C_0^{(3)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{k+p_s} &= e^{\lambda_s x}(C_{p_s-1}^{(p_s)}x^{p_s-1} + C_{p_s-2}^{(p_s)}x^{p_s-2} + \ldots\\
&\qquad \ldots + C_1^{(p_s)}x + C_0^{(p_s)}.
\end{aligned}\right\} \tag{122}$$

Эти равенства дают общее решение рассматриваемой группы дифференциальных уравнений. Применяя теорему 4 из § 34 к этой группе, мы найдем, что у нее есть p_s линейно независимых между собой решений вида (122). Мы удовлетворим всей однородной канонической системе, если будем считать все z_i, кроме (122), тождественно равными 0. Так как y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выражаются линейно через z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то отсюда на основании доказанной в этом параграфе леммы получается, что каждому элементарному делителю $(\lambda - \lambda_s)^{p_s}$ матрицы $\lambda E - \|a_{ij}\|$ соответствует p_s линейно независимых между собой решений вида

$$y_i = e^{\lambda_s x} \sum_{j=1}^{p_s - 1} C_j^{*(i)} x^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Легко видеть, что в первом из этих решений можно считать равными 0 все $C_j^{*(i)}$ при $j > 0$, в то время как $\sum_{i=1}^{n} |C_0^{*(i)}| > 0$, оно соответствует $z_{k+1} \equiv \ldots \equiv z_{k+p_s-1} \equiv 0$; во втором — все $C_j^{*(1)} = 0$ при $j > 1$, в то время как $\sum_{i=1}^{n} |C_1^{*(i)}| > 0$, оно соответствует $z_{k+1} \equiv \ldots \equiv z_{k+p_s-2} \equiv 0$, и т. д.

Если матрица $\lambda E - \|a_{ij}\|$ имеет несколько элементарных делителей, которые суть некоторые степени $(\lambda - \lambda^{(1)})$, например,

$$(\lambda - \lambda^{(1)})^{m^{(1)}},\ (\lambda - \lambda^{(1)})^{m^{(2)}},\ \ldots,\ (\lambda - \lambda^{(1)})^{m^{(k)}},$$

то система

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{123}$$

имеет $m^{(1)} + m^{(2)} + \ldots + m^{(k)}$ линейно независимых между собой решений вида

$$y_i = e^{\lambda^{(1)} x} \sum_{j=0}^{M-1} C_j^{(i)} x^j, \tag{124}$$

где M есть наибольшее из чисел $m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(k)}$. Чтобы найти эти решения, надо только определить коэффициенты $C_j^{(i)}$. Это можно сделать методом неопределенных коэффициентов, подставляя в (123) вместо y_i выражения вида (124), сокращая получившееся уравнение на $e^{\lambda^{(1)} x}$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x. Эти решения будут линейно независимыми с теми решениями, которые таким же образом будут составлены для элементарных делителей, представляемых степенями других $(\lambda - \lambda^{(p)})$, потому что этим делителям будут соответствовать другие группы уравнений в канонической системе.

Замечание. Если все коэффициенты рассматриваемой однородной системы действительны, то действительные и мнимые части каждого комплексного решения этой системы в отдельности являются решением однородной системы. Мы называем действительной (соответственно мнимой) частью решения $y_j^*(x) + iy_i^{**}(x)$ функции $y_j^*(x)$, соответственно $y_j^{**}(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Если мы имеем n линейно независимых строк

$$y_j^{(k)}(x) = y_j^{*(k)}(x) + iy_j^{**(k)}(x); \quad k, j = 1, 2, \ldots, n,$$

то среди $2n$ строк

$$\begin{gathered} y_1^{*(k)}(x),\ y_2^{*(k)}(x),\ \ldots,\ y_n^{*(k)}(x), \\ y_1^{**(k)}(x),\ y_2^{**(k)}(x),\ \ldots,\ y_n^{**(k)}(x), \end{gathered}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, обязательно найдется n линейно независимых между собою (почему?). Поэтому для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными действительными коэффициентами всегда можно составить фундаментальную систему из действительных решений.

§ 47. Применение к однородному дифференциальному уравнению n-го порядка

Характеристической матрицей для системы (103) с постоянными коэффициентами, которая эквивалентна одному уравнению (102), будет матрица

$$\left\| \begin{array}{cccc:ccc} \lambda, & -1, & & & & & \\ & \lambda, & -1, & & & & \\ & & \lambda, & -1, & & & \\ \hdashline & & & & & \lambda, & -1 \\ -a_0, & -a_1, & -a_2, & -a_3, \ldots & \ldots, & -a_{n-2}, & \lambda - a_{n-1} \end{array} \right\|. \qquad (125)$$

Теперь мы будем считать все a_i постоянными. Детерминант этой матрицы, как легко подсчитать, равен

$$\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1}a_{n-2}\lambda^{n-2} - \ldots - a_1\lambda - a_0 \equiv M(\lambda).$$

Вычеркивая же первый столбец и последнюю строчку, мы получим матрицу, у которой определитель равен $+1$ или -1. Следовательно, *если многочлен $M(\lambda)$ имеет корень λ_s кратности p_s, то матрица* (125) *имеет элементарный делитель $(\lambda - \lambda_s)^{p_s}$. Никаких других элементарных делителей, которые представлялись бы некоторой степенью $(\lambda - \lambda_s)$, у этой матрицы не будет.* Поэтому корню λ_s кратности p_s будут соответствовать p_s линейно независимых между собой [и с решениями, соответствующими другим корням $M(\lambda)$ [1])] решений вида

$$(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_{p_s-1}x^{p_s-1})e^{\lambda_s x}. \tag{126}$$

Очевидно, такими решениями будут

$$e^{\lambda_s x},\ xe^{\lambda_s x},\ x^2e^{\lambda_s x},\ \ldots,\ x^{p_s-1}e^{\lambda_s x}.$$

Действительно, если бы между этими функциями существовала линейная зависимость, то выражение вида (126), у которого одно из $C_i \neq 0$, тождественно равнялось бы 0. Но так как $e^{\lambda_s x}$ никогда не обращается в 0 и многочлен, у которого не все коэффициенты равны 0, не может тождественно равняться 0, то это невозможно.

Если все a_i действительны, то каждому комплексному элементарному делителю $(\lambda - \lambda_s)^{p_s}$ матрицы (125) соответствует сопряженный с ним элементарный делитель $(\lambda - \overline{\lambda}_s)^{p_s}$ той же матрицы. Тогда каждому решению

$$y_1(x) = x^k e^{\lambda_s x} = x^k e^{\alpha_s x}(\cos\beta_s x + i\sin\beta_s x)$$

уравнения (102) с постоянными коэффициентами соответствует решение

$$\overline{y}_1(x) = x^k e^{\lambda_s x} = x^k e^{\alpha_s x}(\cos\beta_s x - i\sin\beta_s x)$$

[1]) Потому что в канонической форме системы (103) им будут соответствовать другие группы уравнений.

того же уравнения, $\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$. Поэтому тому же уравнению будут удовлетворять действительные функции

$$\frac{y_1(x) + \overline{y}_1(x)}{2} = x^k e^{\alpha_s x} \cos \beta_s x,$$
$$\frac{y_1(x) - \overline{y}_1(x)}{2i} = x^k e^{\alpha_s x} \sin \beta_s x.$$

Таким образом, мы получим n действительных линейно независимых между собой (почему?) решений уравнения (102) с постоянными коэффициентами.

Задача. Показать, что указанное выше (напечатано курсивом) строение элементарных делителей в случае системы уравнений первого порядка является также достаточным условием для того, чтобы эта система после совершения неособого преобразования сводилась к системе (103) с постоянными коэффициентами, эквивалентной одному уравнению n-го порядка. Таким образом, мы имеем необходимое и достаточное условие для того, чтобы система n линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами была бы эквивалентна (в только что указанном смысле) одному линейному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Задача. Найдите общее решение уравнения

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1} a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + x a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0,$$

где все a постоянны (уравнение Эйлера). *Указание.* От независимого переменного x перейти к независимому переменному t, положив $x = e^t$.

§ 48. Разыскание частных решений неоднородных систем

Мы сейчас будем разбирать только тот случай, когда в системе (117)

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{m} C_i^{(k)} e^{\alpha_k x} x^{\beta_k},$$

α_k и $C_i^{(k)}$ здесь могут быть как действительными, так и комплексными, а β_k — целые неотрицательные числа. Очевидно, достаточно разобрать только случай, когда $m = 1$, потому что в общем случае частное решение будет представляться суммой решений, составленных для этого частного случая. Итак, положим, что

$$f_i(x) = C_i e^{\alpha x} x^{\beta}.$$

Выпишем группу уравнений системы (116), соответствующих одному какому-нибудь квадрату M_s характеристической матрицы:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_{k+1}}{dx} &= \lambda_s z_{k+1} + C^*_{k+1} x^{\beta} e^{\alpha x},\\
\frac{dz_{k+2}}{dx} &= \varepsilon_1 z_{k+1} + \lambda_s z_{k+2} + C^*_{k+2} x^{\beta} e^{\alpha x},\\
\frac{dz_{k+3}}{dx} &= \varepsilon_2 z_{k+2} + \lambda_s z_{k+3} + C^*_{k+3} x^{\beta} e^{\alpha x},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz_{k+p_s}}{dx} &= \varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1} + \lambda_s z_{k+p_s} + C^*_{k+p_s} x^{\beta} e^{\alpha x}.
\end{aligned}$$

Здесь C_i^* — некоторые новые постоянные. Введем новые неизвестные функции z_i^*, положив

$$z_i = z_i^* e^{\lambda_s x}, \quad i = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+p_s.$$

Тогда получим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz^*_{k+1}}{dx} &= C^*_{k+1} x^{\beta} e^{(\alpha-\lambda_s)x},\\
\frac{dz^*_{k+2}}{dx} &= \varepsilon_1 z^*_{k+1} + C^*_{k+2} x^{\beta} e^{(\alpha-\lambda_s)x},\\
\frac{dz^*_{k+3}}{dx} &= \varepsilon_2 z^*_{k+2} + C^*_{k+3} x^{\beta} e^{(\alpha-\lambda_s)x},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz^*_{k+p_s}}{dx} &= \varepsilon_{p_s-1} z^*_{k+p_s-1} + C^*_{k+p_s} x^{\beta} e^{(\alpha-\lambda_s)x}.
\end{aligned}\right\} \tag{127}$$

При интеграции этой системы нам придется различать два случая, смотря по тому, равны ли α и λ_s или нет.

1-й случай, когда $\lambda_s \neq \alpha$.

Интегрируя уравнения (127) последовательно, начиная с первого, мы получим, что

$$z_i^* = M_i^{(\beta)}(x) e^{(\alpha-\lambda_s)x}, \quad i = k+1,\ \ldots,\ k+p_s,$$

где $M_i^{(\beta)}(x)$ суть некоторые многочлены по x не выше β-й степени [1]. Отсюда

$$z_i = M_i^{(\beta)}(x)e^{\alpha x}, \quad i = k+1, \ldots, k+p_s.$$

Если ни одно из λ_s не равно α, то все z_i $(i = 1, \ldots, n)$ будут иметь вид

$$z_i = M_i^{(\beta)}(x)e^{\alpha x},$$

а потому и частное решение y_i будет иметь вид

$$y_i = M_i^{*(\beta)}(x)e^{\alpha x}. \tag{128}$$

Коэффициенты многочленов $M_i^{*(\beta)}(x)$ можно найти сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x в уравнениях (117) после подстановки в них вместо y_i выражений (128) и сокращения полученных уравнений на $e^{\alpha x}$.

2-й случай, когда $\lambda_s = \alpha$.

Тогда система (127) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{dz_{k+1}^*}{dx} &= C_{k+1}^* x^\beta,\\
\frac{dz_{k+2}^*}{dx} &= \varepsilon_1 z_{k+1}^* + C_{k+2}^* x^\beta,\\
\frac{dz_{k+3}^*}{dx} &= \varepsilon_2 z_{k+2}^* + C_{k+3}^* x^\beta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_{k+p_s}^*}{dx} &= \varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1}^* + C_{k+p_s}^* x^\beta.
\end{aligned}$$

Интегрируя последовательно эти уравнения, мы найдем частное решение вида

$$z_{k+i}^*(x) = M_{k+i}^{(i)}(x)x^\beta, \quad i = 1, 2, \ldots, p_s,$$

где $M_{k+i}^{(i)}$ есть многочлен не выше i-й степени по x. Отсюда

$$z_{k+i}(x) = x^\beta M_{k+i}^{(i)}(x)e^{\alpha x}, \quad i = 1, 2, \ldots, p_s.$$

---

[1] В теории аналитических функций показывается, что те формулы, которые получаются при интегрировании $x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x}$ в случае действительной разности $\alpha - \lambda_s$, справедливы также и в случае комплексных ее значений. Это можно проверить и непосредственно.

Следовательно, система (117) будет иметь частное решение

$$y_i(x) = M_i^{*(\beta+p)}(x)e^{\alpha x}, \text{ [1]} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $M_i^{*(\beta+p)}(x)$ суть многочлены не выше $(\beta+p)$-й степени по x, а p есть наивысший показатель степени у элементарных делителей $\lambda E - \|a_{ij}\|$, которые имеют вид $(\lambda-\alpha)^\delta$.

Следствие для одного уравнения n-го порядка. Если для многочлена

$$\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \ldots - a_1\lambda - a_0$$

α есть корень кратности p ($p \geqslant 0$), то уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_1 y' + a_0 y + Cx^\beta e^{\alpha x}$$

имеет частное решение вида

$$y(x) = M^{(p+\beta)}(x)c^{\alpha x},$$

где $M^{(p+\beta)}(x)$ есть многочлен не выше $(p+\beta)$-й степени. Вычитая отсюда решение вида (126) однородного уравнения, мы получим частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y(x) = M^{(\beta)}(x)x^p e^{\alpha x}.$$

§ 49. Приведение к каноническому виду уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}$

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy} \tag{129$'$}$$

эквивалентно системе

$$\frac{dx}{dt} = cx + dy, \quad \frac{dy}{dt} = ax + by, \tag{129}$$

[1] Было бы неправильным думать, что у системы (117) обязательно имеется частное решение вида $y_i = x^\beta M_i^{*(p)}(x)e^{\alpha x}$, так как, кроме рассматриваемой группы уравнений, для которых соответствующее $\lambda_s = \alpha$, могут быть другие группы, для которых $\lambda_s \neq \alpha$.

где t — некоторое вспомогательное переменное. Коэффициенты a, b, c и d мы будем считать теперь действительными. В зависимости от элементарных делителей λ-матрицы

$$\begin{Vmatrix} \lambda - c & -d \\ -a & \lambda - b \end{Vmatrix} \tag{130}$$

при приведении системы (129) к каноническому виду могут быть следующие случаи.

1-й случай. *Элементарные делители первой степени действительны*. Тогда из изложенного выше доказательства теоремы о приведении к каноническому виду следует, что существует такое линейное неособое преобразование с действительными коэффициентами:

$$x^* = k_{11}x + k_{12}y, \quad y^* = k_{21}x + k_{22}y, \tag{131}$$

которое приводит систему (129) к виду

$$\frac{dx^*}{dt} = \lambda_1 x^*, \quad \frac{dy^*}{dt} = \lambda_2 y^*. \tag{132}$$

Если

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0, \tag{133}$$

то ни одно из чисел λ_1 и λ_2 не равно 0, и уравнение (129′) после совершения преобразования (131) приводится к виду

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{y^*}{x^*}.$$

2-й случай. *Элементарные делители* $(\lambda - \lambda_1)$ *и* $(\lambda - \lambda_2)$ *матрицы* (130) *комплексны*. Если считать a, b, c и d действительными, как это мы теперь делаем, то λ_1 и λ_2 будут тогда взаимно сопряженными. Тогда преобразование (131) также приводит систему (129) к виду (132). Коэффициенты k_{21} и k_{22} можно считать при этом сопряженными соответственно с k_{11} и k_{12}. Действительно, так как $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, то $\overline{x}^*$ удовлетворяет тогда уравнению

$$\frac{dy^*}{dt} = \lambda_2 y^*,$$

и мы можем принять

$$y^* = \overline{x}^*.$$

Пусть

$$k_{11} = k_1^* + ik_1^{**} \quad \text{и} \quad k_{12} = k_2^* + ik_2^{**}.$$

Положим

$$\xi = k_1^* x + k_2^* y, \quad \eta = k_1^{**} x + k_2^{**} y, \quad \lambda_1 = \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0).$$

Тогда система (132) после разделения действительной и мнимой части дает следующее:

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha\xi - \beta\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \beta\xi + \alpha\eta.$$

Отсюда

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\beta\xi + \alpha\eta}{\alpha\xi - \beta\eta}.$$

Заметим, что линейное преобразование, переводящее x и y в ξ и η, неособое, так как иначе было бы

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

3-й случай. *Матрица* (130) *имеет один элементарный делитель* $(\alpha - \alpha_1)^2$. Тогда существует (ср. § 43) такое неособое линейное преобразование (131) с действительными коэффициентами, которое переводит систему (129) в систему

$$\frac{dx^*}{dt} = \lambda_1 x^*, \quad \frac{dy^*}{dt} = \varepsilon x^* + \lambda_1 y^*. \tag{134}$$

Если детерминант (133) отличен от 0, то $\lambda_1 \neq 0$. Так как a, b, c и d действительны, то λ_1 также действительно; ε есть какое-нибудь отличное от 0 число; если его считать действительным, то коэффициенты k_{ij} можно считать действительными, как это следует из рассмотрений § 43. Положим, например, $\varepsilon = \lambda_1$. Тогда из уравнений (134) получаем

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{\lambda_1 x^* + \lambda_1 y^*}{\lambda_1 x^*} = \frac{x^* + y^*}{x^*}.$$

§ 50. Устойчивость решений

Пусть начальные данные задаются при $x = x_0$. Мы будем называть решение

$$y_i = y_i^0(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

системы

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{135}$$

устойчивым по Ляпунову при $x \to +\infty$, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\eta(\varepsilon)$, что при $x \geqslant x_0$ для любого решения $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, этой системы и всех i будет

$$\left|y_i(x) - y_i^{(0)}(x)\right| < \varepsilon,$$

если при всех i было

$$\left|y_i(x_0) - y_i^0(x)\right| < \eta(\varepsilon).$$

При этом мы считаем, естественно, что функции $y_i^0(x)$ определены для всех $x \geqslant x_0$, а система (135) определена в некоторой окрестности кривой $y_i = y_i^0(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ вида $\left|y_i - y_i^0(x)\right| < M$, $x \geqslant x_0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Очевидно, мы всегда можем свести исследование к случаю

$$y_i^0(x) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

взяв вместо $y_i(x)$ за новые неизвестные функции

$$y_i(x) - y_i^0(x).$$

Функции f_i, все y_i и x мы считаем действительными.

Фундаментальные исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений принадлежат знаменитому русскому математику А. М. Ляпунову [1]).

Теорема. *Решение*

$$y_i(x) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

системы (135) *будет устойчивым при* $x \to +\infty$, *если*

$$f_i(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + F_i(x, y_1, \ldots, y_n),$$

где a_{ij} *— постоянны, действительные части всех корней* λ *уравнения*

$$\left|\|a_{ij}\| - \lambda E\right| = 0 \tag{136}$$

отрицательны и при всех $x > x_0$ *и* $|y_i|$ *достаточно малых*

$$|F_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant M\left[|y_1|^{1+\alpha} + \ldots + |y_n|^{1+\alpha}\right], \tag{137}$$

где α *и* M *— положительные постоянные. Кроме того,* $y_i(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *если все* $|y_i(x_0)|$ *достаточно малы.*

В частности, условия нашей теоремы удовлетворяются, если функции f_i, стоящие в правых частях уравнения (135),

[1]) А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.

не зависят от x и в некоторой окрестности начала координат имеют непрерывные производные до 2-го порядка включительно, а действительные части всех корней уравнения (136) отрицательны. В самом деле, тогда к этим функциям можно применить формулу Тейлора, и мы получим:

$$f_i(x,\, y_1,\, \ldots,\, y_n) = \sum a_{ij} y_j + O\left(\sum y_j^2\right).\ ^{1)}$$

Доказательство теоремы. Применим к системе (135) такое неособое линейное преобразование с постоянными коэффициентами, которое приводит к каноническому виду систему

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Рассмотрим одну из групп полученных уравнений, соответствующую одному какому-нибудь элементарному делителю, например, $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}$ матрицы $\|a_{ij}\| - \lambda E$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + F_1^*(x,\, z_1,\, \ldots,\, z_n), \\ \frac{dz_2}{dx} &= \beta_1 z_1 + \lambda_1 z_2 + F_2^*(x,\, z_1,\, \ldots,\, z_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz_{n_1}}{dx} &= \beta_1 z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} + F_{n_1}^*(x,\, z_1,\, \ldots,\, z_n). \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Здесь λ_1 равно одному из корней уравнений (136), а β_1 можно выбрать произвольно, лишь бы оно не равнялось 0.

Если функции F_i удовлетворяют условию (137), то функции F_i^* удовлетворяют неравенству

$$|F_i^*(x,\, z_1,\, \ldots,\, z_n)| \leqslant M^* \left[|z_1|^{1+\alpha} + \ldots + |z_n|^{1+\alpha}\right], \tag{139}$$

где M^* — некоторая новая постоянная. Действительно, $F_i^*(x,\, z)$ суть линейные комбинации $F_i(x,\, y)$ с постоянными коэффициентами. Поэтому

$$|F_i^*(x,\, z)| \leqslant M_1 \sum_j |F_j(x,\, y)| \leqslant M_2 \left[|y_1|^{1+\alpha} + \ldots + |y_n|^{1+\alpha}\right];$$

y_i также суть линейные комбинации z_i с постоянными коэффициентами. Поэтому при всяком i

$$|y_i|^{1+\alpha} \leqslant M_3 \left(\max |z_j|\right)^{1+\alpha} \leqslant M_3 \left[|z_1|^{1+\alpha} + \ldots + |z_n|^{1+\alpha}\right].$$

Здесь M_1, M_2, M_3 — постоянные, а $\max |z_j|$ означает наибольшее из чисел $|z_1|$, …, $|z_n|$.

[1]) См. примечание [1]) на стр. 81.

Так как a_{ij} действительны, то каждому элементарному делителю $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}$ матрицы $\|a_{ij}\|-\lambda E$ соответствует элементарный делитель $(\lambda-\overline{\lambda}_1)^{n_1}$. Очевидно, мы можем считать, что в канонической форме элементарному делителю $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}$ соответствуют уравнения

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\overline{z}_1}{dx} &= \overline{\lambda}_1\overline{z}_1 + F_1^{**}(x,\, z_1,\, \ldots,\, z_n), \\ \frac{d\overline{z}_2}{dx} &= \overline{\beta}_1\overline{z}_1 + \overline{\lambda}_1\overline{z}_2 + F_2^{**}(x,\, z_1,\, \ldots,\, z_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\overline{z}_{n_1}}{dx} &= \overline{\beta}_1\overline{z}_{n_1-1} + \overline{\lambda}_1\overline{z}_{n_1} + F_{n_1}^{**}(x,\, z_1,\, \ldots,\, z_n). \end{aligned}\right. \tag{140}$$

Если λ_1 действительно, очевидно, эти уравнения совпадают с уравнениями (138).

Из уравнений (138) и (140) находим при $i>1$:

$$\begin{aligned} \frac{d|z_i|^2}{dx} = \overline{z}_i\frac{dz_i}{dx} + z_i\frac{d\overline{z}_i}{dx} = \lambda_1 z_i\overline{z}_i + \overline{\lambda}_1\overline{z}_i z_i + \beta_1 z_{i-1}\overline{z}_i + \\ + \overline{\beta}_1\overline{z}_{i-1}z_i + \overline{z}_i F_i^* + z_i F_i^{**}. \end{aligned} \tag{141}$$

При $i=1$ получается то же самое, только отсутствуют члены с β и $\overline{\beta}$.

Из (141) находим, полагая

$$\mathrm{Reel}\,\lambda_1 = a$$

и пользуясь оценками (139),

$$\begin{aligned} &\frac{d|z_i|^2}{dx} \leqslant 2a_1|z_i|^2 + |\beta_1|\left[|z_i|^2 + |z_{i-1}|^2\right] + \\ &+ M_1^*\left[|z_1|^{1+\alpha} + \ldots + |z_n|^{1+\alpha}\right]\cdot\max|z_j|, \quad i=2,\, \ldots,\, n, \end{aligned} \tag{141$'$}$$

$$\frac{d|z_1|^2}{dx} \leqslant 2a_1|z_1|^2 + M_1^*\left[|z_1|^{1+\alpha} + \ldots + |z_n|^{1+\alpha}\right]\cdot\max|z_j|. \tag{141$''$}$$

Но

$$\begin{aligned} &M_1^*\left[|z_1|^{1+\alpha} + \ldots + |z_n|^{1+\alpha}\right]\cdot\max|z_j| \leqslant \\ &\leqslant M_1^*\cdot n\left[\max|z_j|^2\right]^{1+\alpha/2} \leqslant M_1^*\cdot n\left[|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2\right]^{1+\alpha/2}. \end{aligned}$$

Поэтому, суммируя неравенства (141$''$) и (141$'$) для всех i от 1 до n и обозначая через $-a$ наибольшую из действительных частей всех λ_i, которая, по нашему предположению, отрицательна, получим

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 \leqslant -2a\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 + 2B\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 + \\ + M_1^* \cdot n^2\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)^{1+\alpha/2}, \quad (142)$$

где B есть наибольшее из чисел $|\beta_i|$. Так как числа β_i мы можем выбирать произвольно, лишь бы они отличались от 0, то мы можем их выбрать так, чтобы было

$$B < \frac{a}{4}.$$

Будем, кроме того, предполагать, что все рассматриваемые y_i и, следовательно, z_i настолько малы по абсолютной величине, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)^{\alpha/2} < \frac{a}{2M_1^* n^2}. \quad (143)$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 \leqslant -a\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2.$$

Полагая

$$\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 = e^{-a(x-x_0)}z,$$

мы получим отсюда

$$\frac{dz}{dx} \leqslant 0.$$

Отсюда видно, что z, а потому и $\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|^2$ убывают при возрастании x. Следовательно, если при $x = x_0$ имело место неравенство (143), то оно будет иметь место и при всех $x > x_0$; поэтому всегда z будет убывать, а $\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|^2$ будет, монотонно убывая, стремиться к 0.

В силу того, что преобразование y_i в z_i было неособым, отсюда сразу следует

$$y_i(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

если только все $|y_i(x_0)|$ были достаточно малыми. Далее, если все $|y_i(x_0)|$ были достаточно малы, то и все $|z_i(x_0)|$, а потому и $\sum\limits_{i=1}^{n} \left|z_i^2(x_0)\right|$ будут сколь угодно малы. Поэтому согласно доказанному выше будет

$$\sum_{i=1}^{n} \left|z_i^2(x)\right| < \sum_{i=1}^{n} \left|z_i^2(x_0)\right| \quad (x > x_0).$$

Отсюда опять в силу неособенности преобразования y_i в z_i и следует устойчивость решения $y_i(x) \equiv 0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Замечание. Если для системы (135) имеет место единственность решения, проходящего через любую точку кривой $y_i = y_i^0(x)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, $x \geqslant x_0$, то свойство устойчивости не зависит от конкретного выбора x_0. Иначе говоря, если задавать начальные данные при любом фиксированном $x_0' \geqslant x_0$, то решение $y_i = y_i^0(x)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ системы (135) будет устойчивым тогда и только тогда, когда оно было устойчивым при задании начальных данных для $x = x_0$. Действительно, это сразу следует из непрерывной зависимости решения от начальных данных на конечном интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0'$ (см. §§ 20 и 30, в частности, замечание к теореме § 20).

Задачи. 1. Докажите, что если при наших предположениях о функциях F_i хотя бы один корень уравнения (131) имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение не будет устойчивым. *Указание*. Пусть после приведения системы к каноническому виду функциям z_1, z_2, …, z_m соответствуют λ_1, λ_2, …, λ_m с положительными действительными частями, превосходящими некоторое $\delta > 0$, а остальным z соответствуют λ с неположительными действительными частями. Тогда

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{m} |z_i|^2 - \sum_{i=m+1}^{n} |z_i|^2\right] e^{-\frac{\delta}{x}2} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{m} z_i\overline{z}_i - \sum_{i=m+1}^{n} z_i\overline{z}_i\right] e^{-\frac{\delta}{x}2} > \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 e^{-\frac{\delta}{x}2} \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon \left[\sum_{i=1}^{m} |z_i|^2 - \sum_{i=m+1}^{n} |z_i|^2\right] e^{-\frac{\delta}{x}2},$$

где ε — некоторое положительное число.

2. Постройте пример системы (135) только с одним устойчивым решением, для которой, однако, решение с любыми начальными данными существует, единственно и ограничено при всех x.

3. Пусть решение системы (135) с любыми начальными данными асимптотически стремится к решению $y_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда это последнее решение еще может не быть устойчивым (постройте пример). Пусть дополнительно известно, что решение $y_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, устойчиво. Обязаны ли тогда все решения с достаточно близкими начальными данными тоже быть устойчивыми? Отдельно разберите случаи $n = 1$ и $n > 1$.

4. Если все решения, для которых

$$|y_i(x_0)| < M, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{$*$}$$

равномерно асимптотически стремятся к решению $y_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то все решения, для которых выполняются неравенства ($*$), устойчивы.

§ 51. Один физический пример

Пусть материальная точка массы $m > 0$ движется по оси x-ов. Обозначим через x ее абсциссу. На точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости,

$$-a\frac{dx}{dt}$$

и сила

$$-bx,$$

притягивающая ее к началу координат. Коэффициенты a и b постоянны, $a \geqslant 0$, $b > 0$. Такое движение можно представить себе физически как движение материальной точки в сопротивляющейся среде, например, в жидкости или газе, под влиянием упругой силы пружины, действующей по закону Гука. Этот закон состоит в том, что упругая сила действует в сторону положения равновесия точки и пропорциональна уклонению от положения равновесия. Допустим еще, что на рассматриваемую материальную точку действует направленная по оси x-ов периодическая сила, в момент t равная

$$A\cos\omega t.$$

A и ω — здесь действительные постоянные ($\omega > 0$). Тогда дифференциальным уравнением движения будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = A\cos\omega t. \tag{144}$$

Изучим сначала случай, когда $A = 0$. Тогда на движущуюся точку совсем не действует внешняя сила. Такие движения точки называются ее *собственными* колебаниями. Общее решение однородного уравнения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0 \tag{145}$$

при условии, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, дается формулой

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}; \tag{146}$$

λ_1 и λ_2 суть корни уравнения

$$m\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \tag{147}$$

то есть

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2m} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4m^2} - \frac{b}{m}}\,.$$

Если $a > 0$, то действительные части λ_1 и λ_2 отрицательны. Всякое решение уравнения (145) тогда стремится к 0 при $t \to$ $\to +\infty$. Точно так же всякое решение $(x(t),\ x_1(t))$ системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1, \\ m\frac{dx_1}{dt} &= -ax_1 - bx, \end{aligned} \tag{148}$$

соответствующей уравнению (145), также стремится при $t \to +\infty$ к решению $x(t) \equiv 0$, $x_1(t) \equiv 0$ этой системы. Легко видеть кроме того, что решение $x(t) \equiv 0$, $x_1(t) \equiv 0$ этой системы является устойчивым при $t \to +\infty$.

Если $a = 0$, то всякое действительное решение уравнения (145) дается формулой

$$x(t) = C_1 \sin\sqrt{\frac{b}{m}}\,t + C_2\cos\sqrt{\frac{b}{m}}\,t = C\sin\left(\sqrt{\frac{b}{m}}\,t + v\right),$$

где

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,, \quad C_1 = C\cos v, \quad C_2 = C\sin v.$$

Отсюда
$$x_1(t) = \frac{dx}{dt} = C\sqrt{\frac{b}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{b}{m}}\,t + v\right).$$

Следовательно, точка $(x(t),\, x_1(t))$ на плоскости $(x,\, x_1)$ движется по эллипсу, у которого направление главных полуосей совпадает с направлением координатных осей, а отношение длин полуосей для всех решений одно и то же: оно равно $\sqrt{\dfrac{b}{m}}$. Начало координат для системы (148) является центром. Точка $x(t)$ колеблется по оси x-ов с периодом $\sqrt{\dfrac{m}{b}}\,2\pi$, одинаковым для всех решений уравнения (145).

Изучим подробнее движение, когда $a > 0$. Здесь возможны следующие случаи:

Случай 1. $a^2 > 4bm$. Оба корня характеристического уравнения (147) действительны и отрицательны. Начало координат для системы (148) является узлом (ср. § 23, черт. 13 и 14). Функция $x(t)$, даваемая при действительных C_1 и C_2 формулой (146), и ее производная не больше чем при одном значении t обращаются в 0. Следовательно, функция $x(t)$ имеет не больше одного максимума или минимума.

Случай 2. $a^2 = 4bm$. Тогда общее решение уравнения (145) дается формулой
$$x = e^{-\frac{at}{2m}}(C_1 + C_2 t).$$

$x(t)$ и $x_1(t)$ могут обратиться в 0 не больше чем при одном t. Начало координат на действительной плоскости $(x_1,\, x_2)$ является узлом (ср. черт. 16) для системы (148).

Случай 3. $a^2 < 4bm$. Корни характеристического уравнения (147) имеют неравную 0 мнимую часть. Пусть
$$\lambda_{1,\,2} = -\alpha \pm i\beta; \quad \beta > 0, \quad \alpha > 0.$$

Тогда начало координат на действительной плоскости $(x_1,\, x_2)$ для системы (148) является фокусом. Действительные решения уравнения (145) даются формулой
$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t) = Ce^{-\alpha t}\sin(\beta t + v).$$

Точка x совершает периодические колебания по оси x-ов с неизменным периодом $\dfrac{2\pi}{\beta}$, одинаковым для всех решений уравнения (145) и затухающей амплитудой $Ce^{-\alpha t}$.

Разберем теперь случай, когда в уравнении (144) $A \neq 0$. Нам будет удобнее вместо уравнения (144) рассматривать уравнение

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + a\frac{dz}{dt} + bz = Ae^{i\omega t}. \tag{149}$$

Действительная часть всякого решения этого уравнения будет удовлетворять уравнению (144), и обратно, всякое решение уравнения (144) есть действительная часть некоторого решения уравнения (149). (Почему?)

Если оба корня уравнения (147) отличны от $i\omega$, общее решение уравнения (149) дается формулой

$$z = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + \frac{Ae^{i\omega t}}{m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b},$$

если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и

$$z = C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t} + \frac{Ae^{i\omega t}}{m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b},$$

если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Первые два члена в этих формулах дают общее решение однородного уравнения (145). Оно всегда ограничено при $t > t_0$. Последнее слагаемое дает частное решение уравнения (149), найденное по правилу, указанному в конце § 48. Если $a > 0$, первые два слагаемые в этих формулах стремятся к 0 при $t \to +\infty$ и решение уравнения (149) приближается к

$$\frac{Ae^{i\omega t}}{m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b}.$$

При неизменном A модуль этой функции будет тем больше, чем меньше $m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b$.

Если $m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b = 0$, что может быть только при $a = 0$, то общим решением уравнения (149) будет

$$z = C_1e^{i\omega t} + C_2e^{-i\omega t} + \frac{Ate^{i\omega t}}{2m(i\omega) + a}.$$

Первые два члена этой суммы, дающие общее решение однородного уравнения (149), остаются всегда ограниченными, а последнее слагаемое, дающее частное решение уравнения (149), найденное согласно § 48, бесконечно растет по модулю при $t \to +\infty$. Функция $x(t)$, дающая решение уравнения (144), в этом случае колеблется, и амплитуда ее колебаний бесконечно растет. Это явление называется в физике *резонансом* между собственными колебаниями рассматриваемой материальной точки и внешней силой. Как видно из предыдущего, он наступает, если периоды собственных колебаний материальной точки и внешней силы совпадут. В физической действительности в случае наступления резонанса размахи, делаемые материальной точкой, часто становятся в определенный момент настолько большими, что система разрушается. Поэтому бывает важно предусмотреть возможность наступления резонанса.

Задача. Разберите подробно случай $a < 0$ — колебания с отрицательным трением, которое осуществляется в целом ряде физических схем при подаче энергии извне.

Дополнение

Уравнения с частными производными 1-го порядка от одной неизвестной функции

Основным фактом теории этих уравнений является то, что нахождение всех их решений сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. В следующих параграфах описано это сведение.

§ 52. Почти линейные уравнения

Мы будем рассматривать в этом параграфе уравнения несколько более общего вида, чем линейные, а именно уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_k} + b(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u) = 0. \qquad (150)$$

Мы допускаем, что искомая функция u входит в $b(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, u)$ нелинейно. Пусть коэффициенты $a_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеют в рассматриваемой области G пространства $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ непрерывные частные производные 1-го порядка по всем их аргументам и пусть в этой области

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 > 0.$$

Относительно $b(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ мы будем предполагать, что эта функция определена при $|u| < M$, когда точка $(x_1, \ldots, x_n)$ находится в области G и имеет по всем своим аргументам непрерывные первые производные. Сделанные относительно $b(x_1, \ldots, x_n, u)$ предположения выполняются, в частности, в том случае, когда $b(x_1, \ldots, x_n, u)$ есть линейная функция от u с коэффициентами, которые имеют непрерывные первые производные по всем x_k; в этом случае уравнение (150) называется *линейным*.

Напишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{a_k(x_1, \ldots, x_n)}{\sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n} a_m^2(x_1, \ldots, x_n)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{151}$$

В силу сделанных относительно a_k предположений правые части этих уравнений имеют непрерывные производные по всем x_k. Поэтому через каждую точку области G проходит одна и только одна интегральная линия этой системы (s есть параметр). Эти линии называются *характеристиками* уравнения (150).

Теорема единственности. *Если функция* $u(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ *удовлетворяет в области* G *уравнению* (150) *и имеет непрерывные первые производные, то все ее значения на отрезке любой характеристики* H, *где* $|u| < M$, *вполне определяются ее значениями в одной какой-нибудь точке* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *этого отрезка.*

Доказательство. Разделим обе части уравнения (150) на $\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$. Тогда, принимая во внимание уравнения (151), мы получим

$$\sum_k \frac{a_k}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}} = \\ = \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial s} + \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}} = \\ = \frac{du}{ds} + \frac{b}{\sqrt{a_1^0 + \ldots + a_n^2}} = 0. \tag{152'}$$

Замена $\sum\limits_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \dfrac{dx_k}{ds}$ на $\dfrac{du}{ds}$ возможна в силу предполагаемой непрерывности первых производных от u (Г. М. Фихтенгольц. Курс диф. и инт. исчислений, т. I, стр. 462, Гостехиздат, 1947). Пусть характеристика H проходит через некоторую точку $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ области G и пусть $\left|u(x_1^0, \ldots, x_n^0)\right| < M$. Вдоль этой характеристики

$$x_k = \varphi_k(s, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \quad k = 1, \ldots, n,$$

где φ_k вместе с их первыми производными суть непрерывные функции от s и всех x_i^0. Подставляя эти выражения x_k в

$$\frac{b}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}},$$

мы получим, что вдоль H функция u удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{du}{ds} = \psi(s,\, u,\, x_1^0,\, \ldots,\, x_n^0), \tag{152}$$

где ψ имеет непрерывные первые производные по всем ее аргументам. Поэтому значение u во всякой точке отрезка H, на котором $|u| < M$, вполне определяется значением в какой-нибудь одной точке этого отрезка, в частности, в точке $(x_1^0,\, \ldots,\, x_n^0)$.

Теорема существования. *Допустим, что S есть какая-нибудь $(n-1)$-мерная поверхность, проходящая в области G и имеющая непрерывно вращающуюся касательную плоскость. Допустим, кроме того, что S не касается ни одной из характеристик системы* (150).

Пусть на S задана произвольная функция f, обладающая следующими свойствами:

1) *Ее значения по абсолютной величине меньше M.*

2) *У каждой точки поверхности S существует такая окрестность, где f можно представить как функцию каких-нибудь $(n-1)$-й из координат $x_1,\, \ldots,\, x_n$, имеющую непрерывные первые производные по этим $(n-1)$-й координатам.*

Мы утверждаем тогда, что у поверхности S есть такая окрестность R_0, где существует функция $u(x_1,\, x_2,\, \ldots$ $\ldots,\, x_n)$, обладающая следующими свойствами:

1) *она имеет непрерывные первые производные по всем x_k,*

2) *удовлетворяет уравнению* (150),

3) *на S совпадает с f.*

Задача нахождения функции $u(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$, удовлетворяющей этим условиям, называется *задачей Коши* для уравнения (150).

Доказательство существования решения задачи Коши для уравнения (150). Определим на каждой пересекающей S характеристике H функцию u так, чтобы она удовлетворяла на ней уравнению (152) и в точке пересечения этой характеристики с поверхностью S принимала значение заданной функции f. Функцию u, вообще говоря, нельзя определить таким образом на всей характеристике H, так как мы можем при продолжении u по H выйти из области тех значений u, при которых определена функция $b(x_1, \ldots, x_n, u)$, или пересечь S вторично, но мы всегда можем удовлетворить этим условиям на некотором куске характеристики H, прилегающем к поверхности S. Легко видеть, что таким образом мы, действительно, по заданным на S значениям функции u сможем определить ее на некоторой окрестности R_0 этой поверхности. После этого остается только показать, что построенная нами функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ имеет непрерывные частные производные по всем x_k; тогда будет справедливо на R_0 соотношение

$$\sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds} = \frac{du}{ds},$$

и потому функция u будет удовлетворять не только уравнению (152) или, что все равно, уравнению (152′), но и уравнению (150).

Прежде чем доказывать существование и непрерывность частных производных от u по x_1, ..., x_n в какой-нибудь точке $A^*(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ области R_0, мы введем в этой области новые криволинейные координаты следующим образом. Обозначим через H^* отрезок характеристики, проходящей через точку A^*, лежащий в R_0.

Пусть эта характеристика пересекает S в точке $A_0(x_1^0, \ldots$ $\ldots, x_n^0)$. Допустим для определенности, что касательная плоскости в точке A_0 к поверхности S не параллельна оси Ox_n (все наши последующие рассуждения сохраняют силу и в том случае, если вместо оси Ox_n взять какую-нибудь другую координатную ось). Тогда кусок поверхности S вблизи точки A_0 можно представить уравнением

$$x_n = F(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где функция F имеет непрерывные производные по всем ее аргументам. С другой стороны, так как функции $\varphi_k(s, x_1^0, \ldots$ $\ldots, x_n^0)$, $k = 1, \ldots, n$, имеют непрерывные производные по s (мы считаем $s = 0$ на поверхности S) и по x_1^0, ..., x_n^0 (§ 30), то функции

$$\varphi_k\left[s, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, F(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)\right] \equiv \psi_k(s, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0),$$
$$k = 1, \ldots, n,$$

имеют непрерывные производные по s и $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$. Мы выберем за новые координаты $s, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$. Докажем, что якобиан системы функций $x_k = \psi_k(s, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ всегда отличен от 0. Для этого заметим, что эти функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (151). Для краткости запишем эти уравнения в следующей форме:

$$\frac{dx_k}{ds} = \Phi_k(x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Подставим сюда вместо x_k функцию ψ_k. Тогда получим следующие тождества по $s, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$:

$$\frac{d\psi_k(s, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)}{ds} \equiv \Phi_k\left(\psi_1(s, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0), \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \psi_n(s, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)\right), \quad k = 1, \ldots, n. \quad (153)$$

Так как функции ψ_k и Φ_k имеют непрерывные частные производные по всем их аргументам, то правые части этих тождеств имеют непрерывные производные по s и $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$. Значит, и левые части имеют непрерывные производные по этим аргументам. Поэтому, дифференцируя обе части каждого из равенств (153) по $s, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$ и полагая

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial s} = D_0\psi_k, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial x_p^0} = D_p\psi_k, \quad p = 1, \ldots, n-1,$$

мы получим [1])

$$\frac{dD_p\psi_k}{ds} \equiv \sum_{r=1} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \psi_r} D_p\psi_r, \quad p = 0, 1, \ldots, n-1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Здесь коэффициенты $\dfrac{\partial \Phi_k}{\partial \psi_r}$ не зависят от p. Таким образом, мы находим, что функции $D_p\psi_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют при всех p $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$ одной и той же системе линейных однородных уравнений. Поэтому, чтобы детерминант $|D_p\psi_r|$ был отличен от 0 на всем отрезке H^*, необходимо и достаточно, чтобы он был отличен от 0 в точке A_0, где

[1]) Мы опираемся на следующую теорему, доказываемую в курсах анализа. Пусть в области G на плоскости (x, y) задана функция f, имеющая непрерывные f'_x, f'_y и f''_{xy}. Тогда f''_{yx} всюду в G существует и равна f''_{xy}.

эта характеристика пересекается с поверхностью S. Но в этой точке

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1^0}, & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2^0}, & \ldots, & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_{n-1}^0}, & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial s} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1^0}, & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2^0}, & \ldots, & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_{n-1}^0}, & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_1^0}, & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_2^0}, & \ldots, & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_{n-1}^0}, & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial s} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial s} \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1^0}, & \dfrac{\partial F}{\partial x_2^0}, & \ldots, & \dfrac{\partial F}{\partial x_{n-1}^0}, & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial s} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial x_1^0}\frac{\partial\psi_1}{\partial s} - \ldots - \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}^0}\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial s} + \frac{\partial\psi_n}{\partial s}.$$

Это последнее выражение пропорционально косинусу угла между нормалью в точке A_0 к поверхности S и касательной к характеристике H^*, проведенной в той же точке A_0. Этот косинус по условию отличен от 0. Значит, якобиан $|D_p\psi_r|$ всюду на H^* отличен от 0.

Поэтому по теореме о неявной функции мы найдем, что в области R_0 система уравнений

$$x_k = \psi_k(s, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0), \quad k = 1, \ldots, n,$$

может быть однозначно разрешена относительно s, x_1^0, …, x_{n-1}^0. При этом, так как функции ψ_k имеют непрерывные производные по всем их аргументам, то величины s, x_1^0, …, x_{n-1}^0 будут также иметь непрерывные частные производные по x_1, …, x_n. Поэтому, чтобы доказать, что построенная нами прежде на области R_0 функция u будет иметь непрерывные частные производные по всем x_k в области R_0, достаточно доказать, что если ее рассматривать в этой области как функцию от s, x_1^0, …, x_{n-1}^0, то она будет иметь непрерывные частные производные по s, x_1^0, …, x_{n-1}^0. А для этого заметим следующее.

Подставляя в правую часть уравнения (152) вместо x_n^0 функцию $F(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$, мы найдем, что функция u удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{du}{ds} = \Psi(s, u, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0),$$

где функция ψ имеет непрерывные частные производные по всем ее аргументам. Кроме того, начальные значения функции u при $s = 0$ (на поверхности S), по предположению, имеют непрерывные частные производные по $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$. Поэтому, применяя известную теорему (§ 22), мы найдем, что в области R_0 построенная нами функция u действительно имеет непрерывные частные производные по s, $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$.

Замечание. Если не предполагать, что функции a_k и b, входящие в левую часть уравнения (150), имеют непрерывные производные, то это уравнение может не иметь ни одного решения с непрерывными частными производными. Таким примером может служить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = b(x - y), \tag{154}$$

где $b(z)$ — непрерывная функция Вейерштрасса, нигде не имеющая производной по z (Н. М. Гюнтер). Чтобы доказать это, введем вместо x и y новые независимые переменные t и z, положив $x + y = t$ и $x - y = z$.

Допустим, что в некоторой области на плоскости (x, y) существует решение $u(x, y)$ [1] уравнения (154), имеющее непрерывные производные по x и y. Тогда, выразив по обычным формулам производные от u по x и y через производные от u по t и z, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} b(z).$$

Все решения этого уравнения даются формулой

$$u(t, z) = \frac{1}{2} b(z) t + c(z), \tag{155}$$

где $c(z)$ — любая функция от z. Значит,

$$u(x + y, x - y) = u^*(x, y) = \frac{1}{2}(x + y) b(x - y) + c(x - y).$$

[1] Решением уравнения (1) мы называем функцию $u(x, y)$, имеющую частные производные по x и y всюду в рассматриваемой области, удовлетворяющие этому уравнению.

Но легко показать, что нет такой области на плоскости (x, y), где даваемая этой формулой функция u^* имеет производные по x и y. Для этого заметим следующее: если бы эти производные существовали в точках (x, y) и $(x+\varepsilon, y+\varepsilon)$, то существовали бы также производные в точке (x, y) у функции

$$u^*(x+\varepsilon, y+\varepsilon) - u^*(x, y) = \varepsilon b(x-y),$$

что невозможно. Значит, функция $u^*(x, y)$ не может удовлетворять уравнению (154), и наше первоначальное предположение было неверно.

Можно показать [1]), что всякое *непрерывное* решение уравнения (154) имеет вид (155), если даже не требовать, чтобы это решение имело непрерывные производные. Тогда мы придем к выводу, что уравнение (154) ни в какой области не имеет непрерывного решения.

Задачи. Если начальные данные задаются на характеристике, то уравнение (145) или не имеет ни одного решения, или имеет бесконечно много решений. Когда имеет место первый случай и когда второй?

2. Покажите, что если $n = 2$ и область односвязна, то решение можно продолжить на любую замкнутую область $\overline{G}$, целиком лежащую внутри G. Если область не односвязна, то это не всегда возможно (постройте пример). Заметим, что при $n > 2$ это не всегда возможно и для односвязной области.

§ 53. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Из предыдущего изложения следует, что система, состоящая из обыкновенных дифференциальных уравнений (151) и уравнения

$$\frac{du}{ds} + \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}} = 0,$$

определяет в пространстве $(x_1, \ldots, x_n, u)$ семейство интегральных линий, из которых состоят интегральные поверхности

$$u = u(x_1, \ldots, x_n)$$

[1]) Baire. Sur les fonctions de variables réelles. Annali di mathematica (3), t. 3, 1899, стр. 101–121.

уравнения (150) (s рассматривается как параметр). Запишем эти обыкновенные дифференциальные уравнения в симметрической форме так:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{-b}. \tag{156}$$

Иногда бывает легко найти нетождественно равные постоянному функции

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, u),$$

которые сохраняют постоянные значения на всякой интегральной кривой системы (156). Такие функции называются *первыми интегралами* этой системы.

Допустим, что каким-то образом мы нашли n таких первых интегралов системы (156)

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, u), \quad k = 1, \ldots, n,$$

что в каждой точке рассматриваемой области G_u пространства $(x_1, \ldots, x_n, u)$ один из миноров n-го порядка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}, & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}, & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u} \end{matrix} \right\|$$

отличен от 0. Тогда система уравнений

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, u) = \varphi_k(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{157}$$

определяет в области G_u некоторую линию L, так как в окрестности каждой точки этой области она определяет n каких-то координат как функции $(n+1)$-й координаты. Эта линия, вообще говоря, может состоять из нескольких кусков подобно тому, как это было в § 9 (ср. черт. 6). *Будем предполагать, что в рассматриваемой области G_u каждая из линий* (157) *состоит только из одного куска.* По определению первого интеграла каждая из функций $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, u)$ принимает одно и то же значение $\varphi_k(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$ вдоль проходящей через точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$ интегральной линии системы (156). Поэтому эта интегральная линия целиком совпадает в области G_u с линией (157). Отсюда следует, что система уравнений

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, u) = C_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{158}$$

представляет общий интеграл системы (156) в области G_u, так как, выбирая за постоянные C_k значения $\varphi_k(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$, получим интегральную линию системы (156), проходящую через любую точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$ области G_u, т. е. получим любую интегральную линию этой системы.

Пусть теперь требуется найти интегральную поверхность уравнения (150), проходящую через $(n-1)$-мерную поверхность

$$\begin{aligned} x_k &= \psi_k(v_1, \ldots, v_{n-1}), \quad k = 1, \ldots, n, \\ u &= \psi(v_1, \ldots, v_{n-1}). \end{aligned} \tag{159}$$

При этом предполагается, что

1) все функции ψ_k и ψ имеют непрерывные частные производные по всем v и

2) детерминант

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial v_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial v_{n-1}}, & a_1(\psi_1, \ldots, \psi_n) \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial v_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial v_{n-1}}, & a_2(\psi_1, \ldots, \psi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial v_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial v_{n-1}}, & a_n(\psi_1, \ldots, \psi_n) \end{vmatrix}$$

всегда отличен от 0. Геометрически это последнее условие можно интерпретировать как условие того, что лежащая в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ поверхность

$$x_k = \psi_k(v_1, \ldots, v_{n-1}), \quad k = 1, \ldots, n,$$

нигде не касается характеристик уравнения (150).

Тогда согласно основным теоремам настоящего параграфа в некоторой окрестности поверхности (159) существует одна и только одна интегральная поверхность уравнения (150), проходящая через $(n-1)$-мерную поверхность (159). Так как по предыдущему эта интегральная поверхность состоит из интегральных линий системы (156), проходящих через точки поверхности (159), то параметрические уравнения искомой интегральной поверхности (параметры $v_1, \ldots, v_{n-1}$) можно получить, подставляя в правые части уравнений (157) вместо $x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0$ соответственно $\psi_1(v_1, \ldots, v_{n-1}), \ldots, \psi_n(v_1, \ldots, v_{n-1}), \psi(v_1, \ldots, v_{n-1})$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_1, \ldots, x_n, u) = \varphi_k(\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi) &= \\ = \Phi_k(v_1, \ldots, v_{n-1}), &\quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Замечание. Всякий первый интеграл $\varphi(x_1, \ldots, x_n, u)$ системы (156) на области G_u есть функция от $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n, u)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Действительно, по определению первого интеграла $\varphi(x_1, \ldots, x_n, u)$ должно сохранять постоянные значения на каждой интегральной линии этой системы. А каждая такая линия, согласно предыдущему, вполне определяется значениями на ней функций $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, u)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пример. Найти интегральную поверхность уравнения

$$2\frac{\partial u}{\partial x_1} + 3\frac{\partial u}{\partial x_2} + 5 = 0, \tag{150'}$$

проходящую через линию

$$x_1 = a_1 v, \quad x_2 = a_2 v, \quad u = a_3 v,$$

при этом постоянные a_1, a_2, a_3 выбраны так, что детерминант

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2 \\ a_2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{160}$$

Система уравнений (156) теперь принимает вид

$$\frac{dx_1}{2} = \frac{dx_2}{3} = \frac{du}{-5}. \tag{156'}$$

Интегрируя уравнения

$$\frac{dx_1}{2} = \frac{dx_2}{3}$$

и

$$\frac{dx_1}{2} = \frac{du}{-5},$$

мы получим следующие первые интегралы системы (156′):

$$\varphi_1 \equiv 3x_1 - 2x_2 \quad \text{и} \quad \varphi_2 \equiv 5x_1 + 2u.$$

Так как детерминант

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то уравнения

$$3x_1 - 2x_2 = C_1 \quad \text{и} \quad 5x_1 + 2u = C_2 \tag{158'}$$

дают общий интеграл системы (156′) во всем пространстве (x_1, x_2, u). При любых значениях постоянных C_1 и C_2 система (158′) определяет некоторую линию (прямую), состоящую только из одного куска. Поэтому уравнение искомой интегральной поверхности уравнения (150′) можно написать так:

$$3x_1 - 2x_2 = 3a_1 v - 2a_2 v,$$
$$5x_1 + 2u = 5a_1 v + 2a_3 v.$$

Из этих уравнений можно исключить v. Для этого достаточно решить первое из них относительно v, что возможно в силу условия (160), и найденное значение v подставить во второе уравнение.

Задача. Покажите, что знание k функционально независимых первых интегралов позволяет, вообще говоря, понизить число искомых функций в системе (80) на k.

§ 54. Квазилинейные уравнения

Квазилинейными мы называем уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x_1, \ldots, x_n, u) = 0. \tag{161}$$

Это уравнение линейно относительно производных от u, но не относительно самого u. Мы будем предполагать, что $a_i(x_1, \ldots, x_n, u)$ и $b(x_1, \ldots, x_n, u)$ имеют непрерывные частные производные по всем аргументам в некоторой области пространства $(x_1, \ldots, x_n, u)$ и что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x_1, \ldots, x_n, u) > 0.$$

Предположим, что нам известно какое-нибудь решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ этого уравнения, имеющее непрерывные первые частные производные. Составим вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{a_i\,(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n))}{\sqrt{\sum_j a_j^2\,(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n))}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{162}$$

где s — некоторый параметр. Подставим это решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ в уравнение (161) и разделим обе части полученного тождества на $\sqrt{\sum\limits_j a_j^2 (x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n))}$.

Тогда получим тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(x_1, \ldots, x_n, u)}{\sqrt{\sum\limits_j a_j^2(x_1, \ldots, x_n, u)}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{b(x_1, \ldots, x_n, u)}{\sqrt{\sum\limits_j a_j^2(x_1, \ldots, x_n, u)}} =$$
$$= \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} + \frac{b(x_1, \ldots, x_n, u)}{\sqrt{\sum\limits_j a_j^2(x_1, \ldots, x_n, u)}} =$$
$$= \frac{du}{ds} + \frac{b(x_1, \ldots, x_n, u)}{\sqrt{\sum\limits_j a_j^2(x_1, \ldots, x_n, u)}} = 0.$$

Таким образом, и в случае, когда a_i зависят от u, $\sum\limits_i \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \times$ $\times \frac{\partial u}{\partial x_i}$ можно представить как производную от u по некоторому направлению, но теперь это направление зависит не только от $x_1, \ldots, x_n$, но и от u.

Задача Коши для уравнения (161) формулируется так же, как и для уравнения (150): *требуется найти такое решение уравнения* (161)*, которое на некоторой* $(n-1)$*-мерной поверхности* S *пространства* $(x_1, \ldots, x_n)$ *принимает заданные значения*. Более общая постановка: *через заданную в пространстве* $(x_1, \ldots, x_n, u)$ $(n-1)$*-мерную поверхность* S^* *требуется провести* n*-мерную интегральную поверхность* T *уравнения* (161) [1]).

Докажем прежде всего единственность этого решения в достаточной близости S^* в предположении, что поверхность S^* нигде не имеет касательных прямых, проекции которых на плоскость $u = 0$ имеют направляющие косинусы, даваемые

---

[1]) При этом T уже может представлять неоднозначную функцию $(x_1, \ldots, x_n)$. Однако в достаточной близости от любой своей точки T должна представлять однозначную дифференцируемую функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую (161). Например, T может иметь вид геликоида с осью Ou, рассматриваемого вне некоторой окрестности этой оси.

уравнениями (162) (значения правых частей этих уравнений на поверхности S^* определяются при подстановке координат точки касания). Для этого мы укажем процесс, который единственным способом определяет решение задачи Коши в предположении, что такое решение существует. Этот процесс позволяет практически решать задачу Коши для квазилинейных уравнений. Мы уже доказали, что для всякого решения уравнения (161) с непрерывными производными удовлетворяются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= \frac{a_i(x_1, \ldots, x_n, u)}{\sqrt{\sum\limits_j a_j^2(x_1, \ldots, x_n, u)}}, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \frac{du}{ds} &= -\frac{b(x_1, \ldots, x_n, u)}{\sqrt{\sum\limits_j a_j^2(x_1, \ldots, x_n, u)}}. \end{aligned} \tag{163}$$

Начальные значения x_i и u в каждой точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$ поверхности S^* нам известны. По этим начальным данным система (163) единственным образом определяет u и все x_i как функции от s. Линия

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(s, x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0), \quad i = 1, \ldots, n, \\ u &= u(s, x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) \end{aligned}$$

называется *характеристикой* уравнения (161). Таким образом, для любого достаточно малого куска S^* мы определили u единственным образом в той окрестности проекции этого куска на плоскость $(x_1, \ldots, x_n)$, которую покрывают проекции пересекающих S^* характеристик. «Ширина» этой окрестности нигде не сузится до 0. В самом деле:

1) *S^* не имеет касательных прямых, параллельных оси Ou.* Действительно, это сразу следует из конечности $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ на поверхности T (см. примечание 3 на стр. 12), существующей по предположению.

2) *S^* не имеет касательных прямых, проекции которых на плоскость $u = 0$ имеют направляющие косинусы, даваемые уравнениями* (162). Действительно, это было оговорено особо.

Итак, любые две интегральные поверхности, проходящие через S^*, совпадают в некоторой окрестности S^*.

Существование решения задачи Коши для уравнения (161) при выполнении условий, напечатанных только что курсивом, мы докажем, если покажем, что построенная нами только что по начальным данным функция u имеет непрерывные производные 1-го порядка. Для этого нам придется предположить, что S^* — или, при первой постановке задачи, — поверхность S и заданная на ней функция u достаточно гладки. Мы не будем приводить этого доказательства, так как ниже подробно доказывается более общая теорема.

§ 55. Нелинейные уравнения

Мы рассматриваем уравнение

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{164}$$

и предполагаем, что функция F по всем своим аргументам в некоторой области $(2n+1)$-мерного пространства имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно и что

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial\left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}}\right]^2 > 0. \tag{165}$$

Для сокращения записи положим

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i.$$

Мы не будем еще раз формулировать задачу Коши для уравнения (164), а прямо перейдем к рассмотрению вопроса о ее единственности. Это даст практический способ построения решения задачи Коши.

Допустим, что $u(x_1, \ldots, x_n)$ есть какое-нибудь решение уравнения (164), имеющее непрерывные частные производные 2-го порядка. Подставим это решение в уравнение (164) и полученное тождество продифференцируем по каждому x_k, $k = 1, \ldots, n$. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + X_k + Up_k = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + X_k + Up_k = 0. \tag{166}$$

Эти уравнения квазилинейны относительно p_k. Построим в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ интегральные линии системы

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{P_i}{\sqrt{\sum P_k^2}}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{167}$$

где в правых частях, вместо u и p_s, подставлено рассматриваемое решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ и его соответствующие производные. Тогда уравнение (166) можно переписать в виде

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{X_i + Up_i}{\sqrt{\sum P_k^2}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{168}$$

Найдем, наконец, производную от $u(x_1, \ldots, x_n)$ по направлению s, определяемому уравнениями (167). Получим

$$\frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i p_i}{\sqrt{\sum P_k^2}}. \tag{169}$$

Система, состоящая из уравнений (167), (168) и (169), определяет однозначно x_i, p_i и u как функции от s, если задать их начальные значения.

Пусть поверхность S, на которой даны начальные значения u, задается уравнениями

$$x_i = x_i(v_1, \ldots, v_{n-1}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда заданную на S функцию u можно также рассматривать как функцию от $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Мы будем предполагать, что *функции $x_i(v_1, \ldots, v_{n-1})$ и $u(v_1, \ldots, v_{n-1})$ непрерывны вместе с их частными производными по $v_1, \ldots, v_{n-1}$ до 2-го порядка включительно и что в каждой точке поверхности S по крайней мере один из миноров $(n-1)$-го порядка матрицы*

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial v_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial v_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v_{n-1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial v_{n-1}} \end{matrix} \right\|$$

отличен от 0.

Рассмотрим произвольную точку A поверхности S. Построим новые координатные оси, взяв за новое начало точку A.

Пусть новая ось Ox_1' пойдет по нормали к S, а остальные координатные оси Ox_k', $k = 2, \ldots, n$, расположатся как-нибудь в плоскости, касающейся S в точке A. Рассмотрим функцию u, удовлетворяющую уравнению (164) в окрестности точки A. Пусть в новых координатах это уравнение запишется в виде

$$F^*\left(x_1', \ldots, x_n', u, \frac{\partial u}{\partial x_1'}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n'}\right) = 0. \tag{170}$$

Значения в точке A производных $\dfrac{\partial u}{\partial x_k'}$, $k = 2, \ldots, n$, можно определить, зная значения функции u только на поверхности S; они будут совпадать со значениями производных от заданной на этой поверхности функции по направлениям, лежащим в S и касающимся осей Ox_k', $k = 2, \ldots, n$. Для $\dfrac{\partial u}{\partial x_1'}$ из уравнения (170), вообще говоря, получится *несколько* возможных значений.

По значениям в точке A всех производных $\dfrac{\partial u}{\partial x_k'}$ можно найти в этой точке и все производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$. Допустим, что для заданной функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ в каждой точке A поверхности S

$$\frac{\partial F^*}{\partial \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x_1'} \right\}} \neq 0. \tag{171}$$

Пусть $u_1(x_1, \ldots, x_n)$ есть другое непрерывно дифференцируемое решение уравнения (164), совпадающее с $u(x_1, \ldots, x_n)$ на S, причем $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1'} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1'}$ в некоторой точке S. Тогда $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1'}$ всюду на S совпадает с $\dfrac{\partial u}{\partial x_1'}$, так как по теореме о неявной функции непрерывное решение $\dfrac{\partial u}{\partial x_1'}$ уравнения (170) единственно. Следовательно, и все $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_k}$ всюду на поверхности S совпадают с соответствующими $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$.

Геометрически условие (171) можно интерпретировать следующим образом. В точке A

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k'} \frac{\partial x_k'}{\partial x_j}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial F^*}{\partial\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x_1'}\right\}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right\}} \cdot \frac{\partial x_1'}{\partial x_j} = \\ = \sum_{j=1}^{n} P_i \frac{\partial x_1'}{\partial x_j} = \sqrt{\sum P_k^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_1'}{\partial x_j}\frac{dx_j}{ds}.$$

А эта последняя сумма пропорциональна косинусу угла между направлением нормали к поверхности S в точке A с координатами $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и направлением проекции на плоскость $(x_1, \ldots, x_n)$ характеристики, выходящей из точки $(x_1^0, \ldots$ $\ldots, x_n^0)$, $u(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Следовательно, условие (171) означает, что этот угол нигде не равен прямому.

Итак, значения x_1, ..., x_n, u, p_1, ..., p_n всюду на S совпадают с соответствующими значениями для функции $u_1(x_1, \ldots, x_n)$. А тогда система уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{P_i}{\sqrt{\sum P_k^2}}, \tag{172$_1$}$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{\sum\limits_k P_k p_k}{\sqrt{\sum P_k^2}}, \tag{172$_2$}$$

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{X_i + U p_i}{\sqrt{\sum P_k^2}}, \tag{172$_3$}$$

показывает, что $u(x_1, \ldots, x_n) \equiv u_1(x_1, \ldots, x_n)$ в некоторой окрестности S. Действительно, так как мы предположили, что функция F имеет непрерывные производные по всем ее аргументам до 2-го порядка, то в силу условия (165) правые части уравнений (172) имеют непрерывные производные 1-го порядка по всем аргументам, что обеспечивает единственность решения системы (172).

Интегральные линии системы (172) в пространстве $(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ называются *характеристиками* уравнения (164) [1]).

[1]) Проекции этих линий на плоскость $(x_1, \ldots, x_n)$ или плоскость $(x_1, \ldots, x_n, u)$ также иногда называются характеристиками.

Переходя к вопросу о существовании решения задач Коши, мы предположим, что S и заданная на ней функция u удовлетворяют условию, напечатанному на стр. 195 курсивом, и что, кроме того, на S выбрано $\dfrac{\partial u}{\partial x_1'}$ так, что всюду на S выполняются условия (170) и (171).

Чтобы доказать существование решения при этих предположениях, нам достаточно проверить, что построенные нами согласно системе (172) по начальным данным решения

$$x_i(s, v_1, \ldots, v_{n-1}), \quad u(s, v_1, \ldots, v_{n-1}), \quad p_i(s, v_1, \ldots, v_{n-1})$$

обладают следующими свойствами:

1. Система уравнений

$$x_i = x_i(s, v_1, \ldots, v_{n-1}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

может быть однозначно разрешена относительно s, v_1, ..., v_{n-1} в некоторой окрестности поверхности S, причем решения имеют непрерывные производные по x_1, ..., x_n. Тогда в этой окрестности поверхности S величины s, v_1, ..., v_{n-1} могут быть приняты за криволинейные координаты. Так как мы предполагаем, что функции $x_i(v_1, \ldots, v_{n-1})$ и $u(v_1, \ldots, v_{n-1})$, заданные на поверхности S, имеют непрерывные производные второго порядка по всем v_i и так как правые части уравнений (172) имеют непрерывные производные по всем их аргументам, то построенные нами решения имеют непрерывные производные по s, v_1, ..., v_{n-1}. Поэтому, если в полученное нами выражение для u через s, v_1, ..., v_{n-1} подставить вместо s, v_1, ..., v_{n-1} их выражения через x_1, ..., x_n, мы получим u как функцию от x_1, ..., x_n, имеющую непрерывные первые производные по x_1, ..., x_n.

2. Функции $x_i(s, v_1, \ldots, v_{n-1})$, $u(s, v_1, \ldots, v_{n-1})$ и $p_i(s, v_1, \ldots, v_{n-1})$ всюду в рассматриваемой окрестности S удовлетворяют уравнению

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{173}$$

3.
$$p_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Чтобы доказать первое из этих утверждений, нам достаточно доказать, что при всех достаточно малых значениях s детерминант

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial v_k}\right|, \quad i, k = 1, \ldots, n, \tag{174}$$

отличен от 0 (мы считаем $s = 0$ на поверхности S и $v_n \equiv \equiv s$). Так как элементы детерминанта непрерывны по s, v_1, ..., v_{n-1}, то нам достаточно доказать, что этот детерминант отличен от 0 на самой поверхности S, а это последнее следует из того, что выходящие из какой-нибудь точки поверхности S векторы, направленные по координатным линиям s, v_1, ..., v_{n-1}, образуют параллелепипед с неравным нулю объемом, согласно условию (171).

Утверждение второе, очевидно, справедливо на самой поверхности S: начальные значения p_1, ..., p_n мы выбираем так, чтобы они удовлетворяли уравнению (173). Чтобы доказать, что не только на поверхности S, то есть при $s = 0$, но и при всех достаточно малых s выполняется это соотношение, покажем, что если в левую часть уравнения (173) подставить вместо x_i, u, p_i решение $x_i(s, v_1, \ldots, v_{n-1})$, $u(s, v_1, \ldots, v_{n-1})$, $p_i(s, v_1, \ldots, v_{n-1})$ системы (172), то результат подстановки не будет зависеть от s. Действительно,

$$\frac{dF}{ds} = \sum_i X_i \frac{dx_i}{ds} + \sum P_i \frac{dp_i}{ds} + U \frac{du}{ds}.$$

Подставляя вместо $\frac{dx_i}{ds}$, $\frac{dp_i}{ds}$, $\frac{du}{ds}$ правые части уравнений (172), мы получим 0.

Вместо того, чтобы доказывать третье утверждение, т. е. что

$$p_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

мы покажем сначала, что во всей рассматриваемой нами окрестности поверхности S:

$$\frac{\partial u}{\partial v_k} - \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} = 0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \quad (v_n \equiv s). \tag{175}$$

При $k = n$ справедливость этого следует из того, что

$$\frac{\partial x_i}{\partial v_n} = \frac{P_i}{\sqrt{\sum P_k^2}} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

в силу уравнений (172_1), и потому соответствующее уравнение (175) совпадает с уравнением (172_2). Об уравнениях (175) при $k = 1, \ldots, n-1$ нам известно пока только, что они справедливы при $s = 0$: начальные значения для p_i на поверхности

S мы выбрали так, чтобы

$$p_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial v_k} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial v_k}.$$

Чтобы доказать, что эти уравнения удовлетворяются и при других s, положим

$$U_k \equiv \frac{\partial u}{\partial v_k} - \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k}$$

и найдем $\dfrac{dU_k}{ds}$.

Дифференцировать U_k по s возможно. Это следует из того, что построенные нами решения системы (172) имеют непрерывные производные по s, v_1, …, v_{n-1}, как мы уже отмечали. Если подставить эти решения в уравнение ($172_{1,2}$), то правые части полученных тождеств будут иметь непрерывные производные по v_k ($k = 1, \ldots, n$). Значит, и левые части будут также иметь непрерывные производные по этим аргументам, то есть будут существовать и будут непрерывными производные $\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial s\, \partial v_k}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s\, \partial v_k}$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Итак,

$$\frac{dU_k}{ds} = \frac{\partial^2 u}{\partial v_k\, \partial s} - \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial v_k} - \sum_i p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v_k\, \partial s}. \tag{176}$$

Продифференцируем теперь по v_k справедливое, как мы только что показали, при всех рассматриваемых значениях s, v_1, …, v_{n-1} тождество

$$\frac{\partial u}{\partial s} - \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial s} \equiv 0.$$

Получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s\, \partial v_k} - \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k} \frac{\partial x_i}{\partial s} - \sum_i p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial s\, \partial v_k} \equiv 0. \tag{177}$$

Вычитая почленно (177) из (176), получим:

$$\frac{dU_k}{ds} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k} \frac{\partial x_i}{\partial s} - \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial v_k}.$$

Если воспользоваться равенствами (172_1) и (172_3), то полученное только что соотношение можно переписать так:

$$\frac{dU_k}{ds} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k} \frac{P_i}{\sqrt{\sum P_s^2}} + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} \frac{X_i + Up_i}{\sqrt{\sum P_s^2}}. \tag{178}$$

Дифференцируя доказанное прежде тождество

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) \equiv 0$$

по v_k, получим

$$\sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} + \sum_i P_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k} + U \frac{\partial u}{\partial v_k} = 0.$$

Разделим обе части этого соотношения на $\sqrt{\sum P_k^2}$ и, вычитая его из (178), получим:

$$\frac{dU_k}{ds} = -\frac{U}{\sqrt{\sum P_s^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial v_k} - \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} \right) = -\frac{U \cdot U_k}{\sqrt{\sum P_s^2}}.$$

Следовательно,

$$U_k(s) = U_k(0) \cdot e^{-\int\limits_0^s \frac{U}{\sqrt{\sum P_s^2}} ds}.$$

Так как $U_k(0) = 0$, то и при всех других s величина $U_k(s) = 0$.

Итак, мы доказали, что во всей рассматриваемой окрестности поверхности S

$$\frac{\partial u}{\partial v_k} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Докажем теперь, что $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} \equiv p_k$. Для этого заметим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial u}{\partial v_k} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

Подставляя сюда значения $\dfrac{\partial u}{\partial v_k}$ из предыдущего тождества, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k,\, s=1}^n p_s \frac{\partial x_s}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \sum_s p_s \frac{\partial x_s}{\partial x_i} = p_i,$$

так как $\dfrac{\partial x_s}{\partial x_i} = 0$, если $i \neq s$, и $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$.

Замечание. Вместо того, чтобы за параметр принимать длину проекции характеристики на плоскость $(x_1, \ldots, x_n)$, можно ввести новый параметр t, связанный с s соотношением

$$ds = \sqrt{\sum P_k^2}\, dt.$$

Тогда уравнение (172) будет писаться $\dfrac{\partial x_i}{\partial t} = P_i$ и т. д.

Пример. Найти решение уравнения

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - 1 = 0, \tag{179}$$

проходящее через окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $u = 0$.

Введя параметр v, запишем уравнение этой окружности так:

$$x_1 = \sin v, \quad x_2 = \cos v, \quad u = 0. \tag{180}$$

Уравнения (172) принимают вид

$$\frac{dx_1}{2p_1} = \frac{dx_2}{2p_2} = \frac{du}{2(p_1^2 + p_2^2)} = \frac{dp_1}{0} = \frac{dp_2}{0} = dt. \tag{181}$$

Из последних двух уравнений находим

$$p_1 = C_1 \quad \text{и} \quad p_2 = C_2,$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные. Подставляя это в первые уравнения, находим

$$x_1 = 2C_1 t + C_3; \quad x_2 = 2C_2 t + C_4; \quad u = 2(C_1^2 + C_2^2)t + C_5,$$

где C_3, C_4, C_5 — некоторые постоянные.

Чтобы удовлетворялось данное дифференциальное уравнение, должно быть

$$C_1^2 + C_2^2 = 1. \tag{182}$$

Поэтому $u = 2t + C_5$.

Чтобы при $t = 0$ линия

$$x_1 = 2C_1 t + C_3, \quad x_2 = 2C_2 t + C_4, \quad u = 2t + C_5$$

проходила через точку, определяемую параметром v на окружности (180), надо, чтобы было

$$C_3 = \sin v, \quad C_4 = \cos v, \quad C_5 = 0.$$

Тогда уравнение интегральной поверхности уравнения (179), проходящей через окружность (180), запишется в виде

$$x_1 = 2C_1 t + \sin v, \quad x_2 = 2C_2 t + \cos v, \quad u = 2t,$$

где t и v — параметры. Чтобы при $t = 0$ было

$$\frac{\partial u}{\partial v} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial v},$$

надо, чтобы было

$$0 = p_1 \cos v - p_2 \sin v \quad \text{или} \quad C_1 \cos v = C_2 \sin v.$$

Принимая во внимание (182), мы получаем отсюда

$$C_1 = \varepsilon \sin v, \quad C_2 = \varepsilon \cos v, \quad \text{где } \varepsilon = \pm 1.$$

Из соображений непрерывности следует, что ε постоянно вдоль всей кривой. Следовательно, окончательно мы получаем такие параметрические уравнения интегральной поверхности:

$$x_1 = (2t\varepsilon + 1) \sin v; \quad x_2 = (2t\varepsilon + 1) \cos v; \quad u = 2t.$$

Исключая отсюда t и v, найдем

$$x_1^2 + x_2^2 = (1 \pm u)^2. \tag{183}$$

Таким образом, мы нашли две интегральные поверхности уравнения (179), проходящие через окружность (180). Это будут два круглых конуса в пространстве (x_1, x_2, u), у которых в основании лежит окружность (180) и общая ось совпадает с осью Ou.

Замечание. Из рассмотренного примера видно, что сделанная нами на стр. 199 оговорка о том, что детерминант (174) отличается от 0 только вблизи поверхности S, вызывается существом дела. Нельзя думать, что проходящие через поверхность S^* (сохраняя обозначения § 54) проекции

$$x_i = x_i(s, x_1^0, \ldots, x_n^0), \quad i = 1, \ldots, n; \quad u = u(s, x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

интегральных линий системы (172) на пространство $(x_1, \ldots, x_n, u)$ образуют гладкую поверхность при как угодно больших значениях параметра s или эквивалентного ему параметра t. Несмотря на то, что интегральные линии системы (181) определяются этой системой при как угодно больших значениях t, нельзя как угодно далеко продолжать интегральные поверхности уравнения (179), проходящие через окружность (180), не попадая на особые точки. Такими особыми точками будут вершины конусов (183).

§ 56. Уравнение Пфаффа

Уравнением Пфаффа в пространстве (x, y, z) называется уравнение вида

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \tag{184}$$

где P, Q и R суть функции от x, y, z.

Существуют две трактовки этого уравнения. В первой x, y и z считаются функциями одного какого-либо параметра t. Задавая две из величин x, y, z как функции этого параметра, мы придем к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения третьей величины. Можно произвольно задать некоторое соотношение между x, y и z

$$\Phi(x, y, z) = 0. \tag{185}$$

Рассматривая здесь x, y и z как функции некоторого параметра t и дифференцируя по t соотношение (185), получим

$$\Phi'_x\,dx + \Phi'_y\,dy + \Phi'_z\,dz = 0. \tag{186}$$

При весьма общих предположениях относительно функций Φ, P, Q, R два уравнения (185) и (186) можно разрешить относительно отношений двух из дифференциалов dx, dy, dz к третьему, например, относительно $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dy}{dx}$. Тогда получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для определения z и y как функций от x. Условие (185) оставит, вообще говоря, одну произвольную постоянную в общем решении.

В другой трактовке уравнения Пфаффа одна из величин, например z, рассматривается как функция двух других. Будем предполагать, что в рассматриваемой области $R \neq 0$. Тогда из уравнения (184) получаем

$$dz = P_1\,dx + Q_1\,dy, \quad \text{где} \quad P_1 = -\frac{P}{R} \quad \text{и} \quad Q_1 = -\frac{Q}{R}. \tag{187}$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P_1(x, y, z), \tag{187_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Q_1(x, y, z). \tag{187_2}$$

Будем считать, что z имеет непрерывные частные производные второго порядка по x и y, а P_1 и P_2 — первые непрерывные производные по своим аргументам. Тогда должно быть

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

или

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z}Q_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z}P_1, \tag{188}$$

так как должно быть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

При дифференцировании P_1 и Q_1 по x и y мы учли их зависимость не только от тех x и y, от которых они явно зависят, но также и от тех, которые входят через посредство z, которое, по предположению, есть функция от x и y. Условие (188) можно записать так:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{189}$$

Допустим, что условие (189) или, что все равно, условие (188) выполняется *тождественно* в рассматриваемой области G пространства (x, y, z) и что функции P_1 и Q_1 имеют непрерывные производные по всем их аргументам до второго порядка включительно. *Тогда через каждую G проходит одна и только одна интегральная поверхность системы* (187) *или, что все равно, уравнения* (184).

Доказательство. Докажем прежде всего единственность решения системы (187), проходящего через заданную точку $A(x_0, y_0, z_0)$. Для этого заметим следующее. Уравнение (187_1), в котором y постоянно равно y_0, определяет единственную интегральную кривую L, проходящую через точку $A(x_0, y_0, z_0)$ в плоскости $y = y_0$. Уравнение же (187_2), в котором x сохраняет некоторое постоянное значение, определяет единственную интегральную кривую $l(x)$, проходящую в плоскости $x = \text{const}$ через лежащую в этой плоскости точку кривой L. Совокупность линий $l(x)$, построенных для всех точек линий L, единственным образом определяет интегральную поверхность S системы (187), проходящую через точку (x_0, y_0, z_0).

Докажем теперь, что построенная только что поверхность действительно есть интегральная поверхность системы (187). Из самого построения этой поверхности очевидно, что для всех ее точек удовлетворяется уравнение (187_2). Остается доказать, что для всех ее точек удовлетворяется и уравнение (187_1). Что построенная нами функция

$$z = z(x, y)$$

действительно всюду имеет непрерывную производную по x, следует из рассмотрений § 52 (стр. 182–186), которые и теперь полностью приложимы. Остается доказать, что $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ удовлетворяет уравнению (187_1). Для этого заметим, что, согласно самому построению поверхности S, это уравнение удовлетворяется при $y = y_0$. Чтобы доказать, что оно удовлетворяется и при других значениях y, положим

$$\frac{\partial z}{\partial x} - P_1(x, y, z) = F$$

и найдем $\dfrac{\partial F}{\partial y}$; что у функции z существует производная $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, следует из того, что эта функция удовлетворяет уравнению (187_2), правая часть которого имеет непрерывные производные по x, y и z.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} - \\ - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z}P_1 + \\ + \frac{\partial Q_1}{\partial z}F - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z}Q_1. \quad (190)\end{aligned}$$

Мы преобразовали $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, пользуясь тем, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q_1.$$

При дифференцировании Q_1 по y мы учли зависимость от того y, которое входит через посредство z. Пользуясь тождеством (188), мы можем равенство (190) переписать в виде

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial z}F.$$

Отсюда

$$F(x, y) = F(x, y_0)e^{\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial Q_1}{\partial z}\,dy}.$$

Следовательно, $F(x, y)$ равно 0 при всех рассматриваемых y, поскольку оно равно 0 при $y = y_0$, что и требовалось доказать.

Геометрически решение уравнения Пфаффа в первой его трактовке означает построение кривых, ортогональных заданному полю направлений в пространстве (в каждой точке (x, y, z) направление задается вектором с проекциями P, Q, R). При второй трактовке строятся поверхности, ортогональные тому же полю (или, что то же, имеющие в каждой точке пространства заданную касательную плоскость).

ПЕТРОВСКИЙ Иван Георгиевич

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор *Л.Я. Цлаф*
Технический редактор *М.Д. Кислиновская*
Корректор *Н.А. Лихачева*
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 27.07.09. Формат 84×108/32.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 11.
Уч.-изд. л. 11,7. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15