Заслуженный профессор МГУ

# А. Ф. Филиппов

Автор известнейшего

СБОРНИКА ЗАДАЧ

ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ

УРАВНЕНИЯМ

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Все вопросы программы курса с детальным изложением

•

Примеры решения типовых задач с подробными пояснениями

URSS

**А. Ф. Филиппов**

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Президиум учебно-методического Совета по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию рекомендует к изданию с грифом «Допущено Министерством образования РФ в качестве учебника для студентов высших учебных заведений по группе физико-математических направлений и специальностей»

Издание второе, исправленное

МОСКВА

URSS

ББК 22.161.6 22.1я73

**Филиппов Алексей Федорович**

**Введение в теорию дифференциальных уравнений**: Учебник. Изд. 2-е, испр.
М.: КомКнига, 2007. — 240 с.

Книга содержит весь учебный материал в соответствии с программой Минвуза по курсу дифференциальных уравнений для механико-математических и физико-математических специальностей университетов. Имеется также небольшое количество дополнительного материала, связанного с техническими приложениями. Это позволяет выбирать материал для лекций в зависимости от профиля вуза. Объем книги существенно уменьшен по сравнению с имеющимися учебниками за счет сокращения дополнительного материала и выбора более простых доказательств из имеющихся в учебной литературе.

Теория излагается достаточно подробно и доступно не только для сильных, но и для средних студентов. Приводятся с пояснениями примеры решения типовых задач. В конце параграфов указываются номера задач для упражнений из «Сборника задач по дифференциальным уравнениям» А. Ф. Филиппова и указываются некоторые теоретические направления, примыкающие к изложенным вопросам, со ссылками на литературу (книги на русском языке).

*Рецензенты*:

декан факультета педагогического образования МГУ,
доктор физико-математических наук, профессор *Н. Х. Розов*;

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дифференциальных уравнений
механико-математического факультета МГУ *И. Н. Сергеев*

Издательство «КомКнига». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 15. Зак. № 655.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

13-значный ISBN, вводимый с 2007 г.:
**ISBN 978-5-484-00786-8**
Соотв. 10-значный ISBN, применяемый до 2007 г.:
**ISBN 5-484-00786-0**

# Оглавление

# Предисловие

Книга содержит подробное изложение всех вопросов программы курса обыкновенных дифференциальных уравнений для механико-математических и физико-математических специальностей университетов, а также некоторые другие вопросы, актуальные для современной теории дифференциальных уравнений и приложений: краевые задачи, линейные уравнения с периодическими коэффициентами, асимптотические методы решения дифференциальных уравнений; расширен материал по теории устойчивости.

Новый материал и некоторые вопросы, традиционно включающиеся в курс (например, теоремы о колеблющихся решениях), но не обязательные для первого знакомства с теорией дифференциальных уравнений, даны мелким шрифтом, начало и конец которого отделены горизонтальными стрелками. В зависимости от профиля вуза и направлений подготовки студентов на кафедре остается выбор, что из этих вопросов включать в курс лекций и программу экзамена.

Объем книги существенно меньше объема известных учебников по данному курсу за счет сокращения дополнительного (не входящего в обязательную программу) материала и за счет выбора более простых доказательств из имеющихся в учебной литературе.

Материал излагается подробно и доступно для студентов со средним уровнем подготовки. Используются лишь классические понятия математического анализа и основные сведения из линейной алгебры, включая жорданову форму матрицы. Вводится минимальное число новых определений. После изложения теоретического материала приводятся с подробными пояснениями примеры его применения. Указываются номера задач для упражнений из «Сборника задач по дифференциальным уравнениям» А. Ф. Филиппова.

В конце почти каждого параграфа перечисляются несколько направлений, в которых развивались исследования по данному вопросу, — направлений, которые можно назвать, пользуясь уже известными понятиями, и по которым имеется литература на русском языке.

В каждой главе книги принята своя нумерация теорем, примеров, формул. Ссылки на материал других глав редки и даются с указанием номера главы или параграфа.

# ГЛАВА 1

# Дифференциальные уравнения и их решения

## § 1. Понятие о дифференциальном уравнении

**1.** *Дифференциальным уравнением* называется соотношение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = C, \tag{1}$$

связывающее значения независимого переменного $x$, искомой функции $y = y(x)$ и ее производных до некоторого порядка $n \geqslant 1$. Порядок $n$ старшей производной, входящей в уравнение, называется *порядком уравнения*. Подразумевается, что в (1) значения $y, y', \dots, y^{(n)}$ берутся при одном и том же $x$.

*Решением* уравнения (1) называется функция, определенная на некотором интервале (или отрезке), имеющая производные до порядка $n$ и удовлетворяющая этому уравнению, то есть при подстановке ее в уравнение обращающая его в тождество на этом интервале.

Если искомая функция зависит от нескольких переменных, и в уравнение входят ее частные производные, то уравнение называется *уравнением с частными производными*. Такие уравнения здесь не рассматриваются, кроме последнего параграфа. В отличие от них уравнение (1) называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Примеры показывают, что дифференциальное уравнение, вообще говоря, имеет много решений. Так, уравнению $y' - 2x = 0$ удовлетворяет функция $y = x^2 + c$ при любом постоянном $c$. Если же в задаче, которая привела к дифференциальному уравнению, ищется единственное решение, то должно быть задано и *начальное условие*, то есть значение искомой функции при каком-то значении $x$. Например, задание начального условия $y(1) = 5$ позволяет найти $c$, при котором решение $y = x^2 + c$ уравнения $y' - 2x = 0$ удовлетворяет этому условию: $y = 5$ при $x = 1$, то есть $1^2 + c = 5$, $c = 4$.

В главе 2 будет доказано, что если $f(x, y)$ и $\partial f/\partial y$ непрерывны в области $D$, то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Для уравнения $n$-го порядка $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ нужны $n$ начальных условий

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

$\boxed{2.}$ **Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.** Первые примеры применения дифференциальных уравнений для решения геометрических и физических задач дали Ньютон и Лейбниц.

Рассмотрим несколько задач такого рода.

**Задача 1.** Найти кривую, любая касательная к которой пересекает ось абсцисс в точке, абсцисса которой вдвое меньше абсциссы точки касания.

*Решение задачи.* Запишем уравнение кривой в виде $y = y(x)$. Касательная в точке $M(x, y)$ пересекает ось абсцисс в точке $K$. В прямоугольном треугольнике $MPK$ (рис. 1) известен катет $PM = y$ и $\operatorname{tg}\alpha = y'$ (геометрический смысл производной). Поэтому $KP = PM/\operatorname{tg}\alpha = y/y'$. По условию $KP = OK = OP/2$, то есть $y/y' = x/2$, $xy' = 2y$.

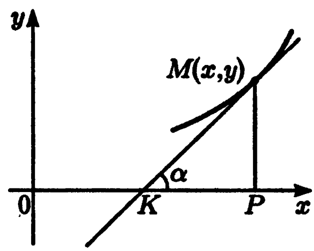



Рис. 1

Решить это уравнение можно методом, изложенным в п. 1 § 2. Это дает $y = cx^2$, $c$ — любое. При $c = 0$ получается прямая $y = 0$, она не является решением задачи. Поэтому искомые кривые $y = cx^2$ $(c \neq 0)$ — параболы. ◄

**Задача 2.** Написать дифференциальное уравнение движения тела с массой $m$ по оси $Ox$ под действием силы $f(t, x, x')$, направленной по этой оси. Здесь $x = x(t)$ — абсцисса и $x' = x'(t)$ — скорость тела в момент $t$.

*Решение задачи.* Согласно второму закону Ньютона имеем $mx'' = f(t, x, x')$. Это — дифференциальное уравнение 2-го порядка, поэтому нужны два начальных условия: положение тела $x(t_0) = x_0$ и его скорость $x'(t_0) = x'_0$ в какой-либо момент $t_0$.

Рассмотрим подробнее частный случай, когда $f$ — упругая сила, по закону Гука пропорциональная отклонению тела от положения равновесия $x = 0$ и направленная в сторону положения равновесия, то есть $f = -kx$. Тогда уравнение движения принимает вид $mx'' = -kx$ и имеет решение $x = c_1 \cos at + c_2 \sin at$, где $a = \sqrt{k/m}$, а $c_1$ и $c_2$ — произвольные постоянные, которые можно найти, зная начальные условия (непосредственно проверяется, что это — решение; метод его отыскания излагается в § 11). ◄

Если движутся $n$ тел, силы взаимодействия которых зависят от положения тел и их скоростей, то написав уравнения движения для каждого тела, получаем систему $n$ дифференциальных уравнений. Если тела движутся не по прямой, а в пространстве, то подобные уравнения пишутся для каждой координаты каждого тела, и получается система из $3n$ уравнений.

**Задача 3.** В электрическую цепь последовательно включены источник постоянного тока с напряжением $V$, катушка самоиндукции $L$, сопротивление $R$ и выключатель, который замыкает цепь при $t = 0$. Найти силу тока в цепи при $t > 0$ (рис. 2).

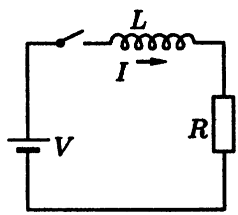



**Рис. 2**

<u>*Решение задачи*</u>. Согласно физическим законам ([7], § 13) при последовательном соединении во всех элементах цепи сила тока $I(t)$ одна и та же. Сумма падений напряжения на всех элементах цепи

равна напряжению источника тока, то есть

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V; \quad I(0) = 0.$$

Решить уравнение можно методом п. 1 § 2. С учетом условия $I(0) = 0$ имеем

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (t > 0).$$

Следовательно, сила тока монотонно возрастает от $I = 0$ при $t = 0$ и стремится (на практике очень быстро) к предельному значению $I(\infty) = V/R$ — к тому значению, которое получилось бы по закону Ома при отсутствии самоиндукции. ◄

Некоторые области применения дифференциальных уравнений: системы автоматического управления; расчет движения ракет, спутников и небесных тел; расчет токов в сложных электрических цепях; динамика механических и физических процессов в технике; кинетика химических реакций; отдельные вопросы биологии.

$\boxed{3.}$ **Геометрический смысл** уравнения $y' = f(x, y)$. Для каждой точки $(x, y)$ из области $D$, где определена функция $f$, уравнение $y' = f(x, y)$ определяет значение производной $y'$ решения, проходящего через эту точку. Но $y' = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha$ — угол наклона касательной к кривой, проходящей через эту точку (рис. 1). Таким образом, уравнение $y' = f(x, y)$ определяет в области $D$ *поле направлений*: в каждой точке уравнение определяет направление касательной к решению, проходящему через эту точку. Можно наглядно изобразить это поле, если в области $D$ взять достаточно «густое» множество из конечного числа точек и через каждую его точку $(x, y)$ провести короткий отрезок под углом $\alpha$ к оси $Ox$, где $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$. Проводя в области $D$ кривые, идущие везде приблизительно по направлению ближайших отрезков, получаем представление о ходе решений данного уравнения.

**Метод изоклин** помогает построить поле направлений. *Изоклиной* (линией равного наклона) для уравнения $y' = f(x, y)$ называется геометрическое место точек, где $f(x, y) = k$, $k = \text{const}$. Для нескольких $k$ из множества значений функции $f$, в том числе для $k = 0$ и $k = \infty$ (если $f(x, y)$ принимает эти значения), строим изоклины $f(x, y) = k$, стараясь не оставить на чертеже больших областей без изоклин или хотя бы без пометок типа «здесь $y' > 2$». Через многие точки каждой изоклины $f(x, y) = k$ проводим короткие отрезки под углом $\alpha$ ($\operatorname{tg}\alpha = k$) к оси $Ox$. По этому полю направлений строим *интегральные кривые* — графики решений данного уравнения. Эти кривые в точках пересечения с каждой изоклиной должны иметь касательные, параллельные отрезкам, построенным на этой изоклине. Иногда полезно проводить не только изоклины, но и другие кривые — такие, которые пересекаются полем направлений только в одну сторону.

**Пример 1.** С помощью метода изоклин приближенно построить несколько интегральных кривых уравнения $y' = x - y^2$.

*Решение примера.* Для нескольких значений $k$, например, для $k = 0, \pm 1, \pm 2$ проведем изоклины $x - y^2 = k$. Это — параболы. Каждую изоклину $x - y^2 = k$ пересечем короткими отрезками под углом $\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = k$, к оси $Ox$, не доходящими до других изоклин. Проведем интегральные кривые, например, через точки $(1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, согласуясь, как указано выше, с направлениями отрезков на изоклинах. Полученный рис. 3 дает общее представление о решениях уравнения $y' = x - y^2$. ◀

Хотя рисунок приближенный, из него можно получить некоторые точные сведения о решениях. В области $x < y^2$ имеем $y' < 0$, и там решения только убывают, а в области $x > y^2$ — только возрастают. На параболе $x = y^2$ имеем $y' = 0$ и интегральные кривые могут пересекать ее только слева направо, достигая минимума в точке пересечения. Поэтому из области $x > y^2$ решения не выходят. В замкнутой области $x \geqslant y^2 + 1$ имеем $y' = x - y^2 \geqslant 1$, поэтому все проходящие там решения, возрастая, входят в полосу между изоклинами $x - y^2 = 1$ и $x - y^2 = 0$ и остаются там, так как поле направлений на границах этой полосы при $y > 1/2$ не дает им выйти.

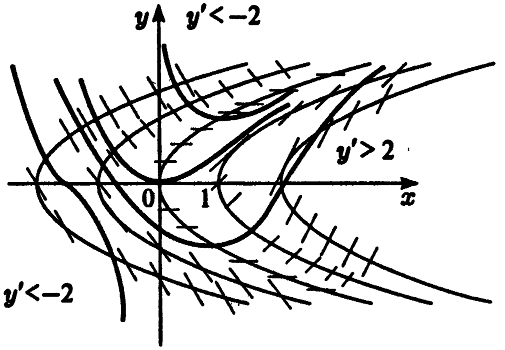



Рис. 3

Метод изоклин обычно дает представление о поведении всех решений данного уравнения. Но он обладает малой точностью и применим только к узким классам уравнений: к уравнениям первого порядка $y' = f(x, y)$, к системам вида

$$\frac{dx}{dt} = p(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = q(x, y)$$

(система сводится к уравнению $dy/dx = q(x, y)/p(x, y)$) и к уравнениям вида $y'' = f(y, y')$ (замена $y' = z$ приводит к системе $y' = z$, $z' = f(y, z)$, отсюда $dz/dy = f(y, z)/z$). Кроме того, если функция $f(x, y)$ сложная, то трудно строить изоклины.

# § 2. Простейшие методы отыскания решений

Рассматриваются основные классы дифференциальных уравнений первого порядка, для которых решения могут быть найдены с помощью тождественных преобразований данного уравнения и замен переменных. Уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ требуют теоретического исследования и будут рассматриваться в § 8.

$\boxed{1.}$ **Уравнения с разделяющимися переменными.** Они могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y). \tag{2}$$

Предполагаем, что функции $f$ и $g$ непрерывны.

Если $g(y) = 0$ при $y = y_1$, $y = y_2$, ..., то функции $y(x) \equiv y_1$, $y(x) \equiv y_2$, ... являются решениями.

В окрестности каждой точки, где $g(y) \neq 0$, разделим обе части уравнения (2) на $g(y)$ и проинтегрируем по $x$ обе части уравнения

$$\begin{gathered} \frac{y'}{g(y)} = f(x), \\ \int \frac{y'dx}{g(y)} = \int f(x)\,dx + c, \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + c. \end{gathered} \tag{3}$$

Неопределенный интеграл здесь означает любую первообразную функцию, то есть такую функцию, производная от которой равна подынтегральной функции. Если две функции равны, то интегралы от них могут отличаться на любую постоянную, то есть в (3) $c$ — произвольная постоянная. Обозначив интегралы в (3) через $H(y)$ и $F(x)$, получаем решение уравнения (2) в неявном виде: $H(y) = F(x) + c$. На любом интервале, где $g(y) \neq 0$, функция $g(y)$ сохраняет знак, значит, функция $H(y)$ строго монотонна, непрерывна и имеет обратную функцию $H^{-1}$. Поэтому решение можно записать и в виде $y = H^{-1}(F(x) + c)$.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 2, № 51–59.

Решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, в случае $g(y_0) = 0$ есть $y(x) \equiv y_0$. В случае $g(y_0) \neq 0$ на интервале, где $g(y) \neq 0$, из (3) получаем решение $y(x)$ в виде

$$\int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x^*)\,dx^*. \tag{4}$$

**Замечание.** Предположим, что $g(y_0) = 0$, $f(x_0) \neq 0$ и что на некотором интервале $y_0 < y < y_1$ (или $y_1 < y < y_0$) имеем $g(y) \neq 0$ и левый интеграл в (4) имеет конечное значение, то есть сходится. Тогда можно показать, что на некотором отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ (или $x_1 \leqslant x \leqslant x_0$) формула (4) также определяет решение уравнения (2). Условию $y(x_0) = y_0$ удовлетворяют и решение (4), и решение $y(x) \equiv y_0$.

**Пример 2.** Решить уравнение $y' = 3y^{2/3}$.

*Решение примера.* Правая часть равна нулю при $y = 0$, поэтому $y(x) \equiv 0$ — решение. Чтобы найти другие решения, делим обе части уравнения на $3y^{2/3}$ и интегрируем:

$$\frac{y'}{3y^{2/3}} = 1, \quad \int \frac{dy}{3y^{2/3}} = \int 1\,dx + c, \qquad y^{1/3} = x + c, \quad y = (x+c)^3. \tag{5}$$

Через любую точку $(x_0, 0)$ оси $Ox$ проходит решение $y(x) \equiv 0$ и решение $y = (x - x_0)^3$, полученное из (5) (рис. 4). Имеются также решения, составленные из двух или трех кусков названных выше решений, например, $ABx$, $NB_3C_3$, $ABB_2C_2$ и т. п.

Такие составные функции являются решениями, так как они всюду имеют производную (в точке стыка правая производная равна левой) и всюду удовлетворяют данному уравнению. ◄

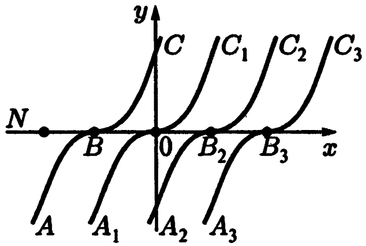



Рис. 4

Уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c)$$

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by + c$, $z = z(x)$. Тогда $z' = a + by'$, следовательно, $z' = a + bf(z)$. Это — уравнение с разделяющимися переменными.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 2, № 60–65.

$\boxed{2.}$ **Запись уравнения в дифференциалах** — это запись

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{6}$$

где $M$ и $N$ — известные функции. Здесь считается, что любую из величин $x$ и $y$ можно назвать искомой функцией, а другую — независимым переменным. Решениями уравнения (6) называются решения хотя бы одного из уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

Например, уравнение $y\,dx + x\,dy = 0$ можно преобразовать к любому из видов

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \text{(а)}, \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} \quad \text{(б)}.$$

Решениями уравнения (а) являются функции $y = c_1/x$ ($c_1$ — любое число, включая нуль), а уравнения (б) — функции $x = c_2/y$ ($c_2$ — любое). Функция $y = 0$ удовлетворяет только уравнению (а), так как для нее символ $dx/dy$ не имеет смысла, а функция $x = 0$ — только уравнению (б). Все эти функции ($y = c_1/x$, $y = 0$ и $x = 0$) называются решениями уравнения $y\,dx + x\,dy = 0$.

**3. Однородные уравнения.** Это уравнения, которые можно записать в виде $y' = f(y/x)$ или в виде (6), где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени. Функция $M(x, y)$ называется *однородной функцией* степени $p$, если для любых $x, y$ и любого $k > 0$

$$M(kx, ky) \equiv k^p M(x, y).$$

Примеры однородных функций:

$$ax + by,\quad ax^2 + bxy + cy^2,\quad 2x + \sqrt[3]{x^3 - 5y^3},\quad \frac{x + 2y}{3x^2 - 4xy},\quad x^2 \sin\frac{y}{x}.$$

Однородные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $y = xz$, $z = z(x)$; следовательно, $y' = xz' + z$. Пример решения однородного уравнения см. в [12], § 4, п. 1.

Однородное уравнение не меняется при одновременной замене $x$ на $kx$, $y$ на $ky$ ($k = \text{const} > 0$), это следует из определения однородного уравнения. Поэтому каждое решение однородного уравнения при такой замене переходит в решение того же уравнения. Из этого следует геометрическое свойство: подобное преобразование $x \to kx$, $y \to ky$ с центром подобия $(0, 0)$ переводит все интегральные кривые однородного уравнения в интегральные кривые того же уравнения.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 4, № 101–112.

Об уравнениях, приводящихся к однородным, см. [12], §4, п. 2 и п. 3. Задачи там же, № 113–120 к п. 2 и № 121–129 к п. 3.

$\boxed{4.}$ **Линейные уравнения** — это те, в которые $y$ и $y'$ входят линейно, то есть в первой степени. Они приводятся к виду

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{7}$$

Чтобы решить это уравнение, сначала решаем уравнение

$$y' = a(x)y. \tag{8}$$

Разделяя переменные, как в (3), получаем

$$\frac{y'}{y} = a(x), \quad \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx + c_1,$$

$$\ln|y| = \int a(x)\,dx + c_1, \quad |y| = e^{c_1}\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = e^{\int a(x)\,dx}$. Значит, $y = \pm e^{c_1}\varphi(x) = c\varphi(x)$ — решение уравнения (8). Здесь $c$ — любое. Значение $c = 0$ дает решение $y = 0$, которое было потеряно при делении на $y$.

Теперь ищем решение уравнения (7) *методом вариации постоянных*. Заменяем постоянную $c$ на пока неизвестную функцию $c(x)$. Подставляя $y = c(x)\varphi(x)$ в (7),получаем

$$c'\varphi + c\varphi' = a(x)c\varphi + b(x). \tag{9}$$

Так как $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (8), то $c\varphi' \equiv a(x)c\varphi$, и из (9) имеем $c'\varphi = b(x)$. Находим $c'(x)$, затем $c(x)$, и получаем решение $y = c(x)\varphi(x)$ уравнения (7).

**Пример 3.** Решить уравнение $xy' = 2y - 2x^4$.

*Решение примера.* Решаем сначала уравнение $xy' = 2y$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}, \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}\,dx + c_1, \qquad \ln|y| = 2\ln|x| + c_1.$$

Отсюда имеем $y = \pm e^{c_1}x^2 = cx^2$. Теперь ищем решение исходного уравнения в виде $y = c(x)x^2$. Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$x^3c' + c\cdot 2x^2 = 2cx^2 - 2x^4, \qquad c' = -2x.$$

Отсюда $c(x) = -x^2 + c_2$ и $y = c(x)x^2 = -x^4 + c_2x^2$ — искомое решение. ◀

Об уравнениях, линейных относительно $x$, см. [12], § 5, п. 2.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 5, № 136–150.

**5.** **Уравнения Бернулли** — это те, которые можно записать в виде

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1). \tag{10}$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ это уравнение — линейное. Чтобы решить уравнение (10), надо обе его части разделить на $y^{\alpha}$

$$y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$$

и ввести новую искомую функцию $z = y^{1-\alpha}$. Тогда

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y',$$

и уравнение сводится к линейному

$$\frac{z'}{1-\alpha} = a(x)z + b(x).$$

Это уравнение решается методом, изложенным в п. 4. Надо помнить, что при делении на $y^\alpha$ в случае $\alpha > 0$ теряется решение $y = 0$.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 5, № 151–160.

**6.** **Уравнение в полных дифференциалах** — это такое уравнение вида (6), левая часть которого есть полный дифференциал от некоторой функции $F(x, y)$. Предполагаем, что функции $M, N, M'_y, N'_x$ непрерывны.

Для существования такой функции $F(x, y)$ необходимо, чтобы $M'_y \equiv N'_x$. В самом деле, $dF(x, y) = F'_x\,dx + F'_y\,dy$; чтобы это равнялось $M dx + N dy$, надо, чтобы выполнялись равенства $M = F'_x$, $N = F'_y$. Но тогда $M'_y = F''_{xy} \equiv F''_{yx} = N'_x$.

В курсе математического анализа доказывается, что в случае, когда функции $M$ и $N$ рассматриваются в односвязной области, то есть в области без «дыр», условие $M'_y \equiv N'_x$ является и достаточным, и функция $F(x, y)$ выражается с помощью криволинейного интеграла.

Излагаемый ниже более простой способ отыскания функции $F(x, y)$ можно применять в любой области, но иногда он дает непрерывную функцию $F(x, y)$ лишь в части области.

Проверяем, что $M'_y \equiv N'_x$. Из уравнения $F'_x = M$ получаем

$$F(x, y) = \int M(x, y)\,dx + \varphi(y). \tag{11}$$

Производная $F'_x$ — частная, она берется при постоянном $y$, поэтому $y$ считается постоянным при интегрировании по $x$. Функция (11) удовлетворяет уравнению $F'_x = M$ при любой функции $\varphi(y)$. Найдем $\varphi(y)$, подставляя выражение (11) в уравнение $F'_y = N$. (Если при отыскании $\varphi(y)$ окажется, что $\varphi'(y)$

зависит и от $x$, то или условие $M'_y \equiv N'_x$ не выполнено, или допущена иная ошибка.)

С найденной функцией $\varphi(y)$ формула (11) дает функцию $F(x, y)$. Данное уравнение (6) запишется в виде $dF(x,y) = 0$. Функция $y(x)$ будет решением уравнения (6), если $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, то есть (так как $M = F'_x$, $N = F'_y$), если

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0, \quad F(x, y(x)) = c = \text{const}.$$

Аналогично, функция $x(y)$ — решение уравнения (6), если $F(x(y), y) = c$.

Таким образом, решения уравнения (6) — это функции $y(x)$ или $x(y)$, определяемые равенством $F(x, y) = c$.

Например, для рассмотренного в п. 2 уравнения $y\,dx + x\,dy = 0$ имеем $F(x, y) = xy$, и решения уравнения — функции $y(x)$ или $x(y)$, определяемые формулой $xy = c$.

Пример решения уравнения изложенным методом см. [12], § 6, п. 1.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 6, № 186–194.

**Интегрирующим множителем** для данного уравнения вида (6) называется функция $m(x, y)$, после умножения на которую данное уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах. Задача отыскания интегрирующего множителя в общем случае столь же трудная, как и задача решения данного уравнения. О приемах, позволяющих в некоторых случаях отыскать такой множитель, см. [9], гл. 2, § 3, п. 3 и [12], § 6, п. 2.

Иногда в записи данного дифференциального уравнения можно выделить такую функцию $\varphi(x, y)$, которая входит в уравнение несколько раз, например, входит и $\varphi(x, y)$, и дифференциал $d\varphi(x, y)$. Тогда в уравнении можно сделать замену $\varphi(x, y) = z$, при этом одну из старых переменных $x$ и $y$ надо выразить через другую и через $z$. В ряде случаев это позволяет упростить или решить уравнение. Примеры см. [12], § 6, п. 3.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 6, № 195–220.

**7.** Рассмотренные выше типы уравнений не охватывают всех уравнений вида $y' = f(x, y)$, решаемых элементарными методами. Много уравнений, допускающих элементарные решения, имеется в справочнике [29], часть 3, глава 1. Большинство из них или принадлежит к рассмотренным выше типам уравнений, или сводится к ним заменами переменных.

Однако произвольно написанное уравнение вида $y' = f(x, y)$, если оно не из самых простых, чаще всего не удается решить с помощью элементарных приемов. Лиувилль показал, что даже среди простых уравнений имеются такие, как например $y' = y^2 + x$, ни одно решение которых не выражается через элементарные функции с помощью конечного числа элементарных действий и операций взятия неопределенного интеграла.

Современные вычислительные машины позволяют вычислить решение конкретного уравнения с большой точностью. Но прежде, чем их применять, надо знать, что решение существует, и знать те свойства решений, которые надо учитывать при вычислениях на машине.

## § 3. Методы понижения порядка уравнений

Для линейных уравнений высших порядков методы решения рассматриваются в § 10 и § 11, для линейных систем — в § 14.

Для некоторых классов нелинейных уравнений применяются методы понижения порядка, позволяющие упростить уравнение, а в некоторых случаях — решить его. Ниже рассматриваются основные классы уравнений, допускающих понижение порядка.

**1.** В уравнение не входит искомая функция (и, возможно, также ее производные до некоторого порядка). Уравнение имеет вид

$$F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \quad (n \geqslant k \geqslant 1).$$

Тогда за новую искомую функцию $z(x)$ берем низшую из производных, входящих в уравнение, то есть $y^{(k)} = z$. Тогда

$$y^{(k+1)} = z', \quad \ldots, \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Порядок уравнения понижается на $k$ единиц.

**2.** В уравнение не входит явно независимое переменное. Уравнение имеет вид

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Тогда берем за новую искомую функцию $y' = p$, а за независимое переменное $y$. Пересчитываем производные:

$$y'_x = p(y), \quad y''_{xx} = p'_x = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p, \quad \ldots .$$

Чтобы заменить $y_x^{(k)}$, надо продифференцировать по $x$ выражение $y_x^{(k-1)}$ через $p, p'_y, \ldots, p_y^{(k-2)}$. Для этого надо его продифференцировать по $y$ и затем умножить на $y'_x$, то есть на $p$. Получим выражение $y_x^{(k)}$ через $p, p'_y, \ldots, p_y^{(k-1)}$. Порядок уравнения понизится на единицу. См. пример в [12], § 10, п. 2.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 10, № 421–450.

**3.** Уравнение однородно относительно искомой функции $y$ и ее производных, то есть не меняется, если каждую из этих величин умножить на одно и то же число $k > 0$. Тогда делаем замену $y' = yz$, где $z = z(x)$ — новая искомая функция. Производные заменяются по формулам

$$y' = yz, \quad y'' = (yz)' = yz' + y'z = yz' + yz^2, \quad \ldots .$$

Здесь все производные берутся по $x$. Выражение для каждой производной $y^{(k)}$ получается путем дифференцирования выражения для $y^{(k-1)}$ и замены $y'$ на $yz$. После подстановки этих выражений в уравнение производится сокращение на $y$ и получается уравнение порядка $n-1$ относительно $z$.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 10, № 463–472.

**4.** Уравнение однородно в обобщенном смысле, то есть не меняется от замены $x$ на $kx$, $y$ на $k^\alpha y$, $k$ — число. При этом $y' \equiv dy/dx$ заменяется на $k^{\alpha-1}y'$, $y''$ — на $k^{\alpha-2}y''$ и т. д. Чтобы узнать, обладает ли данное уравнение этим свойством, и найти число $\alpha$, надо приравнять друг другу показатели степеней, в которых будет входить $k$ в каждый член уравнения после указанной замены. Если найдется такое $\alpha$, при котором все эти показатели равны, то делаем замену переменных $x = e^t$ (при $x > 0$), $y = ze^{\alpha t}$, где $z = z(t)$. Получаем уравнение, не содержащее явно независимого переменного $t$. Порядок такого уравнения понижается одним из предыдущих способов.

**Пример 4.** Понизить порядок уравнения $xy'' - xyy' = y^2 - 2y'$.

*Решение примера.* Пусть $x$ умножается на $k$, $y$ — на $k^\alpha$, $y'$ — на $k^{\alpha-1}$, $y''$ — на $k^{\alpha-2}$. Тогда в уравнении член $xy''$ умножается на $k^{\alpha-1}$, член $xyy'$ — на $k^{2\alpha}$, $y^2$ — на $k^{2\alpha}$, $2y'$ — на $k^{\alpha-1}$. Приравнивая показатели степеней буквы $k$, получаем $\alpha - 1 = 2\alpha$, $\alpha = -1$. Делаем замену $x = e^t$, $y = ze^{-t}$, $z = z(t)$. Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'e^{-t} - ze^{-t}}{e^t} = e^{-2t}(z' - z).$$

Обозначая это выражение через $A$, находим

$$y''_{xx} = A'_x = \frac{A'_t}{x'_t} = \frac{e^{-2t}(z'' - z') - 2e^{-2t}(z' - z)}{e^t} =$$

$$= e^{-3t}(z'' - 3z' + 2z).$$

Подставляя это в данное уравнение, получаем

$$e^{-2t}(z'' - 3z' + 2z) - e^{-2t}z(z' - z) = e^{-2t}z^2 - 2e^{-2t}(z' - z),$$

$$z'' - z' - zz' = 0.$$

В уравнение не входит независимое переменное $t$. Порядок понижается как в п. 2, то есть заменой $z' = p(z)$, $z'' = p'p$. Получаем $p'p - p - zp = 0$, $p(p' - z - 1) = 0$. Найдя решение этого уравнения и перейдя от новых переменных к старым, получим решение исходного уравнения. ◀

*Задачи для упражнений:*
[12], § 10, № 473–480.

**5.** Порядок уравнения легко понижается, если обе части уравнения являются полными производными от некоторых функций. Например, уравнение $y'' = xy' + y$ можно записать в виде $(y')' = (xy)'$. Производные двух функций равны, значит, эти функции могут отличаться только на постоянную: $y' = xy + c$. Порядок уравнения понижен.

Чаще бывает, что уравнение надо преобразовать, прежде чем обе части уравнения станут полными производными.

**Пример 5.** Дано уравнение $yy'' = (y')^2$.

*Решение примера.* Деля обе части на $yy'$, получаем

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}; \quad (\ln|y'|)' = (\ln|y|)',$$
$$\ln|y'| = \ln|y| + \ln|c|, \quad y' = cy. \quad \blacktriangleleft$$

**Пример 6.** Дано уравнение $x^2y'' = 2yy' - 2xy'$.

*Решение примера.* Перенося $2xy'$ влево, получаем

$$x^2y'' + 2xy' = 2yy', \quad (x^2y')' = (y^2)', \quad x^2y' = y^2 + c. \quad \blacktriangleleft$$

*Задачи для упражнений:*
[12], § 10, № 455–462.

В [9], гл. 4, § 4, приведено принадлежащее Эйлеру необходимое и достаточное условие для того, чтобы выражение $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ было полной производной по $x$ от некоторой функции, и пример отыскания этой функции для понижения порядка уравнения $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

О понижении порядка системы дифференциальных уравнений с помощью отыскания интегрируемых комбинаций и первых интегралов см. [12], § 19 или [9], гл. 7, § 5.

# ГЛАВА 2

# Существование и общие свойства решений

В этой главе рассматриваются общие свойства решений дифференциальных уравнений и их систем, не зависящие от конкретного вида функций, входящих в дифференциальные уравнения.

## § 4. Нормальный вид системы дифференциальных уравнений и ее векторная запись

**1.** *Системой нормального вида* называется система

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

В такой системе число уравнений равно числу искомых функций $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. В левой части каждого уравнения системы стоит первая производная одной из искомых функций, в правых частях производных нет.

Одно уравнение $dx/dt = f(t, x)$ является частным случаем такой системы. К таким системам сводятся дифференциальные уравнения $n$-го порядка

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right),$$

(подробнее об этом см. § 5, п. 3), многие более сложные системы и системы, возникающие в механике, физике, технике.

Для исследования общих свойств такой системы удобно использовать векторные обозначения

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad f = (f_1, \dots, f_n).$$

Тогда система записывается в виде одного векторного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{2}$$

Эта запись позволяет доказывать многие теоремы для системы (1) почти так же коротко, как для одного уравнения. Необходимые для этого свойства вектор-функций изложены в п. 2.

*Решение* системы (1) есть совокупность $n$ функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, определенная на некотором интервале (или отрезке) и удовлетворяющая системе. График каждого решения есть линия в $(n+1)$-мерном пространстве с координатами $t, x_1, \dots, x_n$. В каждой ее точке угловые коэффициенты касательной к этой линии в силу (1) равны $f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)$. Таким образом, система (1) определяет *поле направлений* (направлений с этими угловыми коэффициентами) в пространстве $t, x_1, \dots, x_n$ или в той области этого пространства, где определены функции $f_1, \dots, f_n$, а решение системы изображается линией, которая в каждой своей точке касается направления, заданного в этой точке.

Система (1), как и одно дифференциальное уравнение, вообще говоря, имеет много решений. Поэтому для выделения единственного решения надо задавать помимо системы также *начальные условия* $x_1(t_0) = x_{10}, \ldots, x_n(t_0) = x_{n0}$ для (1) или $x(t_0) = x_0$ для (2). Задача отыскания решения данного уравнения или системы с такими начальными условиями называется *начальной задачей*, задачей с начальными условиями или *задачей Коши*.

**2.** **Свойства вектор-функций.** В формулах п. 2 буквы $f, g, x, y, z$ означают векторы из $\mathbb{R}^n$, а другие буквы означают числа, если не сказано иначе.

Из линейной алгебры известны следующие действия с векторами: $x + y$, $x - y$, $\alpha y$, $x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ — скалярное произведение, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ — длина (или модуль) вектора. Известно, что $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (неравенство треугольника), $|x \cdot y| \leqslant |x| \cdot |y|$, то есть

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \leqslant \left[(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2)\right]^{1/2}$$

(неравенство Коши).

Для векторов с комплексными координатами

$$|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2},$$

в неравенстве Коши все $x_i^2$ и $y_i^2$ заменяются на $|x_i|^2$ и $|y_i|^2$; $x \cdot y = \bar{x}_1 y_1 + \ldots + \bar{x}_n y_n$ (числа $\bar{x}_i$ комплексно сопряженные с $x_i$).

Можно дать два равносильных определения предельного перехода для вектор-функции $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$:

а) $\lim\limits_{t \to a} x(t) = x_0$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, t$, $|t - a| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_0| < \varepsilon$;

б) $\lim\limits_{t \to a} x(t) = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$, где $x_{i0} = \lim\limits_{t \to a} x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$.

Равносильность этих определений следует из того, что длина вектора $x(t) - x_0$ стремится к нулю тогда и только тогда, когда каждая его координата стремится к нулю.

Аналогично, определения производной вектор-функции как предела выражения $\big(x(t+h) - x(t)\big)/h$ при $h \to 0$ и определенного интеграла как предела интегральной суммы равносильны покоординатным определениям. Многие свойства производных и интегралов сохраняются для вектор-функций и легко доказываются с помощью покоординатного определения. Однако теоремы о существовании промежуточной точки (теорема Ролля, теорема Лагранжа о конечном приращении, теорема о среднем для интеграла) не обобщаются на вектор-функции. Например, для вектор-функции $x(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ имеем $x(0) = x(2\pi) = (0, 0)$, но не существует такой точки $t \in (0, 2\pi)$, что $x'(t) = (0, 0)$, так как

$$x'(t) = (\sin t, \cos t), \qquad |x'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \equiv 1.$$

Вместо этих теорем для вектор-функций будем пользоваться оценками.

**Оценка интеграла.** Если вектор-функция $y(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\left| \int_a^b y(t)\, dt \right| \leqslant \left| \int_a^b |y(t)|\, dt \right|. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть $a < b$. Интеграл от $y(t)$ есть предел интегральной суммы $\sum y(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$. От замены $y(t_i^*)$ на $|y(t_i^*)|$ модуль суммы не уменьшается и получается интегральная сумма для функции $|y(t)|$ по отрезку $[a, b]$. В пределе при $\max(t_i - t_{i-1}) \to 0$ получается интеграл от $|y(t)|$. Случай $a > b$ сводится к доказанному. ■

**Оценка приращения** вектор-функции. Если $x(t)$ и $y(t) = x'(t)$ непрерывны и $|x'(t)| \leqslant m$, то в силу (3)

$$|x(b) - x(a)| \leqslant m|b - a|. \tag{4}$$

До сих пор было безразлично, записывать ли векторы в виде строк или в виде столбцов. В формулах и рассуждениях, содержащих векторы вместе с матрицами, будем считать векторы столбцами, если не сказано иначе.

Если $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ — матрица, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор, то $y = Ax$ — вектор-столбец с координатами $y_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $|Ax| \leqslant ||A|| \cdot |x|$, где

$$||A|| = \left( \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad |x| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} \tag{5}$$

(числа $a_{ij}$ и $x_j$ могут быть комплексными).

*Доказательство.* В силу неравенства Коши имеем

$$|y_i|^2 \leqslant \left(|a_{i1}|^2 + \ldots + |a_{in}|^2\right)\left(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2\right) = \\ = \left(|a_{i1}|^2 + \ldots + |a_{in}|^2\right)|x|^2,$$

$$|Ax|^2 = |y|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(|a_{i1}|^2 + \ldots + |a_{in}|^2\right)|x|^2 = ||A||^2 \cdot |x|^2. \quad \blacktriangleleft$$

Число $||A||$ называется *нормой матрицы* $A$. Другие известные нормы матрицы, кроме (5), в этой книге не используются.

Пусть $x(t)$ и $f(x)$ — векторы-столбцы, все $x_i'(t)$ и $\partial f_i / \partial x_j$ непрерывны. По правилу дифференцирования сложных функций от $n$ переменных

$$\frac{df_i(x(t))}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}x_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}x_n'(t). \tag{6}$$

Применяя эту формулу к каждой координате $f_i$ вектора $f$, получаем, что $df(x(t))/dt$ — вектор-столбец с координатами (6). Следовательно,

$$\frac{df(x(t))}{dt} = Ax'(t), \quad \text{где матрица} \quad A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}. \tag{7}$$

$\boxed{3.}$ **Условие Липшица.** Функция (или вектор-функция) $f(t, x)$ удовлетворяет *условию Липшица* по $x$ на множестве $D$, если существует такая постоянная $k$, что для каждых двух точек $(t, x) \in D$, $(t, y) \in D$ имеем

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant k|x - y|. \tag{8}$$

**Лемма 1.** *Если вектор-функция $f(t, x)$ ($x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathbb{R}^n, n \geqslant 1$) имеет в выпуклой по $x$ области $D$ частные производные $\partial f_i/\partial x_j$ и $|\partial f_i/\partial x_j| \leqslant l$ ($i, j = 1, \ldots, n$) в $D$, то $f(t, x)$ удовлетворяет в $D$ условию Липшица* (8) *с $k = nl$.*

(Область $D$ называется *выпуклой по $x$*, если для каждой пары ее точек вида $(t, x)$ и $(t, x^*)$ соединяющий их отрезок содержится в $D$.)

*Доказательство.* Полагая $z(s) = y + s \cdot (x - y)$ и $g(s) = f(t, z(s))$, получаем

$$f(t, x) - f(t, y) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)\, ds. \tag{9}$$

Подобно (7)

$$g'(s) = Az'(s) = A(x-y), \quad A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Когда $s$ меняется от 0 до 1, то $z(s)$ пробегает отрезок, соединяющий $y$ и $x$; на этом отрезке $t = \mathrm{const}$. По условию, он содержится в $D$. Значит, на нем $|\partial f_i/\partial x_j| \leqslant l$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, $\|A\| \leqslant nl$, $|g'(s)| \leqslant nl|x-y|$, и из (9) следует (8) с $k = nl$. ■

**Лемма 2 (о дифференциальном неравенстве).** *Если на отрезке $I$, содержащем точку $t_0$, имеем $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $|z'(t)| \leqslant k|z(t)| + m$, $k \geqslant 0$, $|z(t_0)| \leqslant r_0$, то на $I$ в случае $k = 0$ имеем $|z(t)| \leqslant r_0 + m|t - t_0|$, а в случае $k > 0$*

$$|z(t)| \leqslant r_0 e^{k|t-t_0|} + \frac{m}{k}\left(e^{k|t-t_0|} - 1\right). \tag{10}$$

<u>*Доказательство.*</u> Пусть $t_1 \in I$, $t_1 > t_0$, $z(t_1) \neq 0$. Если $z(t) \neq 0$ на $(t_0, t_1)$, то возьмем $t^* = t_0$. В противном случае $t^*$ — верхняя грань таких $t \in [t_0, t_1]$, что $z(t) = 0$. Тогда $z(t^*) = 0$, иначе $t^*$ не было бы верхней гранью. В обоих случаях $|z(t^*)| \leqslant r_0$ и при $t^* < t < t_1$ имеем $z(t) \neq 0$ и существует $|z(t)|' = \left(\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_n^2}\,\right)'$.

Дифференцируя по $t$ обе части равенства $|z|^2 = z \cdot z$, имеем $2|z| \cdot |z|' = 2z \cdot z' \leqslant 2|z| \cdot |z'|$. Сокращая на $2|z|$, получаем $|z|' \leqslant |z'|$, если $z \neq 0$. Обозначая $|z(t)| = r(t)$, имеем $r(t^*) \leqslant r_0$ и $r' = |z|' \leqslant |z'| \leqslant kr + m$ при $t^* < t < t_1$. В случае $k = 0$ отсюда следует требуемое неравенство. В случае $k > 0$ для функции $\varphi(t) = e^{-kt}(r(t) + m/k)$ получаем $\varphi'(t) = e^{-kt}(r' - kr - m) \leqslant 0$. Поэтому функция $\varphi(t)$

не возрастает и $\varphi(t_1) \leqslant \varphi(t^*)$, то есть

$$e^{-kt_1}\left(r(t_1) + \frac{m}{k}\right) \leqslant e^{-kt^*}\left(r(t^*) + \frac{m}{k}\right).$$

Так как $r(t^*) \leqslant r_0$, то

$$r(t_1) \leqslant r_0 e^{k(t_1-t^*)} + \frac{m}{k}\left(e^{k(t_1-t^*)} - 1\right).$$

Число $t_1 \in I$ любое, большее $t_0$, и $t_1 - t^* \leqslant t_1 - t_0$, поэтому неравенство (10) при любом $t \in I$, $t \geqslant t_0$ доказано. Случай $t < t_0$ сводится к рассмотренному заменой $t$ на $-t$, $t_0$ на $-t_0$, тогда в формулировке леммы $|z'(t)|$ и $|t - t_0|$ не меняются. ■

## § 5. Существование и единственность решения

В § 5 даются теорема единственности решения системы нормального вида с начальным условием $x(t_0) = x_0$ и два доказательства существования решения: методом последовательных приближений (доказательство Пикара) и более короткое — путем перехода к уравнению с запаздыванием (вариант доказательства Тоннели). Достаточно прочитать любое из этих доказательств.

**1.**

**Теорема 1 (о единственности решения).** *Пусть в области $D$ вектор-функция $f(t,x)$ и ее производные $\partial f_i/\partial x_j$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ непрерывны. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in D$ может существовать не более одного решения задачи*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{11}$$

*Точнее, любые два решения этой задачи совпадают на общей части их интервалов существования.*

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $x(t)$ и $y(t)$ задачи (11), $x(t_0) = y(t_0)$, $x(t_1) \neq y(t_1)$ при некотором $t_1 > t_0$. (Случай $t_1 < t_0$ сводится к рассматриваемому заменой $t$ на $-t$.)

Пусть $z(t) = x(t) - y(t)$, а $t^*$ — верхняя грань таких $t \in [t_0, t_1]$, при которых $z(t) = 0$. Тогда $z(t^*) = 0$ и $z(t) \neq 0$ для всех $t \in (t^*, t_1]$ (иначе число $t^*$ не было бы верхней гранью).

Пусть $S$ — содержащийся в $D$ шар

$$(t - t^*)^2 + |x - x(t^*)|^2 \leqslant h^2, \quad h > 0.$$

В этом шаре все $\partial f_i / \partial x_j$ непрерывны, значит, ограничены, и функция $f$ там удовлетворяет условию (8). Поэтому

$$|z'| = |x' - y'| = |f(t,x) - f(t,y)| \leqslant k|x - y| = k|z|.$$

Тогда из леммы 2 следует $z(t) = 0$ при $t^* \leqslant t \leqslant t_1$. Это противоречит предположению, что $x(t_1) \neq y(t_1)$. ■

**2.**

**Лемма 3.** *Если функция $f(t,x)$ непрерывна, то любое решение задачи (11) удовлетворяет интегральному уравнению*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \qquad (12)$$

замена — [illegible] [illegible] [illegible] не [illegible]

*и любое непрерывное на интервале (или отрезке) $I$ ($t_0 \in I$) решение уравнения (12) является решением задачи (11). (Если $I$ — отрезок, то производные в его концах — односторонние.)*

*Доказательство.* Пусть $x(t)$ — решение задачи (11). Интегрируя обе части равенства $dx(t)/dt = f(t, x(t))$ от $t_0$ до $t$, получаем, что интеграл в (12) равен $x(t) - x(t_0)$. Но $x(t_0) = x_0$, поэтому функция $x(t)$ удовлетворяет (12).

Пусть непрерывная функция $x(t)$ удовлетворяет (12) на $I$, $t_0 \in I$. Тогда на $I$ сложная функция $f(s, x(s))$ непрерывна, поэтому производная по $t$ от правой части (12), значит, и от левой, то есть от $x(t)$, существует (односторонняя производная в концах отрезка $I$) и равна $f(t, x(t))$. Следовательно, $x(t)$ удовлетворяет уравнению (11). Из (12) при $t = t_0$ получаем $x(t_0) = x_0$. ■

**Теорема 2 (о существовании и единственности решения).** *Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ вектор-функция $f(t, x)$ и ее производные $\partial f_i/\partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in D$ задача (11) имеет единственное решение на отрезке $I[t_0 - d \leqslant t \leqslant t_0 + d]$, где $d = r/\sqrt{m^2 + 1} > 0$, $r$ таково, что шар*

$$S\left((t - t_0)^2 + |x - x_0|^2 \leqslant r^2\right)$$

*содержится в $D$; $m = \max |f|$ в $S$.*

По теореме 1 может существовать не более одного решения задачи (11), а согласно лемме 3 достаточно доказать существование непрерывного решения интегрального уравнения (12). Приведем два из многих известных способов доказательства этого.

*Доказательство Пикара* ([9], гл. 2, § 1, гл.4, § 1 или [6], § 14). Построим последовательные приближения $x^p(t)$ $(p = 0, 1, 2, \ldots$

— номер приближения) к решению уравнения (12). Возьмем

$$x^0(t) \equiv x_0,$$
$$x^p(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x^{p-1}(s))\,ds, \quad p = 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Покажем, что на отрезке $I$ все приближения $x^p(t)$ определены, непрерывны и $|x^p(t) - x_0| \leqslant md$. Для $x^0(t)$ это верно. Предположим, что функция $x^{p-1}(t)$ на $I$ определена, непрерывна и $|x^{p-1}(t) - x_0| \leqslant md$. Тогда при $s \in I$ точка $(s, x^{p-1}(s)) \in S$, в (13) функция $f(s, x(s))$ определена, непрерывна и $\left|f(s, x^{p-1}(s))\right| \leqslant m$. Значит, при $t \in I$ интеграл в (13) — непрерывная функция от $t$, по модулю не превосходящая $md$. Поэтому на $I$ функция $x^p(t)$ определена, непрерывна и $|x^p(t) - x_0| \leqslant md$. По индукции это верно для всех $p = 1, 2, 3, \ldots$.

Покажем, что последовательность $x^p(t)$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ равномерно сходится на $I$. Это равносильно равномерной сходимости ряда

$$x^0(t) + \left(x^1(t) - x^0(t)\right) + \left(x^2(t) - x^1(t)\right) + \ldots, \tag{14}$$

так как его частные суммы являются функциями $x^0(t), x^1(t), x^2(t), \ldots$. Оценим по индукции члены ряда на отрезке $I$. Из (13) получаем согласно (4)

$$\left|x^1(t) - x^0(t)\right| \leqslant m|t - t_0|. \tag{15}$$

Покажем, что на $I$ при некотором $k$ для любого $p \geqslant 0$

$$\left|x^{p+1}(t) - x^p(t)\right| \leqslant \frac{mk^p|t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!}. \tag{16}$$

Для $p = 0$ это доказано в (15). Пусть это верно для $p = q - 1$. Докажем, что это верно и для $p = q$. Напишем равенство (13) для $p = q$ и для $p = q + 1$ и вычтем из второго равенства первое. Получим

$$x^{q+1}(t) - x^q(t) = \int_{t_0}^{t} \left(f(s, x^q(s)) - f(s, x^{q-1}(s))\right) ds. \quad (17)$$

Для всех $p$ точки $(t, x^p(t)) \in S$ при $t \in I$. В $S$ все $\partial f_i/\partial x_j$ непрерывны, значит, ограничены, и по лемме 1 функция $f$ в $S$ удовлетворяет условию Липшица (8). Поэтому в (17)

$$\left|f(s, x^q(s)) - f(s, x^{q-1}(s))\right| \leqslant$$
$$\leqslant k\left|x^q(s) - x^{q-1}(s)\right| \leqslant \frac{mk^q|s - t_0|^q}{q!}. \quad (18)$$

Последнее неравенство вытекает из (16) при $p = q - 1$. Подынтегральная функция в (17) имеет оценку (18), поэтому в силу (3) при $t \in I$

$$\left|x^{q+1}(t) - x^q(t)\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} \frac{mk^q|s - t_0|^q}{q!}\, ds\right| = \frac{mk^q|t - t_0|^{q+1}}{(q+1)!}.$$

Значит, неравенство (16) верно и при $p = q$. По индукции оно верно для всех $p = 0, 1, 2 \ldots$. Таким образом, члены ряда (14), кроме первого члена, при $|t - t_0| \leqslant d$ по модулю не больше членов числового ряда $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, где $a_{p+1} = mk^p d^{p+1}/(p+1)!$.

Каждая координата $u_i^{p+1}(t)$ вектора $x^{p+1}(t) - x^p(t)$ не больше его длины, поэтому тоже имеет оценку (16), то есть

$$\left|u_i^{p+1}(t)\right| \leqslant a_{p+1} = \frac{mk^p d^{p+1}}{(p+1)!} \quad \left(|t - t_0| \leqslant d,\ i = 1, \ldots, n\right).$$

Ряд $\sum a_{p+1}$ сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{p\to\infty} \frac{a_{p+1}}{a_p} = \lim_{p\to\infty} \frac{kd}{p+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, для каждого $i$ ряд $u_i^0 + u_i^1 + u_i^2 + \ldots$ из $i$-х координат ряда (14) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $I$ по признаку Вейерштрасса. А так как члены ряда — непрерывные функции, то его сумма — тоже. Значит, и векторный ряд (14) на отрезке $I$ равномерно сходится к непрерывной вектор-функции, которую обозначим $x(t)$. То есть последовательность приближений $x^p(t)$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ на $I$ равномерно сходится к $x(t)$.

Покажем, что $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (12). Для этого перейдем к пределу в равенстве (13). Разность правых частей равенств (13) и (12) имеет в силу (8) оценку

$$\left|\int_{t_0}^{t} \left|f(s, x^{p-1}(s)) - f(s, x(s))\right| ds\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} k\left|x^{p-1}(s) - x(s)\right| ds\right|.$$

При $p \to \infty$ подынтегральная функция на $I$ равномерно стремится к нулю. Тогда интеграл стремится к нулю, и правая часть (13) стремится к правой части (12). Левая часть тоже. Значит, предельная функция $x(t)$ на отрезке $I$ удовлетворяет уравнению (12). По лемме 3 она является решением задачи (11). Существование решения доказано. Единственность доказана в теореме 1. ■

Далее излагается другое доказательство теоремы 2 при тех же предположениях.

*Доказательство Тоннели* ([37], т. 1, гл. 1, § 6, п. 3) (благодаря предположению о непрерывности $\partial f_i/\partial x_j$ не требуется применять теорему Арцела).

Возьмем такие $r, m, d, S$, как в формулировке теоремы, тогда в шаре $S$ имеем $|f| \leqslant m$ и справедливо (8). Для любого целого $p \geqslant 2$ возьмем $h = h_p = d/p$ и построим приближенные решения уравнения (12). Положим $y_p(t) = x_0$ при $t_0 - h_p \leqslant t \leqslant t_0$, а на отрезках $[t_0 + (i-1)h_p,\ t_0 + ih_p]$, $i = 1, 2, \ldots, p$, последовательно определим $y_p(t)$ равенством

$$y_p(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y_p(s - h_p))\,ds. \tag{19}$$

Если $i \geqslant 1$ и при $t_0 - h_p \leqslant t \leqslant t_0 + (i-1)h_p$ функция $y_p(t)$ определена, непрерывна и $|y_p(t) - x_0| \leqslant md$, то это же верно и при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + ih_p$, так как при таких $t$ точка $(t, y_p(t - h_p)) \in S$,

$$\begin{gathered} y_p'(t) = f(t, y_p(t - h_p)), \quad |y_p'(t)| \leqslant m, \\ |y_p(t) - x_0| \leqslant m|t - t_0| \leqslant md. \end{gathered} \tag{20}$$

По индукции получаем, что на отрезке $J$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + d)$ функции $y_p(t)$ и $y_p'(t)$ непрерывны и справедливо (20).

Оценим разность $z(t) = y_p(t) - y_q(t)$ приближенных решений с $h = h_p$ и с $h = h_q$. В силу (20) и (8)

$$\begin{gathered} |z'(t)| = \big|f(t, y_p(t - h_p)) - f(t, y_q(t - h_q))\big| \leqslant \\ \leqslant k\big|y_p(t - h_p) - y_q(t - h_q)\big| \equiv \\ \equiv k\Big|\big(y_p(t - h_p) - y_p(t)\big) - \big(y_q(t - h_q) - y_q(t)\big) + \big(y_p(t) - y_q(t)\big)\Big|. \end{gathered}$$

Так как $|y_p'| \leqslant m$, $|y_q'| \leqslant m$, то при $t \in J$

$$|z'(t)| \leqslant kmh_p + kmh_q + k|z(t)|; \quad z(t_0) = 0.$$

В силу леммы 2 получаем при $t \in J$

$$|z(t)| \leqslant m(h_p + h_q)\left(e^{k|t-t_0|} - 1\right) \leqslant m(h_p + h_q)\left(e^{kd} - 1\right). \quad (21)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $p_1$, что при $p > p_1$, $q > p_1$, правая часть (21) меньше $\varepsilon$. Тогда $|y_p(t) - y_q(t)| < \varepsilon$ на $J$, то есть последовательность непрерывных функций $\{y_p(t)\}$, $p = 2, 3, 4, \ldots$, удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости на $J$. Значит, она сходится равномерно к непрерывной функции, которую обозначим $x(t)$.

Покажем, что $x(t)$ — решение уравнения (12). При $p > p^*(\delta)$ имеем на $J$

$$\begin{gathered} \left|y_p(t-h_p) - y_p(t)\right| \leqslant m h_p < \frac{\delta}{2}, \quad \left|y_p(t) - x(t)\right| < \frac{\delta}{2}, \\ \left|f(t, y_p(t-h_p)) - f(t, x(t))\right| \leqslant k\left|y_p(t-h_p) - x(t)\right| < k\delta. \end{gathered} \quad (22)$$

Правая часть сколь угодно мала при малых $\delta$. Значит, в (19) $f(s, y_p(s - h_p)) \rightrightarrows f(s, x(s))$ при $p \to \infty$. В пределе равенство (19) превращается в (12). Итак, $x(t)$ — решение уравнения (12), значит, и задачи (11) при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + d$. Случай $t_0 - d \leqslant t \leqslant t_0$ сводится к рассмотренному заменой $t$ на $-t$. Существование решения доказано, а единственность следует из теоремы 1. ■

*Задачи для упражнений:*
[12], № 223, 225, 226, 228 д, е.

**Теорема 2а.** *Если вектор-функция $f(t, x)$ в области $D \subset R^{n+1}$ непрерывна, то для любой точки $(t_0, x_0) \in D$ на некотором отрезке $t_0 - d \leqslant t \leqslant t_0 + d$ ($d > 0$ то же, что в теореме 2) существует решение задачи (11).*

*Доказательство.* Приближенные решения $y_p(t)$ строятся и оцениваются как в (19) и (20). В силу оценок (20) и (3) на отрезке $J$ все $y_p(t)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. По теореме Арцела из них можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{y_{p_i}\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Ее предел — непрерывная функция $x(t)$.

Переход от (19) к (12) при $p = p_i \to \infty$ проводится как в предыдущем доказательстве, кроме оценки (22). При достаточно малом $\delta$ из неравенства $\left|y_{p_i}(t - h_{p_i}) - x(t)\right| < \delta$ и равномерной непрерывности функции $f$ в $S$ следует, что левая часть (22) меньше $\varepsilon$. Значит, при $p = p_i \to \infty$ равенство (19) превращается в (12). Поэтому $x(t)$ — решение задачи (11). ■

**Замечание.** В случае, когда на функцию $f(t, x)$ не налагается других условий, кроме непрерывности, задача (11) может иметь более одного решения. Например, задача $dx/dt = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$ имеет решения $x = 0$ и $x = t^3$, см. пример 2 § 2 и рис. 4.

**3.**

**Теорема 3 (о существовании и единственности решения для уравнения $n$-го порядка).** *Дано уравнение с начальными условиями*

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{23}$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{24}$$

*Пусть в области $D \subset R^{n+1}$ функция $f$ непрерывна по совокупности всех своих аргументов, имеет непрерывные частные производные 1-го порядка по $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, и начальная точка $\left(t_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ лежит внутри $D$. Тогда на некотором* *отрезке* $t_0 - d \leqslant t \leqslant t_0 + d$ $(d > 0)$ *существует единственное решение задачи* (23), (24).

*Доказательство.* Переходим от уравнения (23) к системе уравнений с помощью введения новых переменных

$$\begin{gathered} x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \\ \ldots, \quad x_{n-1} = y^{(n-2)}, \quad x_n = y^{(n-1)}. \end{gathered} \tag{25}$$

Из этих равенств получаем первые $n - 1$ уравнений следующей системы, а $n$-е уравнение получаем из (23) с учетом замены (25) и того, что $y^{(n)} = x_n'$:

$$\begin{gathered} x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad \ldots, \\ x_{n-1}' = x_n, \quad x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n). \end{gathered} \tag{26}$$

Из (24) и (25) получаем начальные условия для системы (26)

$$x_1(t_0) = y_0, \quad x_2(t_0) = y_0', \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{27}$$

Таким образом, каждое решение уравнения (23) с помощью замены (25) переходит в решение системы (26). Обратно, для каждого решения системы (26) в силу замены (25) у функции $y = x_1$ существует $y^{(n)} = x_n' = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$. Соответствие между начальными условиями (24) и (27) очевидно.

Если задача (23), (24) удовлетворяет условиям доказываемой теоремы, то задача (26), (27) удовлетворяет условиям теоремы 2 и поэтому имеет единственное решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ $(t_0 - d \leqslant t \leqslant t_0 + d)$. Первая координата $x_1(t)$ этого решения в силу доказанного является решением задачи (23), (24). ■

Геометрическая иллюстрация теорем существования и единственности. Для простоты будем предполагать, что функция $f$ и ее частные производные первого порядка непрерывны всюду.

Для дифференциального уравнения 1-го порядка $x' = f(t, x)$ или системы нормального вида теорема 1 означает, что через любую точку $(t_0, x_0)$ проходит ровно одно решение, точнее, график решения.

Для уравнения $y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ порядка $n \geqslant 2$ рассматриваются графики решений $y(t)$ на плоскости $t, y$. В силу теоремы 3 для уравнения 2-го порядка при начальных условиях $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ существует единственное решение. Значит, через точку $(t_0, y_0)$ проходит бесконечно много решений, различающихся значениями $y'(t_0) = y_0'$, то есть направлениями касательной к графику решения в этой точке. Но два разных решения не могут иметь в этой точке одну и ту же производную $y'(t_0)$, следовательно, не могут касаться друг друга.

Для уравнения 3-го порядка задаются начальные условия $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$, $y''(t_0) = y_0''$. Значит, через точку $(t_0, x_0)$ по каждому направлению (с угловым коэффициентом $y_0'$, здесь $y_0'$ произвольное) проходит бесконечно много решений. Они касаются друг друга и различаются значениями $y''(t_0)$. По любому другому направлению (с другим значением $y_0'$) проходит тоже бесконечно много решений.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 7, № 228 а–г, 229–234; § 21, № 13, 14, 16, 18–27.

К системам нормального вида с помощью аналогичных замен можно свести широкий класс систем уравнений, содержащих производные высших порядков, а именно *системы, разрешенные относительно старших производных*. В таких системах число уравнений равно числу искомых функций, для каждой искомой функции выделяется старшая из входящих в систему производных, она стоит в левой части одного из уравнений системы, а в правых частях нет этих старших производных. Например, такова система

$$y''' = f(t, y, y', y'', z, z'), \quad z'' = g(t, y, y', y'', z, z').$$

Заменой $y = x_1$, $y' = x_2$, $y'' = x_3$, $z = x_4$, $z' = x_5$ эта система сводится к системе нормального вида

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = f(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$
$$x_4' = x_5, \quad x_5' = g(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

**4.** Известны и другие теоремы о существовании решения.

**Теорема Коши (о существовании решения, разлагающегося в степенной ряд).** *Если функция $f(t,x)$ разлагается в сходящийся ряд $\sum\limits_{k,m=0}^{\infty}(t-t_0)^k(x-x_0)^m$ в окрестности точки $(t_0, x_0)$, то задача $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ на некотором интервале $(t_0-\delta, t_0+\delta)$, $\delta > 0$, имеет единственное решение, представимое сходящимся рядом*

$$x(t) = x_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \ldots . \tag{28}$$

*Теорема справедлива и для системы дифференциальных уравнений.*

Доказательство имеется в [6], § 17, и в [2], гл. 6, § 4. Методы отыскания коэффициентов ряда (28) см. там же и в [12], § 18, п. 4. Хотя полученный ряд обычно сходится только на малом интервале, он часто используется в вычислительной математике для самого начала вычислений.

Распространение теоремы существования решения на дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями связано с обобщением понятия решения, так как функция, называемая решением, может не всюду иметь производную. В следующей теореме решением задачи (11) называется решение интегрального уравнения (12), интеграл и интегрируемость понимаются в смысле Лебега.

**Теорема Каратеодори** ([37], т. 2, гл. 8, § 8, п. 1). *Пусть в конечной области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна по $x$, интегрируема по $t$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ ($(t, x) \in D$), и пусть существует такая интегрируемая функция $m(t)$, что $|f(t, x)| \leqslant m(t)$ в $D$. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in D$ существует решение $x(t)$ задачи* (11). *Если функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию: для любых $(t, x), (t, y) \in D$*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant k(t)|x - y|,$$

*где $k(t)$ интегрируема, то решение единственно.*

Системы автоматического управления с переключениями описываются дифференциальными уравнениями $x' = f(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, с разрывными по $x$ функциями $f(t, x)$. Для таких уравнений рассматривался вопрос, какими должны быть решения, идущие по поверхности разрыва, чтобы они хотя бы приближенно описывали движения в реальной физической системе [35], гл. 1, § 3, [38], § 4, § 8, п. 3. Исследовались свойства решений в таких системах.

Известно много достаточных условий единственности решения. Ниже приводится условие, обеспечивающее единственность при $t > t_0$ решения задачи $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Именно такая единственность нужна в технических приложениях.

Пусть существует такая интегрируемая функция $k(t)$, что для любых точек $(t, x)$, $(t, y)$ области $D \in \mathbb{R}^{n+1}$ имеем

$$(f(t, x) - f(t, y)) \cdot (x - y) \leqslant k(t)|x - y|^2,$$

(произведение векторов — скалярное). Тогда для любого начального условия $x(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in D$ при $t > t_0$ может существовать не более одного решения (точнее, любые два решения совпадают на общей части их интервалов существования при $t > t_0$).

# § 6. Продолжение решений

В § 5 было доказано существование решения на некотором отрезке. Здесь показывается, что решение, вообще говоря, можно продолжить на существенно больший отрезок или интервал.

1. p.36

**Теорема 4 (о продолжении решения в замкнутой ограниченной области).** *Пусть вектор-функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 в замкнутой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда любое решение $x(t)$ уравнения $x' = f(t, x)$, проходящее внутри области $D$, можно продолжить в обе стороны до выхода на границу $\Gamma$ области $D$, то есть продолжить на такой отрезок $[a, b]$, что точки $(a, x(a))$ и $(b, x(b))$ лежат на $\Gamma$.*

*Доказательство.* Найдется такое $m$, что $|f(t, x)| \leqslant m$ в $D$. По теореме 2 решение, проходящее через точку $P_0(t_0, x_0)$ внутри $D$, существует на отрезке $I_0 = [t_0 - d_0, t_0 + d_0]$, $d_0 = r_0/\sqrt{m^2+1}$, $r_0 = \rho(P_0, \Gamma)$ — расстояние от точки $P_0$ до $\Gamma$. Положим $t_0 + d_0 = t_1, x(t_1) = x_1$, $P_1$ — точка $(t_1, x_1)$. Если точка $P_1$ внутри $D$, то беря ее за начальную точку, по теореме 2 получаем, что решение $\widetilde{x}$, проходящее через точку $P_1$, существует на отрезке $I_1 = [t_1 - d_1, t_1 + d_1]$, $d_1 = r_1/\sqrt{m^2+1}$, $r_1 = \rho(P_1, \Gamma)$. Так как $\widetilde{x}(t_1) = x_1 = x(t_1)$, то решения $x$ и $\widetilde{x}$ совпадают там, где они оба определены. Значит, функция, равная $x(t)$ на $I_0$ и $\widetilde{x}(t)$ на $I_1$, является решением — продолжением решения $x(t)$ на отрезок $[t_0 - d_0, t_1 + d_1]$. Обозначим ее снова $x(t)$. Затем берем точку $P_2 = (t_2, x_2)$, где $t_2 = t_1 + d_1$, $x_2 = x(t_2)$, за начальную, продолжаем решение дальше, и т. д.

Возможны два случая: или после конечного числа таких шагов решение будет продолжено до точки на Г, что и требовалось, или получим последовательность точек $P_k(t_k, x_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, где

$$t_{k+1} = t_k + d_k, \quad d_k = \frac{r_k}{\sqrt{m^2+1}}, \quad r_k = \rho(P_k, \Gamma) > 0. \qquad (29)$$

Область $D$ ограничена, поэтому числа $t_k$ ограничены и существует $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = b$. Решение $x(t)$ продолжалось на каждый отрезок $[t_k, t_{k+1}]$, значит, оно продолжено на их объединение $[t_0, b)$. Так как $|x'(t)| = \left|f(t, x(t))\right| \leqslant m$, то в силу (3) для любых $\alpha$, $\beta \in (b-\delta, b)$ имеем $|x(\beta) - x(\alpha)| \leqslant m|\beta - \alpha| < m\delta$. Поэтому в силу критерия сходимости Коши существует $\lim\limits_{t\to b-0} x(t) = x^*$. Полагаем $x(b) = x^*$, тогда функция $x(t)$ непрерывна на $[t_0, b]$ и точки $P_k(t_k, x_k) \to P^*(b, x(b))$ при $k \to \infty$.

Покажем, что $P^* \in \Gamma$. Так как $t_{k+1} = t_1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_k \to b$ при $k \to \infty$, то ряд $d_1 + d_2 + \ldots$ сходится и $d_k \to 0$ при $k \to \infty$. В силу (29) $\rho(P_k, \Gamma) \to 0$. Если бы $P^* \notin \Gamma$, то при некотором $\varepsilon > 0$ Г лежала бы вне шара $S_{2\varepsilon}(P^*)$ с центром $P^*$ и радиусом $2\varepsilon$. Но $P_k \to P^*$, поэтому при $k > k_1$, точки $P_k$ лежат в шаре $S_\varepsilon(P^*)$, значит, удалены от Г на расстояние, не меньшее $\varepsilon$. Это противоречит тому, что $\rho(P_k, \Gamma) \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, предположение $P^* \notin \Gamma$ неверно, и $P^* \in \Gamma$. То есть решение $x(t)$ продолжено вправо до границы Г области $D$.

Функция $x(t)$ — решение задачи (11) при $t_0 \leqslant t < b$, значит, она удовлетворяет интегральному уравнению (12) при этих $t$, а так как она непрерывна, то и на отрезке $[t_0, b]$. Тогда по лемме 3 она имеет левую производную

$x'_{\text{лев}}(b) = f(b, x(b))$, то есть удовлетворяет уравнению (11) при $t_0 \leqslant t \leqslant b$.

При $t < t_0$ решение продолжается аналогично. ■

**Следствие.** *Пусть $D$ — такая замкнутая неограниченная область пространства $t, x$, что при любых $c$ и $d$ часть $D_{cd}$ области $D$, где $c \leqslant t \leqslant d$, ограничена. Пусть уравнение $x' = f(t, x)$ в $D$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда решение $x(t)$, проходящее через произвольную точку $(t_1, x_1)$ внутри $D$, продолжается в каждую сторону или до выхода на границу области $D$, или до сколь угодно больших $|t|$.*

*Доказательство.* Возьмем такие $c$ и $d_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, что $c < t_1 < d_1 < d_2 < \ldots \to \infty$. Для любого $i$ по теореме 4 решение можно продолжить в обе стороны до точек $(a, x(a))$ и $(b_i, x(b_i))$, лежащих на границе области $D_{cd_i}$. Если $b_i < d_i$ при некотором $i$, то точка $(b_i, x(b_i))$ лежит на границе области $D$. Если же для каждого $i$ имеем $b_i = d_i$, то решение продолжается вправо до сколь угодно больших $t$. Аналогично продолжаем решение влево. ■

**Пример 1.** Доказать, что любое решение уравнения $x' = t^3 - x^3$ продолжается вправо до сколь угодно больших $t$.

*Решение примера.* Уравнение удовлетворяет условиям теоремы 2, так как функции $f = t^3 - x^3$ и $f'_x = -3x^2$ непрерывны при всех $t, x$.

В области $x > t$ решения только убывают (там $x' = t^3 - x^3 < 0$), поэтому они достигают прямой $x = t$ и переходят в область $x < t$.

В области $x < t$ все решения только возрастают (там $x' = t^3 - x^3 > 0$). Пусть $(t_1, x_1)$ — точка на графике решения. При $t > t_1$ решение остается в области $D$ ($x_1 - 1 < x < t$), не выходя на ее границы (мешает поле направлений, см. рис. 5). В силу следствия теоремы 4 решение продолжается вправо до сколь угодно больших $t$. ◄

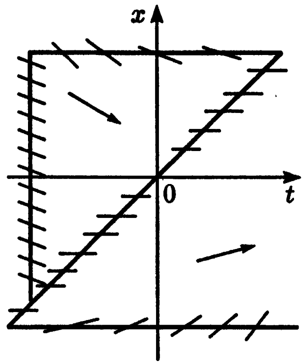


Рис. 5

Условия непрерывности $f(t, x)$ и ее производных во всем пространстве $t, x$ недостаточны для продолжимости решений уравнения $x' = f(t, x)$ на бесконечный интервал $-\infty < t < \infty$ или $t_0 < t < \infty$.

**Пример 2.** Уравнение $x' = x^2 + 1$ имеет решения $x = \mathrm{tg}(t + c)$, число $c$ произвольно. Каждое решение существует только на интервале длины $\pi$ и при приближении к его концам стремится к $-\infty$ или к $+\infty$. Такие решения не могут быть продолжены.

**2.**

**Теорема 5 (о продолжении решения на весь заданный интервал).** *Пусть вектор-функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 в области $\alpha < t < \beta$, $x \in \mathbb{R}^n$ (допускаются случаи*

*$\alpha = -\infty$ и $\beta = \infty$) и*

$$|f(t,x)| \leqslant a(t)|x| + b(t), \tag{30}$$

*функции $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны. Тогда каждое решение уравнения $x' = f(t,x)$, проходящее в этой области, можно продолжить на весь интервал $(\alpha, \beta)$.*

*Доказательство.* Покажем, что для любого отрезка $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$ любое решение $x(t)$, заданное при $t = t_0 \in (\alpha_1, \beta_1)$, можно продолжить на весь отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$. На этом отрезке имеем $|a(t)| \leqslant k$, $|b(t)| \leqslant m$, поэтому $|x'| = |f(t,x)| \leqslant k|x| + m$. Возьмем $d = |x(t_0)|$ и $R$, равное максимуму правой части в (10) на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$. По теореме 4 решение можно продолжить в обе стороны до выхода на границу цилиндра $Z$ ($\alpha_1 \leqslant t \leqslant \beta_1$, $|x| \leqslant R + 1$). По лемме 2 из неравенства $|x'| \leqslant k|x| + m$ следует, что $|x(t)| \leqslant R$ на той части отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$, где существует решение. Поэтому решение $x(t)$ не может выйти на боковую поверхность $|x| = R + 1$ цилиндра $Z$. Тогда оно продолжается до выхода на оба основания цилиндра, то есть на весь отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$.

Возьмем последовательности $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots \to \alpha$ и $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots \to \beta$. Из доказанного следует, что решение $x(t)$ можно продолжить на отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$, затем на $[\alpha_2, \beta_2]$ и т. д. Тогда решение будет продолжено на объединение этих отрезков, то есть на весь интервал $(\alpha, \beta)$. ■

**3.** Известны также односторонние оценки, при наличии которых решение неограниченно продолжается в сторону возрастания $t$. Например, если вектор-функция $f(t,x)$ при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет условию $x \cdot f(t,x) \leqslant a(t)|x|^2 + b(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны, то для любого решения $x(t)$ при $t \geqslant t_0$

$$\frac{d}{dx}|x(t)|^2 = \frac{d}{dt}(x \cdot x) = 2x \cdot x' = 2x \cdot f(t,x) \leqslant 2a(t)|x|^2 + 2b(t).$$

На любом отрезке $[t_0, t_1]$ для функции $r(t) = |x(t)|^2$ имеем $r' \leqslant kr + m$ при некоторых $k$ и $m$. Тогда, как в теореме 5, доказывается продолжимость решения $x(t)$ на интервал $[t_0, \infty)$.

Вместо функции $|x(t)|^2$ можно оценивать рост какой-либо другой функции $\varphi(t, x(t))$, подбираемой в зависимости от свойств функции $f(t,x)$, и получать подобные результаты. Разработан метод [35] одновременного использования нескольких функций $\varphi_i(t,x)$ вместо одной функции $\varphi(t,x)$.

Такого рода методы позволяют не только устанавливать продолжимость решений, но и получать оценки решения $x(t)$ с помощью оценок функции $f(t,x)$.

## § 7. Непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части уравнения

**1.**

> **Теорема 6.** *Пусть решение $x = \varphi(t)$ задачи $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ существует на отрезке $I = [t_*, t_1] \ni t_0$ и в окрестности $V(t \in I, |x - \varphi(t)| \leqslant \rho)$ его графика вектор-функция $f(t,x)$ и производные $\partial f_i/\partial x_j$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ ее координат $f_i$ непрерывны. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой другой задачи $y' = g(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, в которой $g$ и $\partial g_i/\partial y_j$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ непрерывны и $|g - f| \leqslant \delta$ в $V$,*

*$|y_0 - x_0| \leqslant \delta$, решение $y(t)$ может быть продолжено на $I$ и $|y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ на $I$.*

*Доказательство.* В ограниченной замкнутой области $V$ имеем $|f(t,x)| \leqslant m$, $|\partial f_i/\partial x_j| \leqslant l$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Тогда для любых точек $(t,x)$, $(t,y) \in V$ выполняется неравенство (8), где $k = nl$. Из (8) и неравенства $|f(t,y) - g(t,y)| \leqslant \delta$ следует, что для решений $x = \varphi(t)$ и $y(t)$ на отрезке $I_1 \subset I$, пока график $y(t)$ проходит в $V$, имеем

$$|x' - y'| = |f(t,x) - g(t,y)| \leqslant k|x - y| + \delta.$$

Пусть $z(t) = \varphi(t) - y(t)$. Тогда $|z(t_0)| \leqslant \delta$, $|z'| \leqslant k|z| + \delta$ на отрезке $I_1$. В силу (10) имеем на $I_1$

$$|\varphi(t) - y(t)| = |z(t)| \leqslant \delta e^{ks} + \frac{\delta(e^{ks} - 1)}{k}, \qquad s = \max\{t_1 - t_0, t_0 - t_*\}; \tag{31}$$

в случае $k = 0$ дробь $(e^{ks} - 1)/k$ заменяется на $s$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \min\{\rho, \varepsilon\}$ и такое $\delta > 0$, чтобы правая часть неравенства (31) была меньше $\varepsilon_1$. Тогда решение $y(t)$ с $|y_0 - x_0| \leqslant \delta$ при $t = t_0$ (или при $t$, близких к $t_0$) проходит внутри трубки $T$ $(t \in I_1,\ |x - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon_1)$; $T \subset V$. По теореме 4 решение $y(t)$ может быть продолжено до выхода на границу трубки $T$. Если бы оно вышло на боковую границу трубки, то в точке выхода было бы $|y(t) - \varphi(t)| = \varepsilon_1$ в противоречии с тем, что правая часть (31) меньше $\varepsilon_1$. Значит, решение $y(t)$ выходит из трубки только на ее концах $t = t_*$ и $t = t_1$, и при всех $t \in [t_*, t_1]$ удовлетворяет неравенству (31), правая часть которого меньше $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$. ■

**Следствие.** *Если $f$ и все $\partial f_i/\partial x_j$ непрерывны в окрестности дуги $t_* \leqslant t \leqslant t_1$ графика решения $x=\varphi(t)$ и $\chi_i(t)$ — решения того же уравнения $x'=f(t,x)$ с начальными условиями $\chi_i(t_0)=a_i \to \varphi(t_0)$, то $\chi_i(t) \to \varphi(t)$ равномерно на отрезке $[t_*,t_1]$.*

**2.** Рассмотрим задачу с параметром $\mu \in M$ ($M$ — область в $\mathbb{R}^m$)

$$x' = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = a(\mu). \tag{32}$$

Если вектор-функция $f$ и все $\partial f_i/\partial x_j$ непрерывны по $t$, $x$, то при каждом $\mu \in M$ существует решение $x = \varphi(t, \mu)$. Считаем, что оно продолжено, насколько это возможно. В следующей теореме при определенных условиях доказывается непрерывность функции $\varphi(t, \mu)$ по $\mu$, а в главе 5 — дифференцируемость функции $\varphi$ по $\mu$.

**Теорема 7 (о непрерывной зависимости решения от параметра).** *Пусть при $\mu = \mu_0$ решение задачи (32) существует на отрезке $I = [t_*, t_1]$ и в окрестности $V$ ($t \in I$, $|x - \varphi(t, \mu_0)| \leqslant \rho$) его графика при $\mu \in M$ вектор-функция $f(t, x, \mu)$ и производные $\partial f_i/\partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ ее координат $f_i$ непрерывны по совокупности переменных $(t, x, \mu)$; $a(\mu)$ непрерывно по $\mu$. Тогда существует такое $\eta > 0$, что функция $\varphi(t, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных при $t \in I$, $|\mu - \mu_0| \leqslant \eta$.*

*Доказательство.* При фиксированном $\mu = \mu_0$ задача (32) удовлетворяет условиям теоремы 6. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что в случае, когда

$$\begin{gathered} \left|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu_0)\right| \leqslant \delta \quad \text{для} \quad (t, x) \in V, \\ |a(\mu) - a(\mu_0)| \leqslant \delta, \end{gathered} \tag{33}$$

решение $\varphi(t, \mu)$ при $t \in I$ существует и

$$\left|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)\right| < \varepsilon \quad (t \in I). \tag{34}$$

В силу равномерной непрерывности функций $f(t, x, \mu)$ и $a(\mu)$ при $(t, x) \in V$, $\mu \in M_0 \subset M$ ($M_0$ — некоторая замкнутая окрестность точки $\mu_0$) найдется такое $\eta > 0$, что при $|\mu - \mu_0| \leqslant \eta$ имеем $\mu \in M_0$ и выполняются неравенства (33). Тогда по теореме 6 решение $\varphi(t, \mu)$ на $I$ существует и удовлетворяет (34), то есть $\varphi(t, \mu)$ непрерывна по $\mu$ при $\mu = \mu_0$.

Далее, при $(t, x) \in V$, $|\mu - \mu_0| \leqslant \eta$ функция $f$ непрерывна, значит, ограничена, то есть $|f| \leqslant q$. Поэтому $|\varphi'_t| = |f| \leqslant q$, и для любых $t, \tau \in I$ при $|t - \tau| \leqslant \varepsilon/q$ имеем

$$\left|\varphi(t, \mu) - \varphi(\tau, \mu)\right| \leqslant q|t - \tau| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда и из (34) при $|\mu - \mu_0| \leqslant \eta$, $|\tau - t| \leqslant \varepsilon/q$ следует $\left|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(t, \mu_0)\right| \leqslant 2\varepsilon$, то есть решение $\varphi(t, \mu)$ непрерывно по совокупности переменных при $\mu = \mu_0$, $t \in I$.

Возьмем $\varepsilon \in (0, \rho)$. Тогда для некоторого $\eta_1 \in (0, \eta)$ при любом таком $\mu_1$, что $|\mu_1 - \mu_0| \leqslant \eta_1$, по доказанному, решение $\varphi(t, \mu_1)$ на $I$ существует и удовлетворяет (34). Тогда его окрестность $V_1$ $\big(t \in I, |x - \varphi(t, \mu_1)| \leqslant \rho - \varepsilon\big)$ содержится в $V$, значит, в $V_1$ выполнены условия теоремы 7, но с $\mu_1$ вместо $\mu_0$. Следовательно, решение $\varphi(t, \mu)$ непрерывно по совокупности переменных $(t, \mu)$ при $\mu = \mu_1$, $|\mu_1 - \mu_0| < \eta_1$, $t \in I$. ■

**3.** Теорема 6 позволяет в прикладных задачах пользоваться дифференциальными уравнениями, в которых некоторые константы и функции определялись из опытов, значит, известны лишь приближенно. Если это приближение достаточно хорошее, то и решения таких приближенных уравнений на конечном отрезке времени будут мало отличаться от решений точных уравнений.

Оценка (31) разности решений двух близких уравнений, полученная в теореме 6, может быть использована, в частности, для оценки ошибки приближенного решения. Она очень груба, но в вычислительной математике есть возможности получения менее грубых оценок.

Существенное обобщение теоремы 7 имеется в [31]. Условие непрерывности функций $f$ по $\mu$ заменяется условием

$$\int_{t_0}^{t} f(s,x,\mu)\,ds \rightrightarrows \int_{t_0}^{t} f(s,x,\mu_0)\,ds \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \tag{35}$$

при $\mu \to \mu_0$, $\mu_0$ фиксированно; $f$ и $\partial f_i/\partial x_j$ ограничены[1] в $V$, $f$ непрерывна по $t, x$. Доказывается, что $\varphi(t,\mu) \rightrightarrows \varphi(t,\mu_0)$ при $\mu \to \mu_0$ равномерно по $t \in [t_0, t_1]$.

**Пример 3.** Рассмотрим задачу $x' = f(t,x,\mu)$, $x(0,\mu) = 0$, где при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $|x| < 2$

$$f(t,x,\mu) = x^2 + 4(1-x)\sin^2\frac{t}{\mu} \quad (\mu \neq 0), \qquad f(t,x,0) = x^2 - 2x + 2.$$

Условие (35) выполнено, так как при $\mu \to 0$

$$\int_0^t 2\sin^2\frac{s}{\mu}\,ds \rightrightarrows \int_0^t 1\,ds \equiv t \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Поэтому решение данной задачи $x = \varphi(t,\mu)$ при $\mu \to 0$ равномерно по $t \in [0,1]$ стремится к функции $\varphi(t,0) = 2\,\mathrm{tg}\,t/(\mathrm{tg}\,t + 1)$, являющейся решением при $\mu = 0$.

[1] Для простоты изложения здесь приводятся менее общие условия, чем в [31].

Еще более общие результаты получены чехословацкими математиками, главным образом, Я. Курцвейлем.

# § 8. Уравнения, не разрешенные относительно производной

**1.** Основные свойства уравнений вида $F(x, y, y') = 0$ отличаются от свойств ранее рассмотренных уравнений $y' = f(x, y)$.

> **Пример 4.** Уравнение $(y')^2 - 4x^2 = 0$ можно свести к двум уравнениям: $y' = 2x$ и $y' = -2x$.

Их решения

$$y = x^2 + c \quad \text{и} \quad y = c - x^2$$

(рис. 6). Через каждую точку плоскости $x, y$ проходит не менее двух решений: по одному из каждого семейства решений. Имеются также решения, составленные из кусков решений этих семейств. Такие составные функции являются решениями только тогда, когда они всюду имеют производную, то есть когда в точке стыка два соединяемых куска имеют общую касательную. Например, на рис. 6 функция

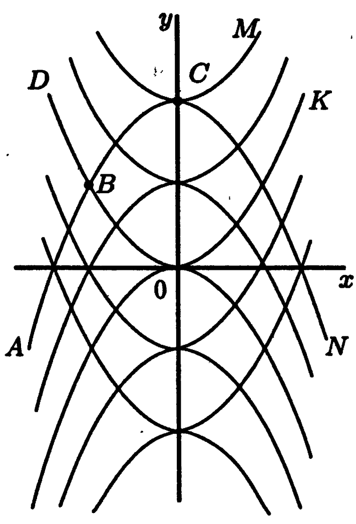



Рис. 6

$ABOK$ — не решение, так как не имеет производной в точке $B$, а функции $ABCM$ и $ABCN$ — решения.

Для того чтобы выделить единственное решение уравнения $F(x,y,y')=0$, вообще говоря, надо задавать не только точку $(x_0,y_0)$, но и значение $y'_0$ (не произвольно, а так, чтобы тройка чисел $x_0,y_0,y'_0$ удовлетворяла данному уравнению: $F(x_0,y_0,y'_0) = 0$). Для уравнения $(y')^2 - 4x^2 = 0$ через точку $B(x_0 = -1,\ y_0 = 1)$ проходят два решения: $y = x^2$ ($DBO$, рис. 6) и $y = 2 - x^2$ ($ABC$, рис. 6); если задать еще $y'_0 = -2$ или $y'_0 = 2$, получаем одно из этих решений.

Точки касания решений — точки нарушения единственности (точки оси $Oy$ на рис. 6). Решение, пришедшее в такую точку, можно продолжить за нее более, чем одним способом.

**Теорема 8.** *Рассмотрим уравнение*

$$F(x,y,y') = 0. \tag{36}$$

*Пусть* $F \in C^1$ *в области* $D$ *и в точке* $(x_0,y_0,y'_0) \in D$ *имеем* $F = 0$, $\partial F/\partial y' \neq 0$.

*Тогда на любом достаточно малом отрезке* $[x_0 - d, x_0 + d]$ *существует единственное решение уравнения* (36), *удовлетворяющее условиям*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{37}$$

*Доказательство.* По теореме о неявной функции в некоторой окрестности $U$ точки $(x_0,y_0)$ существует единственная непрерывная функция $f(x,y)$, удовлетворяющая условиям

$$F(x,y,f(x,y)) \equiv 0, \quad f(x_0,y_0) = y'_0, \tag{38}$$

при этом $f \in C^1$. По теореме 2 § 5 уравнение $y' = f(x,y)$ на некотором отрезке $[x_0 - d_1, x_0 + d_1]$, $d_1 > 0$, имеет единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Так как $y'(x) \equiv f(x, y(x))$, то из (38) следует

$$F\big(x, y(x), y'(x)\big) \equiv 0, \quad y'(x_0) = f(x_0, y_0) = y_0'.$$

То есть $y(x)$ удовлетворяет уравнению (36) и условиям (37). ■

Докажем единственность решения. Так как $\partial F(x,y,p)/\partial p \neq 0$ в точке $(x_0, y_0, y_0')$, то $\partial F/\partial p$ сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки, то есть при $(x,y) \in V \subset U$, $|p-y_0'| < \varepsilon$. Здесь $V$ — окрестность точки $(x_0, y_0)$, $\varepsilon > 0$. Значит, при $(x,y) \in V$ функция $F(x,y,p)$ монотонна по $p$ на интервале $|p - y_0'| < \varepsilon$, и там $F(x,y,p) = 0$ только при $p = f(x,y)$. Уменьшим окрестность $V$, чтобы в $V$ было $|f(x,y) - y_0'| < \varepsilon/2$. Тогда для $(x,y) \in V$ значения $p$, для которых $F(x,y,p) = 0$, распадаются на два такие множества $A$ и $B$ ($B$ может быть пустым), что

$$\begin{aligned} &p = f(x,y), \quad |p - y_0'| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (p \in A); \\ &p \neq f(x,y), \quad |p - y_0'| \geqslant \varepsilon \quad (p \in B). \end{aligned} \tag{39}$$

Для любого решения $y(x)$ задачи (36), (37) при $x = x_0$ имеем $y'(x) = y_0' = f(x_0, y_0) \in A$. Пока $(x, y(x)) \in V$, производная $y'(x)$ не может перейти из $A$ в $B$, так как по теореме анализа производная принимает все промежуточные значения, а в силу (39) она не может принимать значений $p$, для которых $\varepsilon/2 < |p - y_0'| < \varepsilon$. Значит, при малых $|x - x_0|$ производная $y'(x)$ остается в $A$ и $y'(x) = f(x, y(x))$. А это уравнение, так как $f \in C^1$, при условии $y(x_0) = y_0$ имеет единственное решение.

**Следствие.** *Пусть в (36) $F \in C^1$ и в точке $(x_0, y_0)$ уравнение $F(x_0, y_0, p) = 0$ имеет ровно $m$ различных корней $p_i$ ($i = 1, \ldots, m$) и для каждого из них $\partial F(x_0, y_0, p_i)/\partial p_i \neq 0$. Тогда через точку $(x_0, y_0)$ в ее окрестности проходит ровно $m$ решений уравнения (36), у них в этой точке производные $y'(x_0) = p_i$ ($i = 1, \ldots, m$) все различны.*

Например, для уравнения $(y')^2 - 4x^2 = 0$ таковы точки $(x_0, y_0)$ с $x_0 \neq 0$. Уравнение $p^2 - 4x_0^2 = 0$ имеет два различных корня $p_{1,2} = \pm 2x_0$, для обоих $\partial F/\partial p_i = 2p_i \neq 0$ и через такую точку в ее окрестности проходят ровно два решения (рис. 6).

Если же через точку $(x_0, y_0)$ в сколь угодно малой ее окрестности проходит более одного решения и хотя бы два из них имеют в этой точке одну и ту же производную $y'(x_0)$, то говорят, что в такой точке нарушается единственность. Для уравнения $(y')^2 - 4x^2 = 0$ таковы точки $(x_0, y_0)$ с $x_0 = 0$.

**2.** **Дискриминантная кривая.** Из сказанного вытекает, что если для уравнения (36) с $F \in C^1$ в точке $(x_0, y_0)$ нарушается единственность, то при некотором $y_0'$ выполняются два условия

$$F(x_0, y_0, y_0') = 0, \qquad \frac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y_0'} = 0. \tag{40}$$

Так как $y_0'$ заранее не известно, то для отыскания точки $(x_0, y_0)$ надо из уравнений (40) исключить $y_0'$. Получим уравнение $\varphi(x_0, y_0) = 0$, определяющее некоторое множество на плоскости $x, y$. Это множество называется *дискриминантной кривой*. Дискриминантная кривая содержит все точки нарушения единственности, но может содержать и некоторые другие точки.

**Пример 5.** Найдем дискриминантную кривую для уравнения

$$(y')^2 - 4y^3(1 - y) = 0.$$

*Решение примера.* Для этого пишем два уравнения (40):

$$F \equiv (y')^2 - 4y^3(1 - y) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} \equiv 2y' = 0.$$

Из второго уравнения имеем $y' = 0$. Подставляя в первое, находим дискриминантную кривую $4y^3(1-y) = 0$. Имеем две ветви: $y = 0$ и $y = 1$. В нашем случае они обе являются решениями данного дифференциального уравнения.

Чтобы выяснить, где нарушается единственность, найдем другие решения. Из данного уравнения имеем $y' = \pm 2y\sqrt{y(1-y)}$. Решая эти уравнения с разделяющимися переменными, получаем решения (рис. 7)

$$y = \frac{1}{(x+c)^2+1},$$

$$y = 0, \quad y = 1.$$

На прямой $y = 0$ не нарушается единственность, а на прямой $y = 1$ — нарушается. ◄

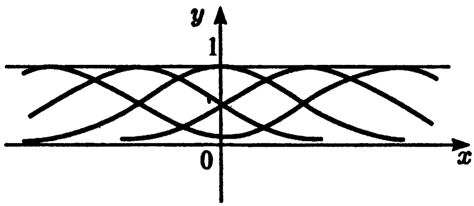


Рис. 7

В отличие от рассмотренного примера далеко не всегда дискриминантная кривая является решением.

**Пример 6.** Найдем дискриминантную кривую для уравнения

$$F \equiv (y-1)(y')^2 + 2y' - 1 = 0.$$

*Решение примера.* Здесь $\partial F/\partial y' \equiv 2(y-1)y' + 2 = 0$. Исключая $y'$, получаем дискриминантную кривую $y = 0$. Она не является решением данного уравнения.

Найдем другие решения. Из данного уравнения, как из квадратного, получаем $y' = \frac{-1\pm\sqrt{y}}{y-1}$. Так как $1-y = (1-\sqrt{y})(1+\sqrt{y})$, то $y' = \frac{1}{1\pm\sqrt{y}}$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, находим $y \pm \frac{2}{3}y^{3/2} = x + c$ (рис. 8). Дискриминантная кривая $y = 0$ является геометрическим местом точек заострения интегральных кривых. ◄

*Особым решением* называется такое решение, в каждой точке которого его касается другое решение, отличное от рассматриваемого решения в сколь угодно малой окрестности этой точки. В примере 5 особым является решение $y = 1$, в примерах 4 и 6 особых решений нет.

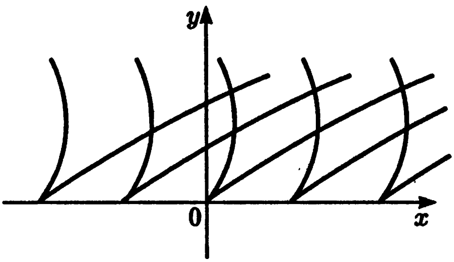



Рис. 8

Так как в каждой точке особого решения нарушается единственность, то особое решение, если оно есть, содержится в дискриминантной кривой. Поэтому для отыскания особого решения уравнения $F(x, y, y') = 0$ (с функцией $F$ класса $C^1$) сначала надо найти дискриминантную кривую. Но она не всегда является особым решением, даже если является решением, см. пример 5. Поэтому каждую ветвь дискриминантной кривой надо проверить:

1) является ли она решением, то есть удовлетворяет ли она данному уравнению;
2) касаются ли ее в каждой точке другие решения.

Если на оба вопроса ответы положительные, то рассматриваемая ветвь является особым решением.

Проверка того, касаются ли две кривые $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, проводится с помощью условия касания: кривые касаются друг друга в некоторой точке, если в этой точке

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad \varphi'(x) = \psi'(x). \tag{41}$$

*Задачи для упражнений:*
[12], § 8, № 241–266.

**Огибающая.** Понятие особого решения связано с известным из дифференциальной геометрии понятием огибающей.

*Огибающей* семейства кривых $\varphi(x, y, c) = 0$ называется кривая $K$, в каждой своей точке касающаяся кривой семейства, отличной от кривой $K$ в любой окрестности этой точки.

**Теорема 9.** *Линия $y = \psi(x)$ является особым решением уравнения $F(x, y, y') = 0$ тогда и только тогда, когда она является огибающей семейства решений этого уравнения.*

*Доказательство.* Пусть линия $y = \psi(x)$ — особое решение. Тогда в каждой своей точке она касается другого решения. Следовательно, эта линия — огибающая семейства решений.

Пусть линия $y = \psi(x)$ — огибающая семейства решений. Тогда в каждой своей точке $(x, y)$ она касается какого-либо решения. Значит, в этой точке числа $x, y, y'$ для линии $y = \psi(x)$ те же, что для этого решения. Но решение удовлетворяет уравнению $F(x, y, y') = 0$, поэтому и огибающая тоже удовлетворяет этому уравнению в точке $(x, y)$. Эта точка — произвольная на огибающей, значит, огибающая есть решение уравнения. Это решение в каждой своей точке касается другого решения, следовательно, является особым. ■

Для отыскания огибающей семейства линий $\varphi(x, y, c) = 0$ ($\varphi \in C^1$), как известно из дифференциальной геометрии, надо исключить $c$ из уравнений

$$\varphi(x, y, c) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi(x, y, c)}{\partial c} = 0,$$

и проверить, касается ли полученная линия в каждой своей точке какой-либо линии семейства (например, с помощью условия касания (41)).

*Задачи для упражнений:*
[12], § 8, № 297 а–г.

**3.** **Методы решения** уравнений вида $F(x, y, y') = 0$.

А. Разрешить уравнение относительно $y'$, то есть из данного уравнения выразить $y'$ через $x$ и $y$. Получается одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$. Каждое из них надо решить. Этим методом решались уравнения в примерах 4–6.

Б. Метод введения параметра. Он позволяет свести уравнение $F(x, y, y') = 0$ к уравнению, разрешенному относительно производной. Излагаемый ниже простейший вариант этого метода применим в случае, когда уравнение $F(x, y, y') = 0$ удается разрешить относительно $y$ или относительно $x$, то есть записать в виде $y = f(x, y')$ или в виде $x = f(y, y')$.

В уравнение $y = f(x, y')$ вводим параметр $p = dy/dx$ и получаем

$$y = f(x, p). \qquad (42)$$

Берем полный дифференциал от обеих частей равенства и, чтобы исключить $y$, заменяем $dy$ на $p\,dx$ (так как $p = dy/dx$).

$$dy = f'_x\,dx + f'_p\,dp; \quad p\,dx = f'_x\,dx + f'_p\,dp.$$

Последнее уравнение можно разрешить относительно $dx/dp$ или относительно $dp/dx$. Если решение этого уравнения найдено в виде $x = \varphi(p)$, то, подставляя это в (42), получаем решение исходного уравнения в параметрической записи: $x = \varphi(p)$, $y = f(\varphi(p), p)$.

Этим же методом решаются уравнения вида $x = f(y, y')$.

**Пример 7.** Решить уравнение $y = xy' + (y')^2$.

<u>*Решение примера.*</u> Вводя параметр $p = y'$, получаем

$$y = xp + p^2. \tag{43}$$

Берем полный дифференциал от обеих частей равенства. Получаем $dy = p\,dx + x\,dp + 2p\,dp$. Так как $dy = p\,dx$, то имеем

$$p\,dx = p\,dx + x\,dp + 2p\,dp; \qquad (x + 2p)\,dp = 0.$$

Надо рассмотреть два случая: $x + 2p = 0$ или $dp = 0$.

Если $x+2p = 0$, то $x = -2p$. Подставляя это в (43), получаем решение в параметрическом виде: $x = -2p$, $y = -p^2$. Исключая $p$, имеем $y = -x^2/4$.

Если $dp = 0$, то $p = c$ (произвольная постоянная). Подставляя в (43), получаем решение $y = cx + c^2$ — семейство непараллельных прямых (для каждой прямой угловой коэффициент $c$ — свой).

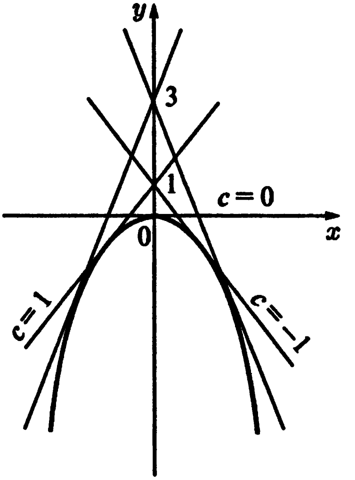



Рис. 9

Исследуем, является ли решение $y = -x^2/4$ особым. Пишем для решений $y = -x^2/4$ и $y = cx + c^2$ условия касания (41):

$$-\frac{x^2}{4} = cx + c^2, \qquad -\frac{x}{2} = c.$$

Подставляя $c = -x/2$ в первое равенство, получаем $-x^2/4 = -x^2/2+x^2/4$ — тождество. Значит, решение $y = -x^2/4$ в каждой точке $x$ касается одного из решений $y = cx + c^2$. Следовательно, решение $y = -x^2/4$ — особое (рис. 9). ◀

Другие варианты метода введения параметра изложены в [9], гл. 3, § 2, пример 5 и § 3, п. 1 — введение двух параметров; также [13], гл. 1, § 8; [2], гл. 1, § 7.

*Уравнения Клеро* имеют вид

$$y = xy' + \psi(y').$$

Они решаются методом введения параметра. Этому классу принадлежит уравнение примера 7. Общее решение уравнения Клеро — семейство непараллельных прямых. Если функция $\psi \in C^2$ и нелинейна, то уравнение Клеро имеет особое решение — кривую, которой касаются эти прямые. Если же функция $\psi$ линейна, то прямые проходят через одну точку и особого решения нет.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 8, № 267–296.

**4.** В общем случае дискриминантная кривая разбивает плоскость $x, y$ на области. В такой области выполняются условия следствия теоремы 8 и через каждую точку проходит одно и то же число решений. Расположение решений вблизи дискриминантной кривой может быть различным. Известно ([18], гл. 1, § 4), что типичным является случай, когда дискриминантная кривая состоит из точек возврата интегральных кривых, как на рис. 8. Кроме того, на дискриминантной кривой могут быть особые точки, вблизи которых интегральные кривые идут иначе, чем вблизи других точек дискриминантной кривой, см. [19], гл. 1, § 7. Глубокие исследования таких особенностей провел А. А. Давыдов.

# ГЛАВА 3

# Линейные дифференциальные уравнения и системы

Изучение линейных дифференциальных уравнений составляет отдельное теоретическое направление потому, что они обладают рядом свойств, позволяющих глубже их изучить. Основное свойство состоит в том, что *все решения* линейного уравнения или системы выражаются через *конечное число* решений.

## § 9. Свойства линейных систем

**1.** Рассмотрим линейную систему нормального вида

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}(t)x_1 + \ldots + a_{in}(t)x_n + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

или, в векторной записи,

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$
$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \dots a_{1n}(t) \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}(t) \dots a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Всегда предполагается, что на рассматриваемом конечном или бесконечном интервале $\alpha < t < \beta$ функции $a_{ij}(t)$ и $f_i(t)$ непрерывны, $a_{ij}(t)$ вещественны.

Так как в главе 3 иногда будут рассматриваться комплексные решения, в частности, содержащие функции $e^{i\omega t}$, то необходимо распространить некоторые теоремы главы 2 на линейные системы с комплексными решениями.

**Лемма 1.** *Если матрица $A(t)$ вещественная, то*

а) *вещественная и мнимая части любого комплексного решения системы $x' = A(t)x$ являются вещественными решениями этой системы;*

б) *вещественная и мнимая части решения $x = u + iv$ системы (2) с $f(t) = g(t) + ih(t)$ ($g$ и $h$ вещественны) являются решениями систем*

$$u' = A(t)u + g(t), \quad v' = A(t)v + h(t); \tag{3}$$

в) *обратно, если $u$ и $v$ — решения систем (3), то $x = u + iv$ — решение системы (2) с $f(t) = g(t) + ih(t)$.*

*Доказательство.* Докажем б). Пусть функции $u, v, g, h$ вещественны и

$$(u + iv)' = A(t)(u + iv) + g(t) + ih(t).$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получаем (3).

При $g \equiv h \equiv 0$ из утверждения б) следует а).

Умножая на $i$ второе уравнение в (3) и складывая с первым, получаем в). ■

**Теорема 1.** *При любом начальном условии $x(t_0) = x_0$ система* (2) *имеет единственное решение. Все ее решения продолжаются на весь интервал* $(\alpha, \beta)$.

*Доказательство.* Если $x_0$ и $f(t)$ вещественны, то по теореме 2 § 5 задача

$$x' = A(t)x + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

имеет единственное решение. Так как функции $a(t) = \|A(t)\|$ и $b(t) = |f(t)|$ непрерывны и $|A(t)x + f(t)| \leqslant a(t)|x| + b(t)$, то по теореме 5 § 6 каждое вещественное решение системы (4) продолжается на интервал $(\alpha, \beta)$.

Если же $x_0 = u_0 + iv_0$, $f(t) = g(t) + ih(t)$, то, по доказанному, системы (3) с $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$ имеют решения на интервале $(\alpha, \beta)$. Тогда $x = u + iv$ при $\alpha < t < \beta$ — решение задачи (4).

Если $y = u^* + iv^*$ — другое решение этой задачи, то $u - u^*$ и $v - v^*$ — вещественные решения задачи $z' = A(t)z$, $z(t_0) = 0$. Но $z(t) \equiv 0$ тоже решение, а других вещественных решений нет по теореме 1 § 9. Значит $u - u^* \equiv v - v^* \equiv 0$, и решение $x = u + iv$ единственно. ■

В главе 3 всегда будем считать, что все решения продолжены на весь интервал $\alpha < t < \beta$.

**2. Общие свойства линейных уравнений и систем.** Система (1) или (2) называется линейной однородной, если все $f_i(t) \equiv 0$, и линейной неоднородной в противном случае.

В системе (2) перенесем $A(t)x$ влево и запишем эту систему в виде $Lx = f$. Здесь $f$ и $x$ — элементы линейного пространства непрерывных (для $x$ — непрерывно дифференцируемых) $n$-мерных вектор-функций на интервале $\alpha < t < \beta$, $L$ — линейный оператор, то есть такой, что

$$L(u+v) = Lu + Lv, \quad L(\gamma u) = \gamma Lu$$

для любых $u$ и $v$ из линейного пространства, на котором определен оператор $L$, и любого числа $\gamma$.

Из этих свойств следует, что если $x^1, \ldots, x^k$ — решения линейного однородного уравнения $Lx = 0$ (верхний индекс — номер решения), $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — числа, то $x^1 + x^2$, $x^1 - x^2$, $\gamma_1 x^1 + \ldots + \gamma_k x^k$ — тоже решения того же уравнения. Следовательно, множество решений линейного однородного уравнения (или системы) есть линейное пространство.

Если же $x^1, \ldots, x^k$ — решения линейных неоднородных уравнений $Lx^i = f^i$ ($i = 1, \ldots, k$), $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — числа, то $x = \gamma_1 x^1 + \ldots + \gamma_k x^k$ — решение уравнения $Lx = \gamma_1 f^1 + \ldots + \gamma_k f^k$. В частности, если $Lu = 0$, $Lv = f$, то $L(u+v) = f$; если $Lv^1 = f$, $Lv^2 = f$, то $L(v^1 - v^2) = 0$. То есть сумма решений линейного однородного и линейного неоднородного уравнений (с тем же $L$) есть решение того же неоднородного уравнения; разность двух решений линейного неоднородного уравнения есть решение линейного однородного уравнения.

**Линейная зависимость** вектор-функций. Вектор-функции $x^1(t), \ldots, x^k(t)$ называются *линейно зависимыми* на интервале (или на множестве) $M$, если найдутся такие постоянные числа $c_1, \ldots, c_k$, из которых хотя бы одно не равно нулю, что при всех $t \in M$ имеем

$$c_1 x^1(t) + \ldots + c_k x^k(t) \equiv 0. \tag{5}$$

Вектор-функции линейно независимы на $M$, если они не являются линейно зависимыми на $M$, то есть если равенство (5) (при всех $t \in M$ одновременно) возможно лишь в случае $c_1 = \ldots = c_k = 0$.

Понятие линейной зависимости вектор-функций на данном множестве $M$, содержащем более одной точки, отличается от известного из алгебры понятия линейной зависимости векторов. Если вектор-функции $x^1(t), \ldots, x^k(t)$ линейно зависимы на $M$, то при каждом $t \in M$ их значения являются линейно зависимыми векторами, это следует из (5). Обратное неверно.

**Пример 1.** Вектор-функции $x^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $x^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ при любом $t$ являются линейно зависимыми векторами (при любом $t = t_1$ имеем $c_1 x^1(t_1) + c_2 x^2(t_1) = 0$, если $c_1 = t_1$, $c_2 = -1$). Но как вектор-функции, они на любом интервале $(\alpha, \beta)$ линейно независимы, так как при *постоянных* $c_1, c_2$ равенство $c_1 \cdot 1 + c_2 t \equiv 0$ на всем интервале $(\alpha, \beta)$ возможно лишь при $c_1 = c_2 = 0$.

**Детерминант Вронского** или *вронскиан* для $n$-мерных вектор-функций $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ — это детерминант $n$-го порядка, столбцы которого состоят из координат этих вектор-функций, то есть

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) \ldots x_1^n(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^1(t) \ldots x_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

**Лемма 2.** *Если вектор-функции $x^1, \dots, x^n$ линейно зависимы, то их вронскиан $W(t) \equiv 0$.*

*Доказательство.* В этом случае столбцы детерминанта линейно зависимы, а тогда, как известно, он равен нулю. ■

**Следствие.** *Если вронскиан $W(t) \not\equiv 0$, то вектор-функции $x^1$, $\dots, x^n$ линейно независимы.*

**Лемма 3.** *Если вектор-функции $x^1, \dots, x^n$ являются решениями системы $x' = A(t)x$ с непрерывной матрицей $A(t)$, и их вронскиан $W$ равен нулю хотя бы при одном значении $t$, то эти вектор-функции линейно зависимы, и $W(t) \equiv 0$.*

*Доказательство.* Пусть $W(t_1) = 0$. Из алгебры известно, что тогда столбцы детерминанта, то есть векторы $x^1(t_1), \dots,$ $x^n(t_1)$ линейно зависимы. Значит, существуют такие числа $c_1, \dots, c_n$, из которых хоть одно не равно нулю, что

$$c_1 x^1(t_1) + \dots + c_n x^n(t_1) = 0. \tag{6}$$

С этими $c_1, \dots, c_n$ рассмотрим вектор-функцию

$$x(t) = c_1 x^1(t) + \dots + c_n x^n(t). \tag{7}$$

Она является решением системы $x' = A(t)x$. В силу (6) $x(t_1) = 0$. Функция $z(t) \equiv 0$ удовлетворяет той же системе и начальному условию $z(t_1) = 0$. По теореме единственности имеем $x(t) \equiv z(t) \equiv 0$. Итак, функция (7) всюду равна нулю, и решения $x^1(t), \dots, x^n(t)$ линейно зависимы. ■

Для вектор-функций, не являющихся решениями, утверждение леммы 3 неверно. В частности, для вектор-функций примера 1 имеем $W(t) \equiv 0$, а они линейно независимы.

**3.** Далее рассматриваются решения линейной системы

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

*Фундаментальной системой решений* называется любая система $n$ линейно независимых решений.

Покажем, что фундаментальные системы существуют. Возьмем $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и любые $n$ линейно независимых векторов $b^1, \ldots, b^n \in \mathbb{R}^n$. Пусть $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ — решения системы $x' = A(t)x$ с начальными условиями $x^j(t_0) = b^j$, $j = 1, \ldots, n$. Эти решения линейно независимы, так как при $t = t_0$ их значения — линейно независимые векторы $b^1, \ldots, b^n$ и равенство (5) возможно только при $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

*Общим решением* системы дифференциальных уравнений называют множество функций, содержащее все решения этой системы и только их (или формулу, представляющую это множество при всевозможных значениях произвольных постоянных).

**Теорема 2 (об общем решении).** *Пусть $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ — какие-нибудь $n$ линейно независимых решений системы $x' = A(t)x$. Общее решение системы есть*

$$x(t) = c_1 x^1(t) + \ldots + c_n x^n(t), \tag{8}$$

*где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.*

*Доказательство.* В силу свойств линейных уравнений функция (8) при любых $c_1, \ldots, c_n$ является решением. Покажем, что любое решение $x(t)$ системы выражается формулой (8). Возьмем $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Решения $x^1(t), \dots, x^n(t)$ линейно независимы. Из леммы 3 следует, что их вронскиан $W(t_0) \neq 0$. Расписав покоординатно равенство (8) при $t = t_0$, получаем систему

$$\begin{cases} x_1(t_0) = c_1 x_1^1(t_0) + \ldots + c_n x_1^n(t_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_0) = c_1 x_n^1(t_0) + \ldots + c_n x_n^n(t_0). \end{cases}$$

Из этой системы неизвестные $c_1, \dots, c_n$ определяются однозначно, так как детерминант системы есть

$$\det \left(x_i^j(t_0)\right)_{i,j=1,\dots,n} = W(t_0) \neq 0.$$

С этими $c_1, \dots, c_n$ для решения $x(t)$ при $t = t_0$ справедливо равенство (8). Обе части этого равенства — решения нашей системы. По теореме единственности они должны совпадать при всех $t$. Итак, любое решение представимо в виде (8). ■

Доказанная теорема означает, что множество решений системы $x' = A(t)x$ ($x \in \mathbb{R}^n$) есть $n$-мерное линейное пространство. Базисом в этом пространстве служит любая фундаментальная система решений. Равенство (8) есть представление любого элемента этого пространства в виде линейной комбинации элементов базиса.

**Фундаментальной матрицей** системы $x' = A(t)x$ называется матрица $X(t)$, столбцы которой составляют фундаментальную систему решений. Из леммы 3 следует, что $\det X(t) \equiv W(t) \neq 0$. С помощью фундаментальной матрицы $X(t)$ общее решение (8) записывается в виде $x(t) = X(t)c$, где $c$ — вектор-столбец с произвольными координатами $c_1, \dots, c_n$ (так как $X(t)c$ — линейная комбинация столбцов матрицы $X(t)$, равная правой части (8) с коэффициентами $c_1, \dots, c_n$).

**Пример 2.** Найти линейно независимые решения и фундаментальную матрицу для системы $x' = y$, $y' = 0$.

*Решение примера.* Из второго уравнения имеем $y = c_1$ (произвольная постоянная). Подставляя в первое уравнение, получаем $x' = c_1$. Отсюда $x = c_1 t + c_2$. Общее решение есть $x = c_1 t + c_2$, $y = c_1$. Полагая $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, находим частное решение $x_1 = t$, $y_1 = 1$, а полагая $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, находим другое решение $x_2 = 1$, $y_2 = 0$. Их вронскиан

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv -1 \neq 0,$$

и в силу следствия леммы 2 эти решения линейно независимы. Поэтому фундаментальной является матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Фундаментальная матрица $X(t)$ удовлетворяет матричному уравнению $X' = A(t)X$. В самом деле, пусть $x^j(t)$ — $j$-й столбец матрицы $X(t)$. Тогда $(x^j)'$ и $A(t)x^j$ — $j$-е столбцы матриц $X'$ и $A(t)X$. Эти столбцы равны, так как $x^j(t)$ — решение системы $x' = A(t)x$.

**Теорема 3 (переход от одной фундаментальной матрицы к другой).** *Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица, $C$ — неособая ($\det C \neq 0$) постоянная матрица $n \times n$. Тогда $Y(t) = X(t)C$ — фундаментальная матрица той же системы. По этой формуле из данной фундаментальной матрицы $X(t)$ можно получить любую фундаментальную матрицу $Y(t)$, подбирая матрицу $C$.*

*Доказательство.* Пусть $c^i$ и $y^i(t)$ — $i$-е столбцы матриц $C$ и $Y(t)$. Из равенства $Y(t) = X(t)C$ и правила перемножения матриц следует, что $y^i(t) = X(t)c^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Значит, $y^i(t)$ — решение той же системы $x' = A(t)x$. Далее, $\det Y(t) = \det X(t) \cdot \det C \neq 0$, поэтому решения $y^i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ линейно независимы и матрица $Y(t)$ — фундаментальная.

Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ — фундаментальные матрицы системы $x' = A(t)x$. Подберем такую матрицу $C$, чтобы $Y(t) = X(t)C$. Для этого умножим обе части равенства на $X^{-1}(t)$ слева и положим $t = t_0$. Получим $X^{-1}(t_0)Y(t_0) = C$. Столбцы матрицы $Z(t) = X(t)C = X(t)X^{-1}(t_0)Y(t_0)$ — решения той же системы; $Z(t_0) = Y(t_0)$. По теореме единственности каждый столбец матрицы $Z(t)$ совпадает со столбцом матрицы $Y(t)$. Таким образом, $Y(t) \equiv Z(t) \equiv X(t)C$, где $C = X^{-1}(t_0)Y(t_0)$, $\det C = \det X^{-1}(t_0) \det Y(t_0) \neq 0$. ■

$\boxed{4.}$

**Лемма 4 (правило дифференцирования детерминанта).** *Пусть $D$ — детерминант порядка $n$. Тогда $D' = D_1 + \ldots + D_n$, где $D_i$ получается из $D$ заменой всех элементов $i$-й строки на их производные.*

*Доказательство.* По определению детерминанта

$$D = \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \ldots b_{nj_n}, \tag{9}$$

где $b_{ij}$ — элемент $i$-й строки и $j$-го столбца детерминанта $D$, сумма берется по всем $n!$ перестановкам $j_1, \ldots, j_n$ чисел $1, \ldots, n$; берется знак $+$ (или $-$), если перестановка четная (нечетная). Так как

$$(b_1 b_2 \dots b_n)' = b_1' b_2 \dots b_n + b_1 b_2' \dots b_n + \dots + b_1 b_2 \dots b_n',$$

то производная каждого члена в (9) равна сумме $n$ слагаемых, в $i$-м слагаемом только $b_{ij_i}$ заменяется на $(b_{ij_i})'$. Так как $b_{ij_i}$ — элемент $i$-й строки в $D$, то собирая вместе $i$-е слагаемые, получаем детерминант $D_i$ указанного в лемме вида. Поэтому $D = D_1 + \dots + D_n$. ■

**Теорема 4 (формула Лиувилля и Остроградского).** *Пусть $W(t)$ — вронскиан любых $n$ решений системы*

$$x_i' = a_{i1}(t)x_1 + \dots + a_{in}(t)x_n, \quad i = 1, \dots, n. \tag{10}$$

*Тогда для любых $t_0, t \in (\alpha, \beta)$*

след

$$W(t) = W(t_0) \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} s(\tau)\, d\tau \right\}, \quad s(\tau) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\tau). \tag{11}$$

*Доказательство.* Столбцы детерминанта $W(t)$ — решения системы (10). По лемме 4 $W'(t) = D_1 + \dots + D_n$, где $D_i$ получается из $W$ заменой всех элементов $x_i^j$ $i$-й строки на их производные $(x_i^j)'$. Так как $x_i^j$ — $i$-я координата $j$-го решения системы (10), то $i$-я строка в $D_i$ есть

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^1 \dots \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^n,$$

а остальные строки остаются те же, что в $W(t)$. Вычитаем из этой строки первую, умноженную на $a_{i1}$, вторую, умноженную на $a_{i2}$, и т. д. до $(i-1)$-й; далее $(i+1)$-ю строку, умноженную на $a_{i,i+1}$, ..., $n$-ю, умноженную на $a_{in}$. От этого величина детерминанта $D_i$ не меняется. Тогда $i$-я строка принимает вид

$$a_{ii}x_i^1 \dots a_{ii}x_i^n.$$

Вынося множитель $a_{ii}$, находим, что $D_i = a_{ii}W(t)$. Тогда

$$W'(t) = a_{11}W(t) + a_{22}W(t) + \dots + a_{nn}W(t) = s(t)W(t),$$

$s(t)$ то же, что в (11). Из уравнения $W'(t) = s(t)W(t)$ получаем следующее, учитывая лемму 3. Если $W(t_0) = 0$, то $W(t) \equiv 0$; если $W(t_0) \neq 0$, то $W(t) \neq 0$, $W'(t)/W(t) = s(t)$. Интегрируя обе части равенства от $t_0$ до $t$ и освобождаясь от логарифмов, получаем (11). ■

**5.**

**Теорема 5.** *Общее решение линейной неоднородной системы* (2) *есть сумма ее частного решения и общего решения линейной однородной системы* $u' = A(t)u$, *то есть*

$$x_{\text{общ. неодн.}} = x_{\text{частн. неодн.}} + u_{\text{общ. одн.}} \tag{12}$$

*Доказательство.* Сумма решений неоднородной и однородной линейных систем есть решение неоднородной системы. Поэтому формула (12) представляет *только* решения неоднородной системы (2). Покажем, что эта формула содержит *все* решения. Пусть $v$ — любое решение системы (2), а $w$ — ее частное решение, входящее в формулу (12). Тогда $v - w$ есть решение однородной системы, значит $v - w$ содержится в $u_{\text{общ. одн.}}$. Поэтому $v$ содержится в сумме $w + u_{\text{общ. одн.}}$, стоящей в правой части (12). ■

**Метод вариации постоянных** позволяет найти решение линейной неоднородной системы (2), если известно общее решение (8) линейной однородной системы $x' = A(t)x$. Для этого в формуле (8) надо заменить постоянные $c_1, \dots, c_n$ на неизвестные пока функции $c_1(t), \dots, c_n(t)$, подставить полученное выражение $x = c_1(t)x^1 + \dots + c_n(t)x^n$ в систему (2) и найти функции $c_1(t), \dots, c_n(t)$.

Доказательство возможности отыскания этих функций проще провести, записав общее решение системы $x' = A(t)x$ в виде $x = X(t)c$, где $X(t)$ — фундаментальная матрица этой системы (ее столбцы — линейно независимые решения — векторы $x^1, \dots, x^n$), а $c$ — вектор-столбец из постоянных $c_1, \dots, c_n$. Заменяем $c$ на $c(t)$ и подставляем $x = X(t)c(t)$ в систему (2). Получаем

$$X'(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) + f(t).$$

Так как $X'(t) = A(t)X(t)$ (см. п. 3), то остается равенство $X(t)c'(t) = f(t)$. Умножая слева на обратную матрицу $X^{-1}(t)$ (она существует, так как $\det X(t) \neq 0$), получаем

$$c'(t) = X^{-1}(t)f(t), \quad c(t) = c^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\,ds,$$

$c^0$ — произвольный постоянный вектор. Получаем решение

$$x(t) = X(t)c(t) = X(t)c^0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\,ds.$$

При решении конкретных систем, чтобы избежать лишних выкладок (не выписывать члены, которые должны взаимно уничтожаться), можно применить следующий прием.

Решение однородной системы есть $X(t)c$ ($X(t)$ — фундаментальная матрица, $c$ — постоянный вектор), а неоднородной —

$X(t)c(t)$. Надо найти $X(t)$ и затем координаты вектора $c'(t)$ определить из системы $X(t)c'(t) = f(t)$.

**Пример 3.** Знаям общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \tag{13}$$

однородной системы $x' = y$, $y' = -x$, найти общее решение системы $x' = y$, $y' = -x + \frac{1}{\sin t}$ $(0 < t < \pi)$.

*Решение примера.* Заменяем в (13) $c_1$, $c_2$ на $c_1'$, $c_2'$ и полученную сумму приравниваем неоднородной части системы

$$c_1' \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2' \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sin t \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим $c_1' = \frac{\cos t}{\sin t}$, $c_2' = -1$. Следовательно, $c_1 = \ln \sin t + c_{11}$, $c_2 = -t + c_{21}$. Подставляя эти $c_1, c_2$ в (13), получаем общее решение неоднородной системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \cdot \ln \sin t - t \cos t \\ \cos t \cdot \ln \sin t + t \sin t \end{pmatrix} + c_{11} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_{21} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

**6.** Для линейных систем $x' = A(t)x$ ($x \in \mathbb{R}^n$) при различных предположениях о матрице $A(t)$ исследовалось поведение решений при $t \to \infty$. Устанавливались достаточные условия для ограниченности решений на интервале $(t_0, \infty)$ для стремления к нулю всех решений при $t \to \infty$. В случае, когда $A(t) = A_0 + t^{-1}A_1 + t^{-2}A_2 + \ldots$ при $t > t_1$ и собственные значения матрицы $A_0$ простые, доказывалось существование фундаментальной системы, состоящей из решений вида

$$x^k(t) = e^{\lambda_k t} t^{\mu_k} \left(a_{k0} + t^{-1} a_{k1} + t^{-2} a_{k2} + \ldots\right), \quad a_{k0} \neq 0, \quad a_{ki} \in \mathbb{R}^n,$$

$i = 1, 2, \ldots,\ k = 1, \ldots, n$ [23], гл. 2, п. 7–9.

При более общих условиях (ограниченность и непрерывность $A(t)$) исследовались свойства характеристических показателей решений (чисел, сравнивающих скорости роста или убывания решений при $t \to \infty$ с функцией $e^{kt}$) [26].

К системам применялись методы аналитической теории дифференциальных уравнений, когда независимое переменное $t$ — комплексное, а элементы $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t)$ — аналитические функции. Это позволяет изучать поведение решений вблизи точек, в которых функции $a_{ij}(t)$ имеют особенности [30], главы 4 и 5.

## § 10. Линейные уравнения любого порядка

**1.** На интервале $\alpha < t < \beta$ рассматривается уравнение

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = f(t). \tag{14}$$

Считаем, что при $\alpha < t < \beta$ все функции $a_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и $f(t)$ непрерывны и $a_0(t) \neq 0$.

Ниже доказывается, что решения этого уравнения обладают свойствами, подобными свойствам решений линейных систем, рассмотренным в § 9. Для этого уравнение (14) приводится к системе нормального вида с помощью замены (25) § 5, т. е. с помощью введения новых неизвестных функций

$$\begin{gathered} x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \\ \ldots, \quad x_{n-1} = y^{(n-2)}, \quad x_n = y^{(n-1)}. \end{gathered} \tag{15}$$

Как в § 5 показывается, что в силу замены (15) и уравнения (14) функции $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют системе уравнений

$$
\begin{gathered}
x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad \ldots, \quad x_{n-1}' = x_n, \\
x_n' = -\frac{a_n}{a_0}x_1 - \frac{a_{n-1}}{a_0}x_2 - \ldots - \frac{a_1}{a_0}x_n + \frac{f}{a_0},
\end{gathered} \tag{16}
$$

и обратно, каждому решению $x_1, \ldots, x_n$ системы (16) в силу замены (15) соответствует решение уравнения (14).

Так как система (16) линейна и функции $a_i/a_0$ и $f/a_0$ непрерывны при $\alpha < t < \beta$, то система (16) обладает свойствами, рассмотренными в § 9. В частности, каждое решение уравнения (14) может быть продолжено на интервал $(\alpha, \beta)$, и при любых начальных условиях для $t_0 \in (\alpha, \beta)$

$$
y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \tag{17}
$$

уравнение (14) на интервале $(\alpha, \beta)$ имеет единственное решение. Далее, если $y_1, \ldots, y_k$ — решения линейного однородного уравнения, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — числа, то $\gamma_1 y_1 + \ldots + \gamma_k y_k$ — решения того же уравнения. Если $u$ — решение однородного уравнения $Lu = 0$, $v_1$ и $v_2$ — решения неоднородного уравнения $Lv = f$, то $u + v_1$ — решение того же неоднородного уравнения, а $v_1 - v_2$ — решение однородного уравнения $Lu = 0$. (Левая часть уравнения (14) кратко обозначается $Ly$.)

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$
a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0 \tag{18}
$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(t)$ и $a_0(t) \neq 0$.

**Лемма 5.** *При замене* (15) *линейно зависимые решения уравнения* (18) *переходят в линейно зависимые решения системы, и наоборот.*

*Доказательство.* Пусть решения $y_1, \dots, y_k$, уравнения (18) линейно зависимы, то есть найдутся такие постоянные $c_1, \dots, c_k$, из которых хоть одно не равно нулю, что

$$c_1 y_1 + \dots + c_k y_k \equiv 0. \tag{19}$$

Дифференцируя это равенство $n-1$ раз, получаем

$$\begin{gathered} c_1 y_1' + \dots + c_k y_k' \equiv 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_k y_k^{(n-1)} \equiv 0. \end{gathered} \tag{20}$$

При замене (15) решение $y_i$ уравнения переходит в решение $x^i$ системы; здесь $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)^T$, т. е. $x^i$ — вектор-столбец с координатами $x_1^i, \dots, x_n^i$ (для удобства записи координаты записаны в строку и поставлен знак транспонирования $T$).

Таким образом, после замены (15) равенства (19) и (20) можно записать в виде одного векторного равенства

$$c_1 x^1 + \dots + c_k x^k \equiv 0 \quad (\exists\, c_i \neq 0). \tag{21}$$

Следовательно, решения $x^1, \dots, x^k$ системы линейно зависимы.

Обратно, пусть решения $x^1, \dots, x^k$ системы линейно зависимы. Тогда имеет место (21). Беря от каждого вектора $x^i$ первую координату $x_1^i$ и переходя от нее к решению $y_i$ в силу (15), получаем (19). То есть решения $y_1, \dots, y_k$ линейно зависимы. ■

Из леммы следует, что линейно независимые решения переходят в линейно независимые.

**2.** Линейное однородное уравнение (18) при замене (15) переходит в линейную однородную систему (16) с $f \equiv 0$. Такая система (см. § 9, в частности, теорему 2) имеет $n$ линейно независимых решений $x^1, \ldots, x^n$ и общее решение $x = c_1x^1 + \ldots + c_nx^n$. Следовательно, и уравнение (18) имеет $n$ линейно независимых решений $y_1, \ldots, y_n$ (то есть *фундаментальную систему* решений) и справедлива следующая теорема об общем решении.

**Теорема 6.** *Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — какие-либо линейно независимые решения уравнения* (18), *$c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные. Тогда общее решение уравнения есть*

$$y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n. \tag{22}$$

**Следствие.** *Любые $m$ (где $m > n$) решений уравнения* (18) *линейно зависимы.* (Если бы $y_1, \ldots, y_m$ были бы линейно независимы, то $y_1, \ldots, y_n$ — тоже. А тогда $y_{n+1}$ выражалось бы через $y_1, \ldots, y_n$ формулой (22). Это противоречит предположению.)

*Детерминантом Вронского* (*вронскианом*) для $n$ функций $y_1, \ldots, y_n$ класса $C^{n-1}$ называется детерминант

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Если функции $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависимы, то столбцы детерминанта линейно зависимы, и он тождественно равен нулю.

При замене (15) детерминант (23) переходит в детерминант Вронского для $n$ вектор-функций (§ 9). По лемме 5 эта замена сохраняет линейную зависимость (или независимость) решений, поэтому из свойств решений системы (пункты 2–4 § 9) следуют подобные свойства решений уравнения (18).

Если для решений $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (18) вронскиан $W$ равен нулю хотя бы при одном значении $t$, то решения линейно зависимы и $W(t) \equiv 0$.

**Замечание.** Если же функции $y_1, \ldots, y_n$ не являются решениями такого уравнения или их число меньше порядка уравнения, то из $W(t_1) = 0$ не следует линейная зависимость функций.

**Пример 4.** Для функций $y_1 = t^3$, $y_2 = |t^3|$ при всех $t$ имеем

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^3 & |t^3| \\ 3t^2 & 3t|t| \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Однако для любого $a > 0$ на интервале $-2a < t < 2a$ эти функции линейно независимы, так как из равенства $c_1 t^3 + c_2 |t^3| \equiv 0$ при $t = a$ следует $c_1 + c_2 = 0$, а при $t = -a$ следует $-c_1 + c_2 = 0$. Поэтому $c_1 = c_2 = 0$, и функции линейно независимы.

**Пример 5.** Для решений $y_1 = t$, $y_2 = t^2$ уравнения $y''' = 0$ вронскиан $W(t) = t^2$ равен нулю при $t = 0$, но эти решения линейно независимы (так как $W(t) \not\equiv 0$ на любом интервале).

*Задачи для упражнений:*
[12], § 12, № 664–669.

**Формула Лиувилля и Остроградского** для решений уравнения (18):

$$W(t) = W(t_0)\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)}\,d\tau\right\}. \tag{24}$$

*Доказательство.* Вронскиан $W(t)$ для решений уравнения (18) тот же, что для решений системы (16) с $f(t) \equiv 0$, а для системы справедлива формула (11). В системе (16) имеем $a_{ii} = 0$ $(i = 1, \dots, n-1)$, $a_{nn} = -a_1/a_0$. Поэтому в (11) теперь $s(\tau) = -a_1(\tau)/a_0(\tau)$, и из (11) следует (24). ■

**3.** **Построение линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений.** Пусть $u_1, \dots, u_n$ — функции класса $C^n$, и их вронскиан $W(t) \neq 0$ при $\alpha < t < \beta$. Тогда требуемое уравнение можно написать в виде

$$\begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_n & y \\ u_1' & \dots & u_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ u_1^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Покажем это. Здесь функции $u_1, \dots, u_n$ известны, $y$ — неизвестная функция. Разлагая детерминант по элементам последнего столбца, получаем

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0$$

— линейное однородное уравнение. Коэффициенты $a_i(t)$ непрерывны, так как выражаются через непрерывные функции $u_j^{(k)}$ $(j = 1, \dots, n;\ k = 0, 1, \dots, n)$; $a_0(t) \equiv W(t) \neq 0$ на интервале $(\alpha, \beta)$. Функции $u_1, \dots, u_n$ являются решениями этого уравнения, так как при $y(t) = u_j(t)$ детерминант имеет два одинаковых столбца, поэтому равен нулю.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 12, № 674–680; § 22, № 52.

**Понижение порядка** линейного однородного уравнения при известном частном решении.

Пусть для уравнения (18) известно частное решение $y_1(t) \neq 0$ $(\alpha < t < \beta)$. Покажем, что тогда уравнение можно свести к линейному уравнению $(n-1)$-го порядка. Для этого сделаем замену искомой функции $y = y_1 z$. Производные выражаются по формуле Лейбница

$$y^{(k)} = (y_1 z)^{(k)} = C_k^0 y_1 z^{(k)} + C_k^1 y_1' z^{(k-1)} + \ldots + C_k^k y_1^{(k)} z, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Подставляем эти выражения в уравнение (18). Так как $z, z'$, $\ldots, z^{(n)}$ войдут только в первой степени, то получится линейное однородное уравнение относительно $z$,

$$b_0(t)z^{(n)} + b_1(t)z^{(n-1)} + \ldots + b_n(t)z = 0. \qquad (26)$$

Уравнение (18) имело частное решение $y = y_1$. При замене $y = y_1 z$ оно переходит в функцию $z \equiv 1$, которая должна быть решением уравнения (26). Следовательно, $b_n(t) \equiv 0$. А тогда новая замена $z' = v$ приводит (26) к уравнению $(n-1)$-го порядка

$$b_0(t)v^{(n-1)} + b_1(t)v^{(n-2)} + \ldots + b_{n-1}(t)v = 0. \qquad (27)$$

Если у уравнения (18) были известны два или более линейно независимых частных решения, то из них с помощью указанных выше замен можно получить одно (или более) частных решений уравнения (27). С их помощью порядок уравнения можно понижать и далее.

Линейное уравнение 2-го порядка с известным частным решением $y(t) \neq 0$ изложенным выше методом приводится к уравнению $b_0(t)v' + b_1(t)v = 0$, которое легко решается. Другой способ решения (с разобранным примером) линейного уравнения 2-го порядка при известном решении $y_1(t) \neq 0$ см. [12], § 12, п. 2.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 12, № 681–701, 704, 705; § 22, № 55, 61, 62.

**4.** **Линейное неоднородное уравнение** $n$-го порядка исследуется аналогично линейной неоднородной системе.

**Теорема 7.** *Общее решение линейного неоднородного уравнения* (14) *есть сумма его частного решения и общего решения линейного однородного уравнения* (18), *то есть*

$$y_{\text{общ. неодн.}} = y_{\text{частн. неодн.}} + u_{\text{общ.одн.}} \tag{28}$$

Доказательство проводится подобно доказательству теоремы 5.

**Пример 6 (использование свойств решений линейных уравнений).** Даны три решения $y_1 = t + 2$, $y_2 = t^2 - 1$, $y_3 = t^2 + t$ линейного неоднородного уравнения 2-го порядка. а) Найти общее решение этого уравнения. б) Написать это уравнение.

*Решение примера.* а) Для общего решения неоднородного уравнения имеем равенство (28). Общее решение однородного уравнения по теореме 6 есть $u_{\text{общ. одн.}} = c_1u_1 + c_2u_2$, где $u_1$ и $u_2$ — линейно независимые решения однородного уравнения. В силу общих свойств линейных уравнений можно взять $u_1 = y_3 - y_2 = t + 1$, $u_2 = y_3 - y_1 = t^2 - 2$. Решения $u_1$ и $u_2$ линейно независимы, так как их вронскиан

$$W = \begin{vmatrix} t+1 & t^2-2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2 + 2t + 2 \neq 0.$$

Следовательно, $u_{\text{общ. одн.}} = c_1u_1 + c_2u_2 = c_1(t+1) + c_2(t^2-2)$, а $y_{\text{общ. неодн.}} = t + 2 + c_1(t+1) + c_2(t^2-2)$.

б) Однородное уравнение, имеющее решения $u_1 = t + 1$, $u_2 = t^2 - 2$, дается формулой (25), то есть

$$\begin{vmatrix} t+1 & t^2-2 & u \\ 1 & 2t & u' \\ 0 & 2 & u'' \end{vmatrix} = 0, \qquad (t^2+2t+2)u'' - (2t+2)u' + 2u = 0.$$

Чтобы получить неоднородное уравнение с той же левой частью и частным решением $y_1 = t+2$, подставим $u = t+2$ в левую часть уравнения. Получим, что она равна 2. Значит, искомое уравнение есть $(t^2 + 2t + 2)y'' - (2t + 2)y' + 2y = 2$. ◄

*Задачи для упражнений:*
[12], § 22, № 57–60.

**Метод вариации постоянных** позволяет найти решение линейного неоднородного уравнения (14), если известно общее решение

$$y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n \tag{29}$$

однородного уравнения (18). Здесь $y_1, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения уравнения (18), $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

Решение неоднородного уравнения (14) получается из (29), если заменить $c_1, \ldots, c_n$ на функции от $t$, которые надо найти. Так как уравнение (14) заменой (15) сводится к системе (16), то можно воспользоваться результатом, полученным в § 9 для системы, т. е. искать производные $c_1'(t), \ldots, c_n'(t)$ из линейной алгебраической системы

$$X(t)c'(t) = f^0(t). \tag{30}$$

Здесь $X(t)$ — фундаментальная матрица однородной (с $f \equiv 0$) системы (16). Для $i = 1, \ldots, n$ $i$-й столбец матрицы $X(t)$ в силу (15) состоит из функций $y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n-1)}$ ($y_i$ см. в (29)); векторы-столбцы

$$c'(t) = \left(c_1'(t), \ldots, c_n'(t)\right)^T, \quad f^0(t) = \left(0, \ldots, 0, \frac{f(t)}{a_0(t)}\right)^T.$$

Найдя из системы (30) функции $c_i'(t)$, проинтегрировав и затем подставив $c_i(t)$ в (29), получим решение уравнения (14).

**Пример 7.** Решить уравнение

$$(t^2 + 1)y' - 2ty' + 2y = 6(t^2 + 1)^2,$$

зная общее решение $y = c_1 t + c_2(t^2 - 1)$ однородного уравнения.

*Решение примера.* Здесь $y_1 = t$, $y_2 = t^2 - 1$, поэтому $y_1' = 1$, $y_2' = 2t$. Пишем систему (30)

$$\begin{pmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6(t^2 + 1) \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем $c_1' = 6 - 6t^2$, $c_2' = 6t$. Значит, $c_1(t) = 6t - 2t^3 + c_{11}$, $c_2(t) = 3t^2 + c_{21}$; $c_{11}$ и $c_{21}$ — произвольные постоянные. Получаем искомое решение

$$y = c_1(t)t + c_2(t)(t^2 - 1) =$$
$$= (6t - 2t^3 + c_{11})t + (3t^2 + c_{21})(t^2 - 1) =$$
$$= t^4 + 3t^2 + c_{11}t + c_{21}(t^2 - 1). \qquad \blacktriangleleft$$

*Задачи для упражнений:*
[12], § 12, № 702, 703.

**5.** Линейное уравнение $n$-го порядка заменой (15) сводится к системе уравнений, поэтому многие свойства уравнений следуют из аналогичных свойств систем. В частности, для уравнения (18) с коэффициентами вида

$$a_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t^{-1} + a_{i2}t^{-2} + \ldots \quad (i = 1, \ldots, n), \quad a_0 \equiv 1,$$

утверждение о поведении решений при $t \to \infty$ следует из аналогичного утверждения для системы, см. п. 6 § 9.

Методами аналитической теории дифференциальных уравнений исследовано ([30], гл. 4, § 8) поведение при $t \to 0$ решений уравнения

$$t^n a_0(t)y^{(n)} + t^{n-1}a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0,$$

где функции $a_i(t)$ аналитические, $a_0(0) \neq 0$.

Для линейного неоднородного уравнения (14) с $a_0 \equiv 1$ известно ([9], гл. 5, § 4, п. 5) представление частного решения *формулой Коши*

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, s)f(s)\,ds, \quad \big(y(t_0) = y'(t_0) = \ldots = y^{(n-1)}(t_0) = 0\big).$$

Как функция от $t$, функция Коши $K(t, s)$ удовлетворяет уравнению (18) с начальными условиями при $t = s$

$$K = 0, \quad K'_t = 0, \quad \ldots, \quad K^{(n-2)}_{t^{n-2}} = 0, \quad K^{(n-1)}_{t^{n-1}} = 1.$$

**Пример 8.** Найти частное решение уравнения $y'' + y = f(t)$.

*Решение примера.* Сначала найдем функцию Коши. Уравнению $y''+y=0$ и условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$ удовлетворяет функция $y=\sin t$, а условиям $y(s)=0$, $y'_t(s)=1$ — «сдвинутая» на $s$ функция, т. е. $y(t)=\sin(t-s)$. Беря $K(t,s)=\sin(t-s)$, получаем представление искомого решения формулой Коши

$$y(t)=\int_0^t \sin(t-s)f(s)\,ds. \qquad \blacktriangleleft$$

# § 11. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами — важный класс дифференциальных уравнений. Их решения выражаются через элементарные функции или через элементарные функции и неопределенные интегралы. К таким уравнениям сводится ряд задач из теоретической механики и электротехники, см. примеры в конце § 11.

**1.** **Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами** имеет вид

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0, \tag{31}$$

где $a_0,\ldots,a_n$ — любые числа. Будем считать, что $a_0\neq 0$, так как всегда можно начать записывать уравнение с первого отличного от нуля коэффициента, и что все $a_i$ вещественны. Левую часть уравнения обозначим $L(y)$.

Ищем решение уравнения (31) в виде $y=e^{\lambda t}$. Подставляя в уравнение и сокращая на $e^{\lambda t}$, получаем *характеристическое* *уравнение*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{32}$$

короче, $M(\lambda) = 0$. Следовательно, функция $y = e^{\lambda t}$ удовлетворяет уравнению (31) тогда и только тогда, когда $\lambda$ — корень уравнения (32). Из алгебры известно, что уравнение (32) имеет $n$ корней, среди которых могут быть кратные и комплексные.

Если все корни различные, то есть простые, то уравнение (31) имеет $n$ решений $y_j = e^{\lambda_j t} (j = 1, \ldots, n)$. Покажем, что эти решения линейно независимы. Их вронскиан равен

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Последний детерминант в алгебре называется детерминантом Вандермонда. Он не равен нулю тогда и только тогда, когда все числа $\lambda_j$ различные. Значит, если все $\lambda_j$ различные, то решения $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ уравнения (31) линейно независимы, и общее решение имеет вид

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} \tag{33}$$

(теоремы 2 и 6 об общем решении и используемая в доказательствах теорема единственности справедливы и для линейных систем с комплексными решениями в силу леммы 1 § 9).

Если все корни $\lambda_j$ вещественны, то формула (33) с произвольными вещественными $c_j$ дает вещественное общее решение.

Пусть теперь среди корней $\lambda_j$ есть комплексные. Тогда для каждого комплексного корня, например, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, имеется сопряженный корень $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Им соответствуют комплексные решения

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)t} = u_1 + iu_2, \qquad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)t} = u_1 - iu_2,$$
$$u_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad u_2 = e^{\alpha t}\sin\beta t. \tag{34}$$

Функции $u_1$, $u_2$ — решения, так как $u_1 = (y_1 + y_2)/2$, $u_2 = (y_1 - y_2)/(2i)$. Заменим в фундаментальной системе $y_1, \dots, y_n$ каждую пару комплексно сопряженных решений вида $y_1$, $y_2$ парой вещественных решений вида $u_1$, $u_2$, а для вещественных решений $y_j = e^{\lambda_j t}$ положим $u_j = y_j$.

Покажем, что полученные вещественные решения $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы на любом интервале $(t_1, t_2)$. Предположим, что для некоторых (вещественных или комплексных) $b_1, \dots, b_n$ имеем $b_1u_1 + \ldots + b_nu_n \equiv 0$ при $t_1 < t < t_2$. Выразив здесь $u_1, \dots, u_n$ через $y_1, \dots, y_n$ получим $d_1y_1 + \ldots + d_ny_n \equiv 0$, где $d_1 = (b_1 - ib_2)/2$, $d_2 = (b_1 + ib_2)/2$ и аналогично для коэффициентом $d_{2p-1}, d_{2p}$ всех комплексных пар $y_{2p-1}, y_{2p}$; для вещественных $y_r$ имеем $u_r = y_r$, $d_r = b_r$. Если хоть одно $b_j \neq 0$, то найдется $d_k \neq 0$, и функции $y_1, \dots . y_n$ будут линейно зависимыми. Это противоречит доказанному ранее. Значит, все $b_j = 0$, и решения $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы.

Итак, в случае простых корней $\lambda_j$ существует вещественная фундаментальная система решений, состоящая из функций $e^{\lambda_j t}$ для каждого вещественного корня $\lambda_j$ и функций $e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}\sin\beta t$ для каждой пары комплексных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$.

**Пример 9.** Решить уравнение $y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0$.

*Решение примера.* Характеристическое уравнение $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ (отыскивается подбором),

$\lambda_{2,3} = -2 \pm 3i$. Корню $\lambda_1 = 1$ соответствует частное решение $y_1 = e^t$, а паре комплексно сопряженных корней $\lambda_{2,3} = -2 \pm 3i$ соответствуют два частных решения $y_2 = e^{-2t}\cos 3t$ и $y_3 = e^{-2t}\sin 3t$. Получаем вещественное общее решение $y = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}\cos 3t + c_3 e^{-2t}\sin 3t$. ◀

### 2. Случай кратных корней

Выясним, во что обращается левая часть $L(y)$ уравнения (31) при подстановке $y = t^s e^{\gamma t}$, где $s \geqslant 0$ целое.

**Лемма 6.** *Если $\lambda = \gamma$ — не корень уравнения (32), то пусть $k = 0$, а если $\lambda = \gamma$ — корень, то $k$ — его кратность. Тогда (здесь $L(y)$ — левая часть уравнения (31))*

$$L(t^s e^{\gamma t}) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad s \leqslant k-1, \\ (d_0 t^m + d_1 t^{m-1} + \ldots + d_m) e^{\gamma t} & \\ (\text{где} \quad d_0 \neq 0,\ m = s-k), & \text{если} \quad s \geqslant k. \end{cases} \tag{35}$$

_Доказательство_ ([39]). Обозначая $\partial^s \varphi / \partial \gamma^s = \varphi_\gamma^{(s)}$ имеем для целых $s \geqslant 0$

$$\left(t^s e^{\gamma t}\right)_t^{(p)} = \left((e^{\gamma t})_\gamma^{(s)}\right)_t^{(p)} = \left((e^{\gamma t})_t^{(p)}\right)_\gamma^{(s)} = \left(\gamma^p e^{\gamma t}\right)_\gamma^{(s)}.$$

Умножая левую и правую части на $a_{n-p}$ и суммируя по $p$ от 0 до $n$, получаем

$$a_0\left(t^s e^{\gamma t}\right)_t^{(n)} + \ldots + a_n\left(t^s e^{\gamma t}\right) = \left((a_0\gamma^n + \ldots + a_n)e^{\gamma t}\right)_\gamma^{(s)},$$

то есть

$$L(t^s e^{\gamma t}) = \left(M(\gamma)e^{\gamma t}\right)_\gamma^{(s)}.$$

Дифференцируя произведение по правилу Лейбница, находим

$$L\left(t^s e^{\gamma t}\right) = e^{\gamma t}\left[t^s M(\gamma) + C_s^1 t^{s-1} M'(\gamma) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + C_s^{s-1} t^1 M^{(s-1)}(\gamma) + C_s^s t^0 M^{(s)}(\gamma)\right]. \qquad (36)$$

Если $\lambda = \gamma$ — корень многочлена $M(\lambda)$ кратности $k$, то $M(\gamma) = M'(\gamma) = \ldots = M^{(k-1)}(\gamma) = 0$, $M^{(k)}(\gamma) \neq 0$. Тогда для всех $s \leqslant k - 1$ сумма в (36) равна нулю.

Если же $\lambda = \gamma$ не корень или корень кратности $k \leqslant s$, то $M^{(k)}(\gamma) \neq 0$ и в сумме (36) высшая степень $t$ содержится в члене $C_s^k t^{s-k} M^{(k)}(\gamma)$. Это дает в (35) старший член $d_0 t^m$, где $d_0 \neq 0$, $m = s - k$. ■

**Теорема 8.** *Для каждого корня* $\lambda$ *кратности* $k \geqslant 1$ *многочлена* $M(\lambda)$ *функции*

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1} e^{\lambda t} \qquad (37)$$

*являются решениями уравнения* (31)*. Написав такие функции для всех корней характеристического многочлена* $M(\lambda)$*, получаем фундаментальную систему решений уравнения* (31).

*Доказательство.* В силу леммы 6 такие функции являются решениями. Для каждого корня многочлена $M(\lambda)$ число таких решений равно кратности корня. Так как сумма кратностей всех корней равна $n$, то всего имеем $n$ решений вида $t^s e^{\lambda t}$. Покажем, что эти $n$ решений линейно независимы на любом интервале $\alpha < t < \beta$.

Предположим противное. Тогда найдутся такие числа, из которых хоть одно не равно нулю, что умножив наши решения на эти числа, сложив и вынеся одинаковые $e^{\lambda_i t}$

за скобки, получим

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t}+p_2(t)e^{\lambda_2 t}+\ldots+p_m(t)e^{\lambda_m t}\equiv 0 \quad (\alpha<t<\beta), \qquad (38)$$

где числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ все различны, $p_1, \ldots, p_m$ — алгебраические многочлены. Пусть нумерация такова, что многочлен $p_m$ содержит ненулевой коэффициент.

Чтобы упростить равенство (38), делим его на $e^{\lambda_1 t}$. Получаем

$$p_1(t)+p_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+\ldots+p_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t}\equiv 0.$$

Дифференцируем обе части равенства по $t$ на один раз больше, чем степень многочлена $p_1(t)$. Первый член суммы исчезает, а в остальных многочлены заменятся другими тех же степеней. (В самом деле, пусть $a \neq 0$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left[(at^s+bt^{s-1}+\ldots)e^{\gamma t}\right]=(\gamma at^s+sat^{s-1}+\gamma bt^{s-1}+\ldots)e^{\gamma t};$$

точками обозначены члены низших степеней. Так как во всех членах $\gamma=\lambda_i-\lambda_1\neq 0$ $(i=2,\ldots,m)$, то степень многочлена сохраняется.)

Получается равенство, подобное (38), но содержащее на один член меньше. С ним поступаем так же, как с (38). Продолжаем так до тех пор, пока не получим равенство с одним членом $r_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t}\equiv 0$. Многочлен $r_m(t)$ той же степени, что $p_m(t)$, значит, он содержит ненулевой коэффициент. Поэтому $r_m(t)\not\equiv 0$ на интервале $\alpha<t<\beta$, и последнее равенство невозможно. Следовательно, найденные $n$ решений линейно независимы и образуют фундаментальную систему.

При наличии комплексного корня $\lambda_1=\alpha+\beta i$, $\beta\neq 0$ уравнение (32) с вещественными коэффициентами имеет и сопряженный корень $\lambda=\alpha-\beta i$; эти корни имеют одну и ту же кратность $k_1$. Тогда, как в случае простых корней, каждые два комплексно сопряженных решения $t^s e^{(\alpha+\beta i)t}$, $t^s e^{(\alpha-\beta i)t}$ $(0 \leqslant s \leqslant k_1 - 1)$ можно заменить вещественными решениями

$$t^s e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad t^s e^{\alpha t}\sin\beta t, \quad (0 \leqslant s \leqslant k-1).$$

Все такого рода решения вместе с решениями вида (37) для вещественных корней $\lambda$ образуют фундаментальную систему. ■

**Пример 10.** Решить уравнение $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0.$

*Решение примера.* Характеристическое уравнение $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8 = 0$. Группируя члены, получаем $(\lambda+2)(\lambda^2-4) = 0$. Корни: $\lambda_1 = +2$, $\lambda_{2,3} = -2$. Фундаментальная система решений $y_1 = e^{2t}$, $y_2 = e^{-2t}$, $y_3 = te^{-2t}$. Общее решение $y = c_1e^{2t} + (c_2+c_3t)e^{-2t}$. ◄

**Пример 11.** Решить уравнение $y^{\mathrm{VI}} - 16y''' + 64y = 0.$

*Решение примера.* Характеристическое уравнение $\lambda^6 - 16\lambda^3 + 64 = 0$, $(\lambda^3 - 8)^2 = 0$, $(\lambda - 2)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 4)^2 = 0$. Корни $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_{3,4} = -1 + i\sqrt{3}$, $\lambda_{5,6} = -1 - i\sqrt{3}$. Общее решение

$$y = (c_1 + c_2t)e^{2t} + (c_3 + c_4t)e^{-t}\cos t\sqrt{3} + (c_5 + c_6t)e^{-t}\sin t\sqrt{3}.$$

Было бы ошибкой из двух последних членов выносить за скобку сумму вида $(a + bt)$. Это можно было бы делать, только если $c_3, c_4, c_5, c_6$ пропорциональны. Но эти постоянные произвольны, значит, могут быть и не пропорциональными. ◄

*Задачи для упражнений:*
[12], § 11, № 511–532.

**3. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами**

$$L(y) \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t) \tag{39}$$

при любой непрерывной функции $f(t)$ можно решить методом вариации постоянных (§ 10), так как для линейного однородного уравнения с теми же коэффициентами общее решение можно найти изложенными выше приемами. Однако при отыскании решения уравнения (39) надо брать интегралы. В случаях, когда функция $f(t)$ выражается через суммы и произведения функций вида $t^m$, $e^{at}$, $\cos bt$, $\sin bt$ ($m \geqslant 0$ целое) можно решение найти без интегрирования с помощью излагаемого ниже *метода неопределенных коэффициентов.*

Учитывая, что решение уравнения $L(y) = f_1 + f_2$ равно сумме решений уравнений $L(y_1) = f_1$ и $L(y_2) = f_2$ и что синусы и косинусы можно по формулам Эйлера выразить через показательные функции, достаточно рассмотреть случай, когда в (39)

$$f(t) = p(t)e^{\gamma t}, \quad p(t) = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \ldots + b_m, \quad m \geqslant 0 \ \text{целое.} \tag{40}$$

**Теорема 9.** *В случае* (40) *имеется частное решение вида*

$$y = t^k \left(q_0 t^m + q_1 t^{m-1} + \ldots + q_m\right) e^{\gamma t}, \tag{41}$$

*где* $k = 0$, *если* $\gamma$ *— не корень характеристического уравнения* (32), *и* $k$ *равно кратности корня* $\gamma$, *если* $\gamma$ *— корень.*

Доказательство. Взяв $y_1 = q_0 t^{m+k} e^{\gamma t}$, имеем по лемме 6

$$L(y_1) = \left(q_0 d_0 t^m + r(t)\right) e^{\gamma t}, \quad d_0 \neq 0.$$

Если $m = 0$, то $r(t) \equiv 0$, а если $m \geqslant 1$, то $r(t)$ — многочлен степени не больше $m-1$. Чтобы получить $b_0 t^m$, возьмем $q_0 = b_0 d_0^{-1}$. Тогда в случае $m = 0$ имеем решение $y_1 = b_0 d_0^{-1} t^k e^{\gamma t}$.

Пусть $m \geqslant 1$. Предположим, что теорема верна, когда в (40) степень многочлена ниже $m$, то есть $b_0 = 0$, и докажем, что она верна и при $b_0 \neq 0$.

В левой части (39) полагаем $y = y_1 + z$, $y_1$ то же, что выше. Получаем

$$L(y) = L(y_1) + L(z) = \big(b_0 t^m + r(t)\big)e^{\gamma t} + L(z).$$

Надо, чтобы это равнялось (40), то есть $(b_0 t^m + p_1(t))e^{\gamma t}$, где $p_1(t)$ — многочлен степени $m-1$. Следовательно,

$$L(z) = \big(p_1(t) - r(t)\big)e^{\gamma t}. \tag{42}$$

Здесь $p_1(t) - r(t)$ — многочлен степени ниже $m$. По предположению индукции, уравнение (42) имеет частное решение вида $z = t^k q^*(t) e^{\gamma t}$, $q^*(t)$ — многочлен степени ниже $m$. Поэтому, как и требуется,

$$y = y_1 + z = t^k\big(b_0 d_0^{-1} t^m + q^*(t)\big)e^{\gamma t}. \qquad \blacksquare$$

Чтобы применить эту теорему к конкретному уравнению вида (39), (40) с числовыми коэффициентами, надо по виду правой части $f(t)$ в данном уравнении определить числа $\gamma$, $k$, $m$ в (41). Чтобы найти коэффициенты $q_0, q_1, \ldots, q_m$, надо подставить выражение (41) в данное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения. Получается система алгебраических уравнений. Из нее определяются коэффициенты $q_0, q_1, \ldots, q_m$.

**Пример 12.** Решить уравнение

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = e^{-2t} + te^t.$$

*Решение примера.* Левая часть уравнения та же, что в примере 10. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -2$. Общее решение однородного уравнения $y_0 = c_1e^{2t} + (c_2 + c_3t)e^{-2t}$.

Для каждого члена правой части данного уравнения определяем число $\gamma$. Для $e^{-2t}$ имеем $\gamma = -2$, а для $te^t$ имеем $\gamma = 1$. Так как эти числа различны, то надо искать отдельно частные решения уравнений

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = e^{-2t}, \tag{а}$$

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = te^t. \tag{б}$$

Для уравнения (а) имеем $\gamma = -2$, $k = 2$, $m = 0$. Согласно (41) пишем $y_1 = t^2 \cdot ae^{-2t}$. Подставляя $y_1$ в (а), получаем $-8ae^{-2t} = e^{-2t}$. Значит, $-8a = 1$, $a = -1/8$.

Для уравнения (б) имеем $\gamma = 1$, $k = 0$, $m = 1$. Согласно (41) $y_2 = (bt+c)e^t$. Подставляя $y_2$ в (б), получаем $e^t(-9bt+3b-9c) = te^t$. Приравнивая коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях равенства, получаем $-9b = 1$, $3b - 9c = 0$. Отсюда находим $b = -1/9$, $c = -1/27$.

Общее решение исходного уравнения есть

$$y = y_0 + y_1 + y_2 =$$
$$= c_1e^{2t} + (c_2 + c_3t)e^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t} - \left(\frac{1}{9}t + \frac{1}{27}\right)e^t. \quad ◄$$

**Замечание.** Если в уравнении (39) коэффициенты вещественны и

$$f(t) = e^{\alpha t}\bigl(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t\bigr), \tag{43}$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ — вещественные многочлены степеней $m_1$ и $m_2$, то существует вещественное частное решение вида

$$y = t^k e^{\alpha t}\bigl(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t\bigr), \tag{44}$$

где число $k$ есть кратность корня $\lambda = \alpha + \beta i$ уравнения (32), $k = 0$, если $\alpha + \beta i$ не корень; $R(t)$ и $S(t)$ — многочлены степени $m = \max\{m_1, m_2\}$.

*Доказательство.* Так как

$$\cos\beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2}, \quad \sin\beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i},$$

то в (43) $f = f_1 + f_2$, где $f_1$ и $f_2$ — функции вида (40) с $\gamma = \alpha + \beta i$ и $\gamma = \alpha - \beta i$ соответственно. Решение уравнения $L(y) = f_1 + f_2$ равно $y_1 + y_2$, где $L(y_1) = f_1$, $L(y_2) = f_2$. Существуют частные решения $y_1$ и $y_2$ вида (41) с одним и тем же $k$ (корни $\alpha \pm \beta i$ имеют одну и ту же кратность). Переходя от $e^{(\alpha \pm \beta i)t}$ к $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$, получаем (44). ■

На практике для отыскания решения (44) можно пользоваться любым из двух способов.

1. Написав в (44) многочлены $R(t)$ и $S(t)$ с буквенными коэффициентами, подставить это выражение в дифференциальное уравнение. Приравняв коэффициенты при подобных членах слева и справа, можно найти эти коэффициенты без использования комплексных чисел.

Например, для уравнения $y'' + y = 2\cos t - 8t\sin t$ имеем $\gamma = i = \lambda_1$, $k = 1$, $m = 1$, поэтому частное решение можно искать в виде $y = t\left[(at + b)\cos t + (ct + d)\sin t\right]$.

2. В этом способе неизвестных коэффициентов вдвое меньше, но они комплексные. Так как

$$\cos\beta t = \operatorname{Re} e^{i\beta t}, \quad \sin\beta t = \operatorname{Im} e^{i\beta t} = -\operatorname{Re}\left(ie^{i\beta t}\right),$$

то в (43)

$$f(t) = \operatorname{Re} g(t), \quad g(t) = \left(P(t) - iQ(t)\right)e^{(\alpha + \beta i)t}.$$

Ищем решение $z$ уравнения $L(z) = g(t)$ в виде (41), где $\gamma = \alpha + \beta i$. Для этого подставляем такое $z$ в уравнение и находим комплексные коэффициенты $q_0, q_1, \ldots, q_m$. Получаем

$$z = t^k N(t) e^{(\alpha+\beta i)t}, \quad N(t) = q_0 t^m + q_1 t^{m-1} + \ldots + q_m.$$

Так как линейное уравнение $n$-го порядка сводится к линейной системе, то в силу леммы 1 § 9 данное уравнение $L(y) = f$ с функцией $f(t) = \operatorname{Re} g(t)$ имеет частное решение $y = \operatorname{Re} z$. Комплексные числа $q_0, \ldots, q_m$ уже найдены, а $e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$, поэтому найти $\operatorname{Re} z$ теперь нетрудно.

**Пример 13.** **Решить уравнение**

$$y'' + y = 2\cos t - 8t \sin t. \tag{45}$$

_Решение примера._ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Общее решение однородного уравнения $y_0 = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

Для каждого слагаемого правой части в (45) определяем числа $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = \alpha + \beta i = i$. Для обоих слагаемых они одинаковы, поэтому надо искать частное решение сразу для данного уравнения, не разбивая его правую часть. Так как $2\cos t - 8t \sin t = \operatorname{Re}(2 + 8it)e^{it}$, то вместо (45) пишем

$$y = \operatorname{Re} z, \quad z'' + z = (2 + 8it)e^{it}, \tag{46}$$

число $\gamma = i$ равно корню $\lambda_1$ кратности $k = 1$, степень многочлена $2 + 8it$ есть $m = 1$. По теореме 9 ищем решение в виде $z = t(at + b)e^{it}$. Подставляя это $z$ в уравнение (46), получаем $[2a + i(4at + 2b)]e^{it} = (2 + 8it)e^{it}$. Значит, $4ai = 8i$, $2a + 2bi = 2$. Отсюда $a = 2$, $b = i$ и $z = (2t^2 + it)e^{it}$. Частное решение

$y_1 = \operatorname{Re} z = 2t^2 \cos t - t \sin t$. Общее решение уравнения (45)

$$y = y_0 + y_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 2t^2 \cos t - t \sin t. \quad ◄$$

*Задачи для упражнений:*
[12], § 11, № 533–574, 607–608; § 23, № 68–73, 78–85, 87–90.

## 4. Физические примеры

**Пример 14.** Уравнение упругих колебаний (без сопротивления) под действием синусоидальной внешней силы имеет вид

$$x'' + a^2 x = b \sin \omega t \quad (a, b, \omega > 0). \tag{47}$$

*Решение примера.* Характеристическое уравнение $\lambda^2 + a^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm ai$. Общее решение однородного уравнения $x_0 = c_1 \cos at + c_2 \sin at$ — это колебания при отсутствии внешней силы, они называются *собственными колебаниями*.

Для функции $\sin \omega t$ имеем $\gamma = \omega i$. В случае $\omega \neq a$ уравнение (47) имеет частное решение вида $x_1 = c \cos \omega t + d \sin \omega t$. Подставляя это в (47), получаем

$$(a^2 - \omega^2) c \cos \omega t + (a^2 - \omega^2) d \sin \omega t = b \sin \omega t.$$

Так как $|\omega| \neq |a|$, то $c = 0$, $d = b/(a^2 - \omega^2)$. Общее решение уравнения (47)

$$x = x_0 + x_1 = c_1 \cos at + c_2 \sin at + \frac{b}{a^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Случай $\omega = a$, когда частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний, называется *резонансным*. В этом случае согласно (44) надо искать частное решение в виде

$x_1 = t(c\cos\omega t + d\sin\omega t)$. Подставляя это в уравнение (47) и учитывая, что $\omega = a$, получаем

$$2(\omega d\cos\omega t - \omega c\sin\omega t) = b\sin\omega t; \quad \text{отсюда} \quad d = 0,\ c = -\frac{b}{2\omega}.$$

Общее решение

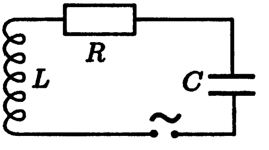
$$x = x_0 + x_1 = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t - \frac{bt}{2\omega}\cos\omega t$$

представляет собой колебания с неограниченно возрастающей амплитудой.

В реальных физических системах колебания никогда не могут расти неограниченно, так как колебания большого размаха или сдерживаются сопротивлением, или приводят к разрушению системы. ◀

Обобщая этот пример, в математике называют *резонансным* любой случай, когда определяемое по правой части уравнения число $\gamma$ совпадает с корнем $\lambda$ характеристического уравнения, независимо от того, имеет ли правая часть уравнения колебательный характер.

При наличии сопротивления, пропорционального скорости, уравнение упругих колебаний имеет вид, отличающийся лишь обозначениями от уравнения, рассмотренного в следующем примере.




$E = V\sin\omega t$

**Рис. 10**

**Пример 15.** Пусть в электрической цепи (рис. 10) последовательно включены катушка самоиндукции $L$, конденсатор емкости $C$, сопротивление $R$ и источник переменного тока с напряжением $V\sin\omega t$; $L, C, R, V, \omega > 0$. Найти силу тока в цепи при установившемся режиме.

*Решение примера.* Уравнения для силы тока $I(t)$ и заряда конденсатора $q(t)$:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = V\sin\omega t, \qquad \frac{dq}{dt} = I,$$

(о получении этих уравнений и применяемых физических законах см. [12], § 11, п. 5 или [7], § 13). Дифференцируя первое уравнение, получаем

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega V\cos\omega t. \tag{48}$$

Характеристическое уравнение $L\lambda^2 + R\lambda + 1/C = 0$ имеет или комплексные сопряженные корни $\lambda_1, \lambda_2$ с вещественной частью $-R/(2L) < 0$, или вещественные отрицательные корни, так как $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1/CL$, $\lambda_1 + \lambda_2 = -R/L < 0$. Поэтому решение однородного уравнения $I_0(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

Чтобы найти частное решение $I_1(t)$ уравнения (48), заметим, что $\cos\omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$, поэтому $I_1 = \operatorname{Re} z$, где $Lz'' + Rz' + z/C = \omega Ve^{i\omega t}$. Было показано, что $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$. Поэтому $\gamma = i\omega \neq \lambda_{1,2}$ и частное решение ищем в виде $z = Ae^{i\omega t}$. Подставляя в уравнение получаем

$$A\left(-\omega^2L + i\omega R + \frac{1}{C}\right)e^{i\omega t} = \omega Ve^{i\omega t}, \qquad A = \frac{V}{\frac{1}{C\omega} - L\omega + iR}.$$

Полагая $A = |A|e^{i\varphi}$, получаем

$$z = |A|e^{i(\omega t + \varphi)}, \qquad I_1(t) = \operatorname{Re} z = |A|\cos(\omega t + \varphi).$$

Общее решение уравнения (48) есть $I(t) = I_0(t) + I_1(t)$. Так как $I_0(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то при любых начальных условиях через некоторое время $I_0(t)$ будет близко нулю и $I(t)$ будет очень мало отличаться от периодического решения $I_1(t)$, не зависящего от начальных условий. Такое решение называется *установившемся режимом*, а процесс от начального момента до момента, когда слагаемым $I_0(t)$ можно будет пренебречь — *переходным процессом*. ◀

В электротехнике важно знать наибольшее значение $I_1(t)$, достигаемое на каждом периоде. Оно равно $|A|$,

$$|A| = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Графики $|A|$ в зависимости от $\omega$ при разных $R$ изображены на рис. 11. Линия 1 — при $R = 0$, линия 2 — при малых $R$, линия 3 — при больших $R$. Максимум $|A|$ достигается при $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, то есть при $\omega = \omega_0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

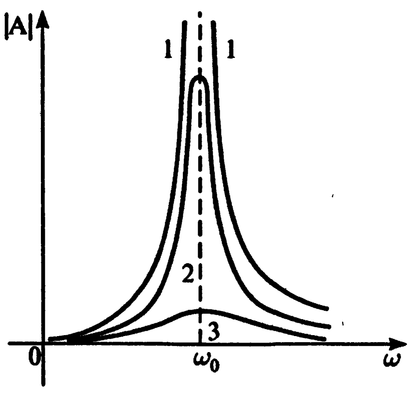



**Рис. 11**

Рассматриваемая электрическая цепь в случае малого $R$ хорошо пропускает только ток определенной частоты $\omega_0$ и близких к ней частот. Подобное устройство применяется в радиоприемниках (настройка приемника на определенную частоту с помощью изменения параметров $L$, $C$, $R$).

Уточнение. Для функции $I_1(t) = |A|\cos(\omega t + \varphi)$ период равен $2\pi/\omega$, а частота в обычном смысле, т. е. число колебаний в единицу времени, равна $\omega/2\pi$; число $\omega$ называется круговой частотой.

## 5. Уравнение Эйлера

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x) \quad (a_i \text{ — постоянные}) \tag{49}$$

сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$). Докажем это. Имеем при $x > 0$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t}y'_t = A; \quad y''_{xx} = \frac{A'_x}{x'_t} = \frac{e^{-t}y''_{tt} - e^{-t}y'_t}{e^t} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t).$$

По индукции докажем, что

$$y_x^{(k)} = e^{-kt}L(y), \quad L(y) = b_{k0}y_t^{(k)} + b_{k1}y_t^{(k-1)} + \ldots + b_{k,k-1}y'_t, \tag{50}$$

где все $b_{ki}$ — постоянные числа. Предположим, что (50) верно для некоторого $k$. Обозначая $e^{-kt}L(y)$ через $B$, имеем

$$y_x^{(k+1)} = B'_x = \frac{B'_t}{x'_t} = \frac{e^{-kt}(L(y))'_t - ke^{-kt}L(y)}{e^t} = e^{-(k+1)t}L_1(y),$$

где $L_1(y)$ — сумма производных $y_t^{(k+1)}, y_t^{(k)}, \ldots, y'_t$ с постоянными коэффициентами. По индукции формула (50) доказана. Подставляя (50) для $k = 1, 2, \ldots, n$ в (49), получаем линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Для этого уравнения характеристическое уравнение можно написать, не пересчитывая производные. Характеристическое уравнение для линейного уравнения с постоянными коэффициентами получается, если подставить $y = e^{\lambda t}$ в левую часть уравнения и сократить на общий множитель $e^{\lambda t}$, см. (31), (32). У нас $e^t = x$, $e^{\lambda t} = x^\lambda$, поэтому надо подставить $y = x^\lambda$ в левую часть (49) и сократить на $x^\lambda$. Получается характеристическое уравнение

$$a_0\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2) + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Таким образом, в (49) каждое произведение $x^ky^{(k)}$ заменяется на произведение $k$ убывающих на 1 чисел: $\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)$.

Пример решения уравнения Эйлера с подробными пояснениями см. [12], § 11, п. 4.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 11, № 589–598, 606, 609, 610.

**6.** Для линейных уравнений с постоянными коэффициентами детально исследовалось поведение решений в случаях, интересных для приложений, например, в [4], гл. 2, § 10; [9], гл. 6, § 1, п. 2, примеры 2, 9, 10.

Разрабатывались различные методы решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Об отыскании решений с помощью рядов Фурье см. [9], гл. 6, § 1, п. 3; [5], § 18, п. 3°. Операционный метод, основанный на преобразовании Лапласа, позволяет находить решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, не находя общего решения. Доступное изложение этого метода и примеры его применения см. в [5], § 24, с. 205–211.

## § 12. Линейные уравнения второго порядка

Линейное однородное уравнение второго порядка имеет вид

$$p_0(t)y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = 0. \tag{51}$$

У многих таких уравнений (например, у уравнения $y'' + t^a y = 0$, $a = \mathrm{const} > 0$) решения не выражаются через элементарные функции и неопределенные интегралы. Ниже излагаются некоторые методы исследования свойств решений уравнений вида (51) без отыскания самих решений.

**1.** Уравнение (51) можно привести к простейшему виду

$$y'' + q(t)y = 0 \tag{52}$$

многими способами, из которых два основных.

**А. Линейная замена искомой функции.** Подставляя $y = a(t)u$ в (51), получаем (предполагается, что $p_0, p_1 \in C^1$)

$$p_0au'' + 2p_0a'u' + p_0a''u + p_1au' + p_1a'u + p_2au = 0.$$

Чтобы уничтожить члены с $u'$, полагаем $2p_0a'+p_1a = 0$. Отсюда получаем $a(t) = c \cdot e^{-p_1/(2p_0)}$, берем $c \neq 0$.

**Б. Замена независимого переменного.** Считая $x = \varphi(t)$, находим $y'_t = y'_x\varphi'_t$; $y''_{tt} = y''_{xx}(\varphi'_t)^2 + y'_x\varphi''_{tt}$. Подставляя в (51), получаем

$$p_0y''_{xx}(\varphi'_t)^2 + p_0y'_x\varphi''_{tt} + p_1y'_x\varphi'_t + p_2y = 0.$$

Чтобы уничтожить члены с $y'_x$, полагаем $p_0\varphi''_{tt} + p_1\varphi'_t = 0$. Понижая порядок заменой $\varphi'_t = \psi$, находим сначала $\psi(t) = c \cdot e^{-\int p_1/p_0\,dt}$ (берем $c \neq 0$), затем $\varphi(t)$.

Другие способы приведения к виду (52) являются комбинациями этих двух. Например, можно сделать в (51) замену вида $x = \varphi(t)$ с какой-либо функцией $\varphi \in C^2$, $\varphi' \neq 0$, а затем в полученном уравнении уничтожить член с $y'_x$ заменой $y = a(x)u$.

**2.** **Исследование выпуклости графиков решений и нулей решений.** Если в уравнении (52) $q(t) < 0$ на интервале $\alpha < t < \beta$, то в области $y > 0$, $\alpha < t < \beta$ имеем $y'' = -q(t)y > 0$. Поэтому там графики всех решений выпуклы вниз, а в области $y < 0$, $\alpha < t < \beta$ имеем $y'' < 0$, и графики выпуклы вверх. В обеих областях графики выпуклы в сторону оси $Ot$.

Если же $q(t) > 0$ при $\gamma < t < \delta$, то на интервале $(\gamma, \delta)$ имеем $y'' = -qy < 0$ при $y > 0$ и $y'' > 0$ при $y < 0$. Поэтому при $\gamma < t < \delta$ графики решений обращены вогнутостью к оси $Ot$.

*Нулями* решения $y(t)$ называются такие $t$, при которых $y(t) = 0$.

**Лемма 7.** *Если $y(t) \not\equiv 0$ — решение уравнения (51), $y(t_0) = 0$, то $y'(t_0) \neq 0$.*

*Доказательство.* Если бы $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, то при этих начальных условиях существовало бы два решения: данное решение $y(t)$

и нулевое решение $y_1(t) \equiv 0$. Это противоречит теореме единственности. ■

**Лемма 8.** *Ненулевое решение $y(t) \not\equiv 0$ уравнения (51) не может иметь бесконечно много нулей на конечном отрезке.*

*Доказательство.* Пусть на отрезке $[a, b]$ решение $y(t) \not\equiv 0$ имеет бесконечное множество нулей. Выберем из них сходящуюся последовательность $t_1, t_2, \ldots \to t_0$. Тогда $t_0 \in [a, b]$ и из $y(t_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и непрерывности $y(t)$ следует $y(t_0) = 0$. Решение $y(t)$ имеет производную $y'(t)$. Следовательно, существует

$$\lim_{k \to \infty} \frac{y(t_k) - y(t_0)}{t_k - t_0} = y'(t_0).$$

Числитель равен нулю, значит, $y'(t_0) = 0$. Это противоречит лемме 7. ■

**Теорема 10.** *На отрезке, где $q(t) \leqslant 0$, любое решение $y(t) \not\equiv 0$ уравнения (52) не может обращаться в нуль более, чем в одной точке.*

*Доказательство.* Предположим, что $y(t_1) = 0$, $y(t_2) = 0$, $t_1 < t_2$. На отрезке $[t_1, t_2]$ по лемме 8 может быть только конечное число нулей. Возьмем два соседних нуля $t = a$ и $t = b > a$. При $a < t < b$ $y(t)$ не меняет знак, например, $y(t) > 0$ (если там $y(t) < 0$, то рассмотрим вместо $y(t)$ решение $y_1(t) = -y(t) > 0$). Тогда $y(a) = y(b) = 0$ и по лемме 7 $y'(a) \neq 0$. Так как $y(t) > 0$ на $(a, b)$, то $y'(a) > 0$ и $y'' = -q(t)y \geqslant 0$ на $(a, b)$. Значит, $y'(t)$ не убывает и из $y'(a) > 0$ следует $y'(t) > 0$ на $(a, b)$. Тогда $y(t)$ возрастает на $[a, b]$ и из $y(a) = 0$ следует $y(b) > 0$ в противоречии с выбором точки $b$. ■

**Теорема 11 (о чередовании нулей).** *Нули двух любых линейно независимых решений уравнения* (51) *строго чередуются. То есть в промежутке между любыми двумя соседними нулями любого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения.*

Доказательство. У этих решений нет общих нулей (в точке $t_1$, где $y_1(t_1) = y_2(t_1) = 0$ вронскиан $W(t_1) = 0$, а тогда решения были бы линейно зависимы по лемме 3). Предположим, что в промежутке $(t_1, t_2)$ между двумя соседними нулями одного из решений, например $y_2$, нет нулей решения $y_1$. Тогда на отрезке $[t_1, t_2]$ имеем $y_1(t) \neq 0$, $W(t) \neq 0$, производная

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \equiv \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} \equiv \frac{W}{y_1^2}$$

сохраняет знак и функция $y_2(t)/y_1(t)$ строго монотонна. Но это невозможно, так как $y_2(t_1) = y_2(t_2) = 0$.

Значит, в промежутке $(t_1, t_2)$ есть нули решения $y_1$. Их — конечное число по лемме 8. Если их более одного, то в промежутках между ними не было бы ни одного нуля решения $y_2$, а это невозможно по доказанному. Следовательно, в $(t_1, t_2)$ есть ровно один нуль решения $y_1$. ■

**Теорема 12 (теорема сравнения).** *Рассмотрим два уравнения*

$$y'' + q(t)y = 0, \qquad \text{(а)}$$

$$z'' + Q(t)z = 0, \qquad \text{(б)}$$

*где $Q(t) \geqslant q(t)$, функция $q$ и $Q$ непрерывны. Тогда в промежутке между двумя соседними нулями $t = a$ и $t = b$ любого решения $y \not\equiv 0$ уравнения* (а) *имеется по меньшей мере один нуль любого решения $z \not\equiv 0$ уравнения* (б), *или же $z(a) = z(b) = 0$, $Q(t) \equiv q(t)$ на $[a, b]$.*

Доказательство. Предположим, что для решений $y$ и $z$ имеем

$$y(a) = y(b) = 0, \quad y(t) \neq 0, \quad z(t) \neq 0 \quad (a < t < b).$$

Будем считать, что на $(a, b)$ имеем $y(t) > 0$, $z(t) > 0$ (если не так, то вместо $y$ и $z$ можно рассмотреть решения $y_1 = -y$, $z_1 = -z$). Умножая уравнение (а) на $z$, (б) — на $y$ и вычитая, имеем

$$y''z - z''y + (q - Q)yz = 0. \tag{53}$$

Так как $y''z - z''y \equiv (y'z - yz')'$, то интегрируя (53) от $t = a$ до $t = b$, получаем

$$(y'z - yz')_{t=b} - (y'z - yz')_{t=a} = \int\limits_a^b \big(Q(t) - q(t)\big)yz\,dt. \tag{54}$$

Имеем $y(a) = y(b) = 0$, поэтому левая часть равна $y'z\big|_{t=b} - y'z\big|_{t=a}$. Учитывая лемму 7 и неравенство $y(t) > 0$ на $(a, b)$, имеем $y'(a) > 0$, $y'(b) < 0$. Так как $z(t) > 0$ на $(a, b)$, то в силу непрерывности функции $z$ имеем $z(a) \geqslant 0$, $z(b) \geqslant 0$. Значит, левая часть в (54) неположительна.

В правой части $Q \geqslant q$, $yz > 0$ на $(a, b)$, поэтому она неотрицательна.

Если хотя бы одно из равенств $z(a) = 0$, $z(b) = 0$, $Q(t) \equiv q(t)$ на $(a, b)$ не выполняется, получаем противоречие. Теорема доказана. ■

**Пример 16.** Оценить сверху и снизу расстояние между соседними нулями для решений уравнения

$$y'' + q(t)y = 0 \tag{55}$$

на таком отрезке, на котором $0 < m^2 \leqslant q(t) \leqslant M^2$.

*Решение примера.* Сравниваем уравнение (55) с уравнением

$$z'' + M^2 z = 0,$$

имеющим решения

$$z = c_1 \cos Mt + c_2 \sin Mt \equiv d_1 \sin M(t + d_2), \tag{56}$$

где $c_i$, $d_i$ $(i = 1, 2)$ — произвольные постоянные. Пусть $t_0$, $t_1$ — соседние нули решения $y(t)$. Беря в (56) $d_2 = -t_0$, имеем $z(t_0) = 0$. Из теоремы 12 получаем, что следующий нуль $t_2$ решения $z$ лежит на полуинтервале $(t_0, t_1]$. Так как в силу (56) $t_2 = t_0 + \pi/M$, то $t_1 - t_0 \geqslant t_2 - t_0 = \pi/M$.

Сравниваем уравнение (55) с уравнением $u'' + m^2 u = 0$, имеющим решения

$$u = c_1 \cos mt + c_2 \sin mt = d_3 \sin m(t + d_4). \qquad (57)$$

Беря $d_4 = -t_0$, получаем из (57) соседние нули $t_0$ и $t_3 = t_0 + \pi/m$. Так как $q(t) \geqslant m^2$, то из теоремы 12 следует, что нуль $t_1$ решения $y(t)$ лежит в полуинтервале $(t_0, t_3]$. Значит, $t_1 - t_0 \leqslant \pi/m$.

Итак, получена оценка $\pi/M \leqslant t_1 - t_0 \leqslant \pi/m$. ◀

Из теоремы 10 следует, что в случае $q(t) \leqslant 0$ при $t_1 \leqslant t < \infty$ любое ненулевое решение уравнения (52) имеет на интервале $(t_1, \infty)$ не более одного нуля, то есть является *неколеблющимся*. В случае $q(t) \geqslant m^2 > 0$ $(t_1 \leqslant t < \infty)$ из теоремы 12 и примера 16 следует, что любое решение уравнения (52) имеет на интервале $(t_1, \infty)$ бесконечно много нулей, т. е. является *колеблющимся*.

**3.** Линейные уравнения 2-го порядка давно исследовались, см., например, [23], гл. 6; [39], гл. 11; [37], т. 1, гл. 3. Получены достаточные условия ограниченности всех решений уравнения (52) на интервале $(t_1, \infty)$, например, $q(t) \to \infty$ монотонно или $q(t) = a^2 + \varphi(t) + \psi(t)$, $a > 0$, $\psi(t) \to 0$ $(t \to \infty)$, интеграл от $|\varphi| + |\psi'|$ сходится, условия колеблемости $(q(t) \geqslant (1/4 + \varepsilon^2)/t^2)$ и неколеблемости $(q(t) \leqslant 1/(4t^2))$ решений на интервале $(t_1, \infty)$.

Изучалось асимптотическое поведение решений при $t \to \infty$. Для этого уравнение $y''_{xx} + q(x)y = 0$ $(q(x) > 0)$ с помощью преобразования Лиувилля

$$t = t(x) = \int \sqrt{q(x)}\, dx, \qquad u(t) = q^{-1/4} y(x),$$

приводится к уравнению

$$u''_{tt} + \left(1 - h^2 - h'_t\right)u = 0, \qquad h = \frac{q'_t(x(t))}{4q(x(t))}.$$

Во многих случаях, например, когда $q = cx^{\mu}$, $\mu > -2$, или когда $q = e^{kx}$, $k > 0$, при $x \to \infty$ имеем $t \to \infty$ и $|h^2 + h'_t| \leqslant ct^{-1-\alpha}$, $\alpha = \text{const} > 0$. Тогда имеем решения

$$y_1 = q^{-1/4}\left[\cos(t(x)) + O(t(x))^{-\alpha}\right], \quad y_2 = q^{-1/4}\left[\sin(t(x)) + O(t(x))^{-\alpha}\right].$$

Об асимптотике решений см. также [11], гл. 7.

Для некоторых дифференциальных уравнений 2-го порядка, имеющих важное значение для теории и приложений (уравнения Бесселя, Эйри, Матье, гипергеометрические уравнения и другие) детально изучены свойства решений ([5], § 18, п. 2°; [9], гл. 6, § 2, п. 2; [37], т. 1, гл. 3, § 4, § 6) и составлены их таблицы — таблицы специальных функций.

# § 13. Краевые задачи

**1.** В предыдущих параграфах для уравнения $n$-го порядка рассматривалась задача с начальными условиями, в которой все $n$ условий задаются при одном и том же значении $t = t_0$. В краевой задаче задаются условия при двух (или более) значениях $t$. Такие условия называются краевыми. Здесь будут рассматриваться только линейные краевые задачи, в которых дифференциальное уравнение и краевые условия линейны. Левые части краевых условий — линейные комбинации значений искомой функции и ее производных в заданных точках $t_i$, а правые части — заданные постоянные числа.

Примеры линейных краевых условий:

а) $y(t_1) = a$;

б) $y'(t_1) = b$;

в) $\alpha y(t_2) + \beta y'(t_2) = c$ ($\alpha$ и $\beta$ заданы, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$);

г) $y(t_0) - y(t_1) = d$;

д) $y'(t_0) - y'(t_1) = h$; возможны и другие виды условий.

Если постоянная в правой части краевого условия равна нулю, то условие называется однородным, если не равна нулю — неоднородным.

Для уравнения $n$-го порядка задаются $n$ условий. В разных точках $t_i$ условия могут быть одного типа или разных типов. Краевая задача называется однородной, если дифференциальное уравнение и краевые условия линейны и однородны.

В отличие от задачи с начальными условиями краевая задача может иметь одно или много решений, а может и не иметь решений. Например, задача $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = a$ имеет единственное решение $y = a\sin t$, а задача $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = b$ в случае $b \neq 0$ не имеет решений (так как все решения уравнения, для которых $y(0) = 0$, имеют вид $y = c\sin t$ и при $t = \pi$ они равны нулю), а в случае $b = 0$ имеет бесконечно много решений $y = c\sin t$, $c$ — любое.

**Теорема 13 (об альтернативе).** *Рассмотрим уравнение*

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = f(t) \quad (n \geqslant 2) \qquad (58)$$

*(все $a_i(t)$ и $f(t)$ непрерывны, $a_0(t) \neq 0$) с $n$ линейными краевыми условиями. Возможны только два случая: или 1) задача имеет единственное решение при любых правых частях в уравнении и краевых условиях, или 2) однородная задача (левые части те же, а правые заменяются нулями) имеет бесконечно много решений, а неоднородная задача при некоторых правых частях имеет бесконечно много решений, а при всех других — не имеет решений.*

*Доказательство.* Общее решение уравнения (58) имеет вид

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n + v, \tag{59}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения однородного уравнения, $v$ — частное решение уравнения (58), $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные. Подставляя (59) в краевые условия и перенося $v$ в правую часть, получаем систему $n$ линейных алгебраических уравнений относительно $c_1, \ldots, c_n$. Коэффициенты системы зависят только от значений $y, y', \ldots$ в заданных точках $t$ и не зависят от правых частей уравнения и краевых условий. Если данная задача однородна, то правые части алгебраических уравнений равны нулю.

Возможны только два следующих случая.

1) Если детерминант системы не равен нулю, то система имеет единственное решение $c_1, \ldots, c_n$ при любых правых частях. Подставляя эти $c_1, \ldots, c_n$ в (59), получаем единственное решение краевой задачи.

2) Если детерминант системы равен нулю, то однородная система (т. е. при правых частях, равных нулю) имеет бесконечно много решений относительно $c_1, \ldots, c_n$, а неоднородная система имеет решение не при любых правых частях. Если она имеет решение, то она имеет бесконечно много решений, так как к этому решению можно прибавить любое решение однородной системы, умноженное на любую постоянную. Для любого набора постоянных $c_1, \ldots, c_n$, удовлетворяющего системе, формула (59) дает решение краевой задачи. Для разных наборов $c_1, \ldots, c_n$ эти решения различны, так как функции $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы.

Из 1) и 2) следует утверждение теоремы. ■

**Пример 17.** Найти наименьшее из таких чисел $b > 0$, что задача

$$y'' + b^2 y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y(1) = -5, \tag{60}$$

не имеет решений.

*Решение примера.* По теореме 13 задача (60) не имеет решений тогда, когда однородная задача $y'' + b^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ имеет ненулевое решение. Функции, для которых $y'' + b^2 y = 0$, $y(0) = 0$, имеют вид $y = c \sin bt$. Чтобы при $c \neq 0$ было $y(1) = 0$, надо $\sin b = 0$, то есть $b = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$. При этих $b$ имеем 2-й случай альтернативы, значит, при этих $b$ задача (60) или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений. Какая из этих возможностей осуществится, надо проверить.

При $b = \pi$ общее решение уравнения есть $y = c_1 \cos \pi t + c_2 \sin \pi t$. Значит, $y(0) = c_1$, $y(1) = -c_1$. При $c_1 = 5$ и любом $c_2$ функция $y(t)$ — решение задачи (60). Но требуется, чтобы решение не существовало. При $b = 2\pi$ общее решение $y = c_1 \cos 2\pi t + c_2 \sin 2\pi t$. Тогда $y(0) = c_1$, $y(1) = c_1$ и удовлетворить обоим условиям $y(0) = 5$, $y(1) = -5$ невозможно. Значит, решений нет.

Ответ: $b = 2\pi$. ◀

*Задачи для упражнений:*
[12], § 22, № 63, 65–67.

**2.** Далее рассматривается краевая задача на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

$$\begin{aligned} Ly \equiv a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = f(t), \\ \alpha y'(t_1) + \beta y(t_1) = 0, \\ \gamma y'(t_2) + \delta y(t_2) = 0, \end{aligned} \tag{61}$$

где $|\alpha|+|\beta|\neq 0$, $|\gamma|+|\delta|\neq 0$. Частными случаями таких краевых условий являются условия вида $y(t_i)=0$ и $y'(t_j)=0$.

*Функцией Грина* этой задачи называется такая функция $G(t,s)$, $t\in[t_1,t_2]$, $s\in(t_1,t_2)$, что

1° Для каждого $s=\mathrm{const}$ функция $y(t)=G(t,s)$ при $t\neq s$ удовлетворяет уравнению $Ly=0$.

2° При $t=t_1$ и $t=t_2$ функция $y(t)=G(t,s)$ удовлетворяет краевым условиям из (61).

3° При $t=s$ она непрерывна по $t$, а ее производная по $t$ имеет скачок, равный $1/a_0(s)$, то есть

$$G\big|_{t=s+0}=G\big|_{t=s-0},\quad G'_t\big|_{t=s+0}=G'_t\big|_{t=s-0}+\frac{1}{a_0(s)}. \tag{62}$$

Следующая теорема устанавливает условия существования функции Грина и дает способ ее построения.

**Теорема 14.** *Если на отрезке $[t_1,t_2]$ функции $a_0,a_1,a_2$ непрерывны, $a_0\neq 0$, и если при $f(t)\equiv 0$ краевая задача (61) имеет только нулевое решение, то функция Грина существует и имеет вид*

$$G(t,s)=\begin{cases} ay_1(t) & (t_1\leqslant t\leqslant s),\\ by_2(t) & (s\leqslant t\leqslant t_2),\end{cases} \tag{63}$$

*где $y_1$ и $y_2$ — ненулевые решения уравнения $Ly=0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму краевым условиям из (61), множители $a$ и $b$ зависят от $s$ и определяются из требования, чтобы функция (63) удовлетворяла условиям (62), то есть*

$$ay_1(s)=by_2(s),\quad by_2'(s)=ay_1'(s)+\frac{1}{a_0(s)}. \tag{64}$$

*Доказательство.* Пусть $y_1, y_2$ — решения уравнения $Ly = 0$, для которых

$$y_1(t_1) = \alpha, \quad y_1'(t_1) = -\beta, \quad y_2(t_2) = \gamma, \quad y_2'(t_2) = -\delta.$$

Они удовлетворяют соответственно первому и второму краевым условиям в (61). Если бы $y_1$ и $y_2$ были линейно зависимы, то $y_1(t) \equiv cy_2(t)$, и решение $y_2(t)$ ($y_2 \not\equiv 0$, так как $|\gamma| + |\delta| \neq 0$) удовлетворяло бы обоим краевым условиям в (61), что противоречит условию теоремы. Значит, $y_1$ и $y_2$ линейно независимы, и любое решение уравнения $Ly = 0$ имеет вид $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Так как первому из краевых условий в (61) удовлетворяет только $y_1$, а второму — только $y_2$, то из требований 1° и 2° вытекает, что функция $G$ должна иметь вид (63). Из требования 3° вытекают уравнения (64). Система (64) разрешима относительно $a$ и $b$, так как ее детерминант равен

$$\begin{vmatrix} y_1(s) & -y_2(s) \\ -y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix} = W(s) \neq 0$$

(решения $y_1$, $y_2$ линейно независимы). Итак, при выполнении условий теоремы найдутся $a$ и $b$, удовлетворяющие (64), а тогда функция (63) удовлетворяет требованиям 1°–3°. ■

**Замечание.** При выполнении условий теоремы функция Грина определяется однозначно. Хотя решения $y_1$ и $y_2$ можно заменить решениями $cy_1$ и $dy_2$, но с учетом (64) это не изменит произведений $ay_1$ и $by_2$ в (63).

**Теорема 15.** *Если выполнены условия теоремы* 14 *и* $f(t)$ *непрерывна при* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *то решение краевой задачи* (61) *выражается формулой*

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t, s) f(s)\, ds. \qquad (65)$$

<u>*Доказательство*</u>. Разбиваем интеграл на части $t_1 < s < t$ и $t < s < t_2$. Учитывая (63), имеем

$$y'(t) = y_2'(t) \int_{t_1}^{t} b(s) f(s)\, ds + y_1'(t) \int_{t}^{t_2} a(s) f(s)\, ds \qquad (66)$$

(образующиеся при дифференцировании члены $b(t)y_2(t)$ и $-a(t)y_1(t)$ взаимно уничтожаются в силу (64)). Подставляем выражения для $y(t)$ и $y'(t)$ в краевые условия. Так как $y_1$ удовлетворяет первому, а $y_2$ — второму краевому условию, то $y(t)$ удовлетворяет обоим условиям. Дифференцируя (66) еще раз, получаем

$$y''(t) = y_2''(t) \int_{t_1}^{t} b(s) f(s)\, ds + b(t) y_2'(t) f(t) +$$

$$+ y_1''(t) \int_{t}^{t_2} a(s) f(s)\, ds - a(t) y_1'(t) f(t).$$

Сумма внеинтегральных членов в силу (64) равна $f(t)/a_0(t)$. Умножая полученные выражения для $y'', y', y$ на $a_0, a_1, a_2$ и складывая, находим, что $Ly \equiv a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y$ равно

$$(a_0 y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) \int_{t_1}^{t} b(s) f(s)\, ds +$$

$$+\left(a_0y_1''+a_1y_1'+a_2y_1\right)\int\limits_t^{t_2} a(s)f(s)\,ds+f(t).$$

Так как $Ly_2=0$, $Ly_1=0$, то $Ly=f(t)$. Итак $y(t)$ — решение задачи (61). ■

**Пример 18.** Найти функцию Грина краевой задачи

$$y''+y=f(t),\quad y(0)=0,\quad y'(\pi)=0. \tag{67}$$

*Решение примера.* Из однородного уравнения $y''+y=0$ при $y(0)=0$ получаем $y=c\sin t$. Так как $y'(\pi)=-c$, то при $f(t)\equiv 0$ задача (67) имеет только нулевое решение, то есть выполнено условие существования функции Грина. Функции $y_1=\sin t$, $y_2=\cos t$ удовлетворяют уравнению $y''+y=0$ и условиям $y_1(0)=0$, $y_2'(\pi)=0$. Поэтому согласно (63)

$$\begin{aligned} G(t,s)&=a\sin t\quad (0\leqslant t\leqslant s),\\ G(t,s)&=b\cos t\quad (s\leqslant t\leqslant \pi).\end{aligned} \tag{68}$$

Теперь из условия (62) или, что то же самое, (64) имеем

$$a\sin s=b\cos s,\qquad -b\sin s=a\cos s+1.$$

Из этой системы находим $a=-\cos s$, $b=-\sin s$. Теперь из (68)

$$\begin{aligned} G(t,s)&=-\cos s\sin t\quad (0\leqslant t\leqslant s),\\ G(t,s)&=-\sin s\cos t\quad (s\leqslant t\leqslant \pi).\end{aligned}$$ ◀

*Задачи для упражнений:*
[12], § 13, № 764–771.

**3.** Рассмотрим краевую задачу для уравнения с параметром $\lambda$

$$Ly-\lambda y=0,\quad \alpha y'(t_1)+\beta y(t_1)=0,\quad \gamma y'(t_2)+\delta y(t_2)=0, \tag{69}$$

где $Ly, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ те же, что в (61). Значения $\lambda$, при которых задача (69) имеет ненулевое решение, называются *собственными значениями* этой задачи, а сами ненулевые решения — *собственными функциями*. При тех $\lambda$, которые являются собственными значениями, имеет место второй случай альтернативы, а при остальных — первый.

**Пример 19.** Найти собственные значения и собственные функции задачи

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(d) = 0.$$

*Решение примера.* В силу теоремы 10 ненулевые решения этой задачи могут существовать только при $\lambda < 0$. Полагаем $\lambda = -a^2$, $a > 0$. Из уравнения и условия $y(0) = 0$ получаем $y = c\sin at$. Из условия $y(d) = 0$ следует $c\sin ad = 0$. Чтобы было $y \not\equiv 0$, надо $c \neq 0$, $ad = \pi k$, $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$a = a_k = \frac{\pi k}{d}, \quad \lambda_k = -a_k^2 = -\left(\frac{\pi k}{d}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Числа $\lambda_k$ — собственные значения, а функции $y = c\sin\frac{\pi kt}{d}$ — собственные функции. ◄

*Задачи для упражнений:*
[12], § 13, № 782–785.

**4.** Для различных краевых задач исследовались условия, при которых задача имеет единственное решение.

Важное направление теории краевых задач — спектральная теория, изучающая свойства собственных значений и собственных функций. Выделен класс «самосопряженных» краевых задач, у которых собственные функции ортогональны в пространстве $L_2$ на данном отрезке и доказано, что любую гладкую функцию на этом отрезке, удовлетворяющую краевым условиям этой задачи, можно разложить в сходящийся ряд по собственным функциям такой задачи, аналогичный ряду Фурье [30], гл. 7. Такие разложения используются, в частности, при решении различных задач для уравнений с частными производными методом разделения переменных.

## § 14. Линейные системы с постоянными коэффициентами

**1.** Рассматриваются линейные системы нормального вида

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{70}$$

где $a_{ij}$ — любые числа, а $f_i(t)$ — известные функции. В векторной записи $x' = Ax + f(t)$, где $x(t)$ — неизвестная, а $f(t)$ — известная вектор-функции, $A$ — любая постоянная матрица.

Такие системы часто встречаются и в теории дифференциальных уравнений, и в приложениях. Общее решение такой системы в случае $f(t) \equiv 0$ всегда выражается через элементарные функции. Поэтому такие системы часто применяются для исследования более сложных систем вблизи положения равновесия. В приложениях они появляются, например, при изучении движений в механических системах с несколькими степенями свободы и при описании токов в разветвленных электрических цепях.

Путем исключения неизвестных систему можно свести к одному или нескольким уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом. Для этого из какого-либо уравнения выражаем одно неизвестное через остальные и подставляем в остальные уравнения системы. Получаем систему с меньшим числом неизвестных. С ней можно поступить аналогично. Этот способ удобен для решения лишь несложных систем.

**Пример 20.** Решить систему $x' = y + t$, $y' = x - 2e^t$.

*Решение примера.* Исключаем $y$. Из первого уравнения имеем $y = x' - t$. Подставляя во второе уравнение, получаем $x'' - 1 = x - 2e^t$. Решаем это уравнение методом § 11. Находим $x = c_1e^t + c_2e^{-t} - te^t - 1$. Значит, $y = x' - t = c_1e^t - c_2e^{-t} - (t+1)e^t - t$. ◄

$\boxed{2.}$ **Решение системы** $x' = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ в случае, когда матрица $A$ порядка $n$ имеет $n$ линейно независимых собственных векторов. Так будет в случаях, когда или уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ не имеет кратных корней $\lambda$, или для каждого кратного корня $\lambda$ ранг $r$ матрицы $A - \lambda E$ равен $n - k$, где $k$ — кратность этого корня (так как уравнение $(A - \lambda E)v = 0$ для собственных векторов $v$ имеет $n - r$ линейно независимых решений).

Пусть $\lambda$ — собственное значение, а $v$ — собственный вектор матрицы $A$. Тогда $x = e^{\lambda t}v$ — частное решение уравнения $x' = Ax$, так как $x' = e^{\lambda t}\lambda v$, $\lambda v = Av$. Если собственные векторы $v^1, \ldots, v^n$ линейно независимы, то имеем решения $e^{\lambda_1 t}v^1, \ldots, e^{\lambda_n t}v^n$. Они линейно независимы, так как их вронскиан $W \neq 0$ при $t = 0$ (его столбцы $v^1, \ldots, v^n$ линейно независимы).

Следовательно, общее решение системы $x' = Ax$ имеет вид

$$x = c_1e^{\lambda_1 t}v^1 + \ldots + c_ne^{\lambda_n t}v^n,$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

**Лемма 9.** *Если $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ — собственное значение вещественной матрицы $A$, а $v^1 = \left(v_1^1, \ldots, v_n^1\right)^T$ — собственный вектор для $\lambda_1$, то $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - \beta i$ — собственное значение, а $v^2 = \bar{v}^1 = \left(\bar{v}_1^1, \ldots, \bar{v}_n^1\right)^T$ — собственный вектор для $\lambda_2$. Для вещественных $\lambda_p$ собственный вектор можно взять вещественным.*

*Доказательство.* Имеем $Av^1 = \lambda_1 v^1$. Равенство не нарушится, если в нем $\lambda_1$ и координаты вектора $v^1$ заменить сопряженными: $A\bar{v}^1 = \bar{\lambda}_1\bar{v}^1$, то есть $Av^2 = \lambda_2 v^2$.

Для вещественного $\lambda_p$ координаты собственного вектора определяются из системы

$$(A - \lambda_p E)v = 0 \quad \text{с} \quad \det(A - \lambda_p E) = 0$$

и вещественными коэффициентами, поэтому вектор $v$ можно взять вещественным и $v \neq 0$. ■

Общее решение системы $x' = Ax$ с вещественной матрицей $A$ можно выразить через вещественные функции. Для этого надо взять такие собственные векторы, как в лемме 9, и затем заменить каждую пару комплексных сопряженных решений $x^1 = e^{\lambda_1 t}v^1$, $x^2 = e^{\lambda_2 t}v^2$ парой вещественных решений

$$u^1 = \frac{x^1 + x^2}{2} = \operatorname{Re} x^1, \quad u_2 = \frac{x^1 - x^2}{2i} = \operatorname{Im} x^1,$$

как в п. 1 § 11. Получим вещественную фундаментальную систему решений и через нее выразим общее решение.

**Пример 21.** Решить систему $x' = 3x - 2y$, $y' = x + y$.

*Решение примера.* Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda = 2 \pm i.$$

Для $\lambda = 2 + i$ находим собственный вектор $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (1-i)a - 2b = 0, \\ 1\cdot a - (1+i)b = 0. \end{cases}$$

Можно взять $b = 1$, $a = 1 + i$. Получаем частное решение

$$x = (1+i)e^{(2+i)t}, \quad y = e^{(2+i)t}.$$

Решениями данной системы являются вещественная и мнимая части этого частного решения:

$$\begin{matrix} x = e^{2t}(\cos t - \sin t), \\ y = e^{2t}\cos t \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} x = e^{2t}(\cos t + \sin t), \\ y = e^{2t}\sin t. \end{matrix}$$

◄

$\boxed{3.}$ **Решение в общем случае.** Упростим систему, приведя матрицу $A$ к простейшей форме — жордановой. Известно, что для любой квадратной матрицы $A$ существует такая неособая матрица $C$, что матрица $B = C^{-1}AC$ — жорданова, то есть

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{K_1} & & & 0 \\ & \boxed{K_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{K_s} \end{pmatrix}, \; K_i = (\lambda_i) \text{ или } K_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Клетки $K_i$ могут быть любых размеров; в каждой клетке на всей диагонали стоит одно и то же число $\lambda_i$, а в разных клетках $\lambda_i$ могут быть различны или одинаковы. Так как $C^{-1}AC - \lambda E = C^{-1}(A - \lambda E)C$ и $\det C^{-1} \cdot \det C = 1$, то

$$\det\left[C^{-1}(A-\lambda E)C\right] = \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det C = \det(A - \lambda E).$$

Поэтому матрицы $C^{-1}AC$ и $A$ имеют одно и то же характеристическое уравнение, значит, одни и те же корни $\lambda_i$ с теми же кратностями.

К системе $x' = Ax$ применяем линейное преобразование координат $x = Cy$, то есть

$$x_i = c_{i1}y_1 + \ldots + c_{in}y_n \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{72}$$

где матрица $C$ та же, что выше. Получаем $Cy' = ACy$. Умножая слева на $C^{-1}$, имеем $y' = C^{-1}ACy$, то есть $y' = By$, где матрица $B$ — жорданова. Если первая клетка имеет размер $k \times k$, вторая — $l \times l$ и т.д., то в первые $k$ уравнений системы $y' = By$ входят только неизвестные $y_1, \ldots, y_k$, в следующие $l$ уравнений — только неизвестные $y_{k+1}, \ldots, y_{k+l}$, и т.д. Значит, система распадается на подсистемы, каждую из которых можно решать отдельно. Первая подсистема имеет вид (где $\lambda = \lambda_1$)

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda y_1 + y_2, \\ y_2' &= \lambda y_2 + y_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{k-1}' &= \lambda y_{k-1} + y_k, \\ y_k' &= \lambda y_k. \end{aligned} \tag{73}$$

Другие подсистемы отличаются только числами $\lambda$ и $k$. Сделав в (73) замену $y_i = e^{\lambda t} z_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, получаем

$$z_1' = z_2, \quad z_2' = z_3, \quad \ldots, \quad z_{k-1}' = z_k, \quad z_k' = 0. \tag{74}$$

Решая эту систему, начиная с последнего уравнения, находим

$$\begin{aligned} z_k &= c_k, \\ z_{k-1} &= c_k t + c_{k-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_1 &= c_k \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + c_{k-1} \cdot \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + c_2 \frac{t}{1!} + c_1. \end{aligned}$$

Умножая на $e^{\lambda_1 t}$, получаем решение первой подсистемы

$$\begin{aligned} y_k &= c_k e^{\lambda_1 t}, \\ y_{k-1} &= (c_k t + c_{k-1}) e^{\lambda_1 t}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 &= \left( c_k \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + c_2 \frac{t}{1!} + c_1 \right) e^{\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Это решение — общее, так как получается из уравнений (73) с помощью тождественных преобразований.

Решения других подсистем имеют подобный же вид, лишь числа $\lambda_j$, $k = k_j$ и произвольные постоянные $c_i$ будут другими ($\lambda_j$ — число $\lambda$ в $j$-й клетке, $k_j$ — ее размер). Собрав вместе решения всех подсистем, получаем общее решение всей системы $y' = By$. Возвращаясь от $y$ к $x$ в силу (72) получаем такой результат.

**Теорема 16.** *Общее решение системы $x' = Ax$ есть вектор-функция, у которой каждая координата $x_i$ имеет вид*

$$x_i = \mathscr{P}_{i1}(t) e^{\lambda_1 t} + \ldots + \mathscr{P}_{im}(t) e^{\lambda_m t} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{75}$$

*где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — различные собственные значения матрицы $A$, $\mathscr{P}_{ij}(t)$ — алгебраический многочлен, степень которого на 1 меньше размера наибольшей из жордановых клеток, содержащих $\lambda_j$.*

*Коэффициенты многочленов $\mathscr{P}_{ij}(t)$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ зависят от $n$ произвольных постоянных.*

Решение конкретной системы $x' = Ax$ можно получить и без приведения матрицы $A$ к жордановой форме. Для этого надо найти все собственные значения $\lambda$ матрицы $A$ из уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Для каждого $\lambda$ надо найти число $m$ линейно независимых собственных векторов по формуле $m = n - r$, где $n$ — порядок матрицы $A - \lambda E$, $r$ — ее ранг.

В случае $m = k$, где $k$ — кратность корня $\lambda$, этому корню соответствует решение

$$x = c_1 e^{\lambda t} b^1 + \ldots + c_k e^{\lambda t} b^k,$$

где $b^1, \ldots, b^k$ — линейно независимые собственные векторы. Если матрица $A$ — вещественная, то надо воспользоваться леммой 9 и сказанным после нее.

В случае $m < k$ надо искать решение $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ в виде

$$x_1 = (a + bt + \ldots + dt^s)e^{\lambda t},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = (p + qt + \ldots + rt^s)e^{\lambda t},$$

где $s = k - m$. Подставляя эти выражения с буквенными коэффициентами $a, b, \ldots$ в данную систему, сокращая на $e^{\lambda t}$ и приравнивая коэффициенты при подобных членах, получаем систему линейных алгебраических уравнений для отыскания чисел $a, b, \ldots$. Надо найти общее решение этой системы, зависящее от $k$ произвольных постоянных. (Заметим, что в случае $k \geqslant 4$ все старшие коэффициенты в многочленах иногда оказываются равными нулю, но это не мешает найти решение.) Проделав это для каждого $\lambda$ и сложив найденные решения, получим общее решение системы.

Если матрица $A$ вещественная, то достаточно проделать описанное только для вещественных корней и для одного из каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ $(\beta \neq 0)$, и от полученного решения взять вещественную и мнимую части. Например, из решения $x^1 = (c_1 + c_2 t)e^{it}$ получаются два решения: $u^1 = \operatorname{Re} x^1 = (c_1 + c_2 t)\cos t$ и $u^2 = (c_3 + c_4 t)\sin t$ с *новыми* постоянными $c_3, c_4$. (Обоснование такого метода требует детального анализа и изложено в [7], § 34.)

**Пример 22.** Решить систему

$$x' = 2x - 2y, \quad y' = z - y, \quad z' = 2x - z.$$

*Решение примера.* Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \equiv -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0,$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2,3} = 1.$$

Для простого корня $\lambda = -2$ находим собственный вектор $(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \\ 2\alpha + \gamma = 0. \end{cases}$$

Можно взять $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -2$. Имеем частное решение

$$x = e^{-2t}, \quad y = 2e^{-2t}, \quad z = -2e^{-2t}. \tag{76}$$

Для кратного корня $\lambda_{2,3} = 1$ находим ранг матрицы $A - \lambda E$, число $m$ собственных векторов и степень $s$ многочлена:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} r &= 2, \\ m &= n - r = 3 - 2 = 1, \\ s &= k - m = 1. \end{aligned}$$

Ищем решение в виде

$$x = (a + bt)e^t, \quad y = (c + dt)e^t, \quad z = (f + gt)e^t. \qquad (77)$$

Подставляем это в данную систему и сокращаем на $e^t$. Приравниваем коэффициенты при подобных членах, начиная со старших:

$$\begin{aligned} b &= 2d, & 2d &= g, & 2g &= 2b, \\ -a + b &= -2c, & 2c + d &= f, & 2f + g &= 2a. \end{aligned}$$

Надо найти общее решение этой системы. Кратность корня $\lambda = 1$ равна 2, поэтому все неизвестные $a, b, \ldots$ должны выразиться через два из них (пока не знаем, через какие). Из первых трех уравнений имеем $b = g = 2d$. Подставляя в остальные уравнения, получаем

$$a - 2c = 2d, \quad 2c - f = -d, \quad 2a - 2f = 2d.$$

Все неизвестные можно выразить через $c$ и $d$. Имеем $a = 2c + 2d$, $f = 2c + d$. Полагая $d = c_1$, $c = c_2$, получаем $b = g = 2c_1$, $a = 2c_1 + 2c_2$, $f = c_1 + 2c_2$. Подставляя это в (77) и прибавляя частное решение (76), умноженное на $c_3$, получаем общее решение системы:

$$\begin{aligned} x &= (2c_1 t + 2c_1 + 2c_2)e^t + c_3 e^{-2t}, \\ y &= (c_1 t + c_2)e^t + 2c_3 e^{-2t}, \\ z &= (2c_1 t + c_1 + 2c_2)e^t - 2c_3 e^{-2t}. \end{aligned}$$ ◄

*Задачи для упражнений:*
[12], § 14, № 786–812; § 23, № 96–98, 105.

**4.** **Линейные неоднородные системы** с постоянными коэффициентами. Решение такой системы всегда можно получить методом вариации постоянных (п. 5 § 9). При этом используется интегрирование.

Однако в случае, когда неоднородности $f_i(t)$ в системе (70) выражаются только через суммы и произведения функций $at^m$, $e^{\gamma t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$, частное решение системы можно найти без интегрирования — *методом неопределенных коэффициентов*, как показывается ниже.

Так как решение системы $x' = Ax + f^1(t) + \ldots + f^r(t)$ равно сумме решений систем $(x^j)' = Ax^j + f^j(t)$ $(j = 1, \ldots, r)$, а синусы и косинусы по формулам Эйлера выражаются через показательные функции, то достаточно указать вид частного решения системы $x' = Ax + p(t)e^{\gamma t}$, где $p(t) = a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_0$; $a_0, \ldots, a_m$ — векторы.

Сделав с этой системой те же преобразования, что в п. 3 с системой $x' = Ax$, получаем вместо (74) систему

$$\begin{cases} z_1' = z_2 + p_1^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{k-1}' = z_k + p_{k-1}^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t}, \\ z_k' = p_k^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t}, \end{cases}$$

где $p_i^*(t)$ — многочлены степени не выше $m$. Из этой системы последовательно находим $z_k, z_{k-1}, \ldots, z_1$. Возможны два случая.

Если $\gamma - \lambda \neq 0$, то

$$z_k = \int p_k^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\,dt = q_k^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t},$$

где $q_k^*(t)$ — многочлен той же степени, что $p_k^*(t)$. Здесь и далее постоянные интегрирования полагаем равными нулю, так как ищется частное решение. Аналогично отыскиваются $z_{k-1}, \ldots, z_1$. Получаем

$$z_i = q_i^*(t)e^{(\gamma-\lambda)t}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

где $q_i^*(t)$ — многочлены степени не выше $m$.

Если же $\gamma - \lambda = 0$, то $e^{(\gamma-\lambda)t} \equiv 1$, и каждый раз интегрируется только многочлен. От этого его степень повышается на 1. После $k$ интегрирований степень повышается на $k$. Значит, в этом случае

$$z_i = q_i^*(t), \quad i = 1, \ldots, k,$$

где $q_i^*(t)$ — многочлены степени не выше $m + k$.

Возвращаясь от функций $z_i$ к $y_i$ и затем к $x_i$, получаем, что система имеет частное решение вида

$$x_i = q_i(t)e^{\gamma t} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{78}$$

где $q_i(t)$ — многочлен степени не выше $m$, если $\gamma$ не совпадает ни с одним из корней $\lambda_j$ и степени не выше $m + k_j$, если $\gamma$ совпадает с корнем $\lambda_j$; число $k_j$, равно размеру наибольшей из жордановых клеток, содержащих $\lambda_j$. Следовательно, $k_j$ на 1 больше наибольшей степени многочленов, умножаемых на $e^{\lambda_j t}$ в общем решении однородной системы.

**Пример 23.** Решить систему

$$x' = 3x - 2y + te^{2t},$$
$$y' = x + y + 4e^{2t}\cos t.$$

*Решение примера.* Общее решение однородной системы получено в примере 21, здесь $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Для неоднородностей $te^{2t}$ и

$4e^{2t}\cos t$ числа $\gamma = 2$ и $\gamma = 2+i$ различны, поэтому надо решить две системы

$$x' = 3x - 2y + te^{2t}, \quad y' = x + y; \tag{79}$$

$$\begin{aligned} x' = 3x - 2y, \quad & y' = x + y + 4e^{2t}\cos t = \\ & = x + y + \operatorname{Re} 4e^{(2+i)t}. \end{aligned} \tag{80}$$

Для системы (79) $\gamma = 2 \neq \lambda_j$, поэтому частное решение

$$x_1 = (at+b)e^{2t}, \quad y_1 = (ct+d)e^{2t}.$$

Подставляя в (79), находим $a = b = c = 1$, $d = 0$. Значит

$$x_1 = (t+1)e^{2t}, \quad y_1 = te^{2t}.$$

В системе (80) заменяем $4e^{2t}\cos t$ на $4e^{(2+i)t}$. Число 4 рассматриваем как многочлен степени 0. Так как $\gamma = 2 + i = \lambda_1$, $k = 1$, то степень многочлена увеличивается на 1 и

$$x_2^* = (pt+q)e^{(2+i)t}, \quad y_2^* = (rt+s)e^{(2+i)t}.$$

Подставляя в систему с отброшенным "Re ", получаем

$$(1-i)p = 2r, \quad (1+i)r = p;$$

$$p = (1-i)q - 2s, \quad r + (1+i)s = q + 4.$$

Уравнения зависимы, решений много. Берем частное решение, например $s = 0$, $q = 2i - 2$, $r = 2i + 2$, $p = 4i$. Тогда

$$\begin{aligned} x_2^* &= (4it + 2i - 2)e^{(2+i)t}, \\ y_2^* &= (2i+2)te^{(2+i)t}, \\ x_2 &= \operatorname{Re} x_2^* = e^{2t}[-2\cos t - (4t+2)\sin t], \\ y_2 &= \operatorname{Re} y_2^* = e^{2t}(2t\cos t - 2t\sin t). \end{aligned}$$

Общее решение системы $x = x_0 + x_1 + x_2$, $y = y_0 + y_1 + y_2$, где $x_0$, $y_0$ — решение однородной системы (пример 21), а $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ найдены здесь. ◄

*Задачи для упражнений:*
[12], § 14, № 826–845 и № 846–850.

**5.** Системы уравнений, не приведенные к нормальному виду

$$\begin{cases} a_0x^{(m)} + a_1x^{(m-1)} + \ldots + a_mx + b_0y^{(n)} + b_1y^{(n-1)} + \ldots + b_ny = 0, \\ c_0x^{(p)} + c_1x^{(p-1)} + \ldots + c_px + d_0y^{(q)} + d_1y^{(q-1)} + \ldots + d_qy = 0, \end{cases}$$

обладают свойствами, отличными от свойств систем вида (70). Согласно [7], § 11 все решения являются линейными комбинациями решений вида $x = r(t)e^{\lambda t}$, $y = s(t)e^{\lambda t}$, где $\lambda$ — любой корень характеристического уравнения $M(\lambda) = 0$, $r(t)$ и $s(t)$ — многочлены, степень которых меньше кратности $k$ корня $\lambda$ (если $k = 1$, то $r$ и $s$ — числа),

$$M(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m & b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n \\ c_0\lambda^p + c_1\lambda^{p-1} + \ldots + c_p & d_0\lambda^q + d_1\lambda^{q-1} + \ldots + d_q \end{vmatrix}.$$

Многочлены $r(t)$ и $s(t)$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов. Аналогично решаются системы трех и более уравнений.

См. задачи в [12], § 14, № 813–825.

**6.** Известно много способов решения линейных систем с постоянными коэффициентами.

Если известны не только числа $\lambda$, но и базис, в котором матрица $A$ имеет жорданову форму, то решение системы $x' = Ax$ пишется в явном виде ([7], теорема 11; [12], § 14, п. 3).

Операционный метод решения линейных уравнений и систем с постоянными коэффициентами изложен в [5], § 24.

Известны условия существования периодического решения системы $x' = Ax + f(t)$ с периодической вектор-функцией $f(t)$ ([2], гл. 4, § 7, п. 3).

# § 15. Показательная функция матрицы

Показательная функция матрицы используется при изучении решений линейных систем с постоянными и с периодическими коэффициентами. Здесь рассматриваются свойства этой функции, а также некоторых других функций матриц.

**1.** Пусть $A$ и $B$ — квадратные матрицы порядка $n$, $E$ — единичная матрица, $a_i, b_i, c$ — постоянные числа. Из линейной алгебры известны следующие действия над матрицами:

$$A + B, cA, AB, A^2, A^3, \dots ;$$
$$A^{-1}, A^{-2} = A^{-1}A^{-1}, \dots \quad (\text{если} \quad \det A \neq 0).$$

Поэтому для каждого алгебраического многочлена $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$ можно определить матрицу

$$p(A) = a_0E + a_1A + \ldots + a_kA^k.$$

Если $q(x) = b_0 + b_0x + \ldots + b_mx^m$, $f(x) = p(x)/q(x)$ $(q(x) \neq 0)$, то в случае $\det q(A) \neq 0$ можно определить

$$f(A) = p(A)(q(A))^{-1} \equiv (q(A))^{-1}p(A).$$

Последнее равенство получается путем умножения очевидного равенства $q(A)p(A) \equiv p(A)q(A)$ слева и справа на $(q(A))^{-1}$.

Операции предельного перехода, дифференцирования, интегрирования производятся с каждым элементом матрицы отдельно. Например,

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}, \quad A'(t) = (a'_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}.$$

Другие функции матриц можно определить с помощью рядов. Ряд матриц $A_{(1)}+A_{(2)}+\ldots$ называется сходящимся к матрице $S$, если для любых $i,j=1,\ldots,n$ ряд $a_{(1)ij}+a_{(2)ij}+\ldots$ из $ij$-х элементов этих матриц сходится к $ij$-му элементу матрицы $S$. Аналогично определяется абсолютная сходимость ряда матриц, а также равномерная сходимость, если элементы матрицы являются функциями.

Теоремы о непрерывности суммы ряда и о почленном дифференцировании и интегрировании рядов остаются справедливыми и для рядов матриц. Это следует из предыдущих определений и из того, что для рядов, составленных из $ij$-х элементов матриц, эти теоремы справедливы.

**Лемма 10.** *Если* $\|A_{(m)}(t)\| \leqslant \alpha_m$, $m=1,2,\ldots$ $(t\in D)$, *и числовой ряд* $\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ *сходится, то ряд матриц* $A_{(1)}(t)+A_{(2)}(t)+\ldots$ *сходится абсолютно и равномерно на множестве* $D$.

*Доказательство.* Для любых $i,j$ имеем

$$|a_{(m)ij}(t)| \leqslant \|A_{(m)}(t)\| \leqslant \alpha_m.$$

Поэтому для всех $i,j$ ряды $a_{(1)ij}(t)+a_{(2)ij}(t)+\ldots$ сходятся абсолютно и равномерно на $D$, значит, ряд матриц — тоже. ■

**Лемма 11.** *Для любой квадратной матрицы* $A$ *и любого* $t_1>0$ *ряд*

$$E+\frac{tA}{1!}+\frac{t^2A^2}{2!}+\frac{t^3A^3}{3!}+\ldots \tag{81}$$

*сходится абсолютно и равномерно в круге* $|t|\leqslant t_1$ *комплексной плоскости.*

*Доказательство.* При $m \geqslant 1$

$$\left\|\frac{t^m A^m}{m!}\right\| = \frac{|t|^m}{m!}\left\|\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m}\right\| \leqslant \frac{t_1^m}{m!}\|A\|^m = \alpha_m,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(t_1\|A\|)^m}{m!} = e^{t_1\|A\|} - 1 < \infty,$$

и доказываемое утверждение следует из леммы 10. ■

$\boxed{2.}$ **Показательной функцией** $e^A$ матрицы $A$ называется сумма ряда

$$e^A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots, \tag{82}$$

следовательно, сумма ряда (81) равна $e^{tA}$.

Свойства показательной функции матрицы.

1° Если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$. В самом деле

$$e^A \cdot e^B = \left(E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots\right)\left(E + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{k,m=0}^{\infty} c_{km} A^k B^m, \tag{83}$$

$$e^{A+B} = \left(E + \frac{1}{1!}(A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \ldots\right) = \sum_{k,m=0}^{\infty} d_{km} A^k B^m, \tag{84}$$

так как $(A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$ и т. п. Если $A$ и $B$ — числа, то $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$. Одна и та же функция не может разлагаться в два разных степенных ряда, поэтому $c_{km} = d_{km}$ для всех $k$ и $m$. Если $A$ и $B$ — матрицы, то $c_{km}$ и $d_{km}$ те же, поэтому выражения (83) и (84) также равны.

2° Имеем $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$. В самом деле, дифференцируя почленно ряд (81), получаем

$$A + \frac{t}{1!}A^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \ldots = A\left(E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots\right) = Ae^{tA}.$$

Левый ряд равномерно сходится в любом круге $|t| \leqslant t_1$, так как

$$\left\|\frac{t^m}{m!}A^{m+1}\right\| \leqslant \|A\|\alpha_m, \quad m = 1, 2, \ldots; \quad \sum_{m=1}^{\infty}\|A\|\alpha_m < \infty$$

в силу оценок в лемме 11. Поэтому почленное дифференцирование законно.

**Следствие 1.** *Матрица $X(t) = e^{tA}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию*

$$\frac{dx}{dt} = AX, \quad X(0) = E.$$

*Следовательно, $e^{tA}$ — фундаментальная матрица системы $x' = Ax$.*

**Следствие 2.** *Чтобы найти матрицу $e^{tA}$ надо найти $n$ таких решений $x^k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ системы $x' = Ax$, что у $k$-го решения начальное условие $x^k(0)$ совпадает с $k$-м столбцом единичной матрицы. Эти решения являются столбцами матрицы $e^{tA}$.*

**Следствие 3.** $\det e^{tA} = e^{st}$, *$s = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ — след матрицы $A$.*

*Это следует из формулы Лиувилля* (11), *так как столбцы детерминанта — решения и* $\det e^{tA}$ *есть вронскиан* $W(t)$, *а* $W(0) = \det E = 1$.

**Пример 24.** Найти $e^{tA}$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

*Решение примера.* Найдем два решения системы $x' = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^2)$ с начальными условиями $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответственно, и составим из них матрицу $e^{tA}$. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Находим собственные векторы

$$\lambda = 1; \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \beta = 1;$$

$$\lambda = 2; \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \gamma = 3, \\ \delta = 2. \end{matrix}$$

Общее решение $x = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Начальное условие $x^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ дает

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1 = -2, \ c_2 = 1;$$

$$x_1(t) = -2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Начальное условие $x^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ дает

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = 3,\ c_2 = -1;$$

$$x^2(t) = 3e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Из найденных решений составляем матрицу

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} -2e^t + 3e^{2t} & 3e^t - 3e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}. \qquad \blacktriangleleft$$

**3. Функции диагональной и жордановой матриц.** Пусть матрица $B$ имеет жорданову форму

$$B = \begin{pmatrix} K_1 & & & 0 \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_l \end{pmatrix}, \quad K_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i E + F,$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{85}$$

или $K_i$ имеет размер $1 \times 1$ и состоит из одного числа $\lambda_i$.

При определении функции $f(B)$ сходящимся степенным рядом (рядом (81) или рядом с другими коэффициентами) все действия с $B$ проводятся с каждой клеткой $K_i$ отдельно, поэтому матрица $f(B)$ состоит из клеток $f(K_1), \dots, f(K_l)$, расположенных на главной диагонали, а остальные элементы матрицы $f(B)$ — нули. Короче,

$$
\begin{aligned}
f(B) &= \operatorname{diag}\left\{f(K_1), \dots, f(K_l)\right\}; \\
e^{tB} &= \operatorname{diag}\left\{e^{tK_1}, \dots, e^{tK_l}\right\}.
\end{aligned} \tag{86}
$$

В частности, если каждая клетка $K_i$ состоит только из одного числа $\lambda_i$, матрица $B$ называется диагональной. Тогда $f(B)$ тоже диагональна:

$$
\begin{aligned}
f(B) &= \operatorname{diag}\left\{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\right\}; \\
e^{tB} &= \operatorname{diag}\left\{e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}\right\}.
\end{aligned} \tag{87}
$$

Найдем $e^{tK}$, где $K$ — жорданова клетка размера $k \times k$, $k \geqslant 2$, то есть $K = \lambda E + F$, $F$ определено в (85). Имеем

$$e^{tK} = e^{t\lambda E + tF} = e^{t\lambda E} \cdot e^{tF},$$

с помощью (87) или (81) получаем

$$e^{t\lambda E} = \operatorname{diag}\left\{e^{t\lambda}, \dots, e^{t\lambda}\right\} = e^{t\lambda} E.$$

Матрицы $F^2, F^3, \dots$ имеют вид, сходный с $F$, но у каждой следующей косой ряд из единиц сдвигается на одно место вправо. При $m \geqslant k$ имеем $F^m = 0$. Поэтому ряд (81) для $A = tF$ обрывается,

$$e^{tF} = E + \frac{t}{1!}F + \frac{t^2}{2!}F^2 + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}F^{k-1} =$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & 1 & \dots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{88}
$$

Матрица $e^{tK} = e^{t\lambda}e^{tF}$ получается умножением всех элементов найденной матрицы $e^{tF}$ на число $e^{t\lambda}$. Из клеток $e^{tK_i}$ составляется матрица $e^{tB}$, см. (86).

**Замечание.** Для треугольной матрицы собственными значениями являются числа, стоящие на главной диагонали, и только они. Поэтому для матрицы $e^{tB}$ (значит, и для $e^{tA}$) собственными значениями являются числа $e^{\lambda_i t}$, где $\lambda_i$ — собственные значения матрицы $A$.

Пусть для матрицы $A$ известная матрица $C$, приводящая $A$ к жордановой матрице $B = C^{-1}AC$. Тогда

$$
A = CBC^{-1}, \quad A^2 = CBC^{-1} \cdot CBC^{-1} = CB^2C^{-1}, \\
\dots, \quad A^m = CB^mC^{-1}.
$$

Подставляя это в (81) и вынося слева $C$, а справа $C^{-1}$, получаем

$$
e^{tA} = C\left(E + \frac{t}{1!}B + \frac{t^2}{2!}B^2 + \dots\right)C^{-1} = Ce^{tB}C^{-1}.
$$

Эта формула и (86), (88) дают еще один способ отыскания $e^{tA}$. Пример см. [8], § 22.

**4.** **Другие функции матриц** (доказательства имеются в [2], гл. 4, § 4).
Пусть функция $f(z)$ определена степенным рядом

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

сходящимся в круге $|z| < r$. Тогда для любой квадратной матрицы $A$, у которой все собственные значения лежат внутри круга $|\lambda| < r$, ряд

$$a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots$$

сходится и его сумма принимается за $f(A)$.

Если матрица $A = CBC^{-1}$, то $f(A) = Cf(B)C^{-1}$. Для жордановой матрицы $B = \operatorname{diag}\{K_1, \ldots, K_l\}$ имеем $f(B) = \operatorname{diag}\left\{f(K_1), \ldots, f(K_l)\right\}$.

Для жордановой клетки $K = \lambda E + F$ ($F$ см. в (85)) размера $k \times k$

$$f(K) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \dfrac{f'(\lambda)}{1!} & \dfrac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \dfrac{f^{k-1}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & f(\lambda) & \dfrac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \dfrac{f^{k-2}(\lambda)}{(k-2)!} \\ & & f(\lambda) & \cdots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

# § 16. Линейные системы с периодическими коэффициентами

Линейные системы и линейные уравнения $n$-го порядка с периодическими коэффициентами — важный для приложений класс дифференциальных уравнений и систем. Решения уравнений и систем этого класса могут быть исследованы известными методами. При таком исследовании используется понятие логарифма матрицы.

**1. Логарифм матрицы.** Логарифмом вещественного или комплексного числа $z$ называется такое число $w = \ln z$, что $e^w = z$. Так как $e^{\alpha+\beta i} = e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta)$, то для числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеем $e^{\alpha+\beta i} = z$ тогда, когда $e^\alpha = r$, $\beta = \varphi + 2\pi k$, $k$ — любое целое. Поэтому

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad \text{где} \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Таким образом, $\ln z$ — многозначная функция. Если $z \neq 0$, то $\ln z$ существует.

*Логарифмом квадратной матрицы* $A$ называется такая матрица $L$, что $e^L = A$.

**Теорема 17.** *Для любой квадратной матрицы $A$, имеющей $\det A \neq 0$, существует $\ln A$.*

*Доказательство.* Сначала найдем логарифм жордановой клетки $K = \lambda E + F = \lambda(E+H)$, где $\lambda \neq 0$, $H = \lambda^{-1}F$, матрицу $F$ см. в (85). Покажем, что $\ln(E+H) = N$, где $N = H - H^2/2 + H^3/3 - \ldots$. По определению логарифма, для этого надо показать, что $e^N = E + H$ или, учитывая (82), что $S = H$, где

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} H^j\right)^i. \tag{89}$$

Если $H$ — число, $|H| < 1$, то $S = e^{\ln(1+H)} - 1 = H$. Так как ряд (89) остается сходящимся и после замены всех членов их модулями, то в ряде можно переставить члены и объединить члены с одинаковыми степенями $H$, то есть $S = c_1 H + c_2 H^2 + c_3 H^3 + \ldots$. Каждое $c_m$ получается из конечного числа коэффициентов в (89) и не зависит от $H$. Так как $S = H$ при $|H| < 1$, то $c_1 = 1$, $c_m = 0$ $(m \geqslant 2)$.

Пусть теперь $H$ — матрица $k \times k$, $H = \lambda^{-1}F$, тогда $H^m = 0$ при $m \geqslant k$. Ряды в (89) превращаются в конечные суммы, перестановка и группировка членов законны, и $S = c_1H + c_2H^2 + \ldots + c_{k-1}H^{k-1}$. Коэффициенты $c_m$ получаются с помощью тех же действий, что и в случае, когда $H$ — число, поэтому $c_m$ те же самые: $c_1 = 1$, $c_m = 0$ $(m \geqslant 2)$. Значит, и в случае $H = \lambda^{-1}F$ имеем $S = H$, то есть $\ln(E + H) = N$.

Рассматривая данную жорданову клетку берем всегда одну и ту же ветвь логарифма. При $\lambda \neq 0$

$$e^{E\ln\lambda + N} = e^{E\ln\lambda}\cdot e^N = \lambda E\cdot(E+H) = \lambda E + F.$$

Поэтому при $\lambda \neq 0$ для жордановой клетки $K = \lambda E + F$ имеем

$$\ln K = E\ln\lambda + N =$$

$$= E\ln\lambda + \frac{1}{\lambda}F - \frac{1}{2\lambda^2}F^2 + \frac{1}{3\lambda^3}F^3 - \ldots + \frac{(-1)^{k-2}}{(k-1)\lambda^{k-1}}F^{k-1}.$$

Если жорданова матрица $B$ состоит из клеток $K_1, \ldots, K_l$, и все $\lambda_i \neq 0$, то $\ln B$ есть матрица $D$, состоящая из клеток $\ln K_i$, $i = 1, \ldots, l$, так как $e^D$ состоит из клеток $e^{\ln K_i}$, то есть из клеток $K_i$, значит, $e^D = B$.

Для любой матрицы $A$ с $\det A \neq 0$ существует такая матрица $C$, что матрица $B = C^{-1}AC$ жорданова, и $\det B \neq 0$. Тогда

$$A = CBC^{-1} = Ce^{\ln B}C^{-1} = e^{C(\ln B)C^{-1}},$$

то есть $\ln A = C(\ln B)C^{-1}$. Существование матрицы $\ln A$ доказано. ■

Логарифм вещественной матрицы $A$ может быть комплексным. Однако если матрица $A$ с $\det A \neq 0$ равна квадрату вещественной матрицы, то существует вещественный $\ln A$ [7], § 33.

**2.** Рассмотрим линейную систему в векторной записи

$$x' = A(t)x \quad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{90}$$

Предполагается, что матрица $A(t)$ — непрерывная функция от $t$ с периодом $T$.

Пусть $X(t)$ — любая фундаментальная матрица системы (90). Тогда матрица $Y(t) \equiv X(t+T)$ — тоже фундаментальная, так как $\det Y(t) \neq 0$ и

$$Y'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)Y(t).$$

По теореме 3 (§ 9) существует такая неособая матрица $M$, что $Y(t) = X(t)M$, то есть

$$X(t+T) = X(t)M. \tag{91}$$

Матрица $M$ называется *матрицей монодромии*, а ее собственные значения — *мультипликаторами*.

Из (91) следует, что для любого целого $k$

$$X(t+kT) = X(t)M^k. \tag{92}$$

**Лемма 12.** *Для другой фундаментальной матрицы $Z(t)$ имеем другую матрицу $M_1$ вместо $M$, подобную матрице $M$, то есть $M_1 = C^{-1}MC$. Поэтому все матрицы монодромии имеют одну и ту же жорданову форму и одни и те же мультипликаторы.*

*Доказательство.* Если $Z(t)$ — другая фундаментальная матрица, то по теореме 3 найдется такая неособая постоянная матрица $C$, что $Z(t) = X(t)C$. Тогда аналогично (91)

$$\begin{gathered} Z(t+T) = Z(t)M_1, \\ M_1 = Z^{-1}(t)Z(t+T) = C^{-1}X^{-1}(t)X(t+T)C = C^{-1}MC. \end{gathered} \tag{93}$$

■

**Геометрический смысл матрицы монодромии и мультипликаторов.** Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица с $X(0) = E$. Для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ функция $x(t) = X(t)x_0$ есть решение системы (90) с начальным условием $x(0) = x_0$. В силу (91) $x(T) = X(T)x_0 = Mx_0$. То есть сдвиг по интегральным кривым системы за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant T$

есть линейное преобразование $x(T) = Mx(0)$ с матрицей $M$. Вследствие периодичности системы (90) сдвиг за время следующего периода $T \leqslant t \leqslant 2T$ есть такое же преобразование: $x(2T) = Mx(T)$ и т.д.

Пусть $v$ — собственный вектор для $M$ и $Mv = \mu v$. Тогда $x(t) = X(t)v$ — решение с $x(0) = v$. В силу (91)

$$x(t+T) = X(t+T)v = X(t)Mv = X(t)\mu v = \mu x(t).$$

То есть за каждый промежуток времени длины $T$ это решение увеличивается в $\mu$ раз (если $\mu > 1$), точнее, умножается на $\mu$.

**3.**

**Теорема 18 (теорема Флоке́—Ляпунова).** *Для системы* (90) *любая фундаментальная матрица может быть представлена в виде*

$$X(t) = K(t)e^{tB}, \tag{94}$$

*где матрица $K(t)$ непрерывна и имеет период $T$, а $B$ — постоянная матрица, $B = T^{-1}\ln M$.*

*Доказательство.* Пусть $X(t)$ — любая фундаментальная матрица. В силу (91) имеется такая неособая матрица $M$, что $X(t+T) = X(t)M$. По теореме 17 существует такая матрица $B$, что $e^{TB} = M$. Возьмем матрицу $K(t) = X(t)e^{-tB}$. Она непрерывна, $K'(t)$ тоже. Покажем, что она имеет период $T$. Имеем

$$K(t+T) = X(t+T)e^{-(T+t)B} = X(t)Me^{-TB}e^{-tB}. \tag{95}$$

Так как $Me^{-TB} = E$, то выражение (95) равно $X(t)e^{-tB} = K(t)$. То есть $K(t+T) \equiv K(t)$, и теорема доказана. ■

**4.** Изложенные результаты позволяют исследовать решения системы (90) на бесконечном интервале. Если на отрезке длины $T$ найдены (например, на ЭВМ) $n$ линейно независимых решений системы (90), то есть известна матрица $X(t)$ на этом отрезке, то можно найти матрицу $M$. Тогда формулы (92) и (94) позволяют судить о поведении всех решений системы на бесконечном интервале. Например, для стремления всех решений к нулю при $t \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы модули всех мультипликаторов были меньше единицы (тогда в (92) $M^k \to 0$ при $k \to \infty$).

В случае, когда система (90) получена из уравнения $y'' + p(t)y = 0$ с периодической функцией $p(t)$, А. М. Ляпунов получил условия ограниченности всех решений при $-\infty < t < \infty$ ([2], гл. 7, § 2, п. 2).

# ГЛАВА 4

# Автономные системы и устойчивость

Эти вопросы соединены в одну тему, так как при изложении вопросов устойчивости используются понятия и результаты теории автономных систем, а при исследовании особых точек нужны методы теории устойчивости. Разумеется, вопросы устойчивости излагаются не только для автономных систем.

## § 17. Автономные системы

**1.** Система дифференциальных уравнений называется *автономной*, если в нее не входит явно независимое переменное. Например,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

или, в векторной записи,

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \tag{2}$$

— автономная система нормального вида. Автономность системы приводит к тому, что решения системы можно изображать линиями в пространстве меньшей размерности. Это облегчает исследование решений.

*Фазовым пространством* автономной системы (1) называется множество, на котором определены координаты $x_1, \dots, x_n$ и задана система (1). Фазовое пространство может быть, например, областью в $\mathbb{R}^n$ или гладкой поверхностью, например, боковой поверхностью цилиндра.

Далее считаем, что в (1) функции $f_i$ и $\partial f_i/\partial x_j$ определены и непрерывны в области $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $G$ — фазовое пространство. Каждое решение системы (1) $x_1 = x_1(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$ определяет в фазовом пространстве линию (или точку, если все функции $x_i(t)$ постоянны). Эта линия или точка называется *траекторией* (иногда *фазовой траекторией*). Точка $x = a$ является траекторией тогда и только тогда, когда в этой точке все функции $f_i$ равны нулю, то есть в (2) $f(a) = 0$. Такая точка называется *особой* или *стационарной*, или *положением равновесия*.

**Пример 1.** Автономная система $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$ имеет решения

$$x_1 = c_1 \sin(t + c_2), \qquad x_2 = c_1 \cos(t + c_2). \tag{3}$$

В пространстве $t$, $x_1$, $x_2$ функции (3) изображаются винтовыми линиями, а в фазовом пространстве (здесь оно является плоскостью $x_1$, $x_2$) — окружностями $x_1^2 + x_2^2 = c_1^2$. Каждая окружность изображает бесконечно много решений, отличающихся только значениями $c_2$. Точка $x_1 = x_2 = 0$ тоже является траекторией (особая точка).

Система (1) или (2) в каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ фазового пространства определяет вектор

$$f(x) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

В особой точке $f(x) = 0$. Если линия $x = x(t)$ является траекторией системы, то в каждой своей точке, где $x'(t) \neq 0$, она касается вектора $f(x)$, так как вектор $x'(t) = \big(x_1'(t), \ldots, x_n'(t)\big)$ касается линии, параметрически заданной уравнениями $x_1 = x_1(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$, а $x'(t) = f(x(t))$ в силу (1) или (2). Таким образом, автономная система задает *векторное поле* в фазовом пространстве, а траектории — линии, которые во всех точках, где $f(x) \neq 0$, касаются векторов этого поля. На траекториях принято ставить стрелки, указывающие направление движения точки $x(t)$ при возрастании $t$.

**2.** Следующие утверждения описывают свойства траекторий.

1° Если $x(t)$ — решение системы (2), то для любого $c \in \mathbb{R}$ функция $y(t) \equiv x(t + c)$ — тоже решение, и все эти решения имеют одну и ту же траекторию.

*Доказательство.* Так как $x(t)$ — решение, то $x'(t) \equiv f(x(t))$. Заменяя $t$ на $t + c$, имеем $x'(t + c) \equiv f(x(t + c))$, то есть $y'(t) \equiv f(y(t))$. Значит, $y(t)$ — решение. Эти решения имеют одну и ту же траекторию, так как через любую точку $x^* = x(t^*)$ первого решения решение $y(t) = x(t + c)$ проходит при $t = t^* - c$. Таким образом, каждая траектория, не являющаяся точкой, изображает бесконечно много решений. ■

2° Две любые траектории или не имеют общих точек, или совпадают.

*Доказательство.* Пусть траектории решений $x(t)$ и $y(t)$ имеют общую точку $b$. Тогда существуют такие $t_1$ и $t_2$, что $b = x(t_1) = y(t_2)$. Функция $z(t) = y(t + t_2 - t_1)$ — тоже решение, и $z(t_1) = y(t_2) = x(t_1)$. По теореме единственности $z(t) \equiv x(t)$, то есть $y(t + t_2 - t_1) \equiv x(t)$, и решения $x(t)$ и $y(t)$ имеют одну и ту же траекторию. ■

**Следствие.** *Решение автономной системы не может войти в особую точку за конечное время.*

*Доказательство.* Пусть $a$ — особая точка, то есть $x^*(t) \equiv a$ — решение. Если траектории решений $x(t)$ и $x^*(t)$ не совпадают, то они не имеют общих точек. Значит, $x(t) \neq a$ при всех $t$.

Решение $x(t)$ может приближаться к особой точке только при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. ■

3° Если $x(t)$ — решение, $x(t_1) = x(t_2)$, $t_2 > t_1$, и $x(t) \not\equiv \mathrm{const}$, то решение — периодическое, у него есть наименьший положительный период, а траектория — замкнутая кривая без самопересечений.

*Доказательство.* Функция $y(t) = x(t + t_2 - t_1)$ — тоже решение по свойству 1°, $y(t_1) = x(t_2) = x(t_1)$. По теореме единственности $y(t) \equiv x(t)$, то есть $x(t + d) \equiv x(t)$, период $d = t_2 - t_1 > 0$. Могут быть и другие периоды.

Так как $x(t) \not\equiv \mathrm{const}$, то найдется такое $t^*$, что $x(t^*) \neq x(t_1)$, то есть $|x(t^*) - x(t_1)| = r > 0$. В силу непрерывности $x(t)$ найдется такое $h > 0$, что $|x(t) - x(t_1)| < r$ при $t_1 - h < t < t_1 + h$. Значит, $x(t) \neq x(t^*)$ при этих $t$. Но за время, равное периоду, решение $x(t)$ должно пройти через все точки своей траектории. Поэтому длина любого положительного периода не меньше, чем $2h$, и нижняя грань их длин $p \geqslant 2h$. Если $p$ не есть период, то имеется последовательность периодов $p_i \to p+0$, $x(t+p_i) \equiv x(t)$. При $p_i \to p$ получаем $x(t+p) \equiv x(t)$, то есть $p$ — период.

Траектория $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant p)$ — замкнутая кривая, так как $x(p) = x(0)$. Если она имеет самопересечения, то $x(t_1) = x(t_2)$ при некоторых $t_1, t_2 \in [0,p]$, $|t_1 - t_2| < p$. В силу доказанного выше, тогда решение $x(t)$ имело бы период $d = |t_1 - t_2| < p$. Это невозможно, так как $p$ — наименьший положительный период. ■

4° Каждая траектория автономной системы является или точкой или замкнутой кривой без самопересечений, или незамкнутой кривой без самопересечений.

*Доказательство.* Если решение $x(t) \equiv \text{const}$, то траектория — точка. Если $x(t_1) \neq x(t_2)$ при любых $t_1$ и $t_2 \neq t_1$, то траектория — незамкнутая кривая без самопересечений. Если $x(t) \not\equiv \text{const}$ и $x(t_1) = x(t_2)$ при некоторых $t_1$ и $t_2 \neq t_1$, то траектория — замкнутая кривая в силу 3°. ■

5° **Предельные множества траекторий.** Для траектории $T(x = \varphi(t),\ -\infty < t < \infty)$ или для ее положительной полутраектории $T^+(x = \varphi(t),\ t^* \leqslant t < \infty)$ *$\omega$-предельной точкой* называется такая точка $p$, что существует последовательность $t_1, t_2, \ldots \to \infty$, по которой $\varphi(t_i) \to p$ при $i \to \infty$. Множество $\Omega(T)$ всех $\omega$-предельных точек траектории $T$ называется ее *$\omega$-предельным множеством.* Аналогично, но при $t_i \to -\infty$, определяются *$\alpha$-предельные точки* и множества.

Например, для траектории $x = t$ ($x \in \mathbb{R}^1$) множество $\Omega(T)$ пусто; для полутраектории $T^+(x = e^{-t},\ 0 \leqslant t < \infty)$ множество $\Omega(T^+)$ — точка $x = 0$; для траектории $x_1 = e^t\cos t/(1+e^t)$, $x_2 = e^t\sin t/(1+e^t)$ $\alpha$-предельное множество есть точка $x_1 = x_2 = 0$, $\omega$-предельное множество — окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

**Теорема 1.** *Если полутраектория $T^+(x = \varphi(t) \in \mathbb{R}^n,\ t_1 \leqslant t < \infty)$ ограничена и вместе со своей $\varepsilon$-окрестностью содержится в области $G$, в которой все $f_i$ и $\partial f_i/\partial x_j$ непрерывны, то множество $\Omega(T^+)$ непусто, ограничено, замкнуто, связно и состоит из целых траекторий.*

*Доказательство.* Для любой последовательности $t_i \to \infty$ последовательность $\varphi(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, ограничена, значит, имеет предельные точки и $\Omega(T^+)$ непусто. Из ограниченности $T^+$ следует ограниченность $\Omega(T^+)$.

Замкнутость. Если $p_i \in \Omega(T^+)$, $p_i \to p$, $i = 1, 2, \ldots$, то для $\eta = 2^{-i}$ найдется такое $p_i$, что $|p_i - p| < \eta$. Для этого $p_i$ существует последовательность $t_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots$, такая, что $\varphi(t_{i,j}) \to p_i$ $(j \to \infty)$, поэтому найдется такое $j = j(i)$, что $t_{i,j(i)} > i$, $\left|\varphi(t_{i,j(i)}) - p_i\right| < \eta$. Тогда $\left|\varphi(t_{i,j(i)}) - p\right| < 2\eta = 2^{1-i}$, $t_{i,j(i)} > i \to \infty$. Значит, $p \in \Omega(T^+)$.

Докажем, что $\Omega(T^+)$ состоит из целых траекторий, то есть что через любую точку $a \in \Omega(T^+)$ проходит траектория $T_a(x = z(t),\ -\infty < t < \infty)$, содержащаяся в $\Omega(T^+)$. По определению $\Omega(T^+)$ существует такая последовательность $t_1, t_2, \ldots \to \infty$, что $\varphi(t_i) \to a$ $(i \to \infty)$. Функции $\chi_i(t) \equiv \varphi(t_i + t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — решения по свойству 1, $\chi_i(0) \to a$ $(i \to \infty)$. Обозначим через $z(t)$ решение с $z(0) = a$, а через $F$ — замкнутую $(\varepsilon/2)$-окрестность полутраектории $T^+$. Точка $t = 0$, $x = a$ лежит внутри замкнутой неограниченной области $D(-\infty < t < \infty,\ x \in F)$. В силу следствия теоремы 4 § 6 решение $z(t)$ продолжается в каждую сторону или до выхода на границу области $D$, или до сколь угодно больших

$|t|$. Предположим, что $z(t)$ выходит на границу области $D$ в точке $t = t^*$, $x = z(t^*) = b$. Тогда $b$ лежит на границе множества $F$, следовательно,

$$\rho(b, T^+) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Согласно следствию теоремы 6 § 7 из $\chi_i(0) \to a = z(0)$ следует:

$$\chi_i(t^*) \to z(t^*) = b \quad (i \to \infty). \tag{5}$$

Так как $\chi_i(t^*) = \varphi(t_i + t^*) \in T^+$ при $t_i \geqslant t_1 - t^*$, то (5) противоречит (4).

Поэтому решение $z(t)$ не может выйти на границу области $D$, следовательно, продолжается на интервал $(-\infty, \infty)$. А тогда, как выше, имеем для любого $t$ $\varphi(t_i + t) = \chi_i(t) \to z(t)$ $(i \to \infty)$. Следовательно, $z(t) \in \Omega(T^+)$ при всех $t$.

Связность не доказываем, она ниже нигде не используется. ■

Изучены и другие свойства предельных множеств автономных систем в $\mathbb{R}^2$.

**Теорема Бендиксона.** *Ограниченное $\omega$-предельное множество на плоскости, не содержащее особых точек, является замкнутой траекторией* ([7], § 28, *теорема* 21).

В пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, структура предельных множеств может быть значительно более сложной и мало изучена.

6° **Групповое свойство** автономной системы. Обозначим через $\varphi(t, p)$ решение системы (2) с начальным условием $\varphi(0, p) = p$. Тогда

$$\varphi\big(t, \varphi(t_1, p)\big) \equiv \varphi(t_1 + t, p) \tag{6}$$

на любом интервале, на котором определены обе части этого равенства.

*Доказательство.* Обе части равенства — решения (правая — по свойству 1°). Оба решения при $t = 0$ проходят через одну точку $q = \varphi(t_1, p)$. По теореме единственности они совпадают при всех $t$. ■

7° Функция $\varphi(t, p)$ непрерывна по совокупности переменных (это следует из теоремы 7 § 7).

8° Пусть все решения системы (2) определены при $-\infty < t < \infty$ и их значения $x(t)$ заполняют множество $P$. Тогда при любом постоянном $p \in P$ и переменном $t$ точка $x = \varphi(t, p)$ пробегает траекторию. При любом постоянном $t \in \mathbb{R}^1$ и переменном $p$ функция $\varphi(t, p)$ определяет непрерывное отображение множества $P$ на себя, зависящее от параметра $t \in \mathbb{R}^1$. Это отображение называется *сдвигом по траекториям* за время $t$.

Семейство таких отображений сдвига составляет однопараметрическую коммутативную группу с групповой операцией, определяемой левой частью равенства (6) (последовательное выполнение двух отображений из данного семейства есть также отображение, принадлежащее семейству).

*Доказательство.* Коммутативность и ассоциативность групповой операции следует из (6). Единица группы есть тождественное отображение $\varphi(0, p) \equiv p$, а обратное отображение для $\varphi(t, p)$ есть $\varphi(-t, p)$. ■

**3.** Группа отображений множества $P$ на себя, обладающая свойствами 6°–8°, называется *динамической системой*. Динамические системы могут изучаться и вне связи с конкретным видом дифференциальных уравнений (1), то есть только на основе этих свойств (например, [36], главы 5 и 6). Результаты, полученные такими абстрактными методами, развивались с привлечением понятий из других отделов математики и применялись к конкретным задачам.

# § 18. Понятие устойчивости

**1.** Математическая теория устойчивости изучает поведение решений системы дифференциальных уравнений при $t \to \infty$. Основной вопрос: в каких случаях можно утверждать, что решение мало меняется на всем бесконечном интервале $t_0 \leqslant t < \infty$ при любых достаточно малых изменениях начальных условий и функций, входящих в уравнения рассматриваемой системы. Теория устойчивости имеет большое значение в технике, так как в реальных задачах исходные данные, а часто и уравнения движения (например, из-за неучитываемых помех) известны лишь приближенно. Для создания машины, способной выполнить определенную работу, не всегда достаточно качественных физических соображений, во многих случаях нужен математический анализ.

Первым важным техническим вопросом, решенным с помощью теории устойчивости, был вопрос об условиях работы регулятора Уатта. В изобретенной Уаттом паровой машине имеется механизм — центробежный регулятор, который должен поддерживать постоянную скорость работы машины. Но когда стали строить большие паровые машины, регулятор Уатта часто не справлялся с работой. Русский инженер Вышнеградский, чтобы найти причины плохой работы регулятора, составил систему дифференциальных уравнений, описывающую работу паровой машины вместе с регулятором, и исследовал эту систему на устойчивость (см. [7], § 27). Он получил условия устойчивости в виде ограничений на конструктивные параметры регулятора. Регуляторы, изготовленные с учетом этих ограничений, работали хорошо.

В настоящее время в связи с автоматизацией производства все шире применяются системы автоматического управления, которые должны обеспечить работу управляемого объекта в заданном режиме. Математическое исследование устойчивости таких систем еще на стадии их проектирования ускоряет и удешевляет создание таких систем, позволяя заранее отбросить многие негодные варианты.

Важная роль в создании и развитии теории устойчивости принадлежит советским и российским ученым, начиная с основоположника этой теории А. М. Ляпунова.

**2. Основные определения.** Рассматривается система в векторной записи

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{7}$$

и ее частное решение $x = \varphi(t)$ $(t_0 \leqslant t < \infty)$. Вектор-функция $f(t, x)$ и все $\partial f_i/\partial x_j$ определены и непрерывны при $|x - \varphi(t)| < \rho$, $t_0 \leqslant t < \infty$.

Решение $x = \varphi(t)$ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ называется *устойчивым* (или *устойчивым по Ляпунову*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого такого $\tilde{x}_0$, что $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, решение $\tilde{x}(t)$ с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ при $t_0 \leqslant t < \infty$ существует и

$$|\tilde{x}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad (t_0 \leqslant t < \infty). \tag{8}$$

Это значит, что каждое решение с начальным условием из $\delta$-окрестности точки $x_0$ при $t_0 \leqslant t < \infty$ существует и не выходит из $\varepsilon$-трубки, ось которой — решение $x = \varphi(t)$ (рис. 12).

Решение $x = \varphi(t)$ называется *асимптотически устойчивым*, если 1) оно устойчиво по Ляпунову, 2) все решения $\tilde{x}(t)$ с начальными условиями $\tilde{x}(t_0)$ из некоторой $\delta_0$-окрестности точки $x_0$ неограничено сближаются с решением $x = \varphi(t)$ при $t \to +\infty$, то есть $\tilde{x}(t) - \varphi(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$.

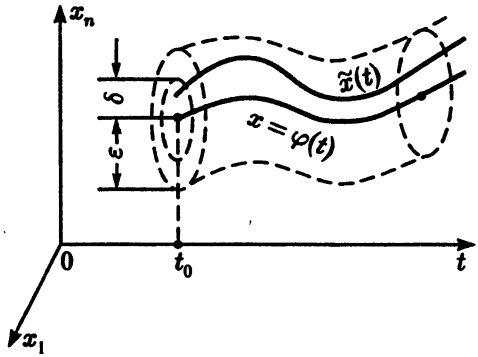



**Рис. 12**

Требования 1) и 2) независимы. Из 1) не следует 2), так как из неравенства (8) не следует, что $\tilde{x}(t) - \varphi(t) \to 0$, а из 2) не следует 1), см. следующий пример.

**Пример 2.** Пусть линии на рис. 13 изображают траектории системы

$$\frac{dx}{dt} = p(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = q(x, y).$$

Пусть функции $p$, $q$ непрерывны; $p(0,0) = q(0,0) = 0$, значит, $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$ — «нулевое» решение. На одной из кривых, идущих из точки $O(0,0)$ влево, возьмем точки $B$ и $D$. Возьмем числа $0 < \varepsilon < |OD|$ и сколь угодно малое $\delta > 0$. Решение $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ с начальным условием в точке $B$, лежащей на дуге $OD$ в $\delta$-окрестности точки $O$, идет по дуге $OBD$. В точке $D$ имеем $|OD| > \varepsilon$. Нельзя подобрать такого $\delta > 0$, чтобы решение из точки $B$ оставалось в $\varepsilon$-окрестности нулевого решения. Поэтому нулевое решение неустойчиво.

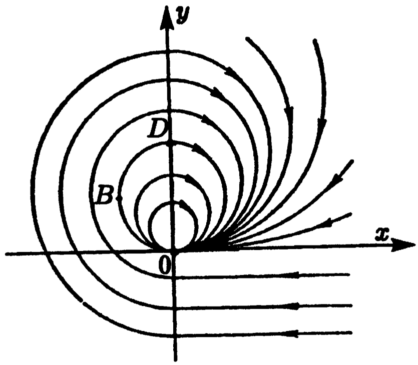



Рис. 13

Наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора начального момента $t_0$. В самом деле, пусть при начальном моменте $t_0$ решение $x = \varphi(t)$ устойчиво, то есть из $|\widetilde{x}(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ следует неравенство (8). Пусть начальный момент $t_1 > t_0$ (или $t_1 < t_0$) и $|\widetilde{x}(t_1) - \varphi(t_1)| < \eta$. Если $\eta$ достаточно мало, то из этого неравенства в силу непрерывной зависимости решения от начальных условий следует неравенство $|\widetilde{x}(t) - \varphi(t)| < \delta$ на отрезке с концами $t_0$ и $t_1$, а отсюда — неравенство (8). То есть и при начальном моменте $t_1$ решение $x = \varphi(t)$ устойчиво. ◄

Исследование устойчивости любого решения $x = \varphi(t)$ системы (7) можно привести к исследованию устойчивости нулевого решения другой системы. Для этого в (7) делается замена искомой функции $x = \varphi(t) + y$. Получается система $\varphi'(t) + y'(t) = f(t, \varphi(t) + y)$. Так как $x = \varphi(t)$ — решение системы (7), то $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, и мы имеем

$$y' = f(t, \varphi(t) + y) - f(t, \varphi(t)). \tag{9}$$

Решение $x = \varphi(t)$ системы (7) при такой замене переходит в решение $y \equiv 0$ системы (9). Устойчивость (или неустойчивость) решения при этом сохраняется, так как разность $\widetilde{x}(t) - \varphi(t)$ переходит в равную ей разность $\widetilde{y}(t) - 0$.

Устойчивость нулевого решения системы (9) означает, что из $|\tilde{y}(t_0)| < \delta$ следует $|\tilde{y}(t)| < \varepsilon$ при $t_0 \leqslant t < \infty$.

$\boxed{3.}$ Исследовать устойчивость, пользуясь лишь определениями, можно только тогда, когда удается найти в том или ином виде общее решение данной системы или когда удается выяснить такие свойства решений, как ограниченность, возрастание и убывание.

**Пример 3.** Устойчиво ли нулевое решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -y^2?$$

*Решение примера.* Общее решение $y = 1/(t + c)$, $c = \text{const}$; $y = 0$ — тоже решение. Из того, что $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, ошибочно было бы делать вывод об устойчивости нулевого решения. Для устойчивости нулевого решения надо, чтобы из $|y(0)| < \delta$ следовало бы

$$|y(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{10}$$

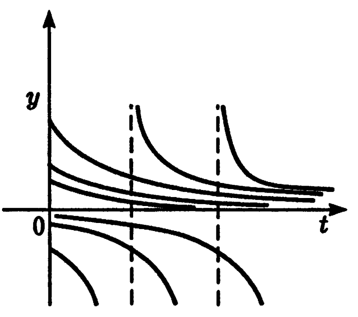


Рис. 14

При $y(0) > 0$ решения убывают и стремятся к нулю. При $y(0) < 0$ решения убывают и имеют вертикальные асимптоты (рис. 14), то есть не удовлетворяют условию (10). Поэтому нулевое решение неустойчиво.

Другой способ. Для решения с $y(0) = y_0$ из формулы $y = 1/(t + c)$ получаем $c = 1/y_0$, $y(t) = y_0/(ty_0 + 1)$. Для любого

$y_0 < 0$ имеем $ty_0+1 = 0$ при $t = -1/y_0 > 0$, поэтому $y(t) \to -\infty$ при $t \to -1/y_0 - 0$. Нулевое решение неустойчиво. ◀

**Пример 4.** Устойчиво ли нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = -4y, \qquad \frac{dy}{dt} = x?$$

*Решение примера.* Деля второе уравнение на первое, получаем $dy/dx = -x/(4y)$. Общее решение $x^2 + 4y^2 = c > 0$. Эти линии — эллипсы. Если $x^2(0) + y^2(0) < \delta^2$, то при $t > 0$ решение $x(t)$, $y(t)$ находится внутри эллипса $x^2 + 4y^2 = 4\delta^2$, описанного около круга $x^2 + y^2 = \delta^2$. Так как кривые, изображающие решения, не пересекаются, то решение $x(t)$, $y(t)$ остается внутри этого эллипса (рис. 15), значит, и внутри круга $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, $\varepsilon = 2\delta$, описанного около эллипса. Нулевое решение устойчиво. Асимптотической устойчивости нет, так как каждое решение остается на своем эллипсе $x^2 + 4y^2 = c$ и не стремится к нулю при $t \to \infty$. ◀

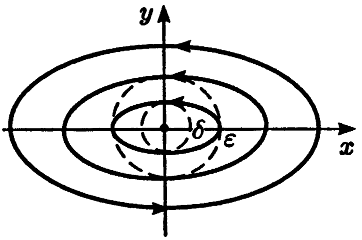


Рис. 15

*Задачи для упражнений:*
[12], § 15, № 884–888, 890–892; § 24, № 140–147.

$\boxed{4.}$ **Условия устойчивости для линейной системы с постоянными коэффициентами.** Пусть в системе $dx/dt = Ax$ матрица $A$ имеет собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

**Теорема 2.**

1) *Если все* $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$*, то нулевое решение асимптотически устойчиво.*
2) *Если все* $\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0$ *и для тех* $\lambda_j$*, у которых* $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$*, все жордановы клетки размера* 1*, то нулевое решение устойчиво.*
3) *Если имеется* $\lambda_j$*, у которого* $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$*, или у которого* $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ *и жорданова клетка размера* $\geqslant 2$*, то нулевое решение неустойчиво.*

*Доказательство.* По теореме 16 § 14 любое решение имеет вид (75) § 14, то есть в векторной записи

$$x = \mathscr{P}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + \mathscr{P}_m(t)e^{\lambda_m t}, \tag{11}$$

где $\mathscr{P}_j(t)$ — многочлен степени не выше $k_j - 1$, $k_j$ — размер наибольшей из жордановых клеток, содержащих $\lambda_j$; коэффициенты многочленов — векторы из $\mathbb{R}^n$. При $\lambda = \alpha + \beta i$

$$\mathscr{P}(t)e^{\lambda t} = \mathscr{P}(t)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t), \qquad |\cos\beta t + i\sin\beta t| \equiv 1.$$

Если $\alpha < 0$, то $e^{\alpha t} \to 0$ $(t \to \infty)$ и, как известно из курса математического анализа, $\mathscr{P}(t)e^{\alpha t} \to 0$. Поэтому в случае 1) каждое решение стремится к нулю при $t \to \infty$, значит, ограничено при $0 \leqslant t < \infty$. Тогда и фундаментальная матрица $X(t)$, столбцы которой — решения, и $X(0) = E$, тоже ограничена, $\|X(t)\| \leqslant m$ $(0 \leqslant t < \infty)$, и $\|X(t)\| \to 0$ $(t \to \infty)$. Для любого решения имеем $x(t) = X(t)x(0)$. Поэтому из $|x(0)| < \delta = \varepsilon/m$ следует $|x(t)| \leqslant \|X(t)\| \cdot |x(0)| < \varepsilon$ $(0 \leqslant t < \infty)$, кроме того, $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Нулевое решение асимптотически устойчиво.

В случае 2) те слагаемые в (11), в которых $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, ограничены при $0 \leqslant t < \infty$, как в случае 1). Слагаемые с $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ имеют многочлены нулевой степени, то есть константы, и тоже ограничены. Опять все решения ограничены, и в силу тех же оценок, что выше, нулевое решение устойчиво.

В случае 3) при наличии хотя бы одного $\lambda_j = \alpha + \beta i$ с $\alpha > 0$ имеется решение вида $x(t) = e^{(\alpha+\beta i)t}v$, где $v$ — собственный вектор для этого $\lambda_j$. Так как $e^{\alpha t} \to \infty$ $(t \to \infty)$, $|e^{i\beta t}| \equiv 1$, то это решение неограниченно при $0 \leqslant t < \infty$. Если матрица $A$ вещественная и $\beta \neq 0$, то решение $x(t)$ комплексное, но $\operatorname{Re} x(t)$ и $\operatorname{Im} x(t)$ — вещественные решения, из которых хотя бы одно неограниченно. Пусть $\delta > 0$ любое и $c = \delta/(2|x(0)|)$. Тогда для решения $x_1(t) = cx(t)$ имеем $|x_1(0)| = \delta/2$; $x_1(t)$ неограниченно при $0 \leqslant t < \infty$. Нулевое решение неустойчиво.

Если же нет $\lambda_j$ с $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, но есть $\lambda$ с $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и жордановой клеткой размера $k \geqslant 2$, то из формул, дающих решение системы (73) § 14 с жордановой клеткой, следует, что существует решение вида $y = \mathscr{P}(t)e^{\lambda t}$, где $\mathscr{P}(t)$ — многочлен степени $k - 1 \geqslant 1$ со старшим коэффициентом, не равным нулю. Так как здесь $|e^{\lambda t}| = 1$, то это решение неограниченно, и нулевое решение неустойчиво, как выше. ■

**Замечание.** Здесь доказана достаточность условий теоремы 2. Нетрудно доказать также их необходимость.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 24, № 156, 157.

**5.** Кроме понятий устойчивости и асимптотической устойчивости, о которых говорилось выше, для приложений важно понятие *устойчивости при постоянно действующих возмущениях*. Такая устойчивость означает, что при $t_0 \leqslant t < \infty$ решение мало меняется не только из-за малых изменений начальных условий, но и из-за любых достаточно малых внешних воздействий, например, помех, действующих все время ([34], § 70).

Решение $x = \varphi(t)$ системы (7) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $\eta > 0$, что при любых $\widetilde{x}_0$ и $h(t,x) \in C$ таких, что $|\widetilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|h(t,x)| < \eta$ при $t > t_0$, $|x| < \varepsilon$, каждое решение $\widetilde{x}(t)$ задачи

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = f(t,\widetilde{x}) + h(t,\widetilde{x}), \quad \widetilde{x}(t_0) = \widetilde{x}_0$$

при $t_0 \leqslant t < \infty$ существует и удовлетворяет неравенству (8).

Условия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость, часто обеспечивают и устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Таким является, в частности, условие 1) теоремы 2.

# § 19. Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова

**1.** Производной функции $v(t,x)$ в силу данной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ f \in \mathbb{R}^n), \tag{12}$$

называется функция

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(12)} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\cdot f_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\cdot f_n, \tag{13}$$

где $v$ и $f_1, \ldots, f_n$ зависят от $t, x_1, \ldots, x_n$. Формула (13) позволяет найти производную сложной функции

$$v(t,x(t)) \equiv v\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big),$$

где $x(t)$ — любое решение системы (12), не зная решений системы. По теореме о производной сложной функции

$$\frac{d}{dt}v\big(t,x_1(t),\dots,x_n(t)\big)=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\dots+\frac{\partial v}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}. \qquad (14)$$

Так как $x(t) = \big(x_1(t),\dots,x_n(t)\big)$ — решение системы (12), то $dx_i/dt = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ и сумма в (14) равна (13).

$\boxed{2.}$

**Теорема 3 (теорема Ляпунова об устойчивости).**
*Пусть $x(t) \equiv 0$ — решение системы (12), и пусть при $|x| \leqslant \rho$ ($\rho > 0$) существует функция $v(x) \in C^1$, удовлетворяющая условиям $v(0) = 0$, $v(x) > 0$ при $x \neq 0$, $dv/dt\big|_{(12)} \leqslant 0$. Тогда нулевое решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво.*

*Доказательство.* Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \rho\}$. Непрерывная функция $v(x)$ на множестве $S(|x| = \varepsilon_1)$ достигает в некоторой точке $x^* \in S$ своего наименьшего значения $\min\limits_S v(x) = v(x^*)$. Так как $v(x) > 0$ на $S$, то $v(x^*) = m > 0$. Функция $v(x)$ непрерывна, $v(0) = 0$, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что $v(x) < m$ при $|x| < \delta$.

Предположим, что решение $x(t)$ с $|x(t_0)| < \delta$ или существует не на всем интервале $t_0 \leqslant t < \infty$, или не остается в области $|x| < \varepsilon_1$. Тогда в силу следствия теоремы 4 § 6 найдется такое $t_1 > t_0$, что $|x(t_1)| = \varepsilon_1$, $|x(t)| < \varepsilon_1$ при $t_0 \leqslant t < t_1$. Тогда $v(x(t_0)) < m$, $v(x(t_1)) \geqslant m$ в силу выбора $m$ и $\delta$. Это невозможно, так как

$$\frac{dv(x(t))}{dt} = \frac{dv}{dt}\bigg|_{(12)} \leqslant 0$$

и $v(x(t))$ не возрастает. Итак, предположение неверно, и теорема доказана. ■

**Теорема 4 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости).** *Пусть выполнены условия теоремы 3 с заменой последнего неравенства на $dv/dt|_{(12)} \leqslant -w(x) < 0$ при $0 < |x| \leqslant \rho$; функция $w(x)$ непрерывна при $|x| \leqslant \rho$. Тогда нулевое решение асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Из предыдущей теоремы и ее доказательства следует, что нулевое решение устойчиво и что любое решение $x(t)$ с $|x(t_0)| < \delta$ остается в шаре $|x| < \varepsilon_1$ при $t_0 \leqslant t < \infty$. Докажем, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

В противном случае нашлись бы такие числа $\eta > 0$ и $t_1, t_2, \ldots \to \infty$, что $|x(t_i)| \geqslant \eta$ $(i = 1, 2, \ldots)$. В замкнутой области $\eta \leqslant |x| \leqslant \varepsilon_1$ имеем $v(x) \geqslant \mu > 0$, поэтому $v(x(t_i)) \geqslant \mu > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Так как $dv/dt|_{(12)} \leqslant 0$, то $v(x(t))$ не возрастает; поэтому $v(x(t)) \geqslant \mu$ при всех $t \geqslant t_0$. (Если бы было $v(x(t)) < \mu$ при некотором $t$, то при всех $t_i$, бóльших этого $t$, тоже было бы $v(x(t_i)) < \mu$, а это противоречит предположению.)

Возьмем такое $\delta_1 > 0$, что $v(x) < \mu$ в области $|x| < \delta_1$. Решение $x(t)$ не может войти в эту область, поэтому остается в замкнутой области $\delta_1 \leqslant |x| \leqslant \varepsilon_1$. Там $w(x) \geqslant \beta > 0$, $dv/dt|_{(12)} \leqslant -\beta < 0$, поэтому

$$v(x(t)) - v(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{dv(x(\tau))}{d\tau}\, d\tau \leqslant -\beta(t - t_0) \to -\infty \quad (t \to \infty),$$

но $v(x) \geqslant 0$. Противоречие показывает, что предположение $x(t) \not\to 0$ неверно. ■

**Замечание.** При выполнении условий этой теоремы нулевое решение будет также устойчивым при постоянно действующих возмущениях ([34], § 70).

А. М. Ляпунов доказал более общие теоремы — с функцией $v(t,x)$ вместо $v(x)$, удовлетворяющей некоторым другим ограничениям.

Функция $v(x)$ или $v(t,x)$, применяемая при доказательстве устойчивости, называется *функцией Ляпунова*. Для конкретных систем дифференциальных уравнений ее подбирать нелегко. Для несложных систем иногда можно брать функцию $v(x)$ равной квадрату расстояния точки $x$ от положения равновесия. Более сложные приемы подбора функции Ляпунова обычно не включаются в программу курса дифференциальных уравнений.

**Пример 5.** Устойчиво ли нулевое решение уравнения

$$x' = \sin x - x?$$

*Решение примера.* Возьмем $v = x^2$. Тогда

$$\frac{dv}{dt} = 2xx' = 2x(\sin x - x) < 0 \quad (x \neq 0).$$

По теореме 4 нулевое решение асимптотически устойчиво. ◄

**Пример 6.** Устойчиво ли нулевое решение системы

$$x' = y - x, \quad y' = -x^3? \tag{15}$$

Решение примера. Линейная часть системы имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нее $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, собственные векторы $v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ лежат на прямых $y - x = 0$ и $y = 0$. Возьмем $v = (y - x)^2 + y^2$. Тогда

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(15)} = 2(y - x)(y' - x') + 2yy' = \\ = 2(y - x)(x - y - x^3) - 2yx^3.$$

Это — многочлен 2-й степени относительно $y$. Чтобы судить о его знаке, выделяем полный квадрат

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(15)} = -2(y - x + x^3)^2 - 2x^4(1 - x^2).$$

Это меньше нуля в области $|x| < 1$, кроме точки $(0, 0)$. По теореме 4 нулевое решение асимптотически устойчиво. ◀

Для систем вида $dx/dt = f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ часто бывает удобнее вместо теоремы 4 пользоваться следующей теоремой.

**Теорема 5** (Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский [20], теорема 5.2). *Пусть в* (2) $f \in C^1$, $f(0) = 0$ *и пусть при* $|x| \leqslant \rho$ $(\rho > 0)$ *существует такая функция* $v(x) \in C^1$, *что* $v(0) = 0$, $v(x) > 0$ $(x \neq 0)$, $dv/dt|_{(2)} \leqslant 0$, *а множество* $N$ *тех* $x$, *при которых* $dv/dt|_{(2)} = 0$, *не содержит целых траекторий, кроме* $x = 0$. *Тогда нулевое решение асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* При данных условиях выполнены также условия теоремы 3, поэтому нулевое решение устойчиво и все решения с $|x(0)| < \delta$ остаются в шаре $S(|x| \leqslant \varepsilon)$. У любого такого решения $x(t)$ по теореме 1 существует $\omega$-предельное множество $\Omega \subset S$, состоящее из целых траекторий. Функция $v(x(t))$ не возрастает и существует $\lim\limits_{t\to\infty} v(x(t)) = l$. Любая точка $b \in \Omega$ есть $\lim x(t_i)$ для некоторой последовательности $t_i \to \infty$. В силу непрерывности функции $v$ из $x(t_i) \to b$ следует $v(b) = \lim v(x(t_i)) = l$. Точка $b \in \Omega$ произвольна, поэтому на $\Omega$ всюду $v(x) = l$. В силу теоремы 1 существует решение $z(t) \in \Omega$ с $z(0) = b$. Тогда $v(z(t)) \equiv l$, и на траектории $z(t)$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2)} = \frac{dv(z(t))}{dt} \equiv 0.$$

Значит, траектория $z(t)$ содержится в множестве $N$. Так как $N$ не содержит целых траекторий, кроме точки $x = 0$, то $z(t) \equiv 0$, $b = 0$. Так как $b$ — любая точка из $\Omega$, то множество $\Omega$ состоит из одной точки $x = 0$. Значит, все решения с $|x(0)| < \delta$ стремятся к нулю при $t \to \infty$, и нулевое решение асимптотически устойчиво. ■

**Пример 7.** Уравнение $x'' + ax' + x^3 = 0$ сводится к системе

$$x' = y, \quad y' = -x^3 - ay. \qquad (16)$$

Исследуем, устойчиво ли нулевое решение системы.

*Решение примера.* В случае $a = 0$ из (16) следует $dy/dx = -x^3/y$, $2y^2 + x^4 = c$. Беря $v = 2y^2 + x^4$, получаем $dv/dt\big|_{(16)} \equiv 0$. По теореме 3 нулевое решение устойчиво. Асимптотической устойчивости нет, так как для любого ненулевого решения $x(t)$, $y(t)$ имеем $2y^2(t) + x^4(t) =$ const $\not\to 0$ при $t \to \infty$.

В случае $a > 0$ берем тоже $v = 2y^2 + x^4$. Тогда

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(16)} = -4ay^2 \leqslant 0.$$

Равенство достигается только на прямой $y = 0$. На этой прямой имеем $y' = -x^3 \neq 0$ при $x \neq 0$. Следовательно, все решения, проходящие через точки прямой $y = 0$, кроме нулевого решения, тут же сходят с нее. По теореме 5 нулевое решение асимптотически устойчиво.

В случае $a < 0$ система (16) заменой $t$ и $y$ на $-t$ и $-y$ сводится к системе $x' = y$, $y' = -x^3 + ay$, отличающейся от (16) только знаком перед $a$. По доказанному, все решения этой новой системы из некоторой области $x^2 + y^2 < \rho^2$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Значит, для системы (16) решения стремятся к нулю при $t \to -\infty$. В примере 2 было показано, что при наличии хотя бы одного решения, стремящегося к нулю при $t \to -\infty$, нулевое решение неустойчиво. ◄

**3.**

**Теорема 6 (теорема Четаева об неустойчивости).**
*Пусть* $x(t) \equiv 0$ — *решение системы* (12). *Пусть область* $D$ *пространства* $x$ *лежит в шаре* $S(|x| < \varepsilon)$, *а ее граница* $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $0 \in \Gamma_0$, $|x| < \varepsilon$ *на* $\Gamma_0$, $|x| = \varepsilon$ *на* $\Gamma_1$, *множество* $\Gamma_1$ *может быть пустым. Пусть в* $D \cup \Gamma$ *существует непрерывная функция* $v(x)$, $v(x) = 0$ *на* $\Gamma_0$, *а в* $D$ *имеем* $v \in C^1$, $v(x) > 0$, $dv/dt\big|_{(12)} \geqslant w(x) > 0$, $w$ *непрерывна в* $D \cap \Gamma$. *Тогда нулевое решение системы* (12) *неустойчиво.*

*Доказательство.* Предположим, что нулевое решение устойчиво. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что любое решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) \in D$, $|x(t_0)| < \delta$, остается в шаре $S$ при $t_0 \leqslant t < \infty$. Пока $x(t) \in D$, имеем $dv(x(t))/dt > 0$, значит, $v(x(t))$ возрастает и $v(x(t)) > v(x(t_0)) = v_0 > 0$.

Та часть $D_0$ множества $D \cup \Gamma$, где $v(x) \geqslant v_0$ — ограниченное замкнутое множество (в его предельных точках имеем тоже $x \in D \cup \Gamma$, $v(x) \geqslant v_0$ вследствие непрерывности $v(x)$). Решение $x(t)$ не может выйти из $D_0$, ибо на $\Gamma_0$ $v(x) = 0$, а на $\Gamma_1$ решение не попадает, так как $|x(t)| < \varepsilon$. На $D_0$ имеем $w(x) \geqslant \beta > 0$,

$$\frac{d}{dt}v(x(t)) \geqslant w(x(t)) \geqslant \beta, \quad v(x(t)) - v(x(t_0)) \geqslant \beta(t - t_0) \to \infty \quad (t \to \infty).$$

Это противоречит ограниченности функции $v(x)$ в $D_0$. Следовательно, нулевое решение неустойчиво. ■

**Пример 8.** Устойчиво ли нулевое решение системы

$$x' = ax + by - y^2, \quad y' = cx + dy - x^2 \qquad (17)$$
$$(a, b, c, d > 0)?$$

*Решение примера.* При малых $x$, $y$ в 1-й четверти имеем $x' > 0$, $y' > 0$, значит, там решения удаляются от точки $(0, 0)$. Возьмем $v = xy$ в области $D$ $(x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < \varepsilon^2)$. Тогда

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(17)} = x'y + xy' = axy + \underline{by^2} - \underline{y^3} + \underline{cx^2} + dxy - \underline{x^3} \doteq w(x, y).$$

При малом $\varepsilon$ и $0 < x < \varepsilon$, $0 < y < \varepsilon$ сумма подчеркнутых членов положительна, поэтому в $D$ $w(x, y) > 0$. По теореме 6 нулевое решение неустойчиво. ◄

*Задачи для упражнений:*
[12], § 15, № 923–930.

**4.** Вследствие трудностей при подборе функции Ляпунова возникает вопрос о ее существовании — вопрос, когда можно пытаться подбирать функцию $v(x)$ или $v(t,x)$, удовлетворяющую условиям теорем 3 и 4 (или подобных теорем), а когда нет. Массера доказал, что для систем вида $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия всегда существует функция Ляпунова $v(x)$, а для систем $x' = f(t,x)$ с периодической по $t$ функцией $f$ — периодическая функция Ляпунова $v(t,x)$ ([34], § 73). Для устойчивого положения равновесия системы $x' = f(t,x)$ существует функция Ляпунова $v(t,x)$ ([28], гл. 4, § 9), а функция $v(x)$ может не существовать даже для системы $x' = f(x)$ ([32], стр. 57).

Однако не существует общих методов построения функции Ляпунова в случаях, когда решения системы неизвестны. Для нужд приложений разрабатывались методы построения функций Ляпунова для отдельных классов систем, например, в [21].

# § 20. Устойчивость по первому приближению

**1.** В теореме 2 были получены условия асимптотической устойчивости и условия неустойчивости для линейной системы с постоянными коэффициентами $x' = Ax$. Следующая теорема 7 утверждает, что в случае $\max \operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$ эти условия пригодны и для нелинейной системы $x' = Ax + \varphi(t,x)$, где $A$ — постоянная матрица, $|\varphi(t,x)| \leqslant \varphi^*(x) = o(|x|)$ при $x \to 0$.

К такому виду приводятся и многие другие системы. Пусть $x = x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ — положение равновесия системы $x' = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$), то есть $f(x_0) = 0$. Разлагая $f(x)$ вблизи точки $x = x_0$ по формуле Тейлора до членов первого порядка малости, получаем систему

$$x_i' = a_{i1}(x_1 - x_{10}) + \ldots + a_{in}(x_n - x_{n0}) + \varphi_i(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $a_{ij} = \partial f_i/\partial x_j\big|_{x=x_0}$, $\varphi_i(x) = o(|x - x_0|)$ при $x \to x_0$. Перенося начало координат в точку $x_0$ заменой $x = x_0 + y$, получаем (в векторной записи)

$$y' = Ay + \varphi_0(y), \quad \varphi_0(y) = o(|y|) \quad \text{при} \quad y \to 0,$$

матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $a_{ij}$ см. выше. В более общем случае, когда матрица $A$ зависит от $t$, теорема 7 не применима.

**2.**

**Теорема 7 (об устойчивости по первому приближению).** *Рассмотрим систему*

$$x' = Ax + \varphi(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{18}$$

*Пусть при $t \geqslant 0$, $|x| \leqslant \rho_0$ функция $\varphi \in C^1$, $|\varphi(t, x)| \leqslant \gamma(x)|x|$, $\gamma(x) \to 0$ $(x \to 0)$.*

1) *Если матрица $A$ имеет все $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.*
2) *Если матрица $A$ имеет хотя бы одно $\lambda$ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то нулевое решение неустойчиво.*
3) *В «критическом» случае, то есть когда $\max \operatorname{Re}\lambda_j = 0$, наличие устойчивости или неустойчивости зависит не только от матрицы $A$, но и от функции $\varphi(t, x)$.*

*Доказательство.* Докажем теорему в случае, когда все $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$.

Оценим столбцы матрицы $e^{tA}$. Эта матрица — фундаментальная для системы $y' = Ay$, ее столбцы $\psi^1(t), \ldots,$

$\psi^n(t)$ — решения этой системы. Каждое решение имеет вид (11). Пусть $\alpha > 0$ такое, что все $\operatorname{Re}\lambda_j < -\alpha < 0$. Тогда $\operatorname{Re}\lambda_j + \alpha \leqslant -\mu < 0$ для всех $j$; $\mathscr{P}_j(t)$ — многочлен, поэтому $|\mathscr{P}_j(t)e^{(\lambda_j+\alpha)t}| \leqslant |\mathscr{P}_j(t)/e^{\mu t}| \to 0$ при $t \to \infty$, значит, $|\mathscr{P}_j(t)e^{(\lambda_j+\alpha)t}| \leqslant c_j$ $(0 \leqslant t < \infty)$, и

$$|\mathscr{P}_j(t)e^{\lambda_j t}| = |\mathscr{P}_j(t)e^{(\lambda_j+\alpha)t}|e^{-\alpha t} \leqslant c_j e^{-\alpha t}.$$

Поэтому при некотором $c = \mathrm{const}$ имеем оценку

$$|\psi^k(t)| \leqslant ce^{-\alpha t} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$v(x) = \int\limits_0^\infty |e^{\tau A}x|^2\, d\tau. \tag{20}$$

Решение системы $y' = Ay$ с начальным условием $y(0) = x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ есть

$$y(t) = e^{tA}x = x_1\psi^1(t) + \ldots + x_n\psi^n(t),$$

так как $\psi^k(t)$ — решение, у которого $\psi^k(0)$ есть $k$-й столбец единичной матрицы. Поэтому

$$|e^{\tau A}x|^2 = |y(\tau)|^2 = y \cdot y = \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(\tau)x_i x_j, \quad d_{ij}(\tau) = \psi^i(\tau)\psi^j(\tau).$$

В силу (19) $|d_{ij}(\tau)| \leqslant c^2 e^{-2\alpha\tau}$. Пользуясь этим, из (20) получаем

$$v(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_i x_j, \quad b_{ij} = \int\limits_0^\infty d_{ij}(\tau)\, d\tau = b_{ji}. \tag{21}$$

В силу оценки функций $d_{ij}(\tau)$ интегралы от них, а значит и интеграл в (20), сходятся.

Найдем $dv/dt$ в силу системы $y' = Ay$. Имеем

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{y'=Ay} = \left.\frac{dv(y(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\int_0^\infty \left|e^{\tau A}y(t)\right|^2 d\tau\right|_{t=0}, \quad (22)$$

где $y(t)$ — решение системы $y' = Ay$ с начальным условием $y(0) = x$, то есть $y(t) = e^{tA}x$. Подынтегральное выражение равно $|e^{\tau A}e^{tA}x|^2 = |e^{(\tau+t)A}x|^2$. Переходя от $\tau$ к $s = \tau + t$, получаем, что выражение (22) равно

$$\left.\frac{d}{dt}\int_t^\infty |e^{sA}x|^2\, ds\right|_{t=0} = -\left.|e^{tA}x|^2\right|_{t=0} = -|x|^2. \quad (23)$$

Теперь найдем $dv/dt$ в силу системы (18)

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(18)} = (\operatorname{grad} v(x)) \cdot (Ax + \varphi(t, x)) =$$

$$= (\operatorname{grad} v(x)) \cdot Ax + (\operatorname{grad} v(x)) \cdot \varphi(t, x).$$

Первое слагаемое в силу (13) есть $dv/dt|_{x'=Ax}$, значит, равно выражению (22) и (23).

Оценим второе. Из (21) получаем, пользуясь неравенством Коши (§ 4) и считая $|b_{ij}| \leqslant b$, $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\frac{dv}{dx_i} = 2\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j, \qquad \left(\frac{dv}{dx_i}\right)^2 \leqslant 4\sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 \leqslant 4b^2n|x|^2.$$

$$|\operatorname{grad} v(x)|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dv}{dx_i}\right)^2 \leqslant 4b^2n^2|x|^2; \qquad |\varphi(t, x)| \leqslant \gamma(x)|x|.$$

Поэтому

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(18)} \leqslant -|x^2| + 2bn|x| \cdot \gamma(x)|x| \leqslant -\frac{1}{2}|x|^2$$

в той области, где $\gamma(x) \leqslant 1/(4bn)$. Кроме того, из (20) имеем $v(0) = 0$, $v(x) > 0$ при $x \neq 0$. Следовательно, $v(x)$ — функция Ляпунова для системы (18), и нулевое решение асимптотически устойчиво по теореме 4.

Доказательство утверждения 2) (о неустойчивости) не входит в программу курса. Оно имеется, например, в [28], стр. 262–264.

Утверждение 3) о критических случаях подтверждается примером 10. ■

**3.**

**Пример 9.** При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ нулевое решение системы

$$\begin{aligned} x' &= x + (2-a)y, \\ y' &= ax - 3y + (a^2 - 2a - 3)x^2 \end{aligned} \tag{24}$$

асимптотически устойчиво? устойчиво? неустойчиво?

*Решение примера.* Составляем характеристическое уравнение для линейной части системы

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-a \\ a & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + a^2 - 2a - 3 = 0.$$

По теореме Виета

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2 < 0, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1).$$

В зависимости от значения параметра $a$ получаем

1) $-1 < a < 3$, тогда $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, существует корень $\lambda > 0$. По теореме 7 нулевое решение неустойчиво.
2) $a < -1$ или $a > 3$, тогда $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Учитывая, что $\lambda_1 + \lambda_2 = -2$, получаем два случая. Если $\lambda_1$, $\lambda_2$ вещественные, то $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$; если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \alpha = -1$. В обоих случаях нулевое решение асимптотически устойчиво по теореме 7.
3) $a = -1$ или $a = 3$, тогда $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. Корни простые, а система (24) линейная. В силу теоремы 2 нулевое решение устойчиво, но не асимптотически из-за наличия корня $\lambda_1 = 0$. ■

**Пример 10.** Устойчиво ли нулевое решение системы

$$x' = y - cx^3, \quad y' = -bx^3 - cy^3? \tag{25}$$

*Решение примера.* При $b = c = 0$ система линейна, $\lambda_{1,2} = 0$, жорданова клетка размера 2. По теореме 2 нулевое решение неустойчиво. При других $b$ и $c$ имеем критический случай, возможна как устойчивость, так и неустойчивость.

При $b > 0$ возьмем $v = 2y^2 + bx^4$, как в примере 7. Тогда

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(25)} = -4bcx^6 - 4cy^4.$$

Если $c > 0$, то $dv/dt < 0$ $(|x| + |y| \neq 0)$. По теореме 4 — асимптотическая устойчивость. Если же $c = 0$, то $dv/dt \equiv 0$. По теореме 3 устойчивость, но не асимптотическая, так как $v(x(t), y(t)) \equiv \text{const} \not\to 0$.

При $b \leqslant 0$, $c \leqslant 0$ неустойчивость — как в примере 8, $v = xy$. ◄

**4.** А. М. Ляпунов дал методы исследования устойчивости в основных критических случаях, см. [34], гл. 4. Об исследованиях других критических случаев см. [19], гл. 3.

Теорема об устойчивости по первому приближению обобщалась в разных направлениях, в частности, на случай, когда система первого приближения имеет не постоянные, а периодические коэффициенты ([28], гл. 4, § 12).

В различных работах оценивалась область устойчивости — область возможных начальных возмущений, для которой отклонение решения $\widetilde{x}(t)$ от $\varphi(t)$, см. (8), при всех $t \geqslant t_0$ остается ограниченным (или стремится к нулю при $t \to \infty$).

О частотных методах исследования устойчивости см. [27]. Список более поздних работ по теории устойчивости имеется в [35].

## § 21. Особые точки

Изучается расположение траекторий системы

$$x_1' = ax_1 + bx_2, \quad x_2' = cx_1 + dx_2 \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}^1), \tag{26}$$

вблизи особой точки $(0, 0)$. Рассматривается также нелинейная система двух уравнений.

**1.** Для исследования системы (26) сначала надо найти собственные значения $\lambda_1, \lambda_2$ и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Возможны следующие случаи.

А. Числа $\lambda_1, \lambda_2$ вещественны, различны и отличны от нуля. В базисе из собственных векторов матрица диагональна, система (26) приводится к виду

$$y_1' = \lambda_1 y_1, \quad y_2' = \lambda_2 y_2, \tag{27}$$

и имеет общее решение $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$; $c_1$ и $c_2$ — произвольные постоянные. Исключая $t$, получаем уравнение траекторий

$$y_2 = c_2 \left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (\text{при} \quad c_1 \neq 0) \quad \text{и} \quad y_1 = 0 \quad (\text{при} \quad c_1 = 0). \quad (28)$$

Если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ одного знака, то траектории сходны с дугами парабол, касающимися оси $Oy_1$ в точке $(0,0)$ (если $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, рис. 16 и 17), или оси $Oy_2$ (если $|\lambda_2| < |\lambda_1|$); координатные полуоси тоже являются траекториями. Особая точка называется *узлом*. По всем траекториям происходит движение к точке $(0,0)$, если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (устойчивый узел, рис. 16), и от нее, если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (неустойчивый узел, рис. 17). Направление движения указывается стрелками на траекториях.

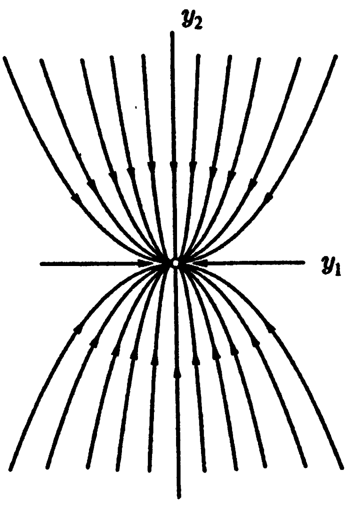



**Рис. 16**

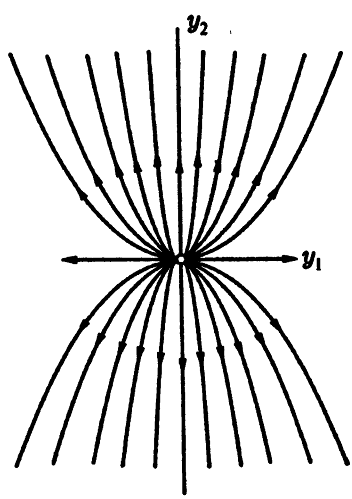



**Рис. 17**

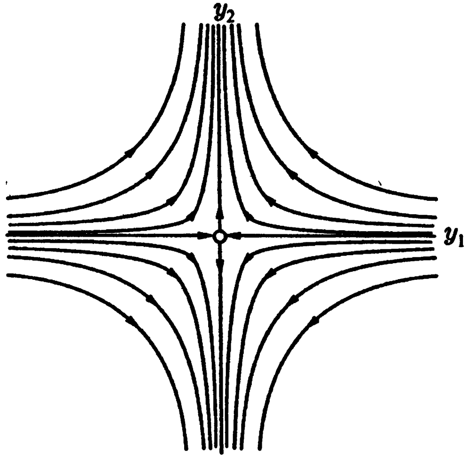


Рис. 18

Если же $\lambda_1$, $\lambda_2$ разных знаков, то траектории (кроме идущих по координатным полуосям) похожи на гиперболы, так как в силу (28) $|y_2| \to \infty$ при $y_1 \to 0$ и $y_2 \to 0$ при $|y_1| \to \infty$ (рис. 18). Особая точка называется *седлом*. Седло всегда неустойчиво, так как одно из $\lambda_i > 0$.

Если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, то по обеим половинам оси $Oy_1$ движение направлено к точке $O$, так как $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \to 0$ $(t \to \infty)$, а по обеим половинам оси $Oy_2$ — от точки $O$, так как $y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$, $|y_2| \to \infty$ $(t \to \infty)$.

**Б.** Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, то матрица в жордановой форме может быть диагональной или нет. В первом случае система имеет вид (27) с $\lambda_1 = \lambda_2$ и траектории (28) — полупрямые с концом в точке $(0, 0)$ (рис. 19) в случае $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, то стрелки — в другую сторону. Особая точка называется *дикритическим узлом*.

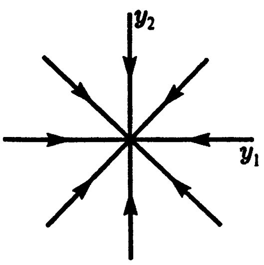


Рис. 19

Во втором случае система имеет вид $y_1' = \lambda y_1 + y_2$, $y_2' = \lambda y_2$. Общее решение $y_2 = c_2 e^{\lambda t}$, $y_1 = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$. Уравнения траекторий

$$y_1 = \frac{c_1}{c_2} y_2 + \frac{1}{\lambda} y_2 \ln \frac{y_2}{c_2} \quad \text{и} \quad y_2 = 0.$$

Особая точка называется *вырожденным узлом* (рис. 20 в случае $\lambda < 0$). Узлы двух последних типов, как и рассмотренные выше узлы с $\lambda_1 \neq \lambda_2$, являются устойчивыми, если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, и неустойчивыми, если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. В соответствии с этим ставятся стрелки на траекториях.

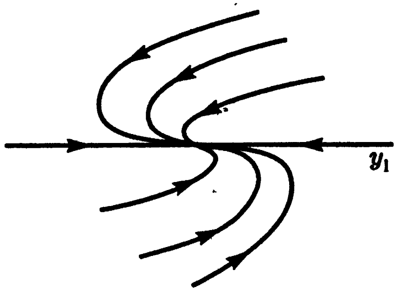



**Рис. 20**

**В.** Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$, то собственные векторы комплексные, линейно независимые (так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Пусть $w$ — собственный вектор для $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, то есть $Aw = (\alpha + \beta i)w$. Заменяя все числа, включая координаты вектора $w$, на сопряженные, получаем $A\bar{w} = (\alpha - \beta i)\bar{w}$, то есть $\bar{w}$ — собственный вектор для $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Пусть $w = u + iv$, где векторы $u$ и $v$ — вещественные. Тогда $\bar{w} = u - iv$. Векторы $u = (w + \bar{w})/2$ и $v = (w - \bar{w})/(2i)$ линейно независимы, так как получаются из $w$ и $\bar{w}$ невырожденным линейным преобразованием.

Вектор-функция $x = ce^{(\alpha+\beta i)t}w$, где $c$ — любое число, является решением системы (26). Подставляя $c = \rho e^{i\theta}$, $w = u + iv$, получаем

$$x = \rho e^{\alpha t + i(\beta t + \theta)}(u + iv) = \big(y_1(t) + iy_2(t)\big)(u + iv),$$
$$y_1(t) = \rho e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta), \quad y_2(t) = \rho e^{\alpha t}\sin(\beta t + \theta). \tag{29}$$

Матрица $A$ — вещественная, поэтому решением системы (26) является также $\operatorname{Re} x = uy_1(t) - vy_2(t)$. Вещественное решение $\operatorname{Re} x$ в вещественном базисе $u$, $-v$ имеет координаты $y_1(t)$, $y_2(t)$, см. (29). Переходя к полярным координатам $r$, $\varphi$, то есть полагая $y_1 = r\cos\varphi$, $y_2 = r\sin\varphi$, получаем

$$r = \rho e^{\alpha t}, \quad \varphi = \beta t + \theta, \tag{30}$$

где $\rho \geqslant 0$ и $\theta$ — произвольные постоянные. Формула (30) дает *все* вещественные решения, так как начальная точка решения $y_1(0) = \rho\cos\theta$, $y_2(0) = \rho\sin\theta$ есть произвольная точка плоскости $y_1, y_2$.

В случае $\alpha = 0$, то есть $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$, траектории (30) — окружности $r = \text{const}$ (рис. 21). Особая точка называется *центром*.

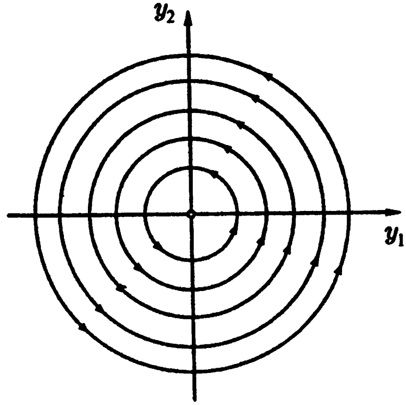


Рис. 21

В случае $\alpha \neq 0$ траектории (30) — логарифмические спирали

$$\varphi = \frac{\beta}{\alpha}\ln\frac{r}{\rho} + \theta \quad (0 < r < \infty),$$

делающие бесконечно много оборотов вокруг начала координат (рис. 22). Особая точка называется *фокусом*. Фокус устойчивый, как на рис. 22, если $\alpha < 0$, и неустойчивый, если $\alpha > 0$.

**Г.** Если матрица $A$ имеет одно или два собственных значения, равных нулю, то ее жорданова форма имеет один из трех видов

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A = 0$, то система $ax_1 + bx_2 = 0$, $cx_1 + dx_2 = 0$ имеет бесконечно много решений, значит, особых точек у системы (26) бесконечно много.

Система с такой матрицей легко решается. Рисунки здесь не приводятся, так как при добавлении в такую систему слагаемых, малых по сравнению с линейными, картина траекторий обычно резко меняется.

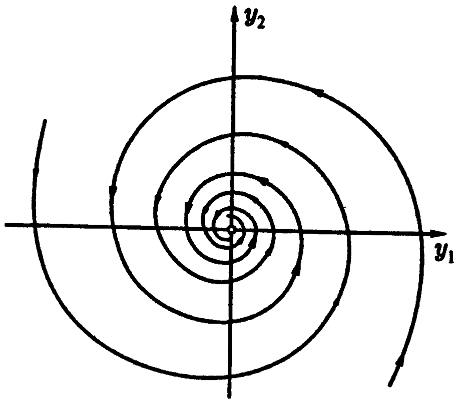



Рис. 22

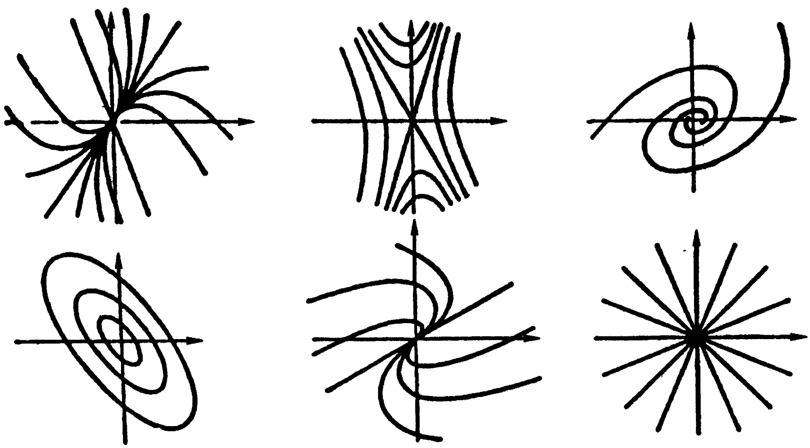


Рис. 23

**2.** Рисунки 16–22 изображают траектории в координатах $y_1, y_2$. Они связаны со старыми координатами $x_1, x_2$ линейным преобразованием. На плоскости $x_1, x_2$ траектории могут иметь, например, такой вид, как на рис. 23. Стрелки могут быть направлены в ту или другую сторону в зависимости от данной системы.

Чтобы выяснить расположение траекторий в координатах $x_1, x_2$, не нужно находить это преобразование. Тип особой точки и ее устойчивость или неустойчивость определяются по собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2$ матрицы $A$. Прямолинейные траектории всегда идут по направлениям собственных векторов, а кривые в случае узла с $\lambda_1 \neq \lambda_2$ касаются в точке $(0,0)$ того собственного вектора, у которого $|\lambda|$ меньше. В случае фокуса надо в точке $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (или $x_1 = 0$, $x_2 = 1$) построить вектор скорости $(x_1', x_2')$. Траектория, проходящая через эту точку, касается в ней этого вектора. Далее она делает обороты вокруг особой точки, приближаясь к ней в случае устойчивости и удаляясь в случае неустойчивости.

**Пример 11.** При каких значениях параметра $a$ особая точка системы

$$x' = 2x - 4y, \quad y' = ax - 6y,$$

только одна и является седлом? узлом? фокусом? Дать чертеж траекторий при $a = 8$.

*Решение примера.* Пишем уравнение для $\lambda_1, \lambda_2$ и его дискриминант.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ a & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4a - 12 = 0,$$

дискриминант $D = 64 - 16a$. По теореме Виета

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -4, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4a - 12 = \begin{cases} < 0 & \text{при} \quad a < 3, \\ = 0 & \text{при} \quad a = 3, \\ > 0 & \text{при} \quad a > 3. \end{cases}$$

$$D = \begin{cases} >0 & \text{при} \quad a<4, \quad \lambda_1, \lambda_2 \quad \text{— вещественные различные,} \\ =0 & \text{при} \quad a=4, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -2, \\ <0 & \text{при} \quad a>4, \quad \lambda_1, \lambda_2 \quad \text{— комплексные.} \end{cases}$$

Следовательно, при $a < 3$ имеем $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, особая точка седло; при $a = 3$ имеем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$, особых точек много; при $3 < a \leqslant 4$ корни вещественные, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ — узел (при $a = 4$ вырожденный, $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$), узлы устойчивые, так как $\lambda_1 + \lambda_2 = -4 < 0$; при $a > 4$ корни $\lambda_1, \lambda_2$ комплексные, $\operatorname{Re} \lambda = -2 < 0$ — устойчивый фокус.

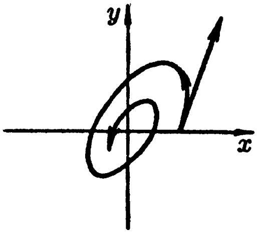



Рис. 24

При $a = 8$ имеем $x' = 2x - 4y$, $y' = 8x - 6y$, особая точка — устойчивый фокус. В точке $x = 1$, $y = 0$ имеем $x' = 2$, $y' = 8$, значит, траектория из точки $(1, 0)$ идет сначала в область $y > 0$, совершает обороты против часовой стрелки, приближаясь к точке $(0, 0)$ вследствие устойчивости (рис. 24). ◀

**Замечание.** Интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

являются траекториями системы (26). Чтобы исследовать это уравнение, надо исследовать систему (26) и не включать в окончательные выводы заключения об устойчивости (или неустойчивости) и о направлении движения по траекториям.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 16, № 961–980; § 25, № 161–173.

**3.** Для автономной системы

$$x_1' = f_1(x_1, x_2), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2) \tag{31}$$

координаты особых точек определяются из уравнений

$$f_1(p_1, p_2) = 0, \quad f_2(p_1, p_2) = 0.$$

Для исследования особой точки $(p_1, p_2)$ надо перенести в нее начало координат заменой $x_1 = p_1 + y_1$, $x_2 = p_2 + y_2$ и выделить линейные по $y_1, y_2$ члены, например, с помощью формулы Тейлора. Получается система

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + \varphi_1(y_1, y_2), \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + \varphi_2(y_1, y_2), \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,2}\Bigg|_{\substack{x_1 = p_1, \\ x_2 = p_2}}, \tag{32}$$

$$\varphi_1, \varphi_2 = o(r) \quad \text{при} \quad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \to 0.$$

Матрицу $A$ можно найти из (32), не пользуясь заменой $x_i = p_i + y_i$, а условие на $\varphi_i$ выполнено, если $f_1, f_2 \in C^2$ в (31).

**Теорема 8.** *Если для матрицы $A$ имеем $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$ (а в случае $\lambda_1 = \lambda_2$ еще $\varphi_1, \varphi_2 = O(r^{1+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, или в (31) $f_1, f_2 \in C^2$), то особая точка $(0, 0)$ системы (32) имеет тот же тип, что для системы (26) с теми же $a, b, c, d$. При этом сохраняются направления подхода траекторий к особой точке (но прямолинейные траектории могут замениться кривыми), направления закручивания и устойчивость.*

Доказательство непростое, см. [7], § 30, оно в программу не входит.

*Задачи для упражнений:*

[12], § 16, № 981–992; § 25, № 175, 176, 182, 183.

**4.** Известны методы, позволяющие исследовать особые точки более сложных систем, в частности, систем вида $x' = P(x, y)$, $y' = Q(x, y)$, где $P, Q$ — алгебраические многочлены или сходящиеся в окрестности особой точки $(0, 0)$ степенные ряды ([14]; [19], гл. 5; [16], § 20–22).

Изучены условия, при которых систему вида (32) в окрестности особой точки $(0, 0)$ можно привести к линейной системе с помощью дифференцируемого преобразования координат (см., в частности, [2], гл. 6, § 8). Изучались нормальные формы, к которым можно привести систему в тех случаях, когда она не приводится к линейной системе ([19], гл. 5; [2], гл. 8).

Для особых точек систем $x' = Ax + \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\varphi(x) = O(|x|^2)$ $(x \to 0)$ изучались множества решений, стремящихся к особой точке при $t \to \infty$ или при $t \to -\infty$. Имеются методы, позволяющие получить приближенные представления таких решений [25].

## § 22. Предельные циклы

**1.** Замкнутые траектории автономных систем на плоскости чаще всего бывают двух типов.

А. Имеется бесконечное множество замкнутых траекторий, вложенных друг в друга и заполняющих некоторую область. Пример: траектории вблизи особой точки типа центр.

Б. Отдельные замкнутые траектории, к которым все близкие траектории неограниченно приближаются (необязательно монотонно) при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Такие замкнутые траектории называются *предельными циклами*.

Предельные циклы бывают *устойчивые* — к которым все близкие траектории приближаются при $t \to +\infty$ (рис. 25), *неустойчивые* — к которым траектории приближаются при $t \to -\infty$

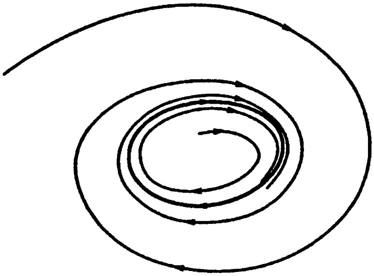


Рис. 25

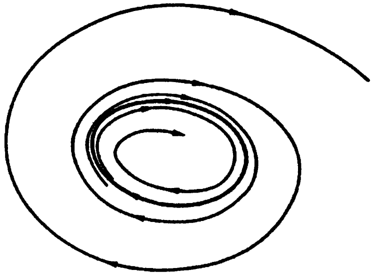


Рис. 26

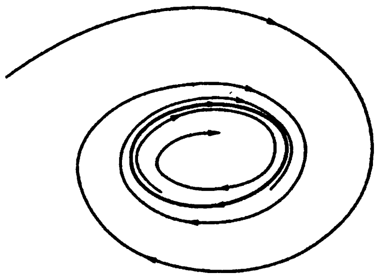


Рис. 27

(рис. 26), и *полуустойчивые* — когда с одной стороны от цикла траектории приближаются при $t \to +\infty$, а с другой — при $t \to -\infty$ (рис. 27). Таким образом, здесь устойчивость понимается в ином смысле, чем в § 18.

**Пример 12.** Система (в полярных координатах)

$$r' = cr(1 - r^2), \quad \varphi' = 1 \quad (m \in N)$$

имеет замкнутую траекторию $r = 1$. В случае $c > 0$ и нечетного $m \geqslant 1$ в области $0 < r < 1$ имеем $r' > 0$, $r(t)$ возрастает, а в области $r > 1$, напротив, $r' < 0$, $r(t)$

убывает. При $t \to +\infty$ траектории с обеих сторон приближаются к окружности $r = 1$. Она является устойчивым предельным циклом. Аналогично показывается, что в случае $c < 0$ и нечетного $m \geqslant 1$ цикл $r = 1$ неустойчивый. В случае $c \neq 0$ и четного $m \geqslant 2$ цикл полуустойчивый.

**2.** Предельные циклы были обнаружены Пуанкаре при исследовании некоторых дифференциальных уравнений. Позднее физики обнаружили физические системы, в которых устойчивые периодические движения возникают без воздействия периодической внешней силы. Эти движения называются *автоколебаниями*. А. А. Андронов показал, что такие системы описываются дифференциальными уравнениями, имеющими устойчивые предельные циклы. Примеры таких систем: часы, генераторы электрических колебаний высокой частоты, имеющиеся в радиопередатчиках.

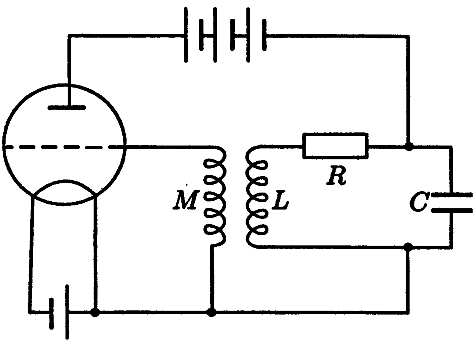



**Рис. 28**

**Простейший ламповый генератор** (рис. 28) состоит из радиолампы с нитью накала, анодом и сеткой, колебательного контура $LCR$, связанного индуктивностью $M$ с сеткой, анодной батареи и батареи накала. Сила тока $I$, проходящего через сопротивление $R$ и катушку самоиндукции $L$, удовлетворяет уравнению

$$LCI'' + RCI' - f(MI') + I = 0 \quad \left(I' = \frac{dI}{dt}\right), \tag{33}$$

где $f(v)$ — характеристика лампы (рис. 29), выражающая зависимость силы анодного тока $I_a$ от напряжения $v$ на сетке. Функция $f(v) \in C^1$, возрастает при $v_1 < v < v_2$, $f(v) = 0$ $(v \leqslant v_1)$, $f(v) = I_1 = \text{const}$ $(v \geqslant v_2)$.

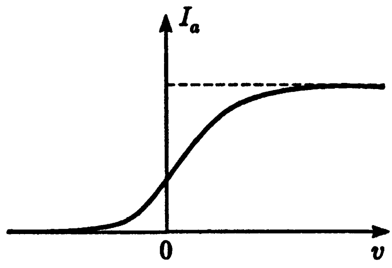


Рис. 29

Замена $t\sqrt{LC} = \tau$, $I(t) - f(0) = x(\tau)$ приводит уравнение (33) к виду

$$x'' + F(x') + x = 0 \quad \left(x' = \frac{dx}{d\tau}\right),$$
$$F(y) = R\sqrt{\frac{C}{L}}y - f\left(\frac{M}{\sqrt{CL}}y\right) + f(0). \tag{34}$$

Здесь $F(0) = 0$. От уравнения (34) переходим к системе

$$x' = y, \quad y' = -x - F(y). \tag{35}$$

Положение равновесия только одно: $x = y = 0$, то есть $I(t) \equiv f(0) = \text{const}$. С помощью теоремы 7 получаем, что в случае $F'(0) > 0$ оно асимптотически устойчиво, а в случае $F'(0) < 0$ неустойчиво.

$\boxed{3.}$

**Теорема 9.** *Если* $F \in C^1$, $F(0) = 0$, $F'(0) < 0$, $F(y) < k$ $(y \leqslant -b)$, $F(y) \geqslant m > k$ $(y \geqslant b > 0)$, *то система* (35) *имеет периодическое решение* $x(\tau) \not\equiv \text{const}$, $y(\tau) \not\equiv \text{const}$. (*В случае* $Mf'(0) > RC$ *функция* $F$ *в* (34) *удовлетворяет этим условиям, так как функция* $f$ *ограничена.*)

*Доказательство*. На плоскости $x, y$ построим замкнутую кольцевую область $K$ без особых точек, из которой не выходят решения системы (35).

Внутренняя граница кольца $K$ — окружность $x^2+y^2=r^2$, где $r$ такое, что $yF(y)<0$ при $0<|y|\leqslant r$. Так как при $|y|\leqslant r$ в силу системы (35) $\frac{d}{d\tau}(x^2+y^2)=-2yF(y)\geqslant 0$, то решения системы (35) не могут выходить из $K$ внутрь круга $x^2+y^2<r^2$.

Наружная граница кольца состоит из нескольких частей. В полуплоскости $y\geqslant b$ граница — дуга окружности $(x+m)^2+y^2=R^2$, $R$ выберем позже. Тогда в силу (35)

$$\frac{d}{d\tau}[(x+m)^2+y^2]=2y(m-F(y))<0,$$

так как $F(y)>m$ при $y\geqslant b$. Аналогично, при $y\leqslant -b$ берем дугу $(x+k)^2+y^2=R^2$, рис. 30. На вертикальных отрезках $AH$ и $CD$ имеем соответственно $x'=y>0$ и $x'=y<0$, поэтому через них траектории входят в $K$.

Угловые коэффициенты отрезков $BC$ и $EH$ равны $-\frac{b}{(m-k)}$, а на траекториях, пересекающих эти отрезки, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+F(y)}{y}$. Здесь $|y|\leqslant b$, $F(y)$ ограничено. Выбирая $R$ достаточно большим, мы увеличиваем $|x|$ и делаем $\frac{dy}{dx}<-\frac{b}{(m-k)}$. Тогда траектории через эти отрезки будут входить в $K$.

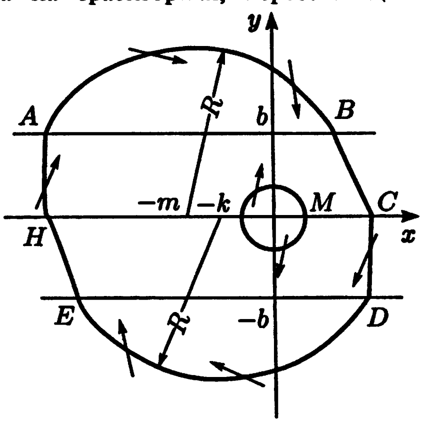



Рис. 30

Таким образом, из замкнутой кольцевой области $K$ без особых точек не выходит ни одна траектория системы (35). Из теоремы Бендиксона (§ 17, п. 2, 5°) следует, что в $K$ имеется замкнутая траектория системы. Так как доказательство теоремы Бендиксона не приводилось, дадим для данного случая короткое доказательство.

Рассматривая знак $x'$ при $y < 0$ и $y > 0$ и знак $y'$ на полуосях оси $Ox$, видим, что траектория из любой точки $(x, 0)$ отрезка $MC$ при возрастании $t$ делает оборот вокруг точки $(0, 0)$ и возвращается на $MC$ в точку $(\varphi(x), 0)$. Так как $F \in C^1$, то различные траектории не имеют общих точек, поэтому функция $\varphi(x)$ возрастающая, и в каждую точку отрезка $[\varphi(x_M), \varphi(x_C)]$ ($x_M$ — абсцисса точки $M$ и т. п.) приходит одна траектория из какой-то точки отрезка $MC$. Значит, функция $\varphi(x)$ возрастает и не имеет скачков, поэтому непрерывна. Так как $\varphi(x) - x > 0$ при $x = x_M$ и $\varphi(x) - x < 0$ при $x = x_C$, то найдется такая точка $x_1 \in [x_M, x_C]$, что $\varphi(x_1) = x_1$. Траектория, выходящая из точки $(x_1, 0)$, — замкнутая линия. Решение системы (35) с начальными условиями $x(0) = x_1$, $y(0) = 0$ — периодическое. ■

$\boxed{4.}$ Более подробно о предельных циклах см. [7], § 28. Другие физические задачи с автоколебаниями разобраны в [15], главы 3, 8. Известны различные достаточные условия существования замкнутых траекторий и предельных циклов, а также условия их единственности.

Разработаны методы, позволяющие во многих случаях исследовать особенности расположения траекторий автономных систем на плоскости (особые точки, предельные циклы, сепаратрисы) и их качественные изменения (бифуркации) при малом изменении данной системы ([15], [16], [17], [19], главы 5, 6, [22]). Траектории в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, изучены значительно меньше.

# ГЛАВА 5

# Дифференцируемость решения по параметру и ее применения

## § 23. Дифференцируемость решения по параметру

**1.** Рассматривается система уравнений с параметром $\mu$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = a(\mu);$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n). \tag{1}$$

При каждом $\mu$ система имеет решение. Оно зависит не только от $t$, но и от выбранного значения параметра $\mu$, поэтому обозначается $x(t, \mu)$.

**Теорема 1.** *Пусть при $(t, x) \in D$, $\mu \in M$, ($D$ — область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $M$ — интервал в $\mathbb{R}^1$) все функции $f_i$, $\partial f_i/\partial x_j$, $\partial f_i/\partial \mu$,*

> *$a'(\mu)$ непрерывны. Пусть при всех $\mu \in M$ на отрезке $[t_1, t_2] \ni t_0$ решение $x(t,\mu)$ задачи (1) существует и проходит в области $D$. Тогда это решение имеет производные $\partial x_i/\partial\mu$, непрерывные по $(t,\mu)$. Функции $u_i = \partial x_i/\partial\mu$ $(i = 1,\dots,n)$ удовлетворяют системе уравнений в вариациях*
>
> — прав. часть
>
> $$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu}, \quad u_i(t_0) = a_i'(\mu) \quad (i = 1,\dots,n). \qquad (2)$$
>
> тоо ex. нач. усл-ий, о. непрерывно найти время парам

В (2) производные от $f_i$ зависят от аргументов $t$, $x_1(t,\mu), \dots, x_n(t,\mu), \mu$, где $x_i(t,\mu)$ — координаты решения $x(t,\mu)$ при том значении $\mu$, при котором разыскивается $\partial x/\partial\mu$.

Если решение $x(t,\mu)$ известно хотя бы при одном значении $\mu$, то система ~~(2)~~ позволяет найти $\partial x/\partial\mu$ при этом $\mu$. Систему (2) можно не запоминать, она получается посредством дифференцирования обеих частей системы (1) по $\mu$; при этом считаем, что $x = x(t,\mu)$, и $\partial x_i/\partial\mu$ обозначаем $u_i$.

> **Пример 1.** Найти $\partial x/\partial\mu$ при $\mu = 0$ от решения задачи
>
> $$\frac{dx}{dt} = x^2 + 4\mu t + \mu^2, \quad x(1) = 2\mu - 1. \qquad (3)$$

*Решение примера.* Условия теоремы 1 выполнены, так как функции $f = x^2 + 4\mu t + \mu^2$ и $a(\mu) = 2\mu - 1$ непрерывны и имеют непрерывные производные по $x$ и $\mu$. Дифференцируя (3) по $\mu$ и обозначая $x'_\mu = u$, получаем

$$\frac{du}{dt} = 2xu + 4t + 2\mu, \quad u(1) = 2. \qquad (4)$$

Здесь $\mu = 0$, а $x$ — решение задачи (3) при $\mu = 0$, то есть задачи $dx/dt = x^2$, $x(1) = -1$. Отсюда $x = -1/t$. Теперь (4) принимает вид

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2u}{t} + 4t, \quad u(1) = 2.$$

Решая это линейное уравнение (выкладки пропускаем), получаем $u = t^2 + ct^{-2}$. Из начального условия находим $c = 1$. Итак, $u = t^2 + t^{-2}$. ◄

Доказательство теоремы. Зафиксируем $\mu \in M$. Имеем

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \lim_{\widetilde{\mu} \to \mu} \frac{\widetilde{x} - x}{\widetilde{\mu} - \mu}, \tag{5}$$

где $\widetilde{x} = x(t, \widetilde{\mu})$ — решение задачи (1), но с $\widetilde{\mu}$ вместо $\mu$, то есть

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = f(t, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}), \quad \widetilde{x}(t_0) = a(\widetilde{\mu}). \tag{6}$$

Обозначим дробь в (5) через $v(t, \widetilde{\mu})$. Идея доказательства теоремы. Составляем дифференциальное уравнение для $v(t, \widetilde{\mu})$ при $\widetilde{\mu} \neq \mu$. Его правая часть при $\widetilde{\mu} \to \mu$ стремится к правой части уравнения (2). Поэтому и решение $v(t, \widetilde{\mu})$ при $\widetilde{\mu} \to \mu$, то есть дробь в (5), стремится к решению уравнения (2). Значит, предел в (5), то есть $\partial x/\partial \mu$, существует и удовлетворяет уравнению (2).

Из уравнений (6) и (1), вычитая и деля на $\widetilde{\mu} - \mu$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dv(t, \widetilde{\mu})}{dt} &= \frac{f(t, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}) - f(t, x, \mu)}{\widetilde{\mu} - \mu}, \\ v(t_0, \widetilde{\mu}) &= \frac{a(\widetilde{\mu}) - a(\mu)}{\widetilde{\mu} - \mu}. \end{aligned} \tag{7}$$

Преобразуем первую дробь в (7). Положим

$$F(s) = f(t, x^*, \mu^*),$$
$$x^* = x + s(\widetilde{x} - x), \quad \mu^* = \mu + s(\widetilde{\mu} - \mu).$$

Тогда

$$f(t, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}) - f(t, x, \mu) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s)\, ds,$$

$$F'(s) = \frac{\partial f}{\partial x^*}(\widetilde{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial \mu^*}(\widetilde{\mu} - \mu)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \quad \text{есть матрица} \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j^*}\right)_{i,j=1,\ldots,n}\right).$$

Поэтому из (7) имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\widetilde{\mu} - \mu} \int_0^1 F'(s)\, ds =$$
$$= \int_0^1 \frac{\partial f(t, x^*, \mu^*)}{\partial x^*} ds \cdot \frac{\widetilde{x} - x}{\widetilde{\mu} - \mu} + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mu^*}\, ds. \qquad (8)$$

Так как $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial \mu$ непрерывны по совокупности переменных, то подынтегральные функции непрерывны по $t, x, \widetilde{x}, \mu, \widetilde{\mu}, s$, а интегралы — по $t, x, \widetilde{x}, \mu, \widetilde{\mu}$. Из (1) $x = x(t, \mu)$ непрерывно по $t$. Из (6) по теореме 7 § 7 $\widetilde{x}$ непрерывно по $(t, \widetilde{\mu})$ — по совокупности переменных. Поэтому последние два интеграла в (8) — непрерывные функции от $(t, \widetilde{\mu})$, включая значение $\widetilde{\mu} = \mu$. Обозначая их $H(t, \widetilde{\mu})$ и $h(t, \widetilde{\mu})$, получаем

$$\frac{dv}{dt} = H(t, \widetilde{\mu}) v + h(t, \widetilde{\mu}). \qquad (9)$$

Функция $v(t, \widetilde{\mu})$ была определена при $\widetilde{\mu} \neq \mu$. Доопределяем ее при $\widetilde{\mu} = \mu$ как решение уравнения (9) с начальным условием $v(t_0, \mu) = a'(\mu)$, полученным из начального условия (7) при $\widetilde{\mu} \to \mu$. По теореме 7 § 7 функция $v(t, \widetilde{\mu})$ непрерывна по $\widetilde{\mu}$, включая $\widetilde{\mu} = \mu$. При $\widetilde{\mu} = \mu$ имеем $x^* = x = x(t, \mu)$, $\mu^* = \mu$, подынтегральные выражения в (8) не зависят от $s$. Тогда в (9) матрица $H$ и вектор $h$ принимают значения

$$H(t, \mu) = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}, \quad h(t, \mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Таким образом, для $v(t, \mu)$ уравнение (9) и начальное условие $v(t_0, \mu) = a'(\mu)$ совпадают с (2), то есть $v(t, \mu)$ удовлетворяет (2). В силу непрерывности $v(t, \widetilde{\mu})$ существует $\lim\limits_{\widetilde{\mu} \to \mu} v(t, \widetilde{\mu}) = v(t, \mu)$. То есть в (5) существует производная $\partial x / \partial \mu = v(t, \mu)$ и координаты $u_i$ вектора $v(t, \mu)$ удовлетворяют системе уравнений и начальным условиям (2).

Теперь пусть $\mu$ меняется на интервале $M$. Тогда правые части системы (2) (и производные $\partial / \partial u_j$ от них) непрерывны по $(t, \mu)$. По теореме 7 § 7 решение системы (2), то есть производные $\partial x_i / \partial \mu$, тоже непрерывны по $(t, \mu)$. ■

**2.** **Дифференцируемость решения по начальным условиям** (следствие теоремы 1). Рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1, \dots, n). \tag{10}$$

Пусть при $(t, x) \in D$ все функции $f_i$ и $\partial f_i / \partial x_j$ непрерывны, и на отрезке $[t_1, t_2] \ni t_0$ решение задачи (10) существует и проходит в области $D$. Тогда при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ существуют непрерывные производные решения $x_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ по начальным условиям $x_{k0}$ $(k = 1, \dots, n)$. Функции $u_i = \partial x_i / \partial x_{k0}$ $(i = 1, \dots, n)$

удовлетворяют системе

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j, \quad u_i(t_0) = \begin{cases} 0 \ (i \neq k), \\ 1 \ (i = k). \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $f_i = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$, где $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — решение задачи (10).

*Доказательство.* Пусть $x_{k0} = \mu$, а при $i \neq k$ $x_{i0}$ не зависит от $\mu$. Тогда система (10) удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, производные $\partial x_i / \partial x_{k0} \equiv \partial x_i / \partial \mu = u_i$ существуют, непрерывны и удовлетворяют системе (2), которая в этом случае превращается в (11). ■

*Задачи для упражнений:*
[12], § 18, № 1064–1073 и § 26, № 186–194, 196–199.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, функции $f_i$, $a_i(\mu)$, имеют непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n, \mu$ до порядка $m \geqslant 2$ включительно, в том числе смешанные производные. Тогда решение $x(t, \mu)$ имеет непрерывные по $t, \mu$ производные по $\mu$ до порядка $m$ включительно.*

*Доказательство* производится с помощью индукции по $m$. Для $m = 1$ утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1. Пусть утверждение верно для производных до порядка $m - 1 \geqslant 1$. Докажем, что оно верно и для производных порядка $m$. Так как $\partial^m x_i / \partial \mu^m \equiv \partial^{m-1} u_i / \partial \mu^{m-1}$, а функции $u_i = \partial x_i / \partial \mu$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют системе (2), то надо проверить, что правые части в (2) имеют непрерывные производные по $u_i$, $\mu$ до порядка $m - 1$ включительно.

По условию, $f_i \in C^m$ по $x_1, \dots, x_n, \mu$, значит, в (2) $\partial f_i/\partial x_j$ и $\partial f_i/\partial \mu$ принадлежат $C^{m-1}$ по аргументам $x_1, \dots, x_n, \mu$. Но каждое $x_k = x_k(t, \mu)$ есть координата вектора $x(t, \mu)$, являющегося решением задачи (1), где $f$ и $a(\mu)$ принадлежат $C^m$, значит, принадлежат и $C^{m-1}$ по $x_1, \dots, x_n, \mu$. По предположению индукции, все $x_k(t, \mu) \in C^{m-1}$ по $\mu$. Значит, в (2) сложная функция

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i\big(t, x_1(t, \mu), \dots, x_n(t, \mu), \mu\big)$$

принадлежит $C^{m-1}$ по $\mu$; аналогично $\partial f_i/\partial \mu$; также $a'(\mu) \in C^{m-1}$. По предположению индукции, примененному к системе (2), решение $u_1, \dots, u_n$ системы (2) принадлежит $C^{m-1}$ по $\mu$. Так как $u_i = \partial x_i/\partial \mu$, то $x_i(t, \mu) \in C^m$ по $\mu$. ■

## § 24. Асимптотические методы решения дифференциальных уравнений

$\boxed{1.}$ Асимптотические методы позволяют отыскивать приближенные решения дифференциальных уравнений (или систем), близких к таким уравнениям (или системам), решения которых известны. В прикладных задачах часто бывает, что на течение рассматриваемого физического процесса влияют как основные факторы, определяющие ход процесса, так и другие факторы, оказывающие меньшее влияние и меняющие количественные характеристики процесса. При учете только основных факторов можно получить точное решение системы уравнений, а при учете всех известных факторов система становится сложной и не решается. В таких случаях асимптотические методы часто позволяют найти решение с нужной точностью.

**2.** **Разложение решения по степеням малого параметра** — один из наиболее употребительных асимптотических методов.

**Следствие теоремы 2.** *Пусть при* $(t, x) \in D$, $|\mu| < \mu_1$ *выполнены условия теоремы 2, и при* $\mu = 0$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ *решение задачи* (1) *проходит в области* $D$; $t_0 \in [t_1, t_2]$. *Тогда решение* $x(t, \mu)$ *задачи* (1) *при* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ *разлагается по формуле Тейлора по степеням параметра* $\mu$ *до* $\mu^m$ *включительно:*

$$x(t,\mu) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \ldots + \mu^m v_m(t) + o(\mu^m). \quad (12)$$

Здесь $x(t, \mu)$ и $v_i(t)$ — $n$-мерные вектор-функции, $v_0(t) \equiv x(t, 0)$ есть решение системы (1) при $\mu = 0$, оно считается известным. Чтобы найти $v_1(t), \ldots, v_m(t)$, надо подставить разложение (12) в систему (1) и начальные условия, и разложить правые части по степеням $\mu$ до $\mu^m$ включительно. Далее надо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$. Получается для $v_1, \ldots, v_m$ система дифференциальных уравнений с начальными условиями. Последовательно решая уравнения системы и пользуясь начальными условиями, находим $v_1(t), \ldots, v_m(t)$.

**Пример 2.** Найти разложение решения задачи

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} - 2\mu t^2, \quad x(1) = 1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{8} \quad (13)$$

по степеням параметра $\mu$ до $\mu^2$ включительно.

*Решение примера.* Правая часть уравнения в области $x > 0$ имеет производные любого порядка по $x, \mu$. Условия теоремы 2 выполнены для любого $m$, пока решение задачи (13) с $\mu = 0$ проходит в области $x > 0$. При $\mu = 0$ задача (13) принимает вид $dx/dt = t/x$, $x(1) = 1$, и имеет решение $x(t) = t$, оно проходит в области $x > 0$ при $t > 0$. Поэтому $v_0(t) = t$ $(t > 0)$. Разложение $x = t + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + o(\mu^2)$ подставляем в уравнение и начальные условия (13), члены порядка $o(\mu^2)$ не пишем.

$$1 + \mu v_1' + \mu^2 v_2' + \ldots = \frac{t}{(t + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \ldots)} - 2\mu t^2, \qquad (14)$$

$$1 + \mu v_1(1) + \mu^2 v_2(1) + \ldots = 1 - \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{8}. \qquad (15)$$

Разлагаем дробь в (14) по степеням $\mu$, члены с $\mu^k$, $k > 2$, не пишем.

$$\frac{t}{t + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \ldots} = \frac{1}{1 + \mu t^{-1} v_1 + \mu^2 t^{-1} v_2 + \ldots} =$$
$$= 1 - \left(\frac{\mu}{t} v_1 + \frac{\mu^2}{t} v_2 + \ldots\right) + \left(\frac{\mu}{t} v_1 + \ldots\right)^2 - \ldots =$$
$$= 1 - \frac{\mu}{t} v_1 - \frac{\mu^2}{t} v_2 + \frac{\mu^2}{t^2} v_1^2 + \ldots .$$

Подставляем это в (14) и приравниваем коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях параметра $\mu$:

$$\text{при} \quad \mu^1: \; v_1' = -\frac{v_1}{t} - 2t^2, \quad v_1(1) = -\frac{1}{2}; \qquad (16)$$

$$\text{при} \quad \mu^2: \; v_2' = -\frac{v_2}{t} + \frac{v_1^2}{t^2}, \quad v_2(1) = \frac{1}{8}. \qquad (17)$$

Здесь начальные условия получены из (15). Все дифференциальные уравнения для $v_1, \ldots, v_m$ всегда линейные. Из (16) получаем

$v_1 = -\frac{t^3}{2}$. Подставляя это в (17), находим $v_2 = \frac{1}{12t} + \frac{t^5}{24}$. Итак,

$$x(t) = t - \mu\frac{t^3}{2} + \mu^2\left(\frac{1}{12t} + \frac{t^5}{24}\right) + o(\mu^2). \qquad (18)$$

Так как условия теоремы 2 выполнены для любого $m \geqslant 2$, то следующий член разложения имеет вид $\mu^3 v_3(t)$ и, не находя $v_3$, в (18) вместо $o(\mu^2)$ можно написать $O(\mu^3)$. ◄

*Задачи для упражнений:*
[12], § 18, № 1074–1078.

**3.** **Отыскание периодических решений.** Нижеследующие лемма 2 и теорема 3 дают условия существования периодических решений соответственно для линейной системы с периодической правой частью и для нелинейной системы, близкой к линейной, и указывают методы отыскания таких решений.

**Лемма 1.** *Пусть при $0 \leqslant t \leqslant p$ вектор-функция $x(t)$ — решение уравнения $x' = f(t,x)$, где вектор-функция $f$ и все $\partial f_i/\partial x_j$ непрерывны и $f(t+p,x) \equiv f(t,x)$. Если $x(p) = x(0)$, то решение $x(t)$ продолжается на интервал $(-\infty,\infty)$ с периодом $p$.*

*Доказательство.* Так как

$$x'_{\text{лев}}(p) = f(p, x(p)) = f(0, x(0)) = x'_{\text{прав}}(0),$$

то продолженная с периодом $p$ функция $x(t) \in C^1$. Она всюду удовлетворяет данному уравнению, ибо для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$x'(t+kp) = x'(t) = f(t, x(t)) = f\big(t+kp, x(t+kp)\big). \qquad \blacksquare$$

**Лемма 2.** *Если для всех собственных значений матрицы $A$ имеем*

$$\lambda \neq \frac{2\pi k}{p} i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{19}$$

*то система $x' = Ax + f(t)$ для каждой непрерывной функции $f(t)$ с периодом $p$ имеет (и только одно) решение с периодом $p$.*

Условие (19) называется *условием отсутствия резонанса*.

*Доказательство.* Пусть $v(t)$ — частное решение данной системы с $v(0) = 0$. В силу теоремы 5 § 9 и следствия 1 § 15 общее решение имеет вид $x = e^{tA}b + v(t)$, где $b$ — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Чтобы это решение имело период $p$, по лемме 1 надо, чтобы $x(p) = x(0)$. То есть

$$e^{pA}b + v(p) = b + v(0), \quad (e^{pA} - E)b = -v(p).$$

Это — линейная алгебраическая система относительно неизвестных координат вектора $b$. Для существования единственного решения достаточно, чтобы $\det(e^{pA} - 1 \cdot E) \neq 0$, то есть чтобы матрица $e^{pA}$ не имела собственных значений, равных 1.

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $A$, то согласно замечанию в § 15 $e^{pA}$ имеет собственные значения $e^{p\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Для $\lambda = \alpha + \beta i$ имеем $e^{p\lambda} = e^{p\alpha}(\cos p\beta + i \sin p\beta)$. Это число равно 1 только в случае $\alpha = 0$, $p\beta = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Поэтому при условии (19) имеем $e^{p\lambda} \neq 1$. ■

**Теорема 3.** *Пусть функции $f(t)$, $g(t, x, \mu)$ непрерывны при $x \in \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in D$, $|\mu| < \mu_1$, имеют период $p$ по $t$; $g \in C^m$ по*

*$x, \mu$, где $m \geqslant 1$. Пусть выполнено условие (19) и решение $x^0(t)$ с периодом $p$ уравнения $x' = Ax + f(t)$ содержится в области $D$. Тогда при всех достаточно малых $|\mu|$ система*

$$x' = Ax + f(t) + \mu g(t, x, \mu) \tag{20}$$

*имеет решение периода $p$ по $t$, стремящееся к $x^0(t)$ при $\mu \to 0$. Такое решение единственно и принадлежит классу $C^m$ по $\mu$.*

*Доказательство.* Пусть $x(t; b, \mu)$ — решение системы (20) с начальным условием $x(0; \mu) = b$. По лемме 1 оно будет иметь период $p$, если

$$x(p; b, \mu) - b = 0. \tag{21}$$

Докажем, что при малых $\mu$ существует $b \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее уравнению (21). Функция $x(p; b, \mu) \in C^m$ по $b, \mu$ в силу теоремы 2. При $\mu = 0$ уравнение (20) линейное, как в лемме 2, уравнение (21) принимает вид

$$(e^{pA} - E)b = -v(p), \quad \det(e^{pA} - E) \neq 0 \tag{22}$$

и имеет единственное решение $b$. Далее, якобиан левой части равенства (21) по координатам $b_1, \ldots, b_n$ вектора $b$ при $\mu = 0$ совпадает с детерминантом (22), значит, не равен нулю. Тогда по теореме о неявных функциях уравнение (21) при достаточно малых $\mu$ имеет решение $b = b(\mu)$, стремящееся к $b^0$ при $\mu \to 0$, такое решение единственно и $b(\mu) \in C^m$.

Тогда решение $x\big(t; b(\mu), \mu\big) \in C^m$ по $\mu$, и в силу (21) и леммы 1 имеет период $p$. ■

**Следствие.** *При условиях теоремы 3 названное периодическое решение имеет разложение по степеням $\mu$ вида (12) с функциями $v_i(t)$, имеющими период $p$.*

*Доказательство.* Решение $x(t, b(\mu), \mu) \in C^m$ по $\mu$, поэтому имеет разложение вида (12). Следовательно,

$$x(t+p, b(\mu), \mu) - x(t, b(\mu), \mu) = \\ = d_0 + d_1\mu + \ldots + d_m\mu^m + o(\mu^m), \qquad (23)$$

где $d_i = v_i(t+p) - v_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, m$. В силу периодичности решения левая часть в (23) равна нулю, поэтому все $d_i = 0$, то есть $v_i(t+p) \equiv v_i(t)$. ■

**Замечание.** Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t) + \mu g(t, y, \mu) \qquad (24)$$

с постоянными коэффициентами $a_i$ и непрерывными функциями $f$, $g$ периода $p$ по $t$ и $g \in C^m$ по $y$, $\mu$, а корни $\lambda$ характеристического уравнения удовлетворяют условию (19). Тогда для отыскания решения периода $p$ не нужно переходить от уравнения (24) к системе, можно сразу отыскать решение в виде (12), где теперь $v_i(t)$ — скалярные функции с периодом $p$.

**Пример 3.** Найти с точностью $o(\mu^2)$ периодическое решение уравнения

$$x'' + 3x = 2\sin t + \mu x^2. \qquad (25)$$

*Решение примера.* Здесь $p = 2\pi$, $\lambda^2 + 3 = 0$, $\lambda = \pm i\sqrt{3} \neq 2\pi k i/p = ki$ ($k \in \mathbb{Z}$), условие (19) выполнено. Ищем периодическое решение в виде $x = v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \ldots$. Подставляя в уравнение (25) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$, получаем систему уравнений

$$v_0'' + 3v_0 = 2\sin t, \quad v_1'' + 3v_1 = v_0^2, \quad v_2'' + 3v_2 = 2v_0 v_1, \ldots .$$

Надо найти решения $v_0$, $v_1$, $v_2$ с периодом $2\pi$. Для каждого из этих уравнений надо найти лишь частное решение (методом неопределенных коэффициентов), так как по теореме 3 при выполнении условия (19) решение с периодом $p$ единственно. Последовательно находим $v_0 = \sin t$; $v_1'' + 3v_1 = \sin^2 t = 1/2 - 1/2\cos 2t$, $v_1 = 1/6 + 1/2\cos 2t$. Подставляя $v_0$ и $v_1$ в уравнение для $v_2$, имеем

$$v_2'' + 3v_2 = 2\sin t\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) = -\frac{1}{6}\sin t + \frac{1}{2}\sin 3t.$$

Отсюда находим

$$v_2 = -\frac{1}{12}\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t.$$

Следовательно,

$$x = \sin t + \mu\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) + \mu^2\left(-\frac{1}{12}\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t\right) + o(\mu^2).$$

Как в примере 2, вместо $o(\mu^2)$ можно написать $O(\mu^3)$. ◀

**4.** К системе вида (20) сводится задача о вынужденных колебаниях автономной системы вблизи положения равновесия, вызываемых периодическим малым внешним воздействием. Рассмотрим систему

$$x' = F(x) + \mu f(t), \quad f(t+p) \equiv f(t), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^T. \tag{26}$$

Пусть $x^0$ — положение равновесия при $\mu = 0$, то есть $F(x^0) = 0$; $\mu$ — малое число, функция $f(t)$ непрерывна, $F(x) \in C^{m+1}$ $(m \geqslant 1)$ в окрестности точки $x^0$. Замена $x = x^0 + \mu y$ дает $\mu y' = F(x^0 + \mu y) + \mu f(t)$. Так как $F(x^0) = 0$, то по формуле Тейлора

$$F(x^0 + \mu y) = \mu A y + r(\mu, y), \quad A = \left(\frac{\partial F_i(x^0)}{\partial x_j^0}\right)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Остаточный член $r \in C^{m+1}$ (ибо другие члены в равенстве принадлежат $C^{m+1}$), $r = \mu^2 g(y, \mu)$. Получаем систему вида (20)

$$y' = Ay + f(t) + \mu g(y, \mu), \quad g \in C^m. \tag{27}$$

Если собственные значения матрицы $A$ удовлетворяют условию (19) (нет резонанса), то по теореме 3 система (27) при достаточно малых $|\mu|$ имеет решение с периодом $p$.

**Пример 4.** Рассмотрим уравнение

$$x'' + 2x' + x^2 - 1 = \mu \sin t \quad (x \in \mathbb{R}^1). \tag{28}$$

*Решение примера.* При $\mu = 0$ положения равновесия $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Найдем периодическое решение, близкое к $x = 1$. Замена $x = 1 + \mu y$ дает

$$y'' + 2y' + 2y = \sin t - \mu y^2. \tag{29}$$

Здесь $p = 2\pi$, $\lambda = -1 \pm i \neq 2\pi k i/p$ $(k \in \mathbb{Z})$, условие (19) выполнено. Поэтому при малых $\mu$ уравнение (29) имеет решение периода $2\pi$ и вида $y = v_0(t) + \mu v_1(t) + \ldots$, где все $v_i(t)$ имеют период $2\pi$. Подставляя это в (29), получаем, как в примере 3,

$$v_0'' + 2v_0' + 2v_0 = \sin t, \quad v_1'' + 2v_1' + 2v_1 = -v_0^2, \quad \ldots .$$

Отсюда находим $v_0 = a\cos t + b\sin t$, $a = -2/5$; $b = 1/5$; $v_0^2 = 1/10 + 3/50\cos 2t - 2/25\sin 2t$, $v_1 = h + c\cos 2t + d\sin 2t$, $h = -1/20$, $c = -1/100$, $d = -1/50$ и т. д. Следовательно,

$$x = 1 + \mu y = 1 + \mu\left(-\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\right) + \\ + \mu^2\left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{100}\cos 2t - \frac{1}{50}\sin 2t\right) + O(\mu^3). \tag{30}$$

Уравнение (28) при малых $\mu$ имеет и другое решение с периодом $2\pi$. Оно близко к неустойчивому положению равновесия $x_2 = -1$ и отыскивается аналогичным способом. Можно доказать, что оно неустойчиво. ◀

*Задачи для упражнений:*
[12], § 18, № 1079–1083.

**5.** Естественно возникает вопрос, в каких случаях разложения по степеням параметра $\mu$, полученные в следствиях теорем 2 и 3, можно продолжить до бесконечного ряда Тейлора, сходящегося к искомому решению при малых $\mu$. Этот вопрос решается с помощью теоремы Пуанкаре об аналитической зависимости решения от параметра, см. [13], гл. 1, § 6, теорема 1.3 и [2], гл. 6, § 2, теорема 6.2.1′ и § 3, п. 1.

О методах исследования устойчивости периодических решений, получаемых методом малого параметра, см. [2], гл. 7, § 3 и [33], гл. 3, § 10–15. В частности, при условиях теоремы 3 асимптотическая устойчивость периодического решения при достаточно малых $|\mu|$ обеспечена, если для матрицы $A$ все собственные значения $\lambda_i$ имеют $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, а неустойчивость — если есть хотя бы одно $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$. Поэтому в примере 4 при малых $\mu$ решение (30) асимптотически устойчиво, а периодическое решение, близкое к $x = -1$ (для него $\lambda = -1 \pm \sqrt{3}$), — неустойчиво.

Метод отыскания периодических решений при резонансе, то есть когда условие (19) не выполнено, изложен в [13], гл. 2, § 8, пункты 2 и 3; примеры там же; в [2], гл. 5, § 3, п. 2 и в [33], гл. 2, § 6, 7.

Об отыскании периодических решений автономной системы $x' = Ax + \mu f(x, \mu)$ в случае, когда при $\mu = 0$ периодическое решение известно, см. [13], гл. 2, § 8, пункт 4; [2], гл. 5, § 3, п. 3 и [33], гл. 2, § 11–13.

Метод малого параметра применялся к широкому кругу задач, в частности, в [33], главы 4–8. Методы последовательных приближений для уравнений с малым параметром разработаны в [24].

Существенно отличным от предыдущих является случай, когда малый параметр является множителем при производной, например,

$$\mu x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y).$$

Здесь нет непрерывной зависимости от $\mu$ при $\mu \to 0$, и решения имеют другие свойства, см., например, [13], гл. 4, § 6 и [15], гл. 10, § 3,4. Известно много работ, в которых подробно исследуются такие случаи.

## § 25. Первые интегралы

Первые интегралы применяются при исследовании и решении систем дифференциальных уравнений. Знание одного первого интеграла позволяет уменьшить число неизвестных функций в данной системе. Знание $n$ независимых первых интегралов системы

$$\begin{gathered} x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \\ \left((t, x_1, \ldots, x_n) \in D_0, \ f_1, \ldots, f_n \in C^1\right) \end{gathered} \tag{31}$$

позволяет получить решение этой системы без интегрирования.

В прикладных задачах первые интегралы часто имеют физический смысл: закон сохранения энергии, закон сохранения количества движения — это первые интегралы уравнений движения механической системы.

**1.** *Первым интегралом* системы (31) в области $D \subset D_0$ называется функция $v(t, x_1, \ldots, x_n) \in C^1$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой проходящей в $D$ интегральной кривой системы. (Иногда первым интегралом называют не функцию $v(t, x_1, \ldots, x_n)$, а соотношение $v(t, x_1, \ldots, x_n) = c$, где $c$ — произвольная постоянная.)

Геометрический смысл первого интеграла. Пусть $\partial v/\partial x_i \neq 0$ для некоторого $i$ и $c$ — любое из значений, принимаемых функцией $v$ в области $D$. Тогда равенство $v(t, x_1, \ldots, x_n) = c$ определяет в пространстве $t, x_1, \ldots, x_n$ $n$-мерную поверхность, целиком состоящую из интегральных кривых системы (31). То есть через каждую точку поверхности проходит интегральная кривая, лежащая на поверхности.

Докажем это. Пусть точка $p$ лежит на поверхности $v = c$. Тогда в этой точке $v = c$. На интегральной кривой, проходящей через эту точку, первый интеграл $v$ сохраняет постоянное значение — значение $c$. Значит, эта кривая лежит на поверхности $v = c$.

Требование, чтобы функция $v$ класса $C^1$ сохраняла постоянные значения вдоль интегральных кривых системы (31), равносильно тому, что ее полная производная в силу системы (31) равна нулю, то есть

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(t, x_1, \ldots, x_n) = 0. \quad (32)$$

Любой первый интеграл системы (31) удовлетворяет уравнению (32).

Знание первого интеграла, у которого $\partial v/\partial x_i \neq 0$ для какого-нибудь $i$, позволяет свести систему (31) к системе с меньшим числом неизвестных функций. Для этого разрешаем равенство $v(t, x_1, \ldots, x_n) = c$ (возможно, в меньшей области) относительно $x_i$ и подставляем полученное выражение $x_i$ через остальные переменные в уравнения системы (31), кроме $i$-го уравнения.

**2.** Для любой функции $\varphi \in C^1$ и первого интеграла $v$ (или нескольких первых интегралов $v_1, \ldots, v_k$) сложная функция $\varphi(v(t, x_1, \ldots, x_n))$ (соответственно, $\varphi(v_1, \ldots, v_k)$) тоже постоянна вдоль каждой интегральной кривой системы, значит, является первым интегралом. Поэтому первых интегралов бесконечно много.

Первые интегралы $v_1, \dots, v_k$ системы (31) называются *независимыми* (или *функционально независимыми*) в области $D$, если в каждой точке этой области ранг матрицы $(\partial v_i/\partial x_j)_{i=1,\dots,k;j=1,\dots,n}$ равен $k$.

Функциональная независимость отличается от линейной. Из линейной зависимости функций $v_1, \dots, v_k$ следует их функциональная зависимость (тогда строки матрицы, см. выше, линейно зависимы и ее ранг меньше $k$). Обратное неверно, например, функции $v_1 = t - x_1$ и $v_2 = (t - x_1)^2$ функционально зависимы, но линейно независимы в любой области.

Следующая известная теорема неоднократно применяется в §§ 25, 26.

**Теорема о неявных функциях.** *Дана система уравнений*

$$\varphi_i(y_1,\dots,y_n;\ z)=0, \quad i=1,\dots,n \quad (z\in\mathbb{R}^m,\ m\geqslant 1). \qquad (33)$$

*Функции $\varphi_i \in C^1$ в окрестности точки $M(y_1 = y_{10}, \dots, y_n = y_{n0},\ z = z_0)$, а в этой точке равенства (33) выполняются и якобиан $\det(\partial\varphi_i/\partial y_j)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $z_0$ систему (33) можно разрешить относительно $y_1, \dots, y_n$, точнее, существуют такие непрерывные функции $y_1(z), \dots, y_n(z)$, что для $i = 1, \dots, n$*

$$\varphi_i\big(y_1(z), \dots, y_n(z), z\big) \equiv 0, \quad y_i(z_0) = y_{i0}, \quad i = 1, \dots, n.$$

*Такая система функций $y_1(z), \dots, y_n(z)$ единственна и $y_i \in C^1$, $i = 1, \dots, n$.*

> **Теорема 4.** *В окрестности любой точки $M(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$ области $D_0$ существуют $n$ независимых первых интегралов системы* (31).

*Доказательство.* Для любой точки $(t_0, c_1, \dots, c_n) \in D_0$ по теореме 2 § 5 существует единственное проходящее через эту точку решение системы (31)

$$x_i = \varphi_i(t, c_1, \dots, c_n), \quad i = 1, \dots, n. \tag{34}$$

В силу следствия теоремы 1 § 23 $\varphi_i \in C^1$. Так как

$$\varphi_i(t_0, c_1, \dots, c_n) = c_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

то при $t = t_0$ матрица $(\partial\varphi_i/\partial c_j)_{i,j=1,\dots,n}$ — единичная и ее детерминант — якобиан функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — равен 1. По теореме о неявных функциях, где теперь надо взять $y_i = c_i$, $i = 1, \dots, n$, $z = (t, x_1, \dots, x_n)$, систему (34) можно разрешить относительно $c_1, \dots, c_n$ в некоторой окрестности точки $M$

$$c_i = v_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \tag{35}$$

Покажем, что функции $v_i$ — независимые первые интегралы системы (31). По теореме о неявных функциях $v_i \in C^1$. Числа $c_1, \dots, c_n$ — одни и те же во всех точках интегральной кривой, проходящей через точку $(t_0, c_1, \dots, c_n)$. Значит, функции $v_i$ постоянны вдоль интегральных кривых и являются первыми интегралами. При любом фиксированном $t$ (вблизи $t_0$) системы функций (34) и (35) взаимно обратны, поэтому произведение их якобианов равно единице:

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = 1,$$

$$\Delta_1 = \det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial c_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}; \quad \Delta_2 = \det\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Значит, $\Delta_2 \neq 0$, ранг матрицы $(\partial v_i/\partial x_j)$ равен $n$, и первые интегралы $v_1, \ldots, v_n$ независимы. ■

**Теорема 5 (о получении решения с помощью первых интегралов).** *Пусть* $v_1, \ldots, v_n$ *— независимые первые интегралы системы* (31) *в области* $D$. *Пусть точка* $M(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in D$ *и* $c_i = v_i(M)$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда решение системы* (31) *с начальными условиями* $x_i(t_0) = x_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$, *определяется, как неявная функция, системой уравнений*

$$v_i(t, x_1, \ldots, x_n) = c_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{36}$$

*Доказательство.* Эти уравнения удовлетворяются в точке $M$, и в этой точке $\det(\partial v_i/\partial x_j)_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0$ в силу независимости первых интегралов. По теореме о неявных функциях систему (36) в некоторой окрестности точки $M$ можно разрешить относительно $x_1, \ldots, x_n$:

$$x_j = \varphi_j(t, c_1, \ldots, c_n), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{37}$$

Функции (37) удовлетворяют системе (36), так как получены из нее. С другой стороны, решение системы (31) удовлетворяет (36) при $t = t_0$ в силу выбора постоянных $c_1, \ldots, c_n$. Оно удовлетворяет (36) и при других $t$, так как первые интегралы постоянны вдоль решения. Вследствие единственности неявной функции это решение имеет координаты $x_i$, совпадающие с функциями (37). ■

*Задачи для упражнений:*
[12], § 19, № 1061–1064, 1066.

**Теорема 6.** *Если* $v_1, \ldots, v_n$ *— независимые первые интегралы системы* (31) *в окрестности* $U$ *точки* $M^*(t_0, x_1^*, \ldots, x_n^*)$, *то любой первый интеграл $w$ системы* (31) *в некоторой окрестности точки $M^*$ является функцией от них, то есть $w = F(v_1, \ldots, v_n)$, $F \in C^1$.*

*Доказательство.* Пусть точка $M(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in U$ и $c_i = v_i(M)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда, как в доказательстве теоремы 5, система (36) определяет решение (37) системы (31). Такие решения заполняют некоторую окрестность $U_1 \subset U$ точки $M^*$. Вдоль каждого из этих решений имеем $w = \mathrm{const}$, то есть

$$w\big(t, \varphi_1(t, c_1, \ldots, c_n), \ldots, \varphi_n(t, c_1, \ldots, c_n)\big) \equiv$$
$$\equiv w\big(t_0, \varphi_1(t_0, c_1, \ldots, c_n), \ldots, \varphi_n(t_0, c_1, \ldots, c_n)\big).$$

Обозначим правую часть через $F(c_1, \ldots, c_n)$, тогда $F \in C^1$. Переходя от $c_1, \ldots, c_n$ к $x_1, \ldots, x_n$ и к $v_1, \ldots, v_n$ согласно (37) и (36), получаем

$$w(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv$$
$$\equiv F\big(v_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, v_n(t, x_1, \ldots, x_n)\big). \qquad \blacksquare$$

**3. Первые интегралы автономной системы.** Система

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \quad (f_1, \ldots, f_n \in C^1) \tag{38}$$

удовлетворяет условиям теоремы 4 и поэтому в окрестности любой точки имеет $n$ независимых первых интегралов вида (35). Так как в системе (38) функции $f_i$ не зависят от $t$, то часто бывают нужны первые интегралы, не содержащие $t$.

**Теорема 7.** *В окрестности любой неособой точки система* (38) *имеет $n - 1$ независимых первых интегралов, не содержащих $t$, то есть имеющих вид $v_i(x_i, \ldots, x_n)$.*

*Доказательство.* Пусть точка $B(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ — неособая, то есть в ней хотя бы одно $f_i \neq 0$, например, $f_n(x_{10}, \ldots, x_{n0}) \neq 0$. Тогда $f_n \neq 0$ и в некоторой окрестности $U$ этой точки. Деля на $n$-ое уравнение остальные уравнения системы (38), получаем в $U$

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x_i, \ldots, x_n)}{f_n(x_i, \ldots, x_n)}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{39}$$

По теореме 4 эта система в некоторой окрестности точки $B$ имеет $n-1$ независимых первых интегралов $v_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Они постоянны вдоль решений системы (39), то есть вдоль траекторий системы (38). Значит, они являются первыми интегралами системы (38). Независимость первых интегралов $v_i$ системы (39) означает, что ранг матрицы $(\partial v_i/\partial x_j)_{i,j=1,\ldots,n-1}$ равен $n-1$. Отсюда следует, что и для системы (38) эти первые интегралы независимы. ■

**Замечание.** В теореме 7 нельзя отбросить условие «в окрестности неособой точки». Например, при $n = 2$ в окрестности особой точки типа узла или фокуса не существует ни одного первого интеграла вида $v(x_1, x_2)$. В самом деле, у такой точки $P$ есть окрестность $W \subset \mathbb{R}^2$, через каждую точку которой проходит траектория, стремящаяся к $P$ при $t \to \infty$ (или при $t \to -\infty$). Предположим, что в некоторой окрестности $U \subset W$ существует первый интеграл $v(x_1, x_2)$. Тогда $v(x_1, x_2) = c = \text{const}$ на траектории, стремящейся к точке $P$. По непрерывности, $v(P) = c$. Значит, на всех траекториях, стремящихся к $P$, имеем $v(x_1, x_2) = c = v(P)$, то есть $v \equiv c$ в окрестности точки $P$. Тогда $\partial v/\partial x_j \equiv 0$ $(j = 1, 2)$, ранг матрицы $(\partial v/\partial x_1, \partial v/\partial x_2) = \text{rang}(0, 0) = 0 < 1$, и первый интеграл $v = c$ не является независимым.

**4.** **Симметричная форма системы** дифференциальных уравнений — это такая запись системы, в которой ни одно из переменных не взято за независимое переменное, поэтому в уравнения входят не производные, а дифференциалы. Например,

$$\frac{dx_0}{f_0(x_0, x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_1}{f_1(x_0, x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_0, x_1, \dots, x_n)} \tag{40}$$

— система в симметричной форме. Если обозначить общую величину всех дробей через $dt$, то система (40) приведется к автономной системе

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

В области, где какая-либо из функций $f_i$ не равна нулю, система (40) равносильна системе $dx_j/dx_i = f_j/f_i$, $j = 0,1, \dots, n$; $j \neq i$ ($i$ фиксировано, $f_i \neq 0$).

Обратно, систему (31) нормального вида можно записать в симметричной форме (40), взяв $x_0 = t$, $f_0 \equiv 1$.

Симметричная запись системы часто облегчает отыскание первых интегралов.

**5.** **О решении нелинейных систем.** Отыскать решение с помощью конечного числа действий удается лишь для некоторых несложных систем. При исключении неизвестных непосредственно из данной системы получается уравнение с производными более высокого порядка, решать которое бывает не легче, чем данную систему.

Чаще удается решить систему путем отыскания интегрируемых комбинаций. *Интегрируемая комбинация* — это или комбинация уравнений системы, содержащая только две переменные величины и представляющая собой дифференциальное уравнение, которое можно решить, или такая комбинация, обе части которой являются полными дифференциалами. Из каждой интегрируемой комбинации получается первый интеграл данной системы. При исключении неизвестных из данной системы с помощью первых интегралов порядок производных не повышается.

**Пример 5.** Найти решения системы

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z}. \tag{41}$$

*Решение примера.* Две первые дроби дают интегрируемую комбинацию $dx/x = dy/y$. Отсюда $y = c_1 x$. Далее можно или исключить $y$ из системы, подставив $y = c_1 x$, или искать вторую интегрируемую комбинацию. Первый путь дает

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{x^2 + c_1^2 x^2 + z}, \qquad \frac{dz}{dx} = x(1 + c_1^2) + \frac{z}{x}.$$

Это уравнение — линейное относительно $z$. Решая его, получаем $z = c_2 x + (1 + c_1^2)x^2$. Это равенство вместе с $y = c_1 x$ дает решения системы, не лежащие в плоскости $x = 0$. Если же $x = 0$, то из равенства двух последних дробей в (41) имеем

$$\frac{dz}{dy} = y + \frac{z}{y}, \qquad z = c_2 y + y^2 \quad (x = 0). \tag{42}$$

Если же искать вторую интегрируемую комбинацию, то удобно использовать известное свойство равных дробей:

$$\text{если} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{то} \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}$$

(величины $a_i$ и $b_i$ можно умножить на одно и то же $k_i$).

В данном примере можно написать, стараясь получить полный дифференциал,

$$\frac{dx}{x} = \frac{2x\,dx}{2x^2} = \frac{2y\,dy}{2y^2} = \frac{dz}{z + x^2 + y^2} = \frac{dz - 2x\,dx - 2y\,dy}{z - x^2 - y^2}.$$

Последняя дробь есть полный дифференциал. Она равна первой дроби $dx/x$. Это — интегрируемая комбинация. Из нее получаем еще один первый интеграл

$$\frac{z - x^2 - y^2}{x} = c_2. \tag{43}$$

Этот первый интеграл и ранее полученный $y/x = c_1$ независимы, так как в (43) входит $z$, а в ранее полученный — не входит. Формулы (43) и $y/x = c_1$ дают решение системы (41) при $x \neq 0$. При $x = 0$ имеем еще решение (42). ◄

*Задачи для упражнений:*
[12], § 19, № 1146–1160.

## § 26. Уравнения с частными производными первого порядка

Такие уравнения рассматриваются в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений потому, что их решение сводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения с частными производными более высокого порядка рассматриваются в отдельном курсе.

**1.** Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{44}$$

где $z(x_1, \ldots, x_n)$ — искомая функция, а $a_1, \ldots, a_n$ — известные функции от $x_1, \ldots, x_n$. Считаем, что $a_i \in C^1$ $(i = 1, \ldots, n)$, $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \neq 0$.

**Теорема 8.** *Функция $z \in C^1$ является решением уравнения (44) тогда и только тогда, когда она является не содержащим $t$ первым интегралом системы (здесь $x_i' = dx_i/dt$)*

$$x_1' = a_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad x_n' = a_n(x_1, \ldots, x_n). \tag{45}$$

*Доказательство.* Любой первый интеграл $v$ системы (45) удовлетворяет уравнению (32), где теперь $f_i = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. По условию $\partial v/\partial t \equiv 0$, поэтому (32) совпадает с (44).

Обратно, если функция $z \in C^1$ удовлетворяет уравнению (44), то полная производная от $z$ в силу системы (45) равна левой части (44), значит, равна нулю. Тогда функция $z$ постоянна вдоль решений системы (45) и является ее первым интегралом. ■

**Лемма 3.** *Пусть $a_i(x_1, \ldots, x_n) \in C^1$, $a_1 \neq 0$, и первые интегралы $v_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ системы (45) независимы в области $D$. Тогда эта система сводится к системе*

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{a_i}{a_1} \quad (i = 2, \ldots, n), \tag{46}$$

*и те же $v_i$ — независимые первые интегралы и для нее.*

*Доказательство.* Функции $v_i$ постоянны вдоль траекторий системы (45), то есть вдоль решений системы (46). Поэтому $v_i$ — первые интегралы для (46). Первые интегралы удовлетворяют уравнению (32), то есть в нашем случае

$$a_1\frac{\partial v_i}{\partial x_1}+\ldots+a_n\frac{\partial v_i}{\partial x_n}=0. \tag{47}$$

Первые интегралы системы (46) независимы, если ранг матрицы $A=(\partial v_i/\partial x_j)_{\substack{i=1,\ldots,n-1\\ j=2,\ldots,n}}$, равен $n-1$, а для системы (45) независимы, если ранг матрицы $A_1$ равен $n-1$. Матрица $A_1$ получается добавлением к $A$ столбца $\partial v_i/\partial x_1$ ($i=1,\ldots,n-1$). Так как $a_1\neq 0$, то в силу (47) этот столбец есть линейная комбинация остальных столбцов матрицы $A$. Поэтому ранги матриц $A$ и $A_1$ совпадают (ранг матрицы — число линейно независимых столбцов), и из независимости $v_1,\ldots,v_n$ для системы (45) следует их независимость и для системы (46). ■

**Теорема 9.** *Если $v_i(x_1,\ldots,x_n)$ $(i=1,\ldots,n-1)$ — независимые первые интегралы системы* (45) *в области $D$, то в окрестности любой точки $M\in D$ общее решение уравнения* (44) *имеет вид*

$$z=F\big(v_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,v_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)\big), \tag{48}$$

*где $F$ — произвольная функция класса $C^1$. То есть в этой окрестности формула* (48) *содержит все решения уравнения* (44) *и только их.*

*Доказательство.* При любой $F\in C^1$ функция (48) постоянна вдоль решения системы (45), поэтому является ее первым интегралом. По теореме 8 функция $z$ — решение уравнения (44).

Обратно, если функция $z$ — решение уравнения (44) и $a_1(M)\neq 0$, то по теореме 8 она является первым интегралом систем (45) и (46). Тогда по теореме 6, примененной к системе (46), найдется такая функция $F \in C^1$, что в окрестности точки $M$ имеем равенство (48), где $v_1, \ldots, v_{n-1}$ — независимые первые интегралы системы (46) или (45), это все равно по лемме 3. Если же $a_1(M) = 0$, $a_k(M) \neq 0$, то изменим нумерацию так, чтобы $a_1(M) \neq 0$. ■

**2.** *Квазилинейным* называется уравнение

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b, \tag{49}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b$ — функции класса $C^1$ от переменных $x_1, \ldots, x_n, z$ в области $D$; считаем, что $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \neq 0$ в $D$.

Уравнение (49) связано с автономной системой уравнений

$$\begin{aligned} x_i' &= a_i(x_1, \ldots, x_n, z) \quad (i = 1, \ldots, n), \\ z' &= b(x_1, \ldots, x_n, z). \end{aligned} \tag{50}$$

Здесь $x_i' = dx_i/dt$ и т. п. Траектории системы (50) в пространстве $x_1, \ldots, x_n, z$ — это линии, называемые *характеристиками* уравнения (49), а решение уравнения (49) изображается $n$-мерной поверхностью $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. Считаем, что $f \in C^1$ в области $D_0 \subset \mathbb{R}^n$, а точки $(x_1, \ldots, x_n, z) \subset D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

**Теорема 10.** *Поверхность $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ является решением уравнения (49) тогда и только тогда, когда она целиком состоит из характеристик. То есть через каждую точку поверхности проходит характеристика, целиком лежащая на поверхности.*

*Доказательство.* Если линия — характеристика, лежащая на поверхности, то в каждой точке линии вектор $(f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}, -1)$ нормали к поверхности ортогонален касательному к этой линии вектору $(a_1, \ldots, a_n, b)$. Их скалярное произведение равно нулю:

$$a_1 f'_{x_1} + \ldots + a_n f'_{x_n} - b \cdot 1 = 0. \qquad (51)$$

Если через каждую точку поверхности проходит такая линия, то это равенство выполнено на всей поверхности, то есть поверхность $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет уравнению (49).

Обратно, если поверхность $P(z = f(x_1, \ldots, x_n))$ удовлетворяет уравнению (49), то в каждой точке поверхности выполнено (51), то есть вектор $(a_1, \ldots, a_n, b)$ ортогонален нормали к поверхности, значит, касается поверхности. Таким образом, на поверхности $P$ определено поле касательных векторов. Покажем, что через произвольную точку $M(x_{10}, \ldots, x_{n0}, z_0) \in P$ проходит лежащая на $P$ траектория этого векторного поля. В области $G$ — проекции поверхности $P$ на плоскость $x_1, \ldots, x_n$ — рассмотрим систему

$$x'_i = a_i(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (52)$$

Через точку $(x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in G$ проходит решение $x_1 = x_1(t)$, $\ldots, x_n = x_n(t)$ этой системы. Линия $L$

$$x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t), \quad z = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

лежит на поверхности $P(z = f(x_1, \ldots, x_n))$ и проходит через точку $M$. Покажем, что $L$ — характеристика. Первым $n$ уравнениям системы (50) она удовлетворяет в силу (52) и равенства $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ на $P$. Далее,

$$z'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x'_i = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Поверхность $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет уравнению (49), поэтому последняя сумма равна $b(x_1, \ldots, x_n, z)$. Итак, линия $L$ удовлетворяет и последнему уравнению системы (50), то есть является характеристикой. ■

**Теорема 11.** *Если $v(x_1, \dots, x_n, z)$ — первый интеграл системы (50) в области $D$, и в точке $M \in D$ имеем $v = c$, $\partial v/\partial z \neq 0$, то равенство $v(x_1, \dots, x_n, z) = c$ в окрестности точки $M$ определяет неявную функцию $z(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющую уравнению* (49).

*Доказательство.* По свойству первого интеграла $\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{(50)} = 0$, то есть

$$a_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial v}{\partial x_n} + b \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \tag{53}$$

Для неявной функции $z(x_1, \dots, x_n)$ в окрестности точки $M$

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial v}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial v}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поэтому, деля равенство (53) на $-\partial v/\partial z$, получаем, что эта неявная функция удовлетворяет уравнению (49). ■

**Теорема 12 (об общем решении квазилинейного уравнения).** *Пусть $v_i(x_1, \dots, x_n, z)$, $i = 1, \dots, n$, — какие-либо независимые первые интегралы системы* (50). *Функция $z(x_1, \dots, x_n)$ является решением уравнения* (49) *в окрестности точки $M$ своего графика, тогда и только тогда она удовлетворяет равенству*

$$F\big(v_1(x_1, \dots, x_n, z), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n, z)\big) = 0 \tag{54}$$

*при какой-либо функции $F \in C^1$ такой, что $F = 0$, $F'_z \neq 0$ в точке $M$.*

<u>Доказательство</u>. Левая часть в (54) при любой функции $F \in C^1$ постоянна вдоль траекторий системы (50), значит, является ее первым интегралом. При $F'_z(M) \neq 0$ равенство (54) определяет вблизи точки $M$ неявную функцию $z(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющую по теореме 11 уравнению (49).

Покажем, что формула (54) содержит все решения уравнения (49). Пусть, например, $a_1(M) \neq 0$. Тогда вблизи точки $M$ характеристики уравнения (49) удовлетворяют системе

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{a_i}{a_1} \quad (i = 2, \dots, n), \qquad \frac{dz}{dx_1} = \frac{b}{a_1}. \tag{55}$$

Пусть $z = f(x_1, \dots, x_n) \in C^1$ — любое решение уравнения (49), $M(x_{10}, \dots, x_{n0}, z_0)$ — точка на его графике. Решение системы (55) с начальными условиями

$$\begin{gathered} x_i(x_{10}) = c_i \quad (i = 2, \dots, n), \\ z(x_{10}) = f(x_{10}, c_2, \dots, c_n) + c_{n+1} \end{gathered} \tag{56}$$

обозначим

$$\begin{gathered} x_i = \varphi_i(x_1; c_2, \dots, c_{n+1}) \quad (i = 2, \dots, n), \\ z = \varphi_{n+1}(x_1, c_2, \dots, c_{n+1}). \end{gathered} \tag{57}$$

При $x_1 = x_{10}$, $c_i = x_{i0}$ $(i = 2, \dots, n)$, $c_{n+1} = 0$ в (57) получаем точку $M$. В этой точке якобиан $\det(\partial\varphi_i/\partial c_j)_{i,j=2,\dots,n} = 1$ в силу (56). В некоторой окрестности точки $M$ систему (57) по теореме о неявных функциях можно разрешить относительно $c_2, \dots, c_{n+1}$:

$$c_i = w_i(x_1, \dots, x_n, z), \quad i = 2, \dots, n+1. \tag{58}$$

Как в доказательстве теоремы 4 показывается, что функции $w_i$ — первые интегралы системы (55). Поверхность $w_{n+1}(x_1, \dots, x_n, z) = 0$ совпадает с данной поверхностью $z = f(x_1, \dots, x_n)$, так как они обе состоят из характеристик — решений системы (55) с начальными условиями (56), где $c_{n+1} = 0$. По теореме 6 найдется такая функция $F \in C^1$, что $w_{n+1} = F(v_1, \dots, v_n)$. Здесь $v_1, \dots, v_n$ —

независимые первые интегралы системы (55) или (50), это все равно по лемме 3 (лемму применять можно, ибо системы (50) и (55) сводятся к (45) и (46), если положить $z = x_{n+1}$, $b = a_{n+1}$).

Покажем, что $\partial w_{n+1}/\partial z \neq 0$ в точке $M$. В этой точке $x_i = x_{i0}$ ($i = 1, \dots, n$) и в силу (58) и (56)

$$w_{n+1}(x_{10}, \dots, x_{n0}, z) = c_{n+1} = z - f(x_{10}, \dots, x_{n0}).$$

Следовательно, $\partial w_{n+1}/\partial z = 1 \neq 0$ в точке $M$. ■

**Замечание.** В случае, когда $z$ входит только в один из первых интегралов, например, только в $v_n$, вместо (54) можно написать

$$v_n(x_1, \dots, x_n, z) = \\ = H\big(v_1(x_1, \dots, x_n), \dots, v_{n-1}(x_1, \dots, x_n)\big), \qquad (59)$$

где $H \in C^1$ — произвольная функция. Разрешая, если возможно, это уравнение относительно $z$, получим общее решение уравнения (49) в явном виде.

*Задачи для упражнений:*
[12], § 20, № 1167–1188, 1211, 1213, 1215, 1216.

**3.** **Задача Коши** для квазилинейного уравнения. Чтобы упростить формулировки, ограничимся случаем, когда искомая функция $z$ зависит только от двух переменных $x$ и $y$.

Требуется найти поверхность $z = f(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$a_1(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z)$$

и проходящую через линию $L$

$$x = \psi_1(s), \quad y = \psi_2(s), \quad z = \psi_3(s).$$

Предполагаем, что данные функции $a_1$, $a_2$, $b$, $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ принадлежат $C^1$.

Пользуясь геометрическим смыслом характеристик, можно предложить такой способ построения решения задачи Коши. Через каждую точку линии $L$ надо провести характеристику. Если из этих характеристик составится гладкая поверхность $z = f(x, y) \in C^1$, то она и будет решением задачи Коши (рис. 31).

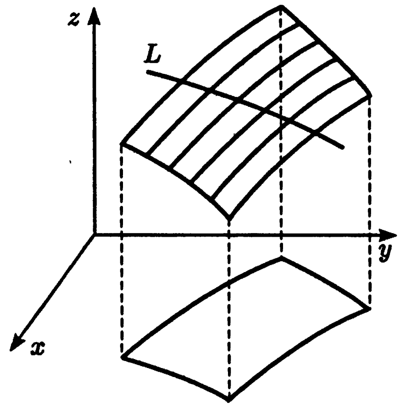



**Рис. 31**

**Теорема 13.** *Пусть на дуге* $L_1$ $(s_1 \leqslant s \leqslant s_2)$ *линии* $L$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \psi_1' \\ a_2 & \psi_2' \end{vmatrix} \neq 0. \tag{60}$$

*Тогда в некоторой окрестности каждой точки дуги* $L_1$ *существует единственное решение задачи Коши.*

*Доказательство.* Так как $a_1, a_2, b \in C^1$ и $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, то через каждую точку $(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s))$ дуги $L_1$ проходит единственная характеристика

$$x = \varphi_1(t, s), \quad y = \varphi_2(t, s), \quad z = \varphi_3(t, s). \tag{61}$$

Функции (61) удовлетворяют системе уравнений вида (50) (где теперь $n = 2$, $x_2 = y$) и начальным условиям

$$x_t' = a_1, \quad y_t' = a_2, \quad z_t' = b; \tag{62}$$

$$\varphi_1(0,s)=\psi_1(s), \quad \varphi_2(0,s)=\psi_2(s), \quad \varphi_3(0,s)=\psi_3(s). \qquad (63)$$

Поверхность, состоящая из таких характеристик, выражается формулами (61), где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$. Таким образом, (61) есть параметрическое задание искомой поверхности.

Покажем, что в окрестности любой точки дуги $L_1$ эту поверхность можно записать в виде $z = f(x,y)$. Для этого надо разрешить первые два уравнения в (61) относительно $t, s$ и подставить в третье. Функции $\varphi_i \in C^1$ по теореме 1 §23. Уравнения (61) удовлетворяются в любой точке на дуге $L_1$ в силу (62). В этой точке согласно (62) $x'_t = a_1$, $y'_t = a_2$, а в силу (63) $(\varphi_1)'_s = \psi'_1$; $(\varphi_2)'_s = \psi'_2$, поэтому якобиан

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_t & (\varphi_1)'_s \\ (\varphi_2)'_t & (\varphi_2)'_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \psi'_1 \\ a_2 & \psi'_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

по условию (60). Значит, в окрестности этой точки по теореме о неявных функциях первые два уравнения в (61) можно разрешить относительно $t, s$ и получить функции $t = t(x,y) \in C^1$, $s = s(x,y) \in C^1$. Подставляя их в третье уравнение (61), получаем искомое решение в виде $z = \varphi_3\big(t(x,y), s(x,y)\big) \in C^1$. Существование решения доказано.

Его единственность следует из того, что любое решение есть поверхность, состоящая из характеристик, значит, имеющая вид (61). Вблизи любой точки дуги $L_1$ функции $t(x,y)$, $s(x,y)$, см. выше, определяются однозначно, поэтому решение $z$ — тоже. ■

**Геометрический смысл условия (60).** Вектор $(a_1, a_2, b)$ касается характеристики, а вектор $(\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3)$ — линии $L$. Условие (60) означает, что проекции $(a_1, a_2)$ и $(\psi'_1, \psi'_2)$ этих векторов на плоскость $x, y$ не коллинеарны. Следовательно, проекции линии $L$ и пересекающих ее характеристик не должны касаться друг друга.

**Пример 6.** Найти общее решение уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2, \tag{64}$$

а также поверхность $z = \varphi(x, y)$, удовлетворяющую этому уравнению и проходящую через линию

$$z + x^2 = 2x, \quad x + y = 1. \tag{65}$$

*Решение примера.* Пишем в симметричной форме систему уравнений, определяющую характеристики

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2 - y^2}.$$

Находим независимые первые интегралы (подобно примеру 5)

$$\frac{y}{x} = c_1, \quad \frac{z + x^2 + y^2}{x} = c_2. \tag{66}$$

Согласно (59), общее решение уравнения (64) можно написать в виде

$$\frac{z + x^2 + y^2}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = -x^2 - y^2 + xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

где $f \in C^1$ — произвольная функция.

Чтобы найти поверхность, проходящую через линию (65), надо сначала из уравнений (65) и (66) исключить $x, y, z$ и получить равенство, которое может содержать только $c_1$ и $c_2$. Для этого можно, например, из уравнений (65) выразить $y$ и $z$ через $x$ и подставить эти выражения в (66)

$$y = 1 - x, \quad z = 2x - x^2; \quad \frac{1 - x}{x} = c_1, \quad \frac{1 + x^2}{x} = c_2.$$

Исключая $x$ из последних двух равенств, получаем

$$c_2 = c_1 + 1 + \frac{1}{c_1 + 1}.$$

Подставляя сюда вместо $c_1$, $c_2$ первые интегралы (66), после упрощений получаем искомое решение:

$$z = -x^2 - y^2 + x + y + \frac{x^2}{x+y} \quad (x + y > 0). \qquad \blacktriangleleft$$

*Задачи для упражнений:*
[12], § 20, № 1189–1210, 1212, 1214.

**4.** О нелинейных уравнениях с частными производными первого порядка и методах их решения см. [6], § 65; [9], гл. 9; [18], § 8.

**Ударные волны.** В задаче Коши для квазилинейного уравнения с частными производными бывает, что решение класса $C^1$ существует только в некоторой окрестности линии $L$, а в бóльшей области может не существовать.

**Пример 7.** Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial z}{\partial t} + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad z(0, x) = -\operatorname{arctg} x. \tag{67}$$

*Решение примера.* Характеристики удовлетворяют системе уравнений (50), то есть в данном случае $t'_\tau = 1$, $x'_\tau = z$, $z'_\tau = 0$. Поэтому $z = c_1$, $dx/dt = z = c_1$, $x = c_1 t + c_2$. Значит, характеристики — прямые линии. Вдоль каждой из них $z$ постоянно — то же, что в начальной точке $x = c_2$, $t = 0$ характеристики. В этой точке $z = -\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg} c_2$, $|z| < \pi/2$. Поэтому на всей характеристике имеем

$$x = tz - \operatorname{tg} z, \quad |z| < \frac{\pi}{2}. \tag{68}$$

При любом постоянном $t \leqslant 1$ функция $\varphi(z) = tz - \operatorname{tg} z$ монотонно убывает с ростом $z$, поэтому уравнение (68) определяет непрерывную функцию $z(t, x)$ $(-\infty < x < \infty,\ t \leqslant 1)$ — решение задачи (67). ◄

При любом постоянном $t > 1$ функция $x(z) = tz - \operatorname{tg} z$ на интервале $|z| < \pi/2$ сначала убывает, затем возрастает, далее опять убывает. В точке $z_1 = -\arccos(t^{-1/2})$ она имеет локальный минимум, равный $x(z_1) = -\psi(t)$, где $\psi(t) = t \arccos(t^{-1/2}) - \sqrt{t-1}$, а в точке $z_2 = -z_1$ — локальный максимум, равный $x(z_2) = \psi(t) > 0$. Следовательно, при любом $t = \mathrm{const} > 1$ не существует однозначной непрерывной функции $z(t, x)$ $(-\infty < x < \infty)$, удовлетворяющей равенству (68). Это значит, что решение задачи (67) нельзя непрерывно продолжить на область $t > 1$, $-\psi(t) < x < \psi(t)$.

В некоторых физических задачах, например, в задачах о движении газов с большими скоростями, тоже встречаются подобные явления (несуществование непрерывного решения). В таких случаях возникают разрывные решения — ударные волны, существование которых подтверждается опытами и наблюдениями. Для расчета движения ударных волн используются не только дифференциальные уравнения, но и физические соображения — закон сохранения массы и т. п.

Подробнее о разрывных решениях см. [6], § 64; [10], гл. 8.

# Литература

## Учебники и учебные пособия


1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 240 с.
2. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991. 303 с.
3. *Еругин Н. П. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев: Вища школа, 1974. 472 с.
4. *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1986. 272 с.
5. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высшая школа, 1978. 287 с.; 5-е изд. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. М.: КомКнига/URSS, 2005. 256 с.
6. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984. 296 с.; 6-е изд. М: УРСС, 2003. 272 с.
7. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
8. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. Киев: Вища школа, 1984. 408 с.
9. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959, 468 с.; 9-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2006. 472 с.
10. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

11. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
12. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2000. 175 с.
13. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.; 6-е изд. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения. М: КомКнига/URSS, 2006. 312 с.

## Другая литература

14. *Андреев А. Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений. Минск: Выш. школа, 1979. 136 с.
15. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
16. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
17. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 487 с.
18. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
19. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Том 1. М.: ВИНИТИ, 1985. с. 7–149.
20. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1971. 223 с.
21. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
22. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.
23. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2003. 216 с.
24. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

25. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
26. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
27. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
28. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
29. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
30. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
31. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи матем. наук. 1955. Т. 10. № 3. С. 147–152.
32. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
33. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.; 2-е изд. М.: УРСС, 2004.
34. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966; 2-е изд. М.: УРСС, 2004.
35. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. Под ред. Воронова А. А., Матросова В. М. М.: Наука, 1987. 312 с.
36. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.; 3-е изд. М.: УРСС, 2004.
37. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит. Т. 1. 1953; Т. 2. 1954.
38. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
39. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

# Предметный указатель

## Алексей Федорович ФИЛИППОВ

Доктор физико-математических наук (1976). Профессор (1980).

Участник Великой Отечественной войны. Награжден медалью «За победу над Германией в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.».

Окончил механико-математический факультет МГУ (1950). С 1978 г. является профессором кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета.

Награжден также медалями «Ветеран труда», «За доблестный труд. В ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина» и юбилейными.

Лауреат премии им. М. В. Ломоносова за педагогическую деятельность (МГУ, 1993). В 1996 г. удостоен звания «Заслуженный профессор МГУ».

*Область научных интересов:*

дифференциальные уравнения, теория дифракции, дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, дифференциальные включения.

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (495) 135–42–16
URSS Тел./факс: 7 (495) 135–42–46

4567 ID 47764

9785484007868

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу **URSS@URSS.ru**. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине **http://URSS.ru**